

outils et modèles mathématiques

TOME II

calcul vectoriel, géométrie analytique

P.Florent G.Lauton M.Lauton

calcul vectoriel, géométrie analytique

La publication de cet ouvrage a été encouragée par une subvention accordée au titre de la coopération franco-québécoise.

DES MÊMES AUTEURS

OUTILS ET MODÈLES MATHÉMATIQUES :

Tome I : Suites et fonctions numériques.

Tome III : Algèbre linéaire.

Tome IV : Équations et systèmes différentiels.

En préparation :

Équations aux dérivées partielles, tome 5.

Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes aléatoires, tome 6.

outils et modèles mathématiques • TOME II

A L'USAGE DES ÉTUDIANTS DES PREMIERS CYCLES TECHNOLOGIQUES.

ET DES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

Pierre FLORENT

*Docteur ès Sciences
Professeur à l'Université de Valen-
ciennes*

Michelle LAUTON

*Assistante à l'Université de Valen-
ciennes.*

Gérard LAUTON

*Ingénieur de l'Ecole centrale de Lyon.
Maître-assistant à l'Université de
Valenciennes.*

calcul vectoriel, géométrie analytique

1981

 **LIBRAIRIE VUIBERT**
63, boulevard Saint-Germain
75005 PARIS France

 **LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**
C.P. 250, Succursale N, Montréal, H2X 3M4 Canada

VENTES EN FRANCE
VUIBERT
63, bd St-Germain, 75005 PARIS

VENTES AU CANADA
PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC,
CP 250 - Station N, MONTRÉAL H2X 3M4.

DIFFUSEURS VUIBERT

BELGIQUE : ÉDITIONS ET DIFFUSION,
16, rue de Chambéry, 1040 BRUXELLES.

MAROC : SMER-DIFFUSION,
3, rue Ghazza, RABAT.

SUISSE : DELACHAUX et NIESTLÉ (*Service diffusion*)
39, route d'Oron, 1002 LAUSANNE.

ISBN : 2-7117-2035-7

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© Librairie Vuibert, 1981.

ISBN : 0-7770-0188-8

*Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés © 1981.
Les Presses de l'Université du Québec*

Préface

De tous les outils que présente cette collection d'ouvrages pédagogiques, il faut réserver à la géométrie et au calcul vectoriel une place prépondérante. Parce que la géométrie décrit l'espace et son contenu et permet seule de passer de la description physique des choses et des phénomènes à leur expression en langage mathématique et, de là, à la prévision d'autres états et événements physiques. Parce que, à l'inverse, la géométrie analytique donne aussi forme aux constructions mathématiques et admet une visualisation qui facilite grandement la compréhension des relations. Parce que, enfin, le calcul vectoriel, pour sa part, habite directement l'espace et y décrit avec simplicité et élégance des modèles qui seraient autrement d'expression fort complexe; il constitue ainsi un atout efficace et puissant de la technologie contemporaine.

L'un et l'autre demandent à l'étudiant, comme au praticien d'ailleurs, un exercice certain de gymnastique intellectuelle qui, à l'instar de celle des athlètes, exige un entraînement qui n'est pas sans efforts mais débouche par contre aussi sur une puissance d'action et de performance, mentale celle-là, qui efface vite les peines premières.

Il s'agit au surplus de principes et de concepts qui, nés avec les mathématiques, n'en conservent pas moins aujourd'hui toute leur actualité et tout leur potentiel. Le calcul électronique et les micro-processeurs, largement disponibles, donnent à l'homme des possibilités techniques dont il ne soupçonne pas encore tout le pouvoir; la commande numérique des machines-outils, la conception et le dessin sur ordinateur et toute la robotique aboutiront au cours des prochaines décennies à des réalisations extraordinaires. Et dans tous les cas, la géométrie et le calcul vectoriel seront les outils indispensables de l'ingénieur. Que l'on se rappelle, s'il est besoin de s'en convaincre, ces images abondamment diffusées de bras robotisés peignant les membrures d'une chaise de métal, ou encore allant, sur une chaîne de montage, exécuter une soudure à l'intérieur d'une carrosserie d'automobile. Gestes banals pour un humain mais dont la description géométrique et vectorielle devient fascinante. Et ce monde naissant de tâches commandées par ordinateur et exécutées par robot appartiendra à ceux qui maîtriseront ces outils et contrôleront ainsi les ordinateurs.

Les autres de ce volume étaient, de toute évidence, vivement conscients de leurs responsabilités de pédagogues et de formateurs des ingénieurs et techniciens de demain. Ils ont su organiser leur présentation avec logique et cohérence, dans un texte bien articulé, mais sans superflu, et accompagné d'illustrations d'une grande clarté qui non seulement font comprendre et voir les questions géométriques, mais constituent aussi un modèle de démarche dont s'inspirera l'étudiant dans ses propres problèmes de représentation graphique, surtout lorsqu'il faut traduire sur papier la perspective géométrique de l'espace.

C'est donc finalement à un enrichissement intellectuel, dans un domaine de grande importance contemporaine, que les autres invitent le lecteur.

Yves M. GIROUX *, * Professeur de génie civil et Vice-recteur adjoint à l'enseignement et à la recherche à l'Université Laval

Avant-propos

Décrire et contrôler la forme et le mouvement des objets qui nous entourent : tel est le but essentiel de l'enseignement de la géométrie dispensé aux futurs ingénieurs et techniciens. L'importance de cet enseignement apparaît sous un jour nouveau avec le développement des techniques récentes que sont la commande numérique des machines-outils et la conception assistée sur ordinateur, dont une première phase est le dessin assisté sur ordinateur. Ces techniques donnent un débouché opérationnel à l'étude des *courbes et surfaces paramétrées* et de leurs représentations graphiques point par point à partir des équations (écrans, tables traçantes, imprimantes, ...). Cependant rien ne serait plus néfaste que de cantonner cet enseignement dans l'aspect purement analytique. Le travail de conception suppose que l'on possède bien les trois aspects inséparables de toute étude géométrique : l'observation qualitative des figures, le calcul vectoriel, leur traduction en terme de cordonnées dans un repère (géométrie analytique). C'est sur ce pari que repose cet ouvrage qui s'insère volontairement « avant » l'*Algèbre linéaire* du Tome III : en effet, le caractère (bi-) linéaire de nombreuses équations et des changements de repère, élément attractif pour la commodité des calculs, ne doit pas être pour autant le leitmotiv de toute étude géométrique. De telles conceptions ont abouti à enlever toute substance « visuelle » à la géométrie et à réduire son étude à celle de l'algèbre linéaire en dimension trois. Nous avons voulu au contraire convaincre le lecteur de l'efficacité considérable du calcul vectoriel et de ses quatre opérations (+, -, $\cdot$, $\wedge$, définies géométriquement), qu'il s'agisse des transformations ponctuelles, des lieux géométriques, de la cinématique, des champs vectoriels, ... Le calcul matriciel vient en contrepoint pour traiter commodément certains problèmes linéaires issus du calcul vectoriel (vecteurs propres notamment).

Cette option conduit à faire entrer en scène les divers éléments de base (droites, plans, figures diverses, ...) à partir de leurs propriétés fondamentales accessibles à l'observation, et non à partir d'expressions analytiques. Ce n'est pas le choix de la facilité mais cette approche nous semble indispensable à la formation des ingénieurs et techniciens chargés de concevoir.

L'insistance sur le raisonnement géométrique ne nous conduit pas à faire de l'aspect déductif un but en soi, ni à ériger en dogmes les propriétés « premières » que nous avons parfois appelées « axiomes » faute d'un terme plus anodin.

Nous voulons surtout inciter le lecteur à l'*étude détaillée des figures* planes ou spatiales : propriétés métriques, intersections, image par une transformation, points remarquables, générations diverses, ... Cet approfondissement est nécessaire pour faire face aux diverses situations que le lecteur rencontrera dans son secteur d'activité. Nous voulons aussi réhabiliter le *calcul géométrique* et trigonométrique des éléments d'une figure. Les exercices que nous présentons sont moins conçus pour « faire de la géométrie » sur une figure arbitraire, que pour étudier des objets réels (mécanismes, équipements divers, ...) dont il faut savoir calculer les caractéristiques, notamment au niveau de la conception — distances, angles, surfaces et volumes — en s'appuyant sur une connaissance suffisante des figures qui entrent en jeu.

La technologie offre maints exemples de figures complexes qui appellent une notice de calcul géométrique; la réalisation du cahier des charges impose souvent la valeur de paramètres géométriques pour l'objet envisagé.

Outre la forme et le mouvement des objets, la géométrie (vectorielle et analytique) est essentielle pour décrire et contrôler nombre de *propriétés physiques* de l'espace : contraintes au sein d'un solide, champs de forces, champs électriques et magnétiques, trajets de rayons lumineux et d'ondes sonores, ... Elle fournit des représentations très suggestives des phénomènes variés (vecteurs tournants et construction de Fresnel, ...). Les exercices que nous présentons rendent compte de la multitude des situations où intervient, à des degrés divers, une étude géométrique.

De nombreux exercices appellent un *dessin*; il faut revenir sans cesse sur l'importance de cette activité de représentation des figures planes ou spatiales, qui conduit au tracé automatique des contours sur ordinateur et à l'usinage programmé d'une pièce de forme géométrique convenue. Il y a là une source passionnante d'activités pluri-disciplinaires où les outils et modèles mathématiques, chacun le sait, jouent un rôle de premier plan. Nous espérons que cet ouvrage y contribuera.

Descriptif sommaire

Dans le chapitre 0 nous rappelons les propriétés élémentaires des droites et plans sous l'angle du *parallélisme* et de l'*orthogonalité*, la géométrie de la droite orientée, les vecteurs du plan et de l'espace, le barycentre et la distance. Ce chapitre n'a pas pour objet d'exposer une axiomatique; il s'agit uniquement de présenter les principaux « personnages ».

Le chapitre 1 est consacré aux *angles et distances* d'une figure, aux produits scalaire et vectoriel et à leurs applications. C'est l'occasion de rappeler les relations métriques, les lignes et points remarquables du triangle. Un paragraphe est consacré aux fonctions vectorielles (position, vitesse et accélération notamment).

Le chapitre 2 comprend deux parties principales. La première partie traite des *transformations ponctuelles* du plan et de l'espace sous les aspects géométrique, vectoriel et analytique. La seconde partie traite des *changements de repère*, notamment des repères mobiles utilisés en Mécanique, avec l'exemple des angles d'Euler.

Le chapitre 3 a pour objet les *courbes planes*. L'étude des droites, cercles, coniques porte sur les constructions et lieux géométriques en rapport avec ces figures, les intersections, points et lignes remarquables, les représentations paramétriques.

Un paragraphe est consacré à l'étude des courbes paramétrées : étude locale et globale, enveloppes, courbure et développées.

Le chapitre 4 porte sur les nombres et fonctions complexes : opérations, racines de polynômes, applications géométriques et trigonométriques, construction de Fresnel graphique et numérique.

Le chapitre 5 traite des lignes et surfaces dans l'espace. Pour les lignes : droites, lignes paramétrées et leur trièdre de Serret-Frénet. Pour les surfaces : plans, sphères, quadriques, surface de révolution, surfaces cylindriques et coniques, surfaces développables et réglées, enveloppes de surfaces.

Le chapitre 6 est consacré aux champs scalaires et vectoriels : champs de forces et de moments (torseurs, ...), gradient d'un champ scalaire, divergence et rotationnel d'un champ vectoriel, intégrales curvilignes, intégrales de surfaces, angle solide.

Une brève *Annexe* présente le cadre de la géométrie descriptive : épures des droites et plans.

L'aspect *numérique* est présent dans les exercices de programmation du tracé automatique de droites, cercles, ..., ainsi que dans les exercices de calcul d'éléments remarquables des figures (triangles, ...) et dans le calcul des polynômes d'une variable complexe et la construction de Fresnel.

Table des matières

CHAPITRE 0. — Modèle mathématique de l'espace physique	1
0.0. Introduction	1
0.1. Points, droites et plans	2
0.2. Droites et plans perpendiculaires	12
0.3. Scalaires et vecteurs	18
0.4. Généralités sur les vecteurs	19
0.5. Géométrie sur un axe dirigé	21
0.6. Addition des vecteurs libres et multiplication des vecteurs par des scalaires	29
0.7. Barycentres	31
0.8. Projections parallèles sur un axe	33
0.9. Repères cartésiens	36
0.10. Étalons de longueur dans l'espace	37
0.11. Exercices supplémentaires	40
CHAPITRE 1. — Éléments de géométrie euclidienne	41
1.0. Introduction	41
1.1. Distance de points, droites et plans	41
1.2. Angles de droites et de vecteurs	44
1.3. Produit scalaire de deux vecteurs	51
1.4. Produit vectoriel	56
1.5. Produit mixte. Dépendance linéaire des vecteurs	62
1.6. Expression analytique des opérations vectorielles	65
1.7. Premières applications du produit scalaire et du produit vectoriel	68
1.8. Fonction vectorielle. Vitesse et accélération d'une particule	74
1.9. Exercices supplémentaires	80
CHAPITRE 2. — Transformations ponctuelles. Changements de coordonnées	83
2.0. Les transformations ponctuelles	83
2.1. Les transformations planes	84

2.2.	Transformations spatiales	91
2.3.	Choix d'un référentiel	97
2.4.	Changement de coordonnées cartésiennes dans le plan	105
2.5.	Changement de repère orthonormé dans l'espace	107
2.6.	Angles d'Euler	110
2.7.	Application des changements de repère à la mécanique	112
2.8.	Exercices supplémentaires	119
 CHAPITRE 3. — Les courbes planes		121
3.1.	La droite	121
3.2.	Équation de droites définies par certaines conditions	127
3.3.	Le cercle	130
3.4.	L'ellipse	141
3.5.	L'hyperbole	147
3.6.	La parabole	153
3.7.	Notions générales sur les coniques	156
3.8.	Les courbes paramétrées dans le plan	160
3.9.	Courbes en coordonnées polaires	174
3.10.	Enveloppes des courbes planes	178
3.11.	Courbure et développée des courbes planes	184
3.12.	Exercices supplémentaires	189
 CHAPITRE 4. — Nombres et fonctions complexes		191
4.0.	Introduction	191
4.1.	Définition des nombres complexes	192
4.2.	Opérations élémentaires sur les nombres complexes	194
4.3.	Multiplication des nombres complexes	195
4.4.	Quotient. Complexes conjugués	199
4.5.	Applications à la trigonométrie	200
4.6.	Racines complexes d'un polynôme	203
4.7.	Applications à la géométrie plane	206
4.8.	La construction de Fresnel	211
4.9.	Exercices supplémentaires	216
 CHAPITRE 5. — Lignes et surfaces		217
5.0.	Introduction	217
5.1.	Le plan et la ligne droite dans l'espace	217
5.2.	Les courbes dans l'espace	226
5.3.	Courbure et torsion des courbes de l'espace	230
5.4.	Les surfaces	234
5.5.	Les surfaces de révolution	242
5.6.	Sphères, cylindriques, cônes, quadriques	245

5.7. Surfaces enveloppes. Surfaces développables. Centre de courbure d'une courbe de l'espace	253
5.8. Surfaces réglées	258
5.9. Exercices supplémentaires	259
CHAPITRE 6. — Champs vectoriels. Intégrales d'un champ	261
6.1. Champs scalaires et champs vectoriels	261
6.2. Champ des moments de vecteurs glissants	265
6.3. Gradient d'un champ scalaire	268
6.4. Divergence d'un champ vectoriel	274
6.5. Rotationnel d'un champ vectoriel	278
6.6. Intégrales curvilignes	280
6.7. Champ de force dérivant d'un potentiel	288
6.8. Transformation des intégrales doubles en intégrales curvilignes	294
6.9. Intégrales de surface	299
6.10. Formule d'Ampère-Stokes	303
6.11. Formule d'Ostrogradsky	305
ANNEXE. — Géométrie descriptive	309
Épure d'un point	309
Épure d'une droite	310
Le plan	311
Angles droits	312
Solutions des exercices	314
Bibliographie	341
Index	342

Modèle mathématique de l'espace physique.

Il y a de nombreuses manières de présenter, à partir de faits d'observation courante, les figures simples de la géométrie et leurs propriétés.

Ces présentations se distinguent notamment par le choix des conventions de départ appelées souvent « axiomes », et par les types de raisonnements mis en jeu.

La méthode utilisée dans ce chapitre n'est qu'une façon parmi d'autres de parvenir à un modèle mathématique de l'espace physique.

Le lecteur est libre de préférer celle qui lui a été enseignée lors de son initiation à la géométrie. Dans ce cas il pourra lire ce chapitre à la lumière de ce qu'il connaît, revoir les propriétés importantes des figures (selon l'ordre qui lui convient) en utilisant ses propres méthodes, sans s'arrêter au détail des démonstrations ci-dessous.

0.0. INTRODUCTION.

Le « *modèle mathématique de l'espace physique* » nous permet de traduire en équations l'aspect géométrique du problème à étudier.

C'est la géométrie analytique qui étudie les propriétés des figures du plan ou de l'espace au moyen de calculs sur les coordonnées des points de ces figures.

On pourrait alors croire que ce calcul remplace l'observation détaillée. A première vue, ces figures peuvent être étudiées sans jamais être représentées, grâce aux méthodes perfectionnées de la géométrie analytique, en relation avec les calculs sur ordinateur. L'expérience montre cependant que ces méthodes se limitent à des recettes si l'on refuse l'observation et l'étude des propriétés des figures de l'espace. C'est cet aspect attractif qui devrait animer les esprits curieux chargés de concevoir.

C'est pour leur permettre de construire des figures claires et les aider à déterminer la position respective des éléments de ces figures, que nous reprenons aux paragraphes 0.1. et 0.2. l'étude des figures simples (points, droites, plans...). On met ainsi en valeur les notions fondamentales de *parallélisme* et d'*orthogonalité*. Le lecteur les reverra sans doute avec profit.

Remarque 0.0.0. — Beaucoup de propriétés des figures simples se traduisent par des *constructions et tracés*. Le lecteur pourra avec profit tracer lui-même les figures, construire des maquettes à l'aide de carton, plaques minces, ficelles,..., pour mieux comprendre les propriétés et les raisonnements qui s'y rapportent. Les équations des figures, présentées dans les chapitres suivants, permettront aussi des visualisations sur écran (consoles graphiques reliées à un ordinateur).

A partir du paragraphe 0.3. nous reprenons les concepts de base du **calcul vectoriel**. Les vecteurs sont en effet des instruments indispensables aux mathématiques de l'ingénieur, car de nombreuses quantités physiques comme par exemple les forces, les vitesses se représentent par des vecteurs.

Nous présentons les règles de calcul pour les vecteurs qui sont aussi simples que les règles concernant le calcul des nombres réels, mais nous insistons sur la liaison avec l'aspect géométrique et la théorie des projections. Ceci nous conduit à la représentation des figures du plan ou de l'espace par l'intermédiaire de fonctions vectorielles dont les composantes sont déterminées dans un référentiel préalablement choisi.

