

Homework 1.4

104

5. A^{-1-1}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 5 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1-1} = \frac{1}{6 - 5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = A$$

b. $[B^T]^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8 + 12} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{20} & -\frac{4}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{2}{20} \end{bmatrix}$$

$$[B^{-1}]^T = \left(\frac{1}{8 + 12} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{20} & \frac{3}{20} \\ -\frac{4}{20} & \frac{2}{20} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{20} & -\frac{4}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{2}{20} \end{bmatrix}$$

6. $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 18 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$6b. (ABC)^{-1} = \begin{bmatrix} 70 & 45 \\ 122 & 79 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 79/40 & -9/8 \\ -61/20 & 7/4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}C^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 3/20 \\ -1/5 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 79/40 & -9/8 \\ -61/20 & 7/4 \end{bmatrix}$$

$$7. A = A^{-1-1} = (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

$$b. ((7A)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$7A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2/7 & 1 \\ 1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

$$c. \left((5A^T)^{-1} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$5A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -2/5 & -1/5 \\ 1 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2/5 & 1 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$d. \left((I + 2A)^{-1} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$I + 2A - I = \begin{bmatrix} -5/13 & 2/13 \\ 4/13 & 4/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} -18/13 & 2/13 \\ 4/13 & -12/13 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -9/13 & 1/13 \\ 2/13 & -6/13 \end{bmatrix}$$

$$8a. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-3} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^3$$

$$= \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ -7/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

I note the latter because this is a rotation matrix

$$13. \text{ Its inverse is } \begin{bmatrix} \frac{1}{q_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{q_{22}} & \\ 0 & & \dots \\ & & & \frac{1}{q_{nn}} \end{bmatrix}$$

17.

$$AB = 0$$

A^{-1} exists

$$A^{-1}AB = A^{-1}0$$

$$IB = 0$$

$$B = 0$$