

$$\textcircled{7} \quad \det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

add ① to ② add $-(a+b+c)$ ③ to ②

$$\textcircled{9} \quad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & -b_1 & c_1 \\ 2a_2 & -b_2 & c_2 \\ 2a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \checkmark$$

add column ② to column ① add $(-\frac{1}{2})$ column ① to column ② mult column ① by $\frac{1}{2}$
mult column ② by -1

$$\textcircled{14} \quad \text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -5x_1 - 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 5 & \lambda+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{15} \quad \text{a) (i) } (\lambda-1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$$\text{(ii) } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$\text{(iii) for } \lambda_1: \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{so } x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\text{for } \lambda_2: \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -2x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow -x_1 = x_2 \quad \text{so } x = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\text{b) (i) } (\lambda-2)(\lambda-3) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda-6)(\lambda+1) = 0$$

$$\text{(ii) } \lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$$

$$\text{(iii) for } \lambda_1: \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 4x_1 - 3x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3}{4}x_2 \quad \text{so } x = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\text{for } \lambda_2: \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -3x_1 - 3x_2 = 0 \rightarrow -x_1 = x_2 \quad \text{so } x = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$