0.1. POINTS, DROITES ET PLANS

Le modèle mathématique de l'espace physique repose sur les trois notions de points, droites et plans.

Le point apparaît intuitivement comme l'intersection de deux lignes. Le point, pour le physicien ou le mécanicien, est aussi le *point matériel*, masse pesante supposée concentrée en un point géométrique, c'est-à-dire en un « lieu sans étendue ». Cependant cette notion est toute relative, la Terre est un point dans le système solaire, un électron est aussi un point à notre échelle.

La ligne droite est une ligne dont l'image nous est donnée par un fil parfaitement tendu entre deux points (fig. 0.1.1.) ou par un rayon lumineux dans un milieu homogène (fig. 0.1.2.). La droite sera aussi le plus court chemin d'un point à un autre (paragraphe 1.0.).

A la notion de droite, nous associerons celle de **plan**. Un plan est une surface telle que toute droite qui joint deux de ses points y est contenue tout entière. C'est sur ce principe que sont conçus certains instruments utilisés en métrologie pour vérifier la **planéité** des surfaces.

Nous allons formuler des **axiomes** fondés sur l'observation concrète de l'espace physique. Ces axiomes précisent les propriétés des sous-ensembles ou **figures** de l'espace que sont les droites et les plans.

Axiome 0.1.1.

Par deux points distincts de l'espace, il passe une droite, et une seule.

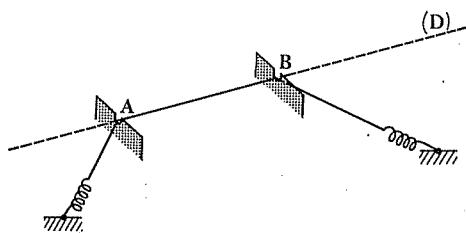


FIG. 0.1.1.

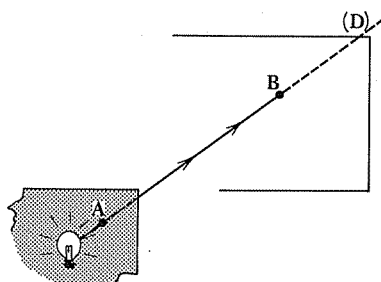


FIG. 0.1.2.

Il en résulte que si deux droites distinctes se rencontrent, leur intersection est un point unique. Ces droites sont dites *sécantes*. Des points situés sur une même droite sont dits *alignés*.

Axiome 0.1.2.

Le plan est une figure telle que toute droite joignant deux de ses points y est contenue tout entière.

Détermination d'un plan

Nous pouvons vérifier expérimentalement qu'il est possible de placer une carte de visite sur la pointe d'une aiguille d'une infinité de manières (fig. 0.1.3.). D'une manière générale, il y a une infinité de plans passant par un point donné.

Par ailleurs, si un plan matériel contient deux points donnés A et B, nous observons qu'il contient la droite AB. Un tel plan peut tourner autour de AB à la manière d'une porte qui pivote autour de la ligne de ses gonds (fig. 0.2.6.). Plaçons sur le plancher un clou matérialisant un point C; la position de la porte butant contre le clou est déterminée.

L'axiome suivant traduit ces faits d'observation.

Axiome 0.1.3.

Par trois points quelconques de l'espace, il passe au moins un plan.

Cependant, si ces points ne sont pas alignés, le plan sera *unique* comme l'indique le théorème suivant. C'est une conséquence de l'axiome 0.1.2.

Théorème 0.1.1.

Trois points non alignés déterminent un plan, et un seul.

En effet imaginons qu'il existe deux plans (P) et (P') contenant les trois points A, B et C non alignés (fig. 0.1.4.). Ces deux plans contiennent en entier les côtés du triangle ABC et leurs prolongements. Soit M un point pris dans le plan (P). Dans ce plan par le point M, menons une droite coupant AB en Q et AC en R. Ces deux points Q et R appartiennent par hypothèse aux deux plans (P) et (P'), donc la droite QR est aussi dans (P') et M en particulier.

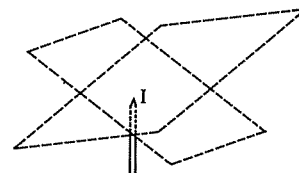


FIG. 0.1.3.

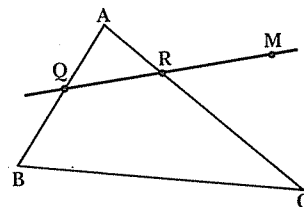


FIG. 0.1.4.

Remarque 0.1.1. — En général, aucun plan ne passe par n points donnés lorsque n est supérieur ou égal à 4. Dans le cas contraire, les points sont dits *coplanaires*.

Remarque 0.1.2. — Rappelons que les figures formées par n points ordonnés et non alignés du plan sont des triangles si $n = 3$, des quadrilatères si $n = 4$, des pentagones si $n = 5$, des hexagones si $n = 6$ et des octogones si $n = 8$, etc. Les droites joignant deux points consécutifs (sommets) sont les côtés, tandis que les droites joignant deux points opposés sont les diagonales.

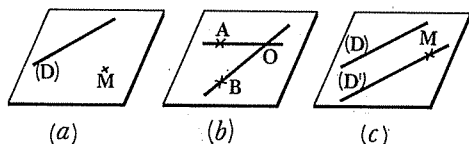


FIG. 0.1.5.

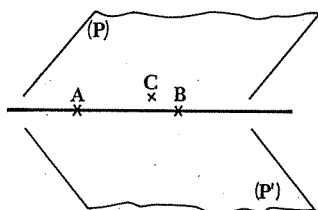


FIG. 0.1.6.

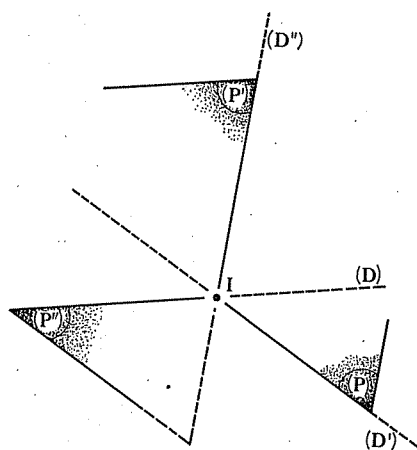


FIG. 0.1.7.

Au lieu de se donner deux points, il est possible de se donner la droite qui les joint. En effet, tout plan contenant les deux points contient la droite, et inversement.

Il en résulte que par une droite et un point non situé sur elle, on peut faire passer un plan, et un seul (fig. 0.1.5. a).

De même (fig. 0.1.5. b) deux droites concourantes déterminent un plan, car il suffit de considérer le plan passant par leur point commun O et par des points A et B pris sur chacune des droites.

Également (fig. 0.1.5. c) deux droites parallèles déterminent un plan, puisque ces deux droites sont dans un même plan (définition 0.1.3.), plan parfaitement déterminé par l'une des droites et un point pris sur l'autre.

Nous allons maintenant rappeler ou voir quelques propriétés fondamentales des droites et des plans.

Intersection de deux plans

Si deux plans distincts (P) et (P') se rencontrent, il est facile de montrer que leur intersection est une **droite**. Soit A et B deux points de $(P) \cap (P')$, et (D) la droite qui les joint (fig. 0.1.6.). Un point C extérieur à (D) ne peut appartenir à l'intersection car sinon le plan (ABC) serait confondu avec (P) et (P') qui sont distincts.

Définition 0.1.1.

Un **dièdre** est la figure formée par deux plans (P) et (P') dont l'intersection est une droite (D) appelée **arête** du dièdre.

Il arrive que deux plans donnés (P) et (P') ne se rencontrent pas. Nous dirons alors qu'ils sont **parallèles** (définition 0.1.7.).

Intersection de trois plans

Considérons trois plans (P), (P') et (P'') qui se coupent deux à deux suivant des droites non parallèles.

Posons $(D'') = (P) \cap (P')$,

$(D') = (P) \cap (P'')$,

$(D) = (P') \cap (P'')$, (fig. 0.1.7.).

Il est facile de montrer que ces trois droites sont concourantes en un seul et même point. Considérons en effet le point $I = (D) \cap (D')$. Ce point appartient à (D'') , puisque

$$(D) \cap (D') = (P) \cap (P') \cap (P'') = (D'') \cap (P'').$$

Définition 0.1.2.

Un **trièdre** est la figure formée par trois plans qui se coupent deux à deux suivant des droites appelées **arêtes** du trièdre. Ces droites sont concourantes en un point I appelé **sommet** du trièdre.

Intersection d'une droite et d'un plan

Soit une droite (D) qui rencontre un plan (P) sans être contenue dans celui-ci (fig. 0.1.8.). L'intersection $(P) \cap (D)$ est réduite à un point I unique d'après l'axiome (0.1.1.). S'il y avait un autre point I', la droite (D) joignant I et I' serait contenue dans le plan (P).

Si la droite (D) ne rencontre pas le plan (P), nous dirons qu'elle est **parallèle** à (P) (définition 0.1.5.). Rappelons d'abord les propriétés des droites parallèles dans le plan.

Droites parallèles dans le plan**Définition 0.1.3.**

Deux droites (D) et (D') d'un plan (P) sont **parallèles** si elles n'ont aucun point commun.

Rappelons deux axiomes qui sont à la base de la géométrie plane, notamment le célèbre axiome d'**Euclide**.

Axiome 0.1.4.

Par un point M d'un plan (P) extérieur à une droite (D) du même plan, on peut mener dans (P) une droite unique (D') parallèle à (D) (fig. 0.1.10.).

Nous connaissons les nombreuses conséquences de cet axiome, notamment

Théorème 0.1.2.

- Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, toute droite (Δ) qui coupe l'une coupe l'autre.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

Lorsque plusieurs droites sont parallèles, nous disons qu'elles ont **même direction**.

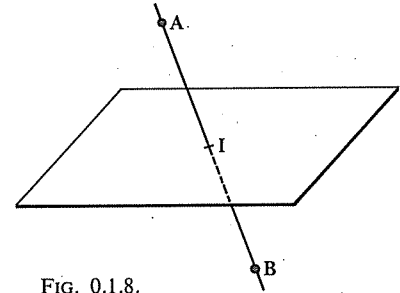


FIG. 0.1.8.

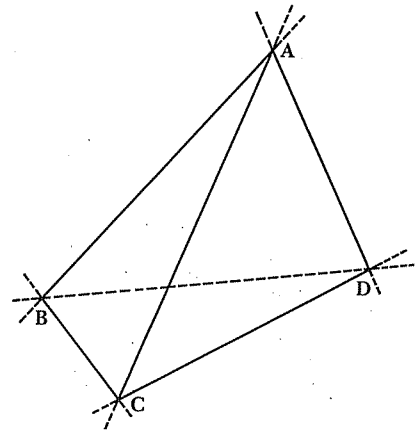


FIG. 0.1.9.

Remarque 0.1.3. — Considérons quatre points non coplanaires A, B, C et D (fig. 0.1.9.). Ils engendrent quatre plans trois à trois.

La figure formée par ces quatre plans est un **tétraèdre**. Les plans se coupent deux à deux suivant les **arêtes** du tétraèdre. Dans le cas d'un système de n plans, la figure s'appelle **polyèdre**.

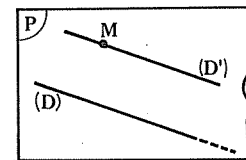


FIG. 0.1.10.

Exercice 0.1.1. — Démontrer le théorème 0.1.2.

Exercice 0.1.2. — Montrer que deux droites (D') et (Δ ') respectivement parallèles à deux droites sécantes (D) et (Δ) sont sécantes.

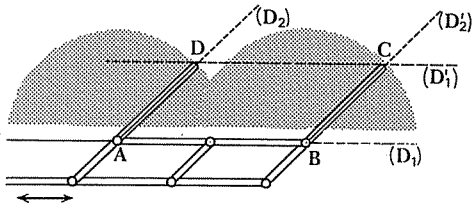


FIG. 0.1.11.

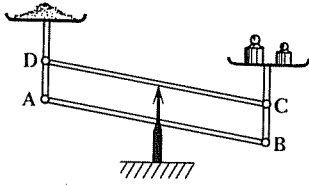


FIG. 0.1.12. a

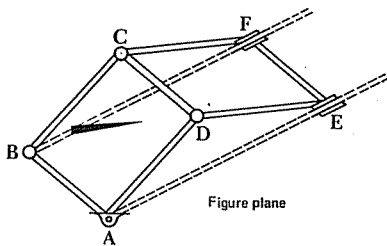


FIG. 0.1.12. b

Remarque 0.1.4. — La propriété de l'axiome 0.1.5. a été mise en valeur par **G. Desargues**, géomètre et ingénieur français (1593-1662), auteur de nombreux travaux sur le dessin en perspective.

Le **parallélisme** des côtés d'un parallélogramme est aussi lié à la **longueur** des côtés : nous verrons que les côtés opposés sont deux à deux égaux. Ce lien entre parallélisme et longueur est précisé au paragraphe 0.10.

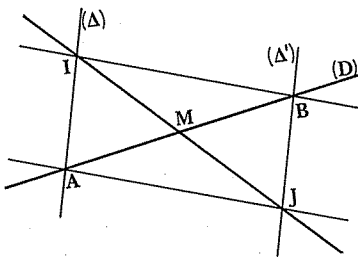


FIG. 0.1.13. a

Considérons deux droites (D_1) et (D_2) du plan (P) concourantes en un point A .

Nous pouvons mener par un autre point C du plan (P) les parallèles (D'_1) et (D'_2) à (D_1) et (D_2) (fig. 0.1.11.). Il en résulte une figure du plan appelée **parallélogramme** $ABCD$ avec

$$B = (D_1) \cap (D'_2) \quad \text{et} \quad D = (D'_1) \cap (D_2).$$

Les mécanismes constitués par des **tiges articulées** contiennent de nombreux parallélogrammes (fig. 0.1.12. a). Nous savons que, quelle que soit la position des tiges en trait plein (fig. 0.1.12. b), les tiges en trait pointillé, guidées aux points E et F , restent parallèles. C'est ce qu'exprime l'axiome suivant.

Axiome 0.1.5.

Soit deux parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$ (fig. 0.1.12.).

Alors le quadrilatère $ABFE$ est aussi un parallélogramme.

L'axiome d'Euclide (0.1.4.) permet de construire le **milieu** M de deux points donnés A et B que l'on construit généralement en utilisant la notion de distance (paragraphe 0.5.), $MA = MB$ (double-décimètre).

Considérons deux droites parallèles (Δ) et (Δ') issues de A et B (fig. 0.1.13. a). Soit I un point sur (Δ) .

Nous construisons successivement, **à la règle** :

- la droite IB ,
- la parallèle à IB menée par A , qui coupe (Δ') en un point J .

Alors la droite IJ coupe AB en un point M appelé **milieu** de A et B . Cette construction revient à tracer un parallélogramme dont AB est l'une des diagonales.

Définition 0.1.3.

Étant donné deux points A et B , leur **milieu** M est défini comme l'intersection des **diagonales** de tout parallélogramme $AIBJ$ construit sur AB .

Il est évident que M est aussi le milieu de I et J , c'est-à-dire que les **diagonales du parallélogramme** $AIBJ$ se coupent en leur milieu. Il est possible de montrer que le milieu M est **unique** (indépendant du choix du parallélogramme considéré). Le théorème suivant aura de nombreuses conséquences, notamment le théorème de Thalès sur les milieux des côtés d'un triangle ou d'un trapèze.

Théorème 0.1.3.

Soit un quadrilatère AIBJ tel que

- a) les côtés AI et BJ sont parallèles,
- b) la diagonale AB est coupée en son milieu M par la diagonale IJ.

Alors AIBJ est un parallélogramme.

La démonstration est évidente. Il suffit de considérer le quatrième sommet J' du parallélogramme AIBJ'. Les diagonales AB et IJ' se coupent en leur milieu, donc en M. Mais alors les droites AJ et AJ' sont confondues car elles passent par M. Le théorème suivant se démontre de la même façon.

Théorème 0.1.4.

Un quadrilatère AIBJ dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Théorème 0.1.5. (Premier théorème de Thalès.)

La droite joignant les milieux des côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté (fig. 0.1.14. a).

Ainsi une planche reposant sur les milieux de deux échelles est parallèle au sol (fig. 0.1.14. b).

Soit M le milieu de AB (fig. 0.1.14. a). Menons par A la parallèle à BC, par M la parallèle à AC qui coupe la précédente en I et BC en J. Enfin la parallèle à BC menée par M coupe AC en N. Ce point N est-il le milieu de AC? Le quadrilatère AIBJ est un parallélogramme d'après le théorème (0.1.3.). AIMN est aussi un parallélogramme par construction, donc MBJN, grâce à l'axiome (0.1.5.).

Nous observons par ailleurs les parallélogrammes AMJN et MJCN, ainsi que AMNK, donc AKJC d'après l'axiome (0.1.5.). N est donc le milieu de AC. Inversement la droite joignant les milieux de AB et de AC est nécessairement parallèle à BC d'après l'axiome (0.1.4.). Notons que le point N a été obtenu à partir de M par une construction appelée *projection parallèle* sur AC parallèlement à BC.

Remarque 0.1.5. — Il est souvent nécessaire d'utiliser la caractérisation suivante du milieu : M est milieu de AB si, et seulement si, il existe deux points I et K tels que AIKM et IMBK soient des parallélogrammes (fig. 0.1.13. b). C'est le principe du *pan-tographe* (fig. 2.1.12.).

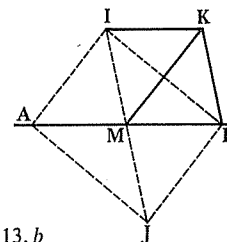


FIG. 0.1.13. b

Exercice 0.1.3. — Démontrer la proposition énoncée dans la remarque 0.1.5.

Exercice 0.1.4. — Montrer que le milieu de deux points (définition 0.1.3.) est unique.

Exercice 0.1.5. — Soit A et B deux points donnés. Trouver C tel que B soit le milieu de AC. (Voir remarque 0.1.5. ou utiliser égalité $BA = BC$)

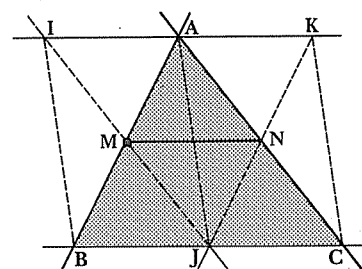


FIG. 0.1.14. a

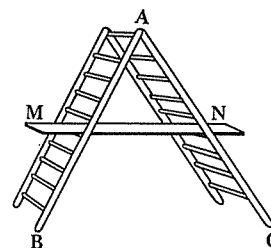


FIG. 0.1.14. b

Exercice 0.1.6. — Montrer que les trois *médianes* d'un triangle sont concourantes.

Exercice 0.1.7. — Considérons le *trapèze* ABCD (fig. 0.1.15.) et la droite MN qui joint les milieux M et N des côtés AB et CD. Montrer que MN est parallèle aux bases du trapèze. Cela démontre le théorème 0.1.6.

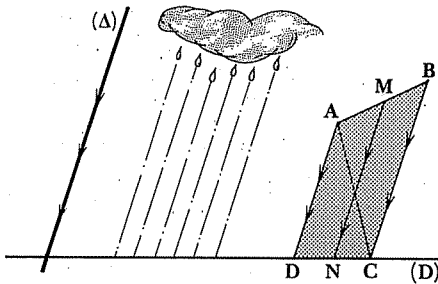


FIG. 0.1.15.

Exercice 0.1.8. — Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe forment un parallélogramme.

Exercice 0.1.9. — Construire un parallélogramme ABCD dont les sommets opposés A et C sont connus et dont les sommets B et D parcourent respectivement des droites (Δ) et (Δ') données.

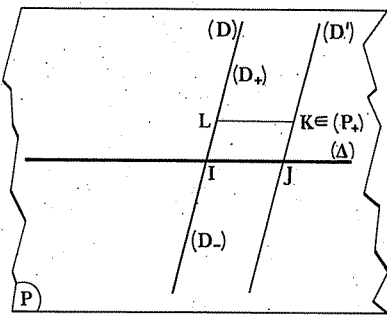


FIG. 0.1.16.



FIG. 0.1.17.

Définition 0.1.4.

Étant donné deux sécantes (D) et (Δ) du plan (P) , on peut mener par tout point M de (P) la parallèle à (Δ) qui coupe (D) en un point N (fig. 0.1.15.). C'est la *projection* sur (D) parallèlement à (Δ) .

Il est facile de donner au théorème (0.1.5.) la formulation suivante :

Théorème 0.1.6. (Deuxième théorème de Thalès.)

La projection parallèle conserve le milieu (exercice 0.1.7.).

C'est encore la construction d'un *parallélogramme* qui va nous permettre de séparer le plan (P) en deux *demi-plans* (P_+) et (P_-) de part et d'autre d'une droite donnée (Δ) . Traçons dans (P) une droite (D) qui coupe (Δ) en un point I (fig. 0.1.16.). Rappelons que la droite (D) peut être partagée en deux *demi-droites* de part et d'autre du point I , selon l'axiome suivant :

Axiome 0.1.6.

Étant donné un point I d'une droite (D) , on peut partager (D) en deux parties uniques appelées *demi-droites*, notées (D_+) et (D_-) (ou vice versa), n'ayant en commun que le point I (fig. 0.1.16.). On suppose en outre que :

- a) les demi-droites issues de points A et B différents sont *emboîtées* (fig. 0.1.17.);
- b) une *projection* parallèle sur une droite (D') transforme les demi-droites de (D) en demi-droites de (D') .

Nous appellerons (P_+) la région du plan située du côté de (D_+) , (P_-) la région située du côté de (D_-) . Plus précisément, soit K un point quelconque du plan extérieur à (Δ) (fig. 0.1.16.), (D') la parallèle à (D) menée par K qui coupe (Δ) en J , et L le quatrième sommet du *parallélogramme* $IJKL$. Nous dirons que le point K est du côté (P_+) si L appartient à (D_+) , et inversement.

Ainsi toute droite (Δ) divise le plan en deux régions telles qu'il est impossible de passer de l'une à l'autre sans traverser la droite (Δ) . En particulier, tout *segment* (remarque 0.1.6.) qui joint deux points A et B situés de part et d'autre d'une droite coupe cette droite en un point I . Nous terminons ici cette parenthèse pour traiter le cas des droites parallèles dans l'espace.

Droites parallèles dans l'espace

Définition 0.1.4.

Deux droites de l'espace sont **parallèles** lorsque :

- a) elles sont situées dans un même plan,
- b) elles n'ont aucun point commun.

Il est en effet essentiel de préciser ce qui était sous-entendu en géométrie plane, à savoir que des droites parallèles sont dans un même plan. **Deux droites de l'espace peuvent en effet n'avoir aucun point commun et ne pas être parallèles.** Ainsi, traçons dans un plan (P) une droite (D) quelconque (fig. 0.1.18.). Considérons une autre droite (D') perçant le plan (P) en un point I non situé sur (D). Ces deux droites n'ont aucun point commun, puisque A est le seul point de (D') dans le plan (P) et que tous les points de (D) sont dans le plan (P).

Il en résulte que deux droites distinctes de l'espace :

- ou ne sont pas dans un même plan (et n'ont aucun point commun),
- ou sont dans un même plan et sont alors *concourantes* ou *parallèles*.

Les droites parallèles de l'espace ont des propriétés analogues à celles que nous venons de voir en géométrie plane.

La propriété d'Euclide (axiome 0.1.4.) est encore valable dans l'espace (exercice 0.1.11.). La partie b) du théorème 0.1.2. reste valable (exercice 0.1.12.). La construction d'un parallélogramme va nous servir ci-dessous pour séparer l'espace en deux régions à l'aide d'un plan donné.

Régions de l'espace séparées par un plan

Intuitivement, lorsque nous nous représentons un plan horizontal, nous pensons que ce plan limite deux *régions* : celle située au-dessus du plan et celle située en dessous.

Considérons le plan (P) percé par une droite (D) en un point I (fig. 0.1.19. a). Rappelons (géométrie plane) que la droite (D) peut être partagée en deux *demi-droites* (D₊) et (D₋) de part et d'autre du point I, selon l'axiome 0.1.6. Nous procédons comme pour le partage d'un plan en deux demi-plans. Il en résulte deux régions (E₊) et (E₋) de l'espace (E) (fig. 0.1.19. a). Notons que le point J est la *projection* du point K sur le plan (P) *parallèlement à la droite* (D). Les projections parallèles sont très importantes en géométrie.

Remarque 0.1.6. — Il est commode d'appeler Ax et Ax' les deux demi-droites (D₊) et (D₋) issues de A (fig. 0.1.17.), Bx et Bx' les demi-droites analogues issues d'un autre point B, choisies de façon que

$$Bx \subset Ax \text{ et } Ax' \subset Bx'$$

(même sens).

On appelle *segment* AB l'ensemble des points communs à Ax et à Bx'.

Exercice 0.1.10. — Montrer que le milieu M de deux points A et B appartient au segment AB.

Remarque 0.1.7. — Une figure (A) d'un plan (P) est dite *convexe*, si tout segment joignant des points quelconques de A est contenu dans (A). Ainsi un triangle est convexe, mais il n'en est pas de même de tous les polygones : un parallélogramme est convexe, alors qu'une étoile à cinq branches ne l'est pas.

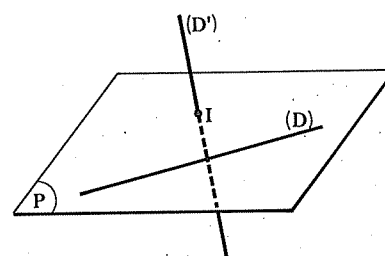


FIG. 0.1.18.

Exercice 0.1.11. — Montrer que la propriété d'Euclide est vraie dans l'espace.

Exercice 0.1.12. — Montrer que le théorème 0.1.2. b est vrai dans l'espace.

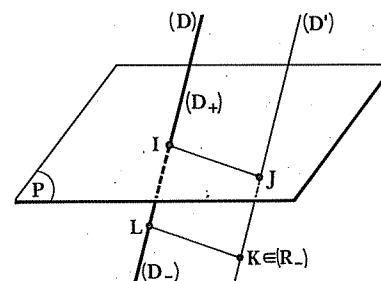


FIG. 0.1.19. a

Remarque 0.1.7. — Sur la figure 0.1.19. a, nous dirons aussi que le point L est la *projection* du point K sur la droite (D) *parallèlement au plan* (P).

Exercice 0.1.13. — Montrer que la projection d'une droite (Δ) sur un plan (P) parallèlement à une droite (D) est généralement une droite (δ).

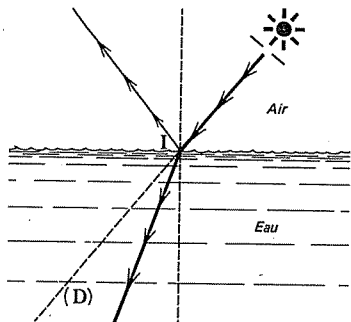


FIG. 0.1.19. b

Remarque 0.1.8. — Dans la pratique les régions (E_+) et (E_-) ont souvent des propriétés physiques différentes. C'est le cas en optique pour les *dioptries plans* qui séparent deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2 distincts (fig. 0.1.19. b). Le rayon incident, le rayon réfracté et le rayon réfléchi matérialisent trois demi-droites.

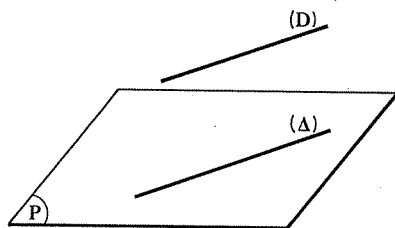


FIG. 0.1.20.

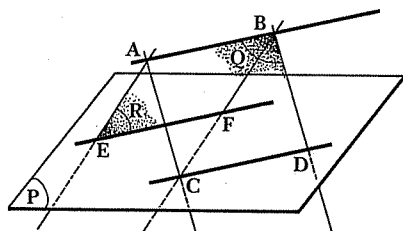


FIG. 0.1.21.

Ainsi tout plan divise l'espace en deux régions telles qu'il est impossible de passer de l'une à l'autre sans traverser le plan.

En particulier tout *segment* (remarque 0.1.6.) qui joint deux points A et B situés de part et d'autre d'un plan coupe ce plan en un point I (fig. 0.1.8.).

Reprenons l'étude du *parallélisme* entre figures de l'espace (droites et plans).

Droites et plans parallèles

Étudions la figure formée par un plan (P) et une droite (D) parallèle à une droite (Δ) située dans le plan (P) (fig. 0.1.20.).

Si le plan (P) coupait (D), il couperait sa parallèle (Δ), ce qui est impossible puisqu'il la contient. Donc, ou (P) contient (D), ou (P) et (D) n'ont aucun point commun, c'est-à-dire (P) et (D) sont parallèles.

Définition 0.1.5.

On dit que la droite (D) est parallèle au plan (P) ou que le plan (P) est parallèle à la droite (D), pour exprimer que le plan et la droite n'ont pas de point commun.

Il s'ensuit :

Théorème 0.1.7.

Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan ou y est contenue tout entière.

Théorème 0.1.8.

Si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle aux intersections de ce plan avec tous ceux qui la contiennent, s'ils coupent le plan.

En effet, soit AB parallèle à un plan (P) (fig. 0.1.21.). Un plan (Q) passant par AB coupe le plan (P) suivant une droite CD. Les droites AB et CD sont dans le plan (Q). Elles sont parallèles sinon leur point commun appartiendrait à AB et au plan (P) et AB ne serait pas parallèle à (P). De même un autre plan (R) passant par AB coupe (P) suivant EF parallèle à AB donc parallèle à CD (théorème 0.1.3.).

Les conséquences du théorème 0.1.8. sont nombreuses. En particulier, si deux plans qui se coupent sont parallèles à une droite, leur

intersection est parallèle à cette droite (exercice). Nous présentons pour terminer cette rubrique une figure bien connue de l'espace.

Définition 0.1.6.

Étant donné une droite (D) on appelle **prisme** de direction (D) la figure formée par une collection de n plans parallèles à (D) (fig. 0.1.22.) les intersections des plans deux à deux sont les **arêtes** du prisme.

Plans parallèles

Soit (fig. 0.1.23.) un plan (P) et un point A' hors du plan (P). Par A' menons A'B' parallèle à une droite AB de (P) et A'C' à une droite AC de (P) distincte de AB. Nous déterminons un plan (P') car si A'B' et A'C' coïncidaient, AB et AC parallèles à une même droite seraient confondues. Si les plans (P) et (P') avaient un point commun, ils auraient une droite commune qui devrait être parallèle à deux droites concourantes A'B' et A'C', ce qui est impossible.

Définition 0.1.7.

Deux plans sont dits **parallèles** lorsqu'ils n'ont **aucun point commun**.

L'étude précédente justifie cette définition; il s'ensuit :

Théorème 0.1.9.

Si, par un point pris hors d'un plan (P), on mène deux droites parallèles respectivement à deux droites concourantes de ce plan, on détermine un nouveau plan (P') parallèle au plan (P).

Cette propriété ressemble à celle de l'axiome d'Euclide (0.1.4.). Les conséquences sont nombreuses.

Théorème 0.1.10.

- Par un point pris hors d'un plan on peut mener à ce plan un plan parallèle, et un seul.
- Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

Exercice 0.1.14. — Montrer que lorsque deux plans parallèles à une droite se coupent, leur intersection est parallèle à cette droite.

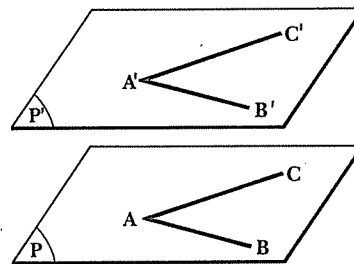


FIG. 0.1.22.

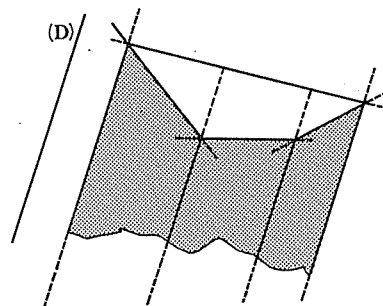
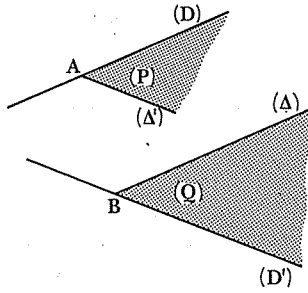


FIG. 0.1.23.

Remarque 0.1.9. — L'idée du théorème 0.1.9. est très utilisée en **topographie**. On effectue des visées à partir de trois points d'un plan, puis on détermine des parallèles à une altitude donnée.



De même

Théorème 0.1.11.

Par deux droites non situées dans le même plan, on peut faire passer deux plans parallèles.

En effet, (fig. 0.1.24.) par un point A de (D) on mène (Δ') parallèle à (D') et par B de (D') on mène (Δ) parallèle à (D). On détermine ainsi deux plans (P) et (Q) parallèles puisque chacun d'eux contient deux droites respectivement parallèles à deux droites de l'autre.

0.2. DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

Remarque 0.2.1. — Les mots *perpendiculaire* et *orthogonal* sont synonymes. On appelle *rectangle* un quadrilatère tel que les deux côtés issus de chaque sommet sont orthogonaux. Les rectangles sont des parallélogrammes grâce au théorème 0.2.1. a.

Exercice 0.2.1. — Montrer les parties a) et b) du théorème 0.2.1. Le point $H = (D) \cap (D')$ est le *pied de la perpendiculaire* (D') à (D).

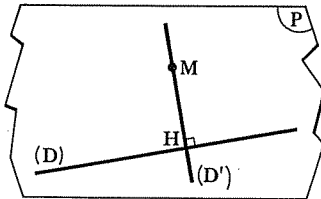


FIG. 0.2.1.

Avant d'aborder les propriétés *d'orthogonalité* dans l'espace, nous allons rappeler brièvement celles du plan.

Droites orthogonales dans le plan

Axiome 0.2.1.

L'orthogonalité est une relation, notée $\perp$, entre les droites d'un plan donné, telle que, pour toutes droites (D) et (D') :

- a) $(D) \perp (D')$ entraîne $(D') \perp (D)$.
- b) $(D) \perp (D')$ entraîne (D) et (D') sont sécantes.
- c) Par un point M d'un plan (P), il passe une droite, et une seule, orthogonale à une droite donnée (D) du plan (P) (fig. 0.2.1.).

Il en découle l'important théorème suivant de la géométrie plane :

Théorème 0.2.1.

- a) $(D) \perp (D')$ et $(D') \perp (D'') \Rightarrow (D) \parallel (D'')$.
- b) $(D) \perp (D')$ et $(D') \parallel (D'') \Rightarrow (D) \perp (D'')$.

La partie b) du théorème 0.2.1. contient l'idée de *projection orthogonale* sur une droite donnée (D). Le point M se projette en H. Nous allons construire facilement le *symétrique* de M par rapport à (D) (fig. 0.2.2.).

Pour cela traçons sur la droite HM le point N tel que H soit le milieu de MN (exercice 0.1.5.). Par définition ce point N est appelé le *symétrique* du point M par rapport à (D). La droite (D) est appelée

médiatrice du segment MN. Il est facile de montrer que le symétrique d'une droite (Δ) est une droite (Δ') (fig. 0.2.3.). Réciproquement, étant donné deux droites (Δ) et (Δ') concourantes en un point I, nous pouvons tracer une droite (D) appelée **bissectrice**, telle que (Δ) et (Δ') soient symétriques par rapport à (D) .

L'axiome suivant affirme l'existence de la bissectrice pour deux demi-droites et s'interprétera, exemple 1.2.2, comme le partage d'un **angle** en deux moitiés égales :

Axiome 0.2.2.

*Étant donné deux demi-droites Ix et Iy concourantes en un point I, il existe une droite (D) passant par I telle que Ix et Iy soient symétriques par rapport à (D) . La droite (D) est appelée **bissectrice** de Ix et Iy (fig. 0.2.3.).*

Pour la construire, posons sur I le côté JK d'une équerre JKL rectangle en K, et fixons en M sur Ox le zéro d'une règle graduée qui coupe Oy en N. Plaquons alors la règle contre le côté KL (faire la figure). Déplaçons l'ensemble jusqu'à ce que K se trouve au milieu de MN : alors JIK définit la bissectrice cherchée. Une construction plus commode est indiquée au § 0.10.

Droites orthogonales dans l'espace

A partir de là, nous définissons les notions **d'orthogonalité dans l'espace**, notamment pour deux droites non concourantes. En effet, deux droites **concourantes** (D_1) et (D'_1) sont coplanaires et l'orthogonalité est définie dans le plan (P_1) qu'elles définissent.

L'axiome suivant répond au souci d'harmoniser l'orthogonalité dans différents plans parallèles (même **équerre**).

Axiome 0.2.3.

Soit (D_1) et (D'_1) deux droites concourantes d'un plan (P_1) , (D_2) et (D'_2) des parallèles à (D_1) et (D'_1) menées dans un plan (P_2) , parallèle à (P_1) (fig. 0.2.4.). Alors

$$(D_1) \perp (D'_1) \Leftrightarrow (D_2) \perp (D'_2).$$

Cet axiome correspond à l'idée usuelle de l'orthogonalité, ainsi, par exemple, pour les arêtes d'une boîte cubique.

Soit maintenant (D) et (Δ) deux droites **non concourantes** dans l'espace (fig. 0.2.5.). Nous définissons l'orthogonalité $(D) \perp (\Delta)$ en nous ramenant au cas de deux droites concourantes.

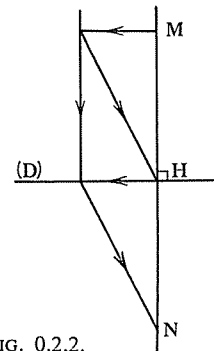


FIG. 0.2.2.

Exercice 0.2.2. — Quels sont les points invariants d'une symétrie par rapport à (D) ?

Exercice 0.2.3. — Montrer que le symétrique d'une droite (Δ) par rapport à une droite (D) est une droite (Δ') , que les symétriques de deux droites parallèles sont parallèles.

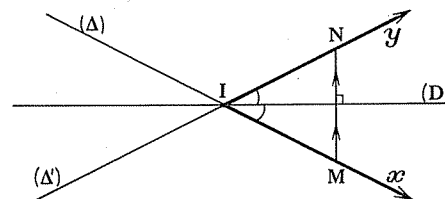


FIG. 0.2.3.

Remarque 0.2.2. — Les notions d'**orthogonalité** (plan et espace) seront précisées par la notion d'**angle** (définition 0.2.6.) et de mesures des angles (paragraphe 1.2.).

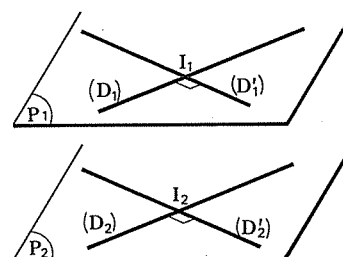


FIG. 0.2.4.

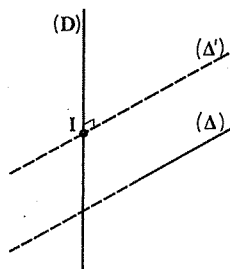


FIG. 0.2.5.

Exercice 0.2.4. — La propriété *a*) du théorème 0.2.1. est-elle vérifiée dans l'espace?

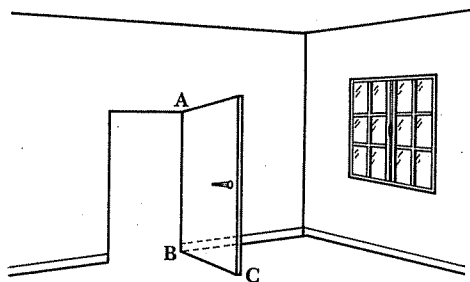


FIG. 0.2.6.

Exercice 0.2.5. — Chercher dans la figure 0.2.6.
— des droites orthogonales,
— des plans orthogonaux.

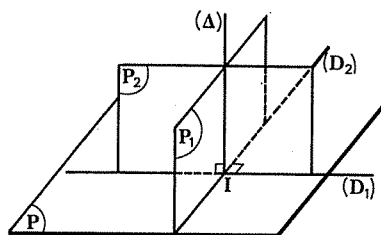


FIG. 0.2.7.

Définition 0.2.1.

La droite (D) est **orthogonale** à la droite (Δ) si, et seulement si, (D) est orthogonale à une parallèle (Δ') de (Δ) , concourante avec (D) (fig. 0.2.5.).

Le lecteur vérifiera (exercice) que les propriétés *a*) et *b*) de l'axiome 0.2.1. sont bien vérifiées pour des droites orthogonales dans l'espace. La définition 0.2.1. permet d'envisager l'orthogonalité entre droites et plans.

Définition 0.2.2.

Une droite est dite **orthogonale à un plan** lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

On dit aussi que le plan est perpendiculaire (ou orthogonal) à la droite. Ainsi quand une porte (fig. 0.2.6.), tourne autour de ses gonds A et B , les diverses positions du côté BC sont toujours perpendiculaires en B à AB et le côté BC reste constamment en contact avec le sol. Le plan du sol est déterminé par **deux** positions du côté horizontal.

L'axiome suivant s'inspire de cette situation et assure l'existence du plan orthogonal à une droite donnée :

Axiome 0.2.4.

Soit une droite (Δ) orthogonale à deux droites concourantes (D_1) et (D_2) . Alors (Δ) est orthogonale à toute droite (D) du plan (P) formé par (D_1) et (D_2) .

● Pour construire un plan orthogonal à une droite (Δ) en un point I de (Δ) , il suffit donc de déterminer deux droites (D) et (D') orthogonales à (Δ) en I . Les droites (D) et (D') déterminent le plan (P) orthogonal à (Δ) en I .

● Inversement, étant donné un plan (P) et deux droites concourantes (D_1) et (D_2) tracées dans (P) (fig. 0.2.7.), nous construisons le plan (P_1) perpendiculaire à (D_1) en I et le plan (P_2) perpendiculaire à (D_2) en I . La droite $\Delta = (P_1) \cap (P_2)$ est perpendiculaire au plan (P) en I . Il est facile de montrer, à titre d'exercice, qu'elle est unique.

● Ces notions sont utiles pour construire la **perpendiculaire commune** à deux droites données (D_1) et (D_2) de l'espace, c'est-à-dire la droite (Δ) qui rencontre orthogonalement les droites (D_1) et (D_2) .

Considérons le cas général pour lequel (D_1) et (D_2) ne sont ni concourantes ni parallèles. On construit successivement

- la parallèle à (D_2) menée par un point I_1 de (D_1) , soit (D'_2) (fig. 0.2.8.),
- la perpendiculaire (Δ) menée par I au plan (P) formé par (D_1) et (D'_2) ,
- des plans (P_1) et (P_2) parallèles à (Δ) , menés par (D_1) et (D_2) .

Alors $(D_3) = (P_1) \cap (P_2)$ est la droite cherchée (exercice 0.2.6.).

Terminons par les définitions d'orthogonalité de deux droites ou de deux plans que les lecteurs confronteront avec ce qui précède.

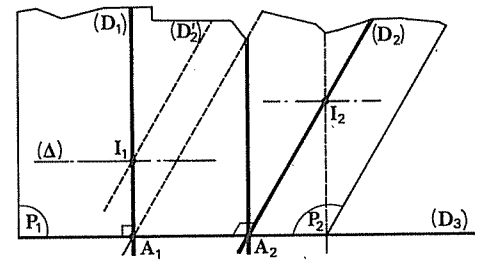


FIG. 0.2.8.

Exercice 0.2.6. — Vérifier que la construction ci-dessus conduit bien à la perpendiculaire commune aux droites (D_1) et (D_2) données.

Définition 0.2.3.

- a) Nous dirons que deux **plans** sont **orthogonaux** si l'un est orthogonal à une droite de l'autre.
- b) Nous dirons que deux **droites** sont **orthogonales** si l'une est orthogonale à un plan contenant l'autre.

Cette dernière partie nous conduit tout naturellement à la **théorie des projections**.

Projection orthogonale de points et de droites.

Définition 0.2.4.

La **projection orthogonale** d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire menée du point au plan.

Ainsi (fig. 0.2.9.) le point a , pied de la perpendiculaire Aa au plan (P) est la projection orthogonale du point A sur le plan (P) .

Le plan (P) est le **plan de projection**; la droite Aa est la **projetante** du point A .

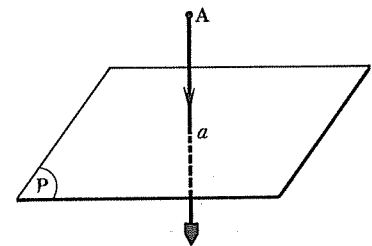


FIG. 0.2.9.

Définition 0.2.5.

La projection orthogonale d'une **figure** (F) est la figure (f) formée par les projections des divers points de (F) .

Ainsi la **ligne** AB (fig. 0.2.10.) a pour projection sur le plan (P) la ligne ab . Nous allons examiner quelques projections simples.

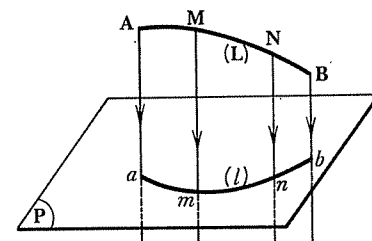


FIG. 0.2.10.

Remarque 0.2.3. — Le résultat du théorème 0.2.2. est encore vrai si la projection n'est pas orthogonale. Il fait l'objet de l'exercice 0.1.12. dans le cas d'une projection parallèle quelconque.

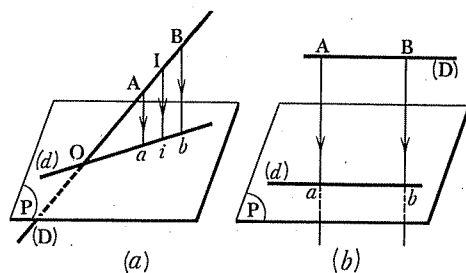


FIG. 0.2.11.

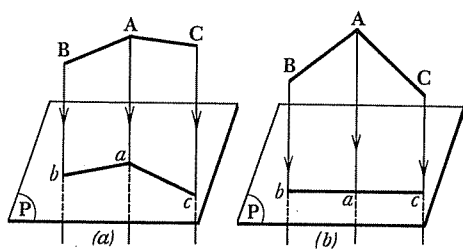


FIG. 0.2.12.

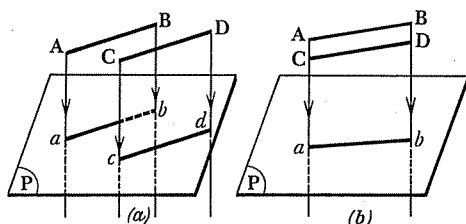


FIG. 0.2.13.

Théorème 0.2.2.

La projection orthogonale d'une droite sur un plan est une droite sauf si la droite est perpendiculaire au plan, auquel cas la projection se réduit à un point.

Si la droite (D) perce le plan en O, (fig. 0.2.11. a), ce point est sa propre projection et la projection (d) passe par O.

Si la droite (D) est parallèle au plan (P) le plan projetant coupe (P) suivant une parallèle à (D). La projection (d) (fig. 0.2.11. b) d'une droite (D) parallèle au plan de projection est parallèle à (D).

Remarquons (fig. 0.2.11. a) que le quadrilatère ABba est un **trapeze**. La projetante du milieu I de AB coupe le segment ab en son milieu i.

C'est la forme la plus élémentaire du théorème de Thalès (0.1.6.).

Théorème 0.2.3.

Les projections de deux droites concourantes sont des droites concourantes (ou confondues si le plan des deux droites est perpendiculaire au plan de projection).

Ce résultat est présenté sur les figures 0.2.12. a et b. Remarquons que si l'une des droites est perpendiculaire au plan de projection, la projection est une seule droite.

Théorème 0.2.4.

Deux droites parallèles, non perpendiculaires au plan de projection se projettent suivant deux droites parallèles (ou exceptionnellement confondues).

En effet, les plans projetants ABa et CDc (fig. 0.2.13. a) contiennent deux couples de droites respectivement parallèles, AB et CD par hypothèse, Aa et Cc comme perpendiculaires au plan (P). Ils sont donc parallèles et leurs intersections par un même plan (P) sont des droites parallèles.

Il y a deux exceptions. L'une, si les deux droites parallèles sont dans un même plan perpendiculaire au plan (P) (fig. 0.2.13. b), l'autre, si les deux droites sont perpendiculaires au plan de projection : chacune d'elle se projette suivant un point.

Projection d'un angle

Rappelons la définition suivante valable dans le plan et dans l'espace.

Définition 0.2.6.

On appelle **angle** la figure formée par un couple ordonné de deux demi-droites issues du point d'intersection de deux droites concourantes (fig. 0.2.14.).

En anticipant sur la mesure des angles, nous dirons qu'un angle est **nul** si les deux demi-droites sont confondues, **plat** si la réunion des deux demi-droites est une droite entière, **droit** si les deux droites concourantes sont orthogonales. Nous désignerons par $\widehat{XAY}$ l'angle formé par les demi-droites AX et AY. Il est facile de montrer que la projection orthogonale d'un angle est un angle. L'angle projeté est nul ou plat si le plan des deux côtés de l'angle est perpendiculaire au plan de projection. La notion disparaît si un côté de l'angle est perpendiculaire au plan de projection.

Soit $\widehat{XAY}$ un angle dont la projection est $\widehat{xay}$ (fig. 0.2.14.).

En général, les angles $\widehat{XAY}$ et $\widehat{xay}$ sont **inégaux** (paragraphe 1). En particulier, si le plan XAY est perpendiculaire au plan de projection, l'angle $\widehat{xay}$ est nul ou plat.

L'égalité a lieu, par contre, si le plan de l'angle est parallèle au plan de projection. Toutefois, la réciproque est fautive. Nous allons le voir dans le cas particulier d'un angle droit, ce que le lecteur démontrera à titre d'exercice.

Théorème 0.2.5.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un **angle droit** se projette orthogonalement sur un plan suivant un **angle droit** est qu'il ait **un de ses côtés au moins parallèle** au plan de projection ou contenu dans ce plan.

Symétrie par rapport à un plan (P)

La construction est la même que celle du symétrique par rapport à une droite (fig. 0.2.3.). Si N est le symétrique de M, (P) est le plan médiateur du segment MN. Étant donné un **dièdre** formé par deux

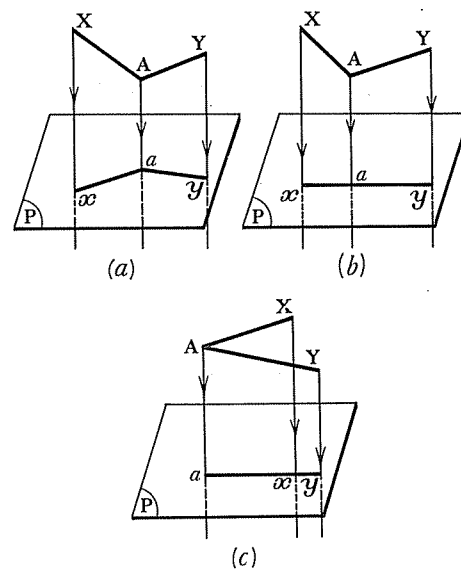


FIG. 0.2.14.

Remarque 0.2.4. — Soit un *dièdre* formé par deux plans (Q) et (Q'), d'arête (L). On mène (faire le dessin) par un point I de (L) un *plan* (Ω) orthogonal à (L). Soit $(\Delta) = (\Omega) \cap (Q)$ et $(\Delta') = (\Omega) \cap (Q')$. Les droites (Δ) et (Δ') forment la *section droite* du dièdre initial. Il en est de même pour un *prisme* dont la section droite est un certain polygone.

Exercice 0.2.7. — Soit un trièdre trirectangle de sommet A et un plan (P) ne passant pas par A qui détermine un tétraèdre ABCD, et la projection orthogonale a de A sur la face BCD. Les segments aB , aC et aD peuvent-ils former des angles droits ? Faire le dessin.

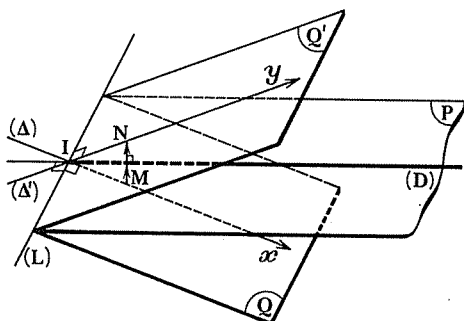


FIG. 0.2.15.

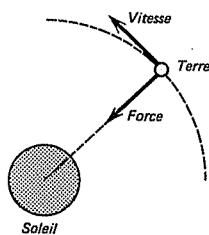


FIG. 0.3.1.

Remarque 0.3.1. — Les forces de la physique s'exercent souvent en un *point d'application*. Ce sont alors des vecteurs liés.

plans (Q) et (Q'), nous pouvons construire une *section droite* (remarque 0.2.4.) menée par un point I de l'intersection (L) des deux plans (fig. 0.2.15.). Deux demi-droites Ix et Iy de la section droite possèdent une bissectrice (D). Le plan (P) formé par (L) et (D) est un *plan bissecteur* du dièdre (Q) (Q').

Nous allons maintenant introduire un *outil* d'une très grande commodité qui est le *calcul vectoriel*. Si les propriétés géométriques des paragraphes 0.1. et 0.2. ne sont pas d'un maniement facile, elles se traduiront très simplement en termes de *vecteurs*. Toutefois ce seront des méthodes aveugles. Nous obtiendrons des résultats à la manière des « machines ». Bien que de tels procédés soient très utiles il ne faut pas négliger le rôle formateur de ces deux premiers paragraphes.

0.3. SCALAIRES ET VECTEURS

En physique et en géométrie, *certaines quantités* sont complètement définies par *une grandeur réelle*; ainsi la masse d'un corps, la charge d'un électron, la chaleur spécifique de l'eau, l'aire d'un cercle et son diamètre, le volume d'une sphère ou d'un cube... Chacune de ces quantités est représentée par un nombre qui dépend du système d'unités choisi. *Une telle quantité est appelée un scalaire.*

Il existe cependant d'autres quantités physiques et géométriques qui ne peuvent être représentées par un simple nombre, car leur caractérisation complète nécessite la *connaissance d'une direction et d'une grandeur*. Les forces en mécanique sont des quantités de ce type.

Il est habituel de représenter une force graphiquement par un *segment orienté* qui indique la *direction de la force* et dont la *longueur* est égale à la *grandeur* de la force pour une échelle préalablement choisie. C'est le *vecteur*.

La figure 0.3.1. montre la force d'attraction de la Terre dans son mouvement autour du Soleil. La vitesse instantanée de la Terre dans ce mouvement peut être également représentée par un segment orienté d'une longueur convenable. Ceci illustre le fait qu'une vitesse est aussi une quantité qui peut être caractérisée par une grandeur et une direction.

La figure 0.3.2. montre un système de particules, lesquelles agissent les unes sur les autres. Ainsi la $j^{\text{ième}}$ particule induit sur la $i^{\text{ième}}$ une force f_{ij} , la $k^{\text{ième}}$ une force f_{ik} , etc. Une force extérieure F_i étant de plus appliquée à la $i^{\text{ième}}$ particule, il sera intéressant de savoir à quelle force sont équivalentes toutes ces forces agissant sur la $i^{\text{ième}}$ particule.

Plus simplement, la figure 0.3.3. montre une translation, c'est-à-dire un déplacement sans rotation (voir chapitre 2) d'un rectangle que le lecteur imaginera être un véhicule quelconque. La translation est représentée graphiquement par une ligne dont l'origine est la position initiale O d'un point du rectangle et dont l'extrémité O' est la position du point considéré après la translation, le mouvement étant caractérisé par sa grandeur et sa direction. Si l'on effectue cette représentation pour tous les points du rectangle considéré on obtient une famille de segments de même longueur et de même direction.

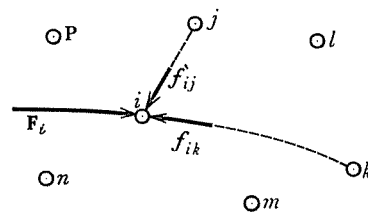
Définition 0.3.1.

On appelle **vecteur lié** ou simplement **vecteur** un segment de droite dont on distingue une **origine** et une **extrémité**.

Le vecteur d'origine A et d'extrémité B, appelé « vecteur AB », aura un **module**, la distance entre A et B, que nous définirons plus loin (définition 0.5.3.), et un **sens** qui est le sens de parcours de A vers B.

Notation

Le **vecteur** AB se représente généralement par la notation $\overrightarrow{AB}$. Dans ce volume, nous utiliserons le plus souvent la notation **AB**. Toute lettre en « **caractère gras** » désignera un vecteur. Ainsi **u** sera « le vecteur $\vec{u}$ ».



Les forces ne sont pas nécessairement coplanaires.

FIG. 0.3.2.

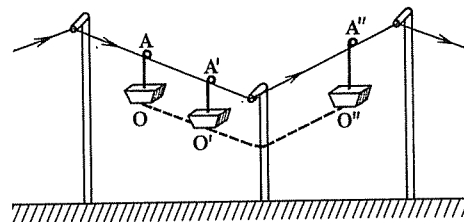


FIG. 0.3.3.

Remarque 0.3.1. — Les notions de vecteurs étaient implicitement contenues dans les règles de composition des forces et des vitesses au début du XVIII^e siècle. La première présentation détaillée d'un calcul sur des **grandeurs dirigées** date de 1832 (théorie des équipollences de Bellavitis). L'idée a aussi été exposée par Saint-Venant (1845) et Cauchy (1847).

0.4. GÉNÉRALITÉS SUR LES VECTEURS

La droite joignant les points A et B est appelée **support** du vecteur **AB**.

Le vecteur **BA** d'origine B et d'extrémité A est l'**opposé** du vecteur **AB**. Nous écrirons

$$\mathbf{BA} = - \mathbf{AB} \quad (\text{voir paragraphe 0.5}).$$

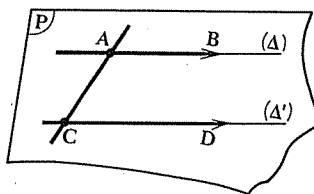


FIG. 0.4.1.

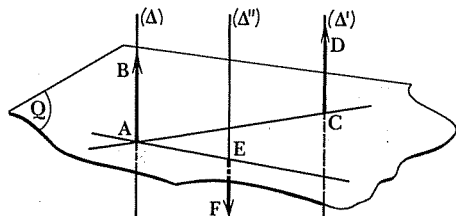


FIG. 0.4.2.

Remarque 0.4.1. — Nous savons déjà et nous reverrons (paragraphe 0.10) que des vecteurs sont équipollents si, et seulement si, ils ont *même direction, même sens et même module*. Pour les construire on utilise le *double-décimètre* ou le *compas*, et le « té » mobile.

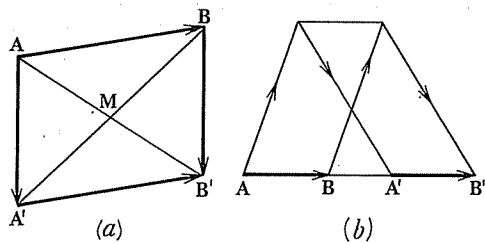


FIG. 0.4.3.

Remarque 0.4.2. — Un vecteur *glissant* est défini par la donnée du support (Δ) , d'un sens et d'un module. Pour un vecteur *libre* c'est seulement la direction, le sens et le module. Nous notons de la même façon le vecteur *lié* $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur *libre* qui lui correspond. Cela n'aura pas trop d'inconvénient. Si les vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A_0B_0}$ sont équipollents, on dit que $\overrightarrow{A_0B_0}$ est un *représentant* du vecteur *libre* $\overrightarrow{AB}$.

Vecteur nul

Lorsque l'extrémité d'un vecteur coïncide avec son origine, on dit que c'est un **vecteur nul**. Son module sera nul, sa direction et son sens sont indéterminés. Nous le noterons $\mathbf{0}$.

Vecteurs de même direction

Sur une droite donnée on peut définir *deux sens de parcours opposés* (axiome 0.1.6.).

Lorsque deux vecteurs ont des supports parallèles distincts, on dit qu'ils ont *même direction*. On dit qu'ils ont *même sens* si, dans leur plan, ils sont situés d'un même côté de la droite qui joint leurs origines. Sur les figures 0.4.1. et 0.4.2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens. Sur la figure 0.4.2., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de sens contraires ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

Vecteurs équipollents

On dit que deux vecteurs (liés) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont *équipollents* si le quadrilatère $ABB'A'$ est un **parallélogramme** (fig. 0.4.3. a). Dans le cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont même support, nous dirons qu'ils sont équipollents s'ils sont liés par deux parallélogrammes (fig. 0.4.3. b). La définition de la remarque 0.4.1. s'imposera en Mécanique.

Si des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont équipollents, nous avons les propriétés suivantes (fig. 0.4.3. a) qui sont celles des **parallélogrammes** :

- les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont équipollents,
- les segments AB' et BA' ont le même milieu M . Chacune de ces deux propriétés est caractéristique de l'équipollence, y compris lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont même support. Considérons un troisième vecteur $\overrightarrow{A''B''}$ que nous comparons aux deux premiers ci-dessous,
- si $\overrightarrow{AB}$ est équipollent à $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ à $\overrightarrow{A''B''}$, alors $\overrightarrow{AB}$ est équipollent à $\overrightarrow{A''B''}$. C'est une conséquence immédiate de l'axiome (0.1.5.).

Vecteurs liés, vecteurs glissants, vecteurs libres

Un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont parfaitement déterminées est un **vecteur lié**.

On parle d'un **vecteur glissant** $\overrightarrow{AB}$ de support (Δ) pour désigner l'un quelconque des vecteurs liés équipollents au vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ et de support (Δ) . L'origine reste arbitraire sur le support donné.

On parle d'un **vecteur libre** $\overrightarrow{AB}$ pour désigner l'un *quelconque* des vecteurs liés équipollents au vecteur lié $\overrightarrow{AB}$. L'origine reste arbitraire dans le plan ou dans l'espace.

Si deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont équipollents, les vecteurs libres sont identiques et nous écrivons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

0.5. GÉOMÉTRIE SUR UN AXE DIRIGÉ

Soit $x'x$ un axe *dirigé*, c'est-à-dire une droite illimitée sur laquelle on choisit un *sens positif de parcours* (fig. 0.5.1.). L'expérience montre que la **résultante** de deux forces portées par un même axe (fig. 0.5.1.) s'obtient en mettant les vecteurs qui les représentent *bout à bout* comme le précise la définition suivante :

Définition 0.5.1.

La **somme géométrique** de deux vecteurs glissants V_1 et V_2 sur un axe (Δ) est le vecteur glissant V obtenu de la manière suivante (fig. 0.5.2.) : on mène par un point A quelconque de (Δ) le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$ équipollent à V_1 , puis par A_1 le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ équipollent à V_2 . Alors le vecteur glissant $V = \overrightarrow{AA_2}$ est la somme $V_1 + V_2$. Nous écrivons

$$(0.5.1.) \quad \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} \quad \text{soit} \quad V = V_1 + V_2.$$

On obtient le **même** vecteur glissant V si la construction s'effectue en partant d'un autre point B de (Δ) . En effet les vecteurs $\overrightarrow{AA_2}$ et $\overrightarrow{BB_2}$ sont équipollents comme on peut le voir sur la figure 0.5.3. Par ailleurs il est facile de montrer que l'addition des vecteurs possède les mêmes propriétés que celle des scalaires, soit

- (a) $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$,
- (b) $V_1 + (V_2 + V_3) = (V_1 + V_2) + V_3$,
- (c) $V_1 + 0 = V_1$,
- (d) tout vecteur glissant $V = \overrightarrow{AB}$ possède un **opposé** $-V = \overrightarrow{BA}$.

Nous conviendrons de noter $2 \cdot V$ le vecteur $V + V$, $3 \cdot V$ le vecteur $V + V + V$, etc. Plus généralement nous allons définir $\lambda \cdot V$ pour tout scalaire λ .

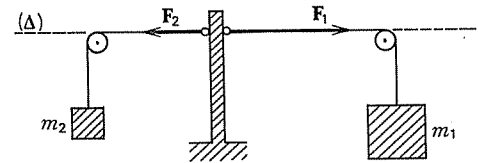


FIG. 0.5.1.

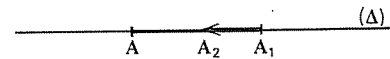


FIG. 0.5.2.

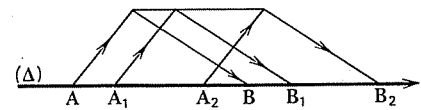


FIG. 0.5.3.

Remarque 0.5.1. — De la définition de l'addition et de ses propriétés, nous pouvons déduire la **relation de Chasles** vectorielle

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA} = 0,$$

si $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des points d'un axe (Δ) .

Produit d'un vecteur par un scalaire

Nous traitons d'abord le cas simple du *partage d'un vecteur AB* en n vecteurs égaux. Dans le cas $n = 2$ la construction à la règle est celle du milieu d'un segment (fig. 0.1.13. a).

Exemple 0.5.1.

Portons sur (Δ) un point I_1 (fig. 0.5.4. a), puis les *graduations* $I_2, I_3, \dots$, extrémités des vecteurs $2 \cdot \mathbf{AI}_1, 3 \cdot \mathbf{AI}_1, \dots$, etc. Considérons la droite I_3B et les parallèles à celle-ci menées par I_1 et I_2 qui coupent AB en C et D . D'après le théorème de *Thalès* (0.1.6.) nous avons

$$AC = CD = DB,$$

soit aussi

$$AB = 3 \cdot AC.$$

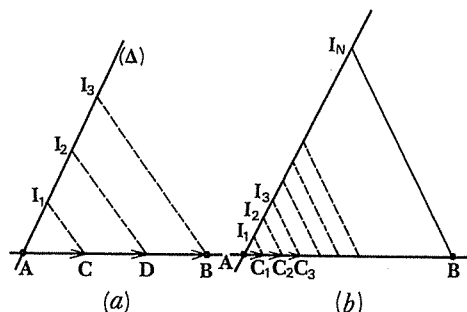


FIG. 0.5.4.

Nous avons réalisé la *trisection* du vecteur $\mathbf{AB}$ ou du segment AB et nous notons

$$(0.5.2.) \quad AC = \frac{1}{3} \cdot AB, \quad AD = \frac{2}{3} \cdot AB.$$

Plus généralement, les parallèles à BI_n (fig. 0.5.4. b) menées par $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ coupent AB aux points $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$. C'est un *partage* de AB en n vecteurs égaux et

$$(0.5.3.) \quad AC_1 = \frac{1}{n} \cdot AB.$$

Exercice 0.5.1. — Construire le vecteur $\frac{3}{5} \cdot \mathbf{AB}$ à partir du vecteur $\mathbf{AB}$.

Exercice 0.5.2. — Soit A, B, C et D quatre points alignés sur un axe, M, N, P et Q les milieux de AB, BC, CD et DA . Montrer que $\mathbf{MN} = \mathbf{PQ}$.

Nous notons C_p le point de la graduation tel que

$$\mathbf{AC}_p = p \cdot \mathbf{AC}_1 = \frac{p}{n} \cdot \mathbf{AB}.$$

Nous avons créé ainsi une *graduation* sur AB , en particulier, si $n = 10^k$, où k est un entier au choix. Il s'agit alors d'une graduation de type *décimal*. (Le mot *graduation* est pris dans son sens courant.)

Exemple 0.5.2.

Considérons l'encadrement à 10^{-3} près du nombre π :

$$3,141 < \pi < 3,142.$$

Nous pouvons construire les vecteurs

$$AC_{3141} = 3141 \cdot 10^{-3} \mathbf{AB},$$

$$AC_{3142} = 3142 \cdot 10^{-3} \mathbf{AB}.$$

Il suffit d'avoir partagé $\mathbf{AB}$ en mille. Ce sont des *approximations* du vecteur $\pi \cdot \mathbf{AB}$ obtenu à la limite en augmentant le nombre de décimales de π . La définition suivante (qui est en même temps un axiome) est fondée sur cette méthode.

Définition 0.5.2.

Soit λ un nombre réel dont on connaît les approximations décimales à 10^{-k} près

$$(0.5.4.) \quad N_k \cdot 10^{-k} \leq \lambda < (N_k + 1) \cdot 10^{-k},$$

où l'entier N_k dépend du choix de $k = 1, 2, \dots$

Soit $\mathbf{V} = \mathbf{AB}$ un vecteur glissant sur (Δ) , gradué par les points $C_1, C_2, \dots$ en 10^k parties égales. Nous pouvons tracer pour tout k (fig. 0.5.5.) les vecteurs

$$AC_{N_k} = N_k \cdot 10^{-k} \mathbf{AB},$$

$$AC_{N_k+1} = (N_k + 1) \cdot 10^{-k} \cdot \mathbf{AB}.$$

Il existe un point $\mathbf{R}$, et un seul, commun à tous les segments $C_{N_k} C_{N_k+1}$. Par définition

$$(0.5.5.) \quad \mathbf{AR} = \lambda \cdot \mathbf{AB}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{V}' = \lambda \cdot \mathbf{V}.$$

Cette opération suit des règles commodes vis-à-vis de l'addition. Nous admettrons les propriétés suivantes :

$$(0.5.6.) \quad \begin{cases} (a) \quad \lambda \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \lambda \cdot \mathbf{V}_1 + \lambda \cdot \mathbf{V}_2, \\ (b) \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \mathbf{V} = \lambda_1 \cdot \mathbf{V} + \lambda_2 \cdot \mathbf{V}, \\ (c) \quad \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \mathbf{V}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \mathbf{V}. \end{cases}$$

Rapport de deux vecteurs glissants

Étant donné deux vecteurs glissants $\mathbf{u}$ et $\mathbf{V}$, on peut trouver par approximations successives (remarque 0.5.3.) un réel λ unique tel que

$$\mathbf{V} = \lambda \cdot \mathbf{u}.$$

Si l'on fixe le vecteur $\mathbf{u}$, tout vecteur glissant $\mathbf{V}$ est alors caractérisé par un nombre λ , ce qui est très commode. Ce

Remarque 0.5.2. — Si nous prenons

$$3,141\,592 < \pi < 3,141\,593$$

le vecteur $\pi \cdot \mathbf{AB}$ est approché par les vecteurs

$$3\,141\,592 \cdot 10^{-6} \cdot \mathbf{AB},$$

$$3\,141\,593 \cdot 10^{-6} \cdot \mathbf{AB}.$$

Il faut avoir préalablement partagé $\mathbf{AB}$ en 10^{-6} . La précision utilisée dépend du but que l'on se donne. Une *longueur d'onde* peut être mesurée avec une grande précision.

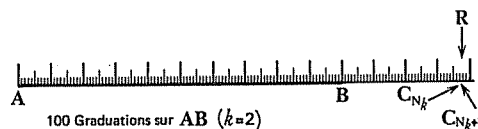


FIG. 0.5.5.

Remarque 0.5.3. — La démarche décrite dans la définition 0.5.2. correspond tout à fait aux procédés utilisés en pratique (notamment quand λ est irrationnel). Le choix de l'entier k correspond à la *précision* voulue. Il est courant de prendre comme *approximation* de $\mathbf{R}$ l'un des deux points C_{N_k} ou C_{N_k+1} , ou même le *milieu* M_k de ces deux points.

Remarque 0.5.4. — Partageons le vecteur unitaire $\mathbf{u}$ en 10^k parties égales. Alors la *mesure* du vecteur $\mathbf{V}$ conduit à $N_k \cdot 10^{-k} \leq \lambda < (N_k + 1) 10^{-k}$. On choisit la valeur λ par excès ou celle par défaut et l'on écrit $\mathbf{V} = \lambda \cdot \mathbf{u}$.

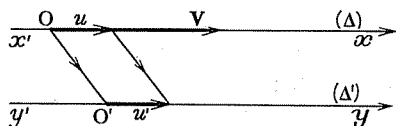


FIG. 0.5.6.

Remarque 0.5.5. — Pour deux axes *parallèles* (Δ) et (Δ') il est commode de choisir des vecteurs unitaires équipollents (fig. 0.5.6.).

Exercice 0.5.3. — Soit trois points A, B et C deux à deux distincts sur (Δ) . Montrer que le rapport $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ (et les rapports identiques) ne dépend pas du choix du vecteur unitaire u .

Remarque 0.5.6. — Posons

$$(\Delta_+) = \{M \in (\Delta) / \overline{OM} \geq 0\}$$

et $(\Delta_-) = \{M \in (\Delta) / \overline{OM} \leq 0\}.$

Ce sont les *demi-droites* issues de O, dont l'existence était affirmée au paragraphe 0.1. De même $\{M / \overline{OA} \leq \overline{OM} \leq \overline{OB}\}$ n'est rien d'autre que le segment AB.

vecteur fixe u , choisi de sens positif sur (Δ) , est appelé **vecteur unitaire**. Le nombre λ , rapport de V à u , est la **mesure algébrique** de V par rapport à u . Si $V = \overline{AB}$, on désigne habituellement cette mesure algébrique par $\overline{AB}$, soit

$$(0.5.7.) \quad \overline{AB} = \overline{AB} \cdot u.$$

La valeur absolue de $\overline{AB}$ précise la notion de vecteur plus ou moins grand. Par ailleurs le signe de $\overline{AB}$ indique le *sens* de $\overline{AB}$ par rapport à u . La valeur absolue joue un grand rôle comme on peut le voir ci-dessous.

Définition 0.5.3.

On appelle **module** ou **norme** d'un vecteur glissant $V = \overline{AB}$ par rapport à un vecteur unitaire u la quantité positive $|\overline{AB}|$ que l'on note $\|\overline{AB}\|$, ou simplement AB .

$$(0.5.8.) \quad \|V\| = \|\overline{AB}\| = |\overline{AB}|.$$

On appelle **distance** des deux points A et B, étant donné le vecteur unitaire u , le module du vecteur $\overline{AB}$ par rapport à u .

La distance entre A et B est parfois notée $d(A, B)$.

Ainsi la **mesure algébrique** n'est autre que la **distance** affectée du signe + ou - suivant le sens du vecteur par rapport à u .

La mesure algébrique suit une règle très commode vis-à-vis de l'addition comme en témoigne le théorème suivant :

Théorème 0.5.1.

a) La mesure algébrique d'une somme est la somme des mesures algébriques.

b) Si l'on multiplie un vecteur par un scalaire k , sa mesure algébrique est également multipliée par k .

C'est une conséquence directe des propriétés (0.5.6.).

Choisissons sur la droite $x'x$ un point O comme référence (fig. 0.4.1.).

L'**abscisse** x du point M sur un axe est la **mesure algébrique** du vecteur $\overline{OM}$ que l'on note

$$(0.5.9.) \quad x = \overline{OM} \quad \text{ou} \quad \overline{OM} = x \cdot u.$$

Pour tout vecteur $\overline{AB}$ de (Δ) , nous pouvons écrire

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

d'où

$$(0.5.10.) \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Car la mesure algébrique d'une somme (ou différence) est égale à la somme (ou différence) des mesures algébriques d'après la relation 0.5.6. b. Nous pouvons énoncer :

Théorème 0.5.2.

La mesure algébrique du vecteur $\overline{AB}$ est égale à l'abscisse de l'extrémité diminuée de l'abscisse de l'origine.

Relation de Chasles

Étant donné, sur un axe (Δ) , des points en nombre quelconque $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ on a, quelle que soit la disposition de ces points, la relation

$$(0.5.11.) \quad \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA} = 0.$$

Cela résulte de la même relation écrite avec les vecteurs, qui se réduit à $\overline{AA} = 0$ (cf. remarque 0.5.1.).

Milieu d'un segment

Si M est le milieu du segment AB , alors le vecteur $\overline{AM}$ est équivalent au vecteur $\overline{MB}$ (fig. 0.1.13. b) et nous avons $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{0}$ soit $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$, ce qui veut dire que M est *équidistant* de A et B . Si l'on applique la relation de Chasles en passant par l'origine O , il en résulte (exercice)

$$(0.5.12.) \quad \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$

Ainsi l'abscisse du milieu d'un segment est la demi-somme des abscisses des extrémités du segment.

Théorème de Thalès

Ce théorème très connu généralise le théorème (0.1.5.) sur les milieux des côtés d'un triangle. Considérons dans un plan (P) un triangle ABC (fig. 0.5.7.). Soit (Δ) la droite AB munie d'un vecteur unitaire u , (Δ') la droite AC munie d'un vecteur unitaire u' (sans rapport avec u).

Remarque 0.5.7. — Le lecteur peut retrouver la relation (0.5.10.) grâce à la *notion intuitive de distance*, en supposant que A et B sont situés sur la partie positive Ox (faire un dessin). Les points O, A et B sont soit dans cet ordre, soit dans l'ordre O, B, A .

Dans le premier cas, nous avons la relation entre distances,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

$$\text{soit ici} \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

les trois mesures algébriques étant positives.

Dans le deuxième cas, nous avons

$$\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB},$$

$$\text{soit} \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Remarque 0.5.8. — *Michel Chasles* (1793-1880), géomètre, a présenté en 1830 à l'Académie de Bruxelles son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Cet ouvrage a le mérite d'élucider de façon définitive les questions relatives au signe des segments sur un axe et au sens des angles dans le plan.

Exercice 0.5.3. — Retrouver le résultat (0.5.12.).

Exercice 0.5.4. — Soit A, B, C et D , quatre points donnés d'un axe, M et N les milieux de AB et CD . Montrer que

$$a) \quad 2 \overline{MN} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC};$$

$$b) \quad \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

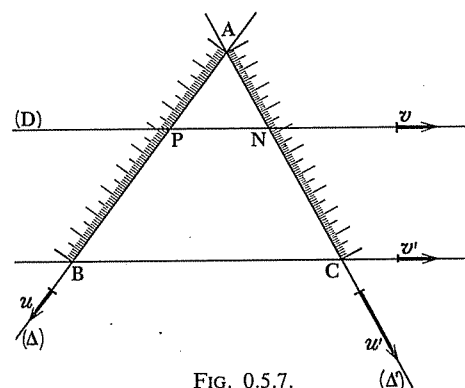


FIG. 0.5.7.

Remarque 0.5.9. — Une conséquence importante du théorème de Thalès est la relation

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$$

(fig. 0.5.7.) pourvu que BC et PN soient munis de vecteurs unitaires équipollents. Le lecteur pourra le montrer en traçant par N la parallèle à (Δ') par exemple.

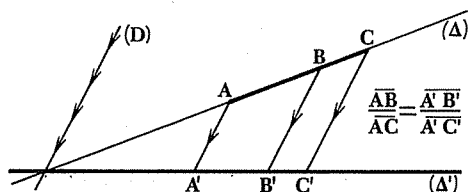


FIG. 0.5.8.

Théorème 0.5.3.

Si (D) est une parallèle au côté BC coupant (Δ) en P et (Δ') en N (fig. 0.5.7.), alors

$$(0.5.13.) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}.$$

L'égalité est facile à montrer si le nombre $\lambda = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$ est de la forme $\frac{p}{n}$ avec p et n entiers (cf. fig. 0.5.4. b). Dans le cas général considérons les encadrements décimaux de λ :

$$N_k \cdot 10^{-k} \leq \lambda < (N_k + 1) \cdot 10^{-k}.$$

Partageons le segment AB en petits segments égaux de longueur 10^{-k} , d'extrémités $C_1, C_2, \dots$. Ces graduations se projettent parallèlement à (D) en $D_1, D_2, D_3, \dots$, sur AC.

Le point P, situé entre C_{N_k} et C_{N_k+1} se projette au point N, situé entre D_{N_k} et D_{N_k+1} pour tout k . D'après la définition 0.5.2., il est immédiat que $\overline{AN} = \lambda \cdot \overline{AC}$, ce qu'il fallait démontrer.

Notons que N est la projection du point P sur AC parallèlement à BC (définition 0.1.4.). Le théorème 0.5.3. entraîne que le rapport de deux vecteurs est invariant par projection parallèle, ou qu'une parallèle aux bases d'un trapèze $ACC'A'$ (fig. 0.5.8.) divise les deux autres côtés dans le même rapport (exercice). Nous pouvons énoncer.

Théorème 0.5.4.

Les projections parallèles d'un axe (Δ) sur un axe (Δ') conservent le rapport des vecteurs glissants.

Division harmonique

Étant donné un segment AB de (Δ), il existe deux points C et D qui *divisent* A et B dans le rapport k , c'est-à-dire que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

La construction ci-contre (fig. 0.5.9.) permet de trouver ces deux points. L'un, C, est compris entre A et B, l'autre, D, ne l'est pas, soit

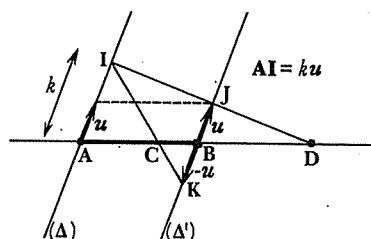


FIG. 0.5.9.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = - \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Définition 0.5.4.

Étant donné quatre points A, B, C et D d'un axe, C et D sont dits **conjugués harmoniques** par rapport à A et B si les mesures algébriques $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$ et $\overline{DB}$ vérifient la relation

$$(0.5.13.) \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = - \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Cette relation ne change pas si l'on modifie le sens positif de parcours. Cela signifie que A et B sont aussi conjugués harmoniques par rapport à C et D.

Les quatre points A, B, C et D, pris dans l'ordre indiqué, *forment une division harmonique*.

Si a , b , c et d sont les abscisses des points A, B, C et D prises avec un sens positif et une origine choisis de manière quelconque, la définition 0.5.4. se traduit par la relation

$$\frac{a-c}{b-c} + \frac{a-d}{b-d} = 0,$$

soit

$$(0.5.14.) \quad (a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

C'est la *relation harmonique générale*. Elle est valable quelle que soit l'origine des abscisses.

Elle peut prendre des formes plus simples lorsque l'on particularise le choix de l'origine comme nous allons le voir dans les exemples suivants utilisés en *optique* géométrique, dans la théorie des miroirs sphériques et des lentilles minces.

Exemple 0.5.1.

L'origine est l'un des quatre points considérés.

Si $a = 0$, par exemple, nous avons

$$b(c+d) = 2cd,$$

Exercice 0.5.5. — Les points A, B et C (fig. 0.5.9.) forment une *section dorée* si

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AB}{AC}.$$

Calculer le rapport k en lequel C divise AB ($k > 0$).

C'est le *nombre d'or* égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il correspond à des proportions harmonieuses fréquemment utilisées en art graphique.

Remarque 0.5.10. — Une division harmonique A, B, C, D est encore caractérisée par les relations suivantes :

$$a) \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = - \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}};$$

$$b) \quad \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0;$$

$$c) \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = -1, \text{ noté encore}$$

$$(A,B,C,D) = -1.$$

La quantité (A,B,C,D) s'appelle *birapport* des quatre points A, B, C et D.

Exercice 0.5.6. — Montrer que si a et b sont racines de l'équation du second degré

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$$

et c et d de l'équation similaire

$$\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma' = 0$$

la relation (0.5.14.) prend la forme

$$\alpha \gamma' + \gamma \alpha' = 2\beta \beta'.$$

Exercice 0.5.7. — Montrer que si C et D divisent harmoniquement AB dans les rapports $\pm k$, le milieu J de CD divise AB dans le rapport k^2 .

Exercice 0.5.8. — Soit un ensemble de quatre droites concourantes ou parallèles issues des quatre points A, B, C et D d'une division harmonique. C'est un *faisceau harmonique*.

a) Montrer que les intersections A', B', C' et D' d'une sécante et du faisceau déterminent encore une division harmonique.

b) Montrer qu'un faisceau de quatre droites concourantes est harmonique si, et seulement si, trois de ces droites découpent deux segments égaux sur une parallèle à la quatrième.

soit

$$(0.5.15.) \quad \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$$

(relation de *Descartes*)

$\overline{AB}$ est la *moyenne harmonique* de $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$.

Exemple 0.5.2.

Si l'origine des abscisses est le milieu I de AB, nous avons

$$\overline{AI} = \overline{IB},$$

soit $a + b = 0$.

La relation 0.4.3. s'écrit

$$a \cdot b + c \cdot d = 0$$

ou

$$(0.5.16.) \quad \overline{IA}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

(relation de *Newton*).

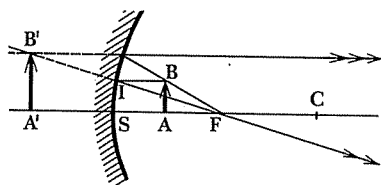


FIG. 0.5.10.

Exemple 0.5.3.

Considérons (fig. 0.5.10.) un miroir cylindrique de centre C et un rayon AI de *faible incidence*. Le rayon réfléchi coupe l'axe en A'. On démontre la relation approchée

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}},$$

c'est-à-dire que la relation SCAA' est harmonique, d'après la relation (0.5.15.). Si F est le milieu de SC, la relation ci-dessus devient

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2.$$

C'est l'analogie de la relation de Newton (0.5.16.).

Le point F est appelé *foyer*. C'est la limite du point A' quand le point A s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire quand le rayon incident est parallèle à l'axe SC.

Cette propriété permet de construire l'image A'B' d'un objet AB (fig. 0.5.10.).

Exercice 0.5.9. — Montrer que le grandissement

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} \text{ du miroir cylindrique est égal à } \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}.$$

0.6. ADDITION DES VECTEURS LIBRES ET MULTIPLICATION DES VECTEURS PAR DES SCALAIRES

L'expérience montre que la *résultante* de deux forces s'obtient par la construction classique du *parallélogramme des forces* (fig. 0.6.1.) ce qui suggère la définition suivante :

Définition 0.6.1.

La *somme géométrique* de plusieurs vecteurs donnés $V_1, V_2, \dots, V_n$ est le vecteur libre obtenu de la manière suivante (fig. 0.6.2.) : mener par un point A quelconque le vecteur AA_1 équipollent au vecteur V_1 , puis par A_1 le vecteur A_1A_2 équipollent au vecteur V_2 et ainsi de suite jusqu'au vecteur $A_{n-1}A_n$ équipollent au vecteur V_n .

Le vecteur libre V équipollent au vecteur AA_n est la somme géométrique cherchée.

Le vecteur V est désigné par la notation

$$(0.6.1.) \quad V = V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

Le résultat reste le même si l'on remplace le point A par un autre point arbitraire B. Il suffit d'appliquer l'axiome 0.1.5. autant de fois qu'il le faut (exercice pour $n = 2$). Le contour $BB_1B_2 \dots B_n$ se déduit du contour $AA_1A_2 \dots A_n$ par la *translation* AB (paragraphe 2.1.).

Dans le cas de *deux vecteurs* (fig. 0.6.3.) la détermination de

$$V = V_1 + V_2$$

se réduit à la construction classique du *parallélogramme* des forces.

D'après la construction (fig. 0.6.4.), il est clair que

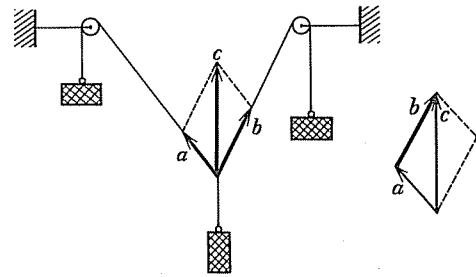
$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1.$$

Cette propriété de *commutativité* s'étend aisément à un nombre quelconque de vecteurs.

De la définition 0.6.1., il s'ensuit également que l'*addition des vecteurs* est une *opération associative* (fig. 0.6.5.).

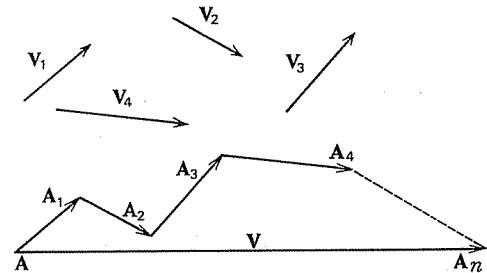
$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3).$$

Il existe également un *vecteur nul* 0 tel que pour tout vecteur quelconque V



Résultante de deux forces.

FIG. 0.6.1.



Somme géométrique de plusieurs vecteurs.

FIG. 0.6.2.

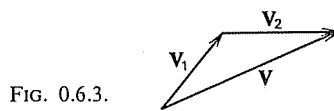


FIG. 0.6.3.

Addition de vecteurs.

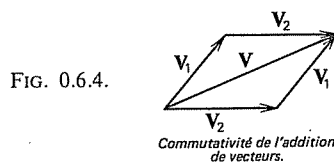
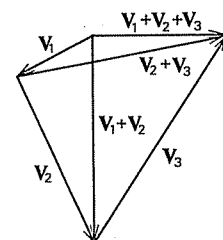


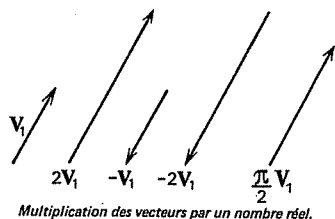
FIG. 0.6.4.

Commutativité de l'addition de vecteurs.



Associativité de l'addition de vecteurs.

FIG. 0.6.5.



Multiplication des vecteurs par un nombre réel.

FIG. 0.6.6.

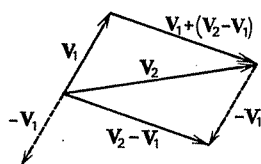
Remarque 0.6.1. — Nous avons défini le *module* $\|V\|$ du vecteur V (définition 0.5.3.). Cette notion permet de déduire le vecteur $\lambda \cdot V$ du vecteur V de la façon suivante :

Sa *longueur* est $|\lambda| \cdot \|V\|$.

Si $V \neq 0$ et $\lambda > 0$ alors $\lambda \cdot V$ a la *direction* et le *sens* du vecteur V .

Si $V \neq 0$ et $\lambda < 0$ alors $\lambda \cdot V$ a la *direction* de V et le *sens opposé* à celui du vecteur V .

Si $V = 0$ ou $\lambda = 0$ (ou les deux) alors $V = 0$.



Différence de vecteurs.

FIG. 0.6.7.

$$V + 0 = 0 + V = V.$$

D'autre part, tout vecteur V a un opposé $V' = -V$ qui vérifie $V + V' = 0$.

Multiplication de vecteurs par un nombre réel

La définition (0.5.2.) reste valable si l'on remplace « vecteur glissant » par « vecteur libre ». Les vecteurs V et $\lambda \cdot V$ ont même direction : nous dirons aussi qu'ils sont *colinéaires*.

Les propriétés (0.5.6.) que nous avons énoncées pour les vecteurs glissants restent valables pour les vecteurs libres, soit

$$(0.6.2.) \quad \begin{cases} (a) & \lambda (V_1 + V_2) = \lambda \cdot V_1 + \lambda \cdot V_2, \\ (b) & (\lambda + \mu) \cdot V = \lambda \cdot V + \mu \cdot V, \\ (c) & \lambda (\mu \cdot V) = (\lambda \cdot \mu) \cdot V \\ (d) & 1 \cdot V = V. \end{cases}$$

et bien sûr

A la place de $V_2 + (-V_1)$, on écrit simplement $V_2 - V_1$ (fig. 0.6.7.).

Ces propriétés, avec celles de l'addition définissent une structure d'*espace vectoriel* (tome III, paragraphe 0.1.) pour l'ensemble des vecteurs libres.

La multiplication par des scalaires permet d'envisager des sommes « coefficientées »

$$S = \lambda_1 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot V_2 + \dots + \lambda_n \cdot V_n,$$

que nous appellerons *combinaisons linéaires* des vecteurs libres

$$V_1, V_2, \dots, V_n.$$

Il est également possible d'envisager des moyennes pondérées

$$M = \frac{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}.$$

Ces moyennes vectorielles sont à l'origine de la notion de barycentre traitée ci-dessous, et qu'il est possible de sauter en première lecture.

0.7. BARYCENTRES

Nous avons vu qu'il existait un point M unique appelé *milieu* tel que $\mathbf{MA} + \mathbf{MB} = \mathbf{0}$ et que, si nous choisissons une origine O sur AB , nous avons $\mathbf{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{OA} + \mathbf{OB})$.

Nous allons généraliser cette notion de milieu de deux points. Soit n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'espace et n nombres réels non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Nous voulons déterminer s'il existe un point M tel que

$$(0.7.1.) \quad \alpha_1 \mathbf{MA}_1 + \alpha_2 \mathbf{MA}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{MA}_n = \mathbf{0}$$

ou encore
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{MA}_i = \mathbf{0}.$$

Choisissons une origine O . La relation 0.7.1. s'écrit alors

$$\alpha_1 (\mathbf{MO} + \mathbf{OA}_1) + \alpha_2 (\mathbf{MO} + \mathbf{OA}_2) + \dots + \alpha_n (\mathbf{MO} + \mathbf{OA}_n) = \mathbf{0},$$

soit

$$(0.7.2.) \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \mathbf{MO} + \alpha_1 \mathbf{OA}_1 + \alpha_2 \mathbf{OA}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{OA}_n = \mathbf{0}.$$

Dans le cas général où $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, nous obtenons

$$(0.7.3.) \quad \mathbf{OM} = \frac{\alpha_1 \mathbf{OA}_1 + \alpha_2 \mathbf{OA}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{OA}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

Il est facile de montrer que le point M ainsi obtenu est unique (exercice).

Définition 0.7.1.

Nous appellerons *barycentre* de n points A_i , affectés de coefficients α_i tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, le point M défini par la relation

$$\mathbf{OM} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{OA}_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

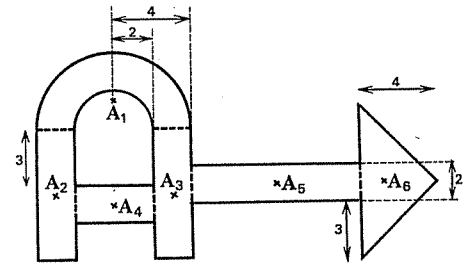


FIG. 0.7.1.

Remarque 0.7.1. — Soit une plaque homogène composée (fig. 0.7.1.). Nous avons vu au tome I que le centre de gravité de la plaque s'obtient à partir des centres de gravité $A_1, A_2, \dots, A_n$ des divers éléments. Le centre de gravité est le barycentre de ces points chargés par les masses $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Exercice 0.7.1. — Soit un parallélogramme $ABCD$. Calculer les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{MA} - \mathbf{MB} + \mathbf{MC} - \mathbf{MD}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{MA} + \mathbf{MB} - \mathbf{MC} - \mathbf{MD}. \end{aligned}$$

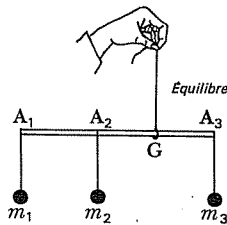


FIG. 0.7.2.

Remarque 0.7.2. — Lorsque l'espace est muni d'un repère cartésien (cf. paragraphe 0.9.), nous pouvons donner l'expression des coordonnées du barycentre $M(x_G, y_G, z_G)$ en fonction de celles des points $A_i(x_i, y_i, z_i)$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Exercice 0.7.2. — Déterminer le centre de gravité de la plaque dessinée figure 0.7.1.

Exercice 0.7.3. — Montrer que dans le cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, le vecteur U peut s'exprimer sous la

forme $\alpha_1 B_1 A_1$, où B_1 désigne le barycentre du système $A_2(\alpha_2), A_3(\alpha_3), \dots, A_n(\alpha_n)$.

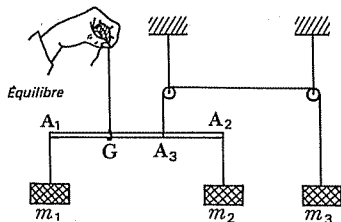


FIG. 0.7.3.

Exemple 0.7.1.

Considérons une tige rectiligne sans masse à laquelle sont accrochées trois masses m_1, m_2, m_3 aux points A_1, A_2, A_3 (fig. 0.7.2.). Il s'agit de déterminer en quel point G de la tige est appliquée la résultante des trois poids.

D'après le théorème des moments, nous avons

$$m_1 \overline{GA_1} + m_2 \overline{GA_2} + m_3 \overline{GA_3} = 0,$$

soit

$$m_1 \overline{GA_1} + m_2 \overline{GA_2} + m_3 \overline{GA_3} = 0.$$

En prenant par exemple A_1 comme origine,

$$A_1 G = \frac{m_2 A_1 A_2 + m_3 A_1 A_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Dans le cas particulier où $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$, la relation 0.7.3. s'écrit $U = 0$ en posant

$$U = \alpha_1 OA_1 + \alpha_2 OA_2 + \dots + \alpha_n OA_n.$$

Si U est le vecteur nul, tout point M de l'espace est barycentre; le problème est indéterminé. Sinon, le problème est impossible et la somme $\alpha_1 MA_1 + \alpha_2 MA_2 + \dots + \alpha_n MA_n$ est égale à un vecteur U , indépendant du point M (exercice).

Exemple 0.7.2.

Considérons le système représenté figure 0.7.3. où la masse m_3 agit en sens contraire de m_1 et m_2 .

En appliquant le théorème des moments, nous pouvons écrire que

$$m_1 \cdot GA_1 + m_2 \cdot GA_2 - m_3 \cdot GA_3 = 0.$$

Il en résulte un point G , sauf si $m_3 = m_1 + m_2$. Dans ce cas le vecteur $m_1 GA_1 + m_2 GA_2 - m_3 GA_3$ est égal à $m_1 A_3 A_1 + m_2 A_3 A_2$, vecteur qui n'est jamais nul (le système des poids revient à un couple).

Propriétés du barycentre

- Le barycentre est indépendant de l'ordre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Lorsque nous multiplions les coefficients α_i par un scalaire d différent de zéro, le barycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ n'est pas modifié.

c) Le barycentre des n points est inchangé lorsque p des n points sont remplacés par leur barycentre affecté d'un coefficient égal à la somme des coefficients de ces p points, supposée non nulle.

Soit par exemple $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta \neq 0$ et B le barycentre de $A_1 (\alpha_1)$ et $A_2 (\alpha_2)$. Nous avons donc

$$\alpha_1 \mathbf{MA}_1 + \alpha_2 \mathbf{MA}_2 = \beta \mathbf{MB}.$$

La relation 0.7.1. s'écrit alors

$$\beta \mathbf{MB} + \alpha_3 \mathbf{MA}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{MA}_n = 0.$$

M est le barycentre des points B, $A_3, \dots, A_n$ affectés des coefficients $\beta, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

La propriété c) est très utile lors de la recherche pratique des barycentres.

Exemple 0.7.3.

Centre de gravité d'un triangle ABC (fig. 0.7.4.).

Nous voulons déterminer le barycentre G du système A (1), B (1) et C (1). Soit D, E et F les milieux de BC, AC et AB respectivement. D'après les propriétés précédentes, G est le barycentre de A (1) et D (2). Donc G appartient à la médiane AD et par analogie aux médianes BE et CF. C'est donc le *point de concours des médianes*. De plus, la relation $\mathbf{GA} + 2 \mathbf{GD} = 0$, ou $\mathbf{DA} = 3 \mathbf{DG}$ montre que G est au tiers de la médiane à partir de A.

Exercice 0.7.4. — Déterminer le barycentre de trois points A, B et C alignés affectés respectivement des coefficients $-1, 1$ et 1 .

Exercice 0.7.5. — Soit A, B et C trois points alignés tels que B soit le milieu de AC. Montrer que le conjugué harmonique de C par rapport à A et B est le barycentre de A (1) et B (2).

Exercice 0.7.6. — Déterminer le barycentre des points A (-1), B (1), C (1) lorsque A, B, C sont les sommets d'un triangle. Programmer l'affichage sur *écran* des points A, B, C, G (coordonnées, cf. Remarque 0.7.2). De même avec des coefficients quelconques α, β, γ .

Programmer le tracé du côté AB, lieu des points M barycentres de A (λ) et B ($1 - \lambda$) avec $0 \leq \lambda \leq 1$.

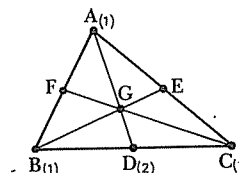


FIG. 0.7.4.

Exercice 0.7.7. — Déterminer le barycentre des sommets A, B, C et D d'un quadrilatère convexe, affectés du coefficient 1. Étudier le cas particulier d'un parallélogramme.

0.8. PROJECTIONS PARALLÈLES SUR UN AXE

Nous connaissons déjà les projections sur un plan parallèlement à une droite. C'est l'inverse ici.

Soit (D) une droite donnée de l'espace et soit (P) un plan donné non parallèle à (D).

Définition 0.8.1.

On appelle *projection* d'un point M de l'espace sur la *droite* (D) parallèlement au plan (P) la trace M' sur (D) du plan parallèle à (P) mené par M (fig. 0.8.1.).

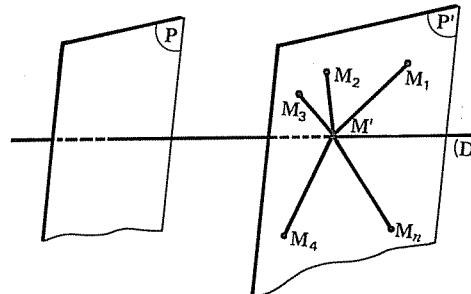


FIG. 0.8.1.

A tout point M de l'espace correspond un point M', et un seul; inversement à tout point M' de (D) correspondent une infinité de points M, (fig. 0.8.1.) dont le lieu est le plan (P') mené parallèlement à (P) par le point M'.

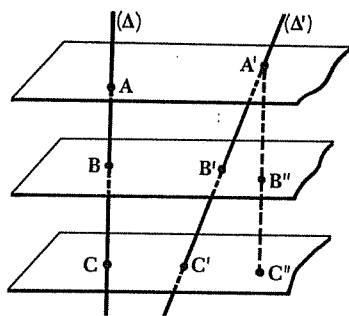


FIG. 0.8.2.

Projection d'un vecteur sur un axe

La projection d'un vecteur $\overline{AB}$ sur un axe parallèlement à un plan, est le vecteur $\overline{A'B'}$ ayant pour origine et pour extrémité les projections de l'origine et de l'extrémité du vecteur donné.

Nous pouvons citer à cette occasion la forme finale du **théorème de Thalès** dans l'espace, relatif à deux axes (Δ) et (Δ') non concourants (fig. 0.8.2.).

Nous projetons les points A, B et C de (Δ) sur (Δ') parallèlement à un plan. Soit A', B', C' les projections. Nous voulons montrer l'égalité

$$(0.8.1.) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Il est possible de se ramener au théorème de Thalès dans le plan (0.5.6.) en menant par A' la parallèle à (Δ) , qui perce les deux autres plans en B'' et C''. Les rapports (0.8.1.) sont tous égaux à $\frac{\overline{A'B''}}{\overline{A'C''}}$.

D'où le théorème

Théorème 0.8.1.

La projection parallèle sur un axe (parallèlement à un plan) conserve le rapport des vecteurs glissants.

Projections orthogonales

La projection est dite **orthogonale** si le plan (P) est **perpendiculaire** à la droite (D). C'est le cas le plus fréquent dans les applications usuelles.

Projection sur un axe de la somme géométrique de plusieurs vecteurs

Les projections de deux vecteurs équipollents faites parallèlement à une même direction de plan sur un même axe ou sur des axes parallèles sont des vecteurs équipollents.

Considérons (fig. 0.8.3.) le contour $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ par lequel nous avons défini (définition 0.6.1.) la somme géométrique

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_n.$$

Projetons les points $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ parallèlement au plan (P) sur un axe dirigé $x'x$. La somme géométrique $\mathbf{AA}_n$ a pour projection le vecteur $\mathbf{A'A'_n}$.

Les projections $A', A'_1, \dots, A'_n$ vérifient la *relation de Chasles* (0.5.1.) qui s'écrit

$$\overline{A'A'_1} + \overline{A'_1A'_2} + \dots + \overline{A'_{n-1}A'_n} = \overline{A'A'_n}.$$

Nous pouvons énoncer alors la proposition fondamentale suivante :

Théorème général des projections 0.8.2.

La mesure algébrique de la projection sur un axe de la somme géométrique de plusieurs vecteurs est égale à la somme des mesures algébriques des projections de ces vecteurs.

Ce théorème a une importance capitale et ses applications sont très nombreuses.

Nous allons tout d'abord envisager la *projection sur un axe dirigé d'un vecteur porté par un autre axe dirigé*, parallèlement à un plan (P).

Considérons un vecteur $\mathbf{V}$ porté par un axe dirigé (Z) le long duquel il a pour mesure algébrique V . Si $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Z) nous avons

$$\mathbf{V} = V \cdot \mathbf{u}.$$

Si l'on projette $\mathbf{V}$ et $\mathbf{u}$ sur un axe dirigé (X) parallèlement à un plan (P), figure 0.8.4., il résulte du *théorème de Thalès* que le rapport des vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{u}$ est égal au rapport de leurs projections $\mathbf{V'}$ et $\mathbf{u'}$. Il en résulte

$$\mathbf{V'} = V \cdot \mathbf{u'},$$

ce que l'on exprime par le théorème.

Théorème 0.8.3.

La mesure algébrique de la projection sur un axe (X) d'un vecteur porté par un autre axe (Z) est le produit de la mesure algébrique de ce vecteur sur (Z) par la mesure algébrique de la projection sur (X) du vecteur unitaire de (Z).

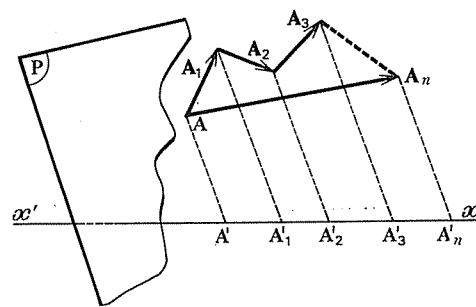


FIG. 0.8.3.

Exercice 0.8.1. — Soit un plan (P) et une droite (D) non parallèle à ce plan. Soit d'autre part deux droites (Δ) et (Δ') du plan (P). Nous effectuons la construction suivante :

Un point M quelconque est projeté sur (P) en un point N, parallèlement à (D); ce point N est alors projeté sur (Δ) en L, parallèlement à (Δ'). Montrer que L est la projection de M sur (Δ) parallèlement à un certain plan (faire le dessin).

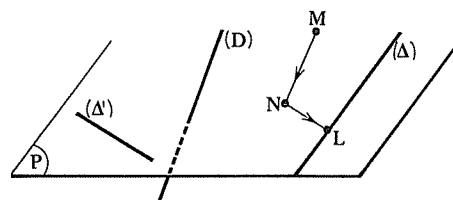


FIG. 0.8.4.

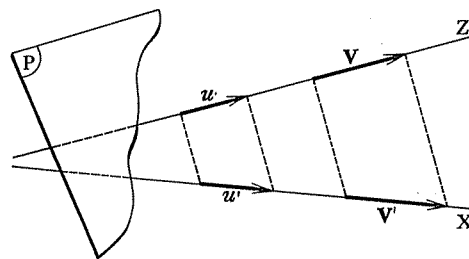


FIG. 0.8.5.

Remarque 0.8.1. — Nous indiquons au paragraphe 0.10. l'idée qui conduit au cosinus de l'angle des deux axes pour évaluer la mesure algébrique d'un vecteur projeté.

Nous allons maintenant voir des conséquences de la théorie des projections. En effet, nous étudierons les propriétés des figures du plan ou de l'espace à l'aide des coordonnées de certains points de ces figures. C'est l'objet de la *géométrie analytique* dont René Descartes (1596-1650) doit être considéré comme le fondateur.

0.9. REPÈRES CARTÉSIENS

Coordonnées dans le plan

Soit dans le plan deux axes dirigés $x'x$ et $y'y$, perpendiculaires ou non, se coupant en un point O . A tout point M du plan, nous associons ses projections P et Q sur chacun des axes parallèlement à l'autre (fig. 0.9.1.).

Les mesures algébriques $X = \overline{OP}$ et $Y = \overline{OQ}$ des vecteurs OP et OQ sur ces axes sont les *coordonnées cartésiennes* du point M ; X est l'*abscisse* de M et Y son *ordonnée*. Tout système de valeurs X et Y définit un point M , et un seul.

Soit V un vecteur donné dans le plan des axes Ox et Oy sur lesquels sont choisis des vecteurs unitaires i et j . Menons le vecteur OM équivalent au vecteur V .

Nous avons

$$OM = OP + PM,$$

avec

$$OP = Xi \quad \text{et} \quad PM = OQ = Yj,$$

soit

$$(0.9.1.) \quad OM = Xi + Yj.$$

X et Y sont appelés les *composantes scalaires du vecteur V* .

Coordonnées dans l'espace

Considérons trois axes Ox , Oy , Oz , orthogonaux (fig. 0.9.2.) et choisissons sur chaque axe des vecteurs unitaires i , j , k . Nous obtenons ainsi un repère cartésien orthogonal. L'extrémité M du vecteur OM se projette orthogonalement en H , K et L sur les plans yOz , xOz et xOy . Le point H se projette en Q et R sur Oy et Oz , le point K en P et R sur Ox et Oz , le point L en P et Q sur Ox et Oy .

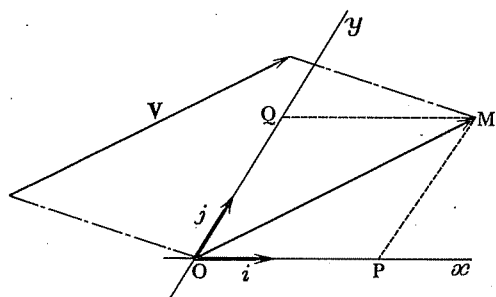


FIG. 0.9.1.

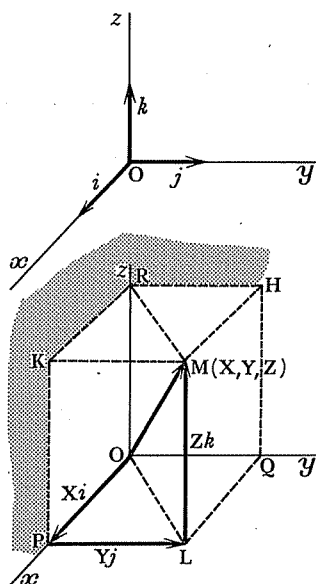


FIG. 0.9.2.

Le contour OPLM formé de vecteurs équipollents aux vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$ est le *contour de coordonnées* du point M. On écrit l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LM}.$$

Si X, Y et Z sont les mesures algébriques de $\overrightarrow{OP}$,

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OR},$$

nous avons

$$(0.9.2.) \quad \overrightarrow{OM} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}.$$

X, Y et Z sont les *composantes scalaires de tout vecteur libre* $\mathbf{V}$ équipollent à $\overrightarrow{OM}$.

Représentation des courbes

La représentation des courbes est d'une importance capitale en physique et en mécanique pour l'étude du mouvement des particules. Cette importante partie des mathématiques est la géométrie différentielle.

Un repère cartésien étant choisi, on peut représenter une courbe (C) par la fonction vectorielle (fig. 0.9.3.)

$$(0.9.3.) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

A chaque valeur t_0 de la variable t , correspond un point de (C) repéré par le vecteur $\mathbf{r}(t_0)$ dont les coordonnées sont $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$.

Une représentation de la forme 0.9.3. est appelée une *représentation paramétrique* de la courbe (C), et t le *paramètre* de cette représentation. En mécanique la variable t est le temps.

Dans les chapitres 3 et 5 nous verrons les représentations respectivement des *courbes planes* et des courbes non planes de l'espace dites *courbes gauches*.

Remarque 0.9.1. — Soit A (x_1, y_1, z_1) et B (x_2, y_2, z_2) deux points donnés. Les composantes X, Y, Z du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Remarque 0.9.2. — Lorsque deux vecteurs sont parallèles, leurs composantes sont proportionnelles (exercice).

Exercice 0.9.1. — Soit les points A (3, 5, -4) et B (1, 3, -2).

- Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$.
- Déterminer le point M de la droite AB d'abscisse 5.

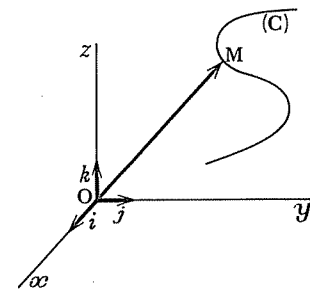


FIG. 0.9.3.

0.10. ÉTALON DE LONGUEUR DANS L'ESPACE

La notion de *distance* est capitale dans tous les domaines où l'on utilise la géométrie. Elle donne naissance aux notions de surface, de volume, etc. Or nous n'avons défini la distance que sur *un axe donné* (Δ) dans le paragraphe 0.5., étant donné un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ choisi sur cet axe. Il est donc nécessaire d'*harmoniser les vecteurs unitaires* pour toutes les directions possibles de l'espace. Nous partons de l'*étalon*

constitué par un vecteur unitaire u sur un axe donné (Δ) , et nous voulons étalonner un axe quelconque (Δ') . Nous procédons selon les deux règles suivantes :

Règle 0.10.1.

Si l'axe (Δ') est parallèle à (Δ) , le vecteur unitaire u' de (Δ') est choisi équipollent à u .

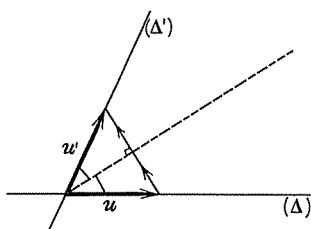


FIG. 0.10.1.

Règle 0.10.2.

Si l'axe (Δ') rencontre (Δ) , le vecteur unitaire u' est choisi (au sens près) symétrique de u par rapport à la bissectrice de l'angle (Δ, Δ') .

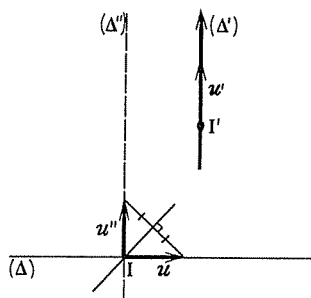


FIG. 0.10.2.

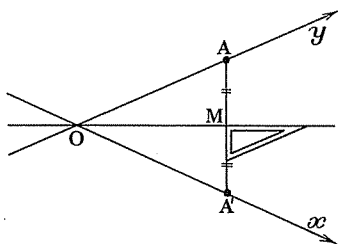


FIG. 0.10.3.

Remarque 0.10.1. — De la propriété (b) ci-contre, nous pouvons déduire une construction très simple de la *bissectrice* d'un angle de demi-droites. Nous traçons (à l'aide d'un compas ou d'une règle graduée) à partir de I deux segments IA et IA' de longueur égale sur (Δ) et (Δ') (fig. 0.10.3.). La *médiatrice* de AA' est la droite cherchée par raison de symétrie.

Nous savons construire une bissectrice (axiome 0.2.2.) pour effectuer la symétrie considérée (fig. 0.10.1.). Si l'axe (Δ') ne rencontre pas (Δ) , il est aisé de tracer par un point de (Δ) un axe (Δ'') parallèle à (Δ') . On applique alors les deux règles précédentes successivement (fig. 0.10.2.). Nous verrons au chapitre 1 (paragraphe 1.2.) que la symétrie de la règle (0.10.2.) peut être remplacée par une *rotation* ou une *translation*. Les transformations qui conservent la longueur sont appelées *isométries* (paragraphe 2.1.). Il s'agit simplement de « faire venir » u en u' sans dilatation ni rétraction (utiliser le *compas*!).

En pratique ce sont les *instruments de mesure* qui permettent de tracer des points de distance donnée : règle graduée, compas, pied à coulisse, procédés optiques (interféromètre, télémètre).

L'unité de mesure du système international (SI) est le *mètre* qui est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2 p_{10}$ et $5 d_5$ de l'atome de krypton 86 !

Figures remarquables

Il résulte des règles (0.10.1.) et (0.10.2.) (ainsi que des résultats du paragraphe 0.5.) que

a) deux *vecteurs équipollents* ont même longueur. Inversement deux vecteurs de même longueur et de support parallèles sont équipollents;

b) deux *vecteurs symétriques* par rapport à une droite ont même longueur.

Inversement, deux vecteurs de même longueur construits sur la même origine A sont symétriques par rapport aux bissectrices de leurs supports.

Ces deux résultats permettent d'exercer les propriétés bien connues des figures remarquables (parallélogrammes, cercle, sphère, etc.) comportant des segments égaux. Ce sont ces *propriétés métriques* (relations à la longueur) qui seront étudiées aux chapitres suivants, avec la notion d'*angle* qui joue aussi un rôle capital.

Repères normés

Il est souvent utile de disposer d'un système étalonné de vecteurs unitaires i, j, k pour repérer les points de l'espace dans un repère cartésien (paragraphe 0.9.). On peut par exemple choisir i , puis en déduire j et k par symétrie ou par *mesure* directe. On dit alors que le repère est *normé*. Si en plus les axes sont orthogonaux, il s'agit en fait d'un *repère orthonormé* qui sera l'outil permanent du chapitre 1.

Exercice 0.10.1 — Montrer que la symétrie par rapport à un plan conserve la longueur des segments.

Remarque 0.10.2. — Les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux égaux. Inversement un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux égaux est un parallélogramme. Si tous les côtés sont égaux, il s'agit d'un *losange* dont les diagonales sont des axes de symétrie. Ces propriétés sont déjà connues des lecteurs.

Exercice 0.10.2 — Montrer que tout *diamètre* d'un cercle (C) est axe de symétrie pour ce cercle; que tout plan diamétral d'une sphère (S) est plan de symétrie pour (S).

Exercice 0.10.3. — Montrer que les bissectrices (D_3) et (D_4) de deux droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales, et que (D_1, D_2, D_3, D_4) est un *faisceau harmonique* (exercice 0.5.8.).

Exercice 0.10.4. — Soit un faisceau harmonique (D_1, D_2, D_3, D_4) dont les rayons (D_1) et (D_2) sont *perpendiculaires*. Montrer que (D_1) et (D_2) sont les deux bissectrices de l'angle formé par (D_3) et (D_4).

0.11. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

0.11.1. — Montrer que les segments qui joignent les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme et les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu.

0.11.2. — Soit ABCD un parallélogramme où P et Q désignent les milieux des côtés BC et CD respectivement. Démontrer que AP et AQ coupent la diagonale BD en des points E et F qui la partagent en trois parties égales.

0.11.3. — On donne quatre points A, B, C et D. Combien y a-t-il de plans passant par deux d'entre eux et le milieu du segment joignant les deux autres?

0.11.4. — Étant donné deux droites (D) et (D') non dans un même plan, deux points A et B sur (D), deux points A' et B' sur (D'), démontrer que les droites AA' et BB' ne sont pas dans un même plan.

0.11.5. — On donne deux droites concourantes Ox et Oy. Une droite (D) perce leur plan en A. Un point M décrit (D). Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans MOx et MOy.

0.11.6. — Utiliser les vecteurs pour montrer que

- les diagonales d'un rectangle ont la même longueur;
- les quatre diagonales d'un cube ont la même longueur;
- les médianes d'un triangle se coupent en un point P qui divise chaque médiane dans le rapport $\frac{1}{2}$.

0.11.7. — Soit quatre points alignés A, B, C et D et les milieux I de AB et J de CD.

a) Si la division (ABCD) est harmonique, démontrer

$$(ACBD) = 2, \quad \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4 \overline{IJ}^2,$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = 0.$$

b) Montrer que cette dernière relation équivaut à

$$2 \overline{IJ} (\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}) = 0.$$

Étudier les réciproques possibles.

c) Si O désigne le milieu de IJ et M un point quelconque,

démontrer que

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 4 \overline{MO}^2 + 3 \overline{IJ}^2,$$

dans le cas où la division (ABCD) est harmonique.

0.11.8. — Soit I et J les milieux respectifs des segments AB et CD de la division harmonique (ABCD) telle que

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k > 1.$$

a) Déterminer k pour que $\overline{CD} = \overline{AB}$. Montrer qu'alors $\overline{AB}^2 = 2 \overline{IJ}^2$.

b) Déterminer k pour que $\overline{CD} = 2 \overline{AB}$. Montrer alors les relations suivantes :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BD}; \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CB} \quad \text{et} \quad \overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}.$$

0.11.9. — Montrer que les côtés AB et AC d'un triangle ABC forment avec la médiane AM et la parallèle (D) à BC menée par A, un faisceau harmonique (exercice 0.5.8.).

0.11.10. — On donne trois vecteurs

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -5\mathbf{j}.$$

trouver $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$,

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|, \quad \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}, \quad \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}.$$

0.11.11. — Trouver la résultante des forces suivantes :

$$a) \mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_2 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_3 = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

$$b) \mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_2 = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_3 = \mathbf{k}.$$

0.11.12. — Trouver les composantes d'un vecteur V donné par son origine P (x_1, y_1, z_1) et son extrémité Q (x_2, y_2, z_2) dans un repère orthonormé lorsque

$$a) P(1, 2, 0), Q(3, 2, 1), \quad b) P(0, 1, -1), Q(0, 4, 2);$$

$$c) P(2, 4, 6), Q(1, 2, 3), \quad d) P(0, 0, 0), Q(-1, 2, 0).$$

Trouver dans chaque cas le module du vecteur V, le représenter dans le repère orthonormé Oxyz.

Éléments de géométrie euclidienne.

1.0. INTRODUCTION

Les *instruments de mesure* sont fondés sur la *notion de distances* entre deux points donnés et *d'angles* entre deux directions données. Les paragraphes 1.1. et 1.2. précisent et rappellent ces notions fondamentales de distances et d'angles qui nous conduisent au produit scalaire et produit vectoriel de vecteurs. Ces opérations permettent de déterminer mathématiquement ces grandeurs physiques fondamentales.

Il en résulte une représentation analytique des droites, des plans, des courbes.

Les fonctions vectorielles qui les représentent se dérivent comme les fonctions d'une variable et l'on est conduit à la détermination des vecteurs vitesse et accélération d'une particule en mouvement dans l'espace, c'est-à-dire les vitesses et les accélérations au cours de ces mouvements.

1.1. DISTANCE DE POINTS, DROITES ET PLANS

La notion de distance est l'une des plus importantes car bon nombre de raisonnements conduisent à la détermination d'une grandeur fixant la *distance* entre des points, des droites ou des plans.

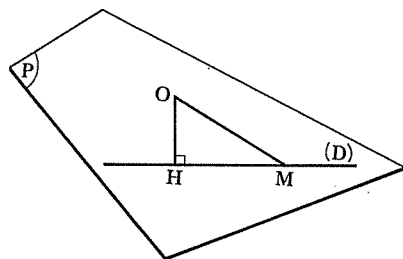


FIG. 1.1.1.

Remarque 1.1.1. — Le lien entre *plus courte distance* et *orthogonalité* apparaîtra dans les *calculs* au paragraphe 1.3., grâce à la notion de produit scalaire. Nous verrons que dans un triangle, *au plus grand angle est opposé le plus grand côté* (exercice 1.4.2.), en particulier l'*hypoténuse* OM d'un triangle rectangle OHM, soit $OH \leq OM$. Nous verrons d'ailleurs que $OH = OM \cdot \cos \theta$ (relation 1.2.2.).

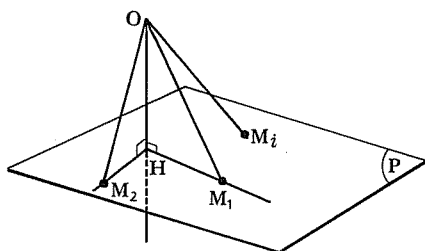


FIG. 1.1.2.

Remarque 1.1.2. — La plus courte distance d'un point à une *sphère* s'obtiendra aussi en menant une perpendiculaire. C'est là une propriété très générale en géométrie.

Si la distance entre deux points revient simplement à la notion du *module* du vecteur reliant les deux points, dès qu'il s'agit de distance entre un point et une droite, un point et un plan, de la distance de deux droites, il faut adjoindre à la notion de distance la notion de *plus courte distance* d'un point quelconque d'une figure géométrique à un point quelconque de l'autre.

Distance d'un point à une droite ou à un plan

En géométrie plane, la *distance d'un point à une droite* est la longueur de la perpendiculaire menée de ce point à la droite considérée.

Dans le plan (P) déterminé par le point et la droite (fig. 1.1.1.), OH est le côté d'un angle droit de l'un des triangles rectangles OMB dont OM est l'hypoténuse.

Pour tout point M appartenant à (D), nous avons (remarque 1.1.1.)
(1.1.1.) $OH \leq OM$.

Autrement dit, OH est la *plus courte* des distances de O aux divers points de la droite (D). C'est la *distance* de O à la droite (D).

Les propriétés des perpendiculaires et obliques de la géométrie plane s'étendent à l'espace.

Définition 1.1.1.

La *distance* d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire menée de ce point au plan.

C'est la *plus courte des distances* de O aux divers points du plan considéré.

Dans les plans OHM₁ et OHM₂ (fig. 1.1.2.), OH étant perpendiculaire au plan (P) considéré, les triangles OHM₁ et OHM₂ sont rectangles en H et $OH \leq OM_i$ (paragraphe 1.2.), M_i étant un point quelconque du plan (P).

Distance de deux droites parallèles ou de deux plans parallèles

Définition 1.1.2.

La *distance* de deux droites parallèles (de deux plans parallèles) est la *plus courte des distances* d'un point quelconque de l'une (de l'un) à un point quelconque de l'autre.

Soit (P) et (Q) deux plans parallèles (fig. 1.1.3.) et A', B' les pieds des perpendiculaires au plan (Q) menées de deux points A et B du plan (P). Les droites AA' et BB' sont parallèles. La figure ABA'B' est un rectangle d'après la propriété fondamentale de la perpendiculaire à un plan. Par suite, les segments AA' et BB' ont même longueur. Si l'on joint A à un point M_i du plan (Q), le triangle AA'M_i est rectangle en A et l'on a, quel que soit M_i dans le plan (Q), $h = AA' \leqslant AM_i$. La distance des deux plans est égale à h.

De la même façon (fig. 1.1.3.), d est la distance des deux droites parallèles AB et CD du plan (P).

La distance de deux droites parallèles ou de deux plans parallèles est la longueur de la portion de leur perpendiculaire commune comprise entre ces droites ou ces plans.

Nous pouvons tirer quelques conséquences faciles à démontrer de ce résultat.

Théorème 1.1.1.

Le lieu géométrique des points de l'espace situés à une distance donnée d'un plan donné est l'ensemble de deux plans parallèles à ce plan, construits de part et d'autre du plan, à la distance donnée.

Théorème 1.1.2.

Le lieu géométrique des points équidistants de deux plans parallèles est un plan parallèle aux précédents.

Distance de deux droites quelconques de l'espace

De tous les segments qui joignent un point d'une droite (D) à un point d'une droite (Δ), lequel est le plus court?

Il s'agit de deux droites de l'espace non situées dans un même plan et non parallèles.

Nous avons vu au paragraphe 0.1. que les deux droites (D) et (Δ) peuvent être placées d'une manière unique dans deux plans parallèles, (P) passant par (D) et (Q) passant par (Δ) (fig. 1.1.4.).

Considérons le segment AB joignant un point A quelconque de (D) à un point quelconque B de (Δ). Si l'on projette orthogonalement A sur le plan (Q), le lieu de sa projection a est la droite (d) parallèle à (D) projection de (D) sur (Q).

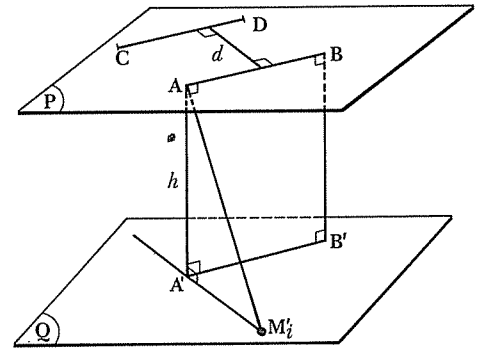


FIG. 1.1.3.

Remarque 1.1.3. — La propriété ci-contre sert inversement pour vérifier le parallélisme de deux plans : on effectue des mesures de distances en divers points (vérifications de bâtiments).

Exercice 1.1.1. — Soit un parallélépipède rectangle dont les côtés mesurent a, b et c. Déterminer les distances entre les arêtes non concurrentes.

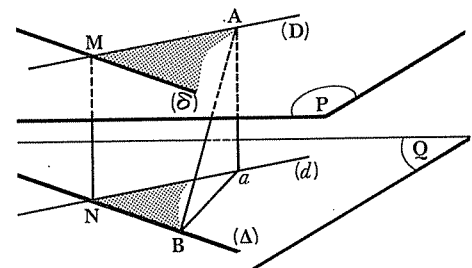


FIG. 1.1.4.

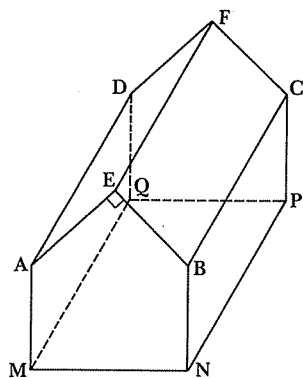


FIG. 1.1.5.

Exercice 1.1.2. — Indiquer toutes les perpendiculaires communes existant dans la figure 1.1.5. qui représente une maison (prisme limité par deux sections droites).

Or, AB est une oblique par rapport à la perpendiculaire Aa , sauf si B et a sont confondus, et nous avons

$$Aa \leq AB.$$

Comme (D) et (Δ) ne sont pas parallèles, la droite (d) coupe la droite (Δ) en N . Ce point N est la projection d'un point M de (D) et le segment MN est égal à Aa .

Les points M et N sont donc les points de (Δ) et de (D) les plus rapprochés.

La distance MN s'appelle la **plus courte distance** des deux droites. Elle est égale à la distance des plans parallèles qui contiennent ces deux droites.

La droite qui porte le segment MN est perpendiculaire aux plans (P) et (Q) donc aux droites (D) et (Δ) . On dit que c'est **leur perpendiculaire commune**.

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.1.3.

*Étant donné deux droites non parallèles de l'espace et non situées dans un même plan, il existe une droite, et une seule, qui les coupe toutes les deux à angle droit. On l'appelle la **perpendiculaire commune** aux deux droites. La portion de la perpendiculaire commune comprise entre les deux droites est le **plus court segment** qui joint un point de l'une à un point de l'autre. C'est la plus courte distance des deux droites, souvent appelée distance des deux droites.*

1.2. ANGLES DE DROITES ET DE VECTEURS

Si deux droites ne sont pas parallèles, elles forment entre elles un angle non nul qu'il est important de pouvoir caractériser.

Cependant comme le montre la figure 1.2.1. pour des droites coplanaires, il y a plusieurs déterminations possibles suivant les demi-droites choisies (définition 0.2.6.).

Si les droites ne sont pas orthogonales, il y a selon les cas des angles **aigus** et des angles **obtus**.

La notion la plus efficace est donc celle de l'angle formé par deux **demi-droites** appelées **côtés** de l'angle, ou, ce qui revient au même,

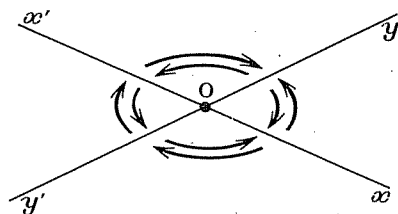


FIG. 1.2.1.

par deux **vecteurs** portés par chacune des demi-droites et de même sens qu'elles.

Observons au préalable deux angles dont les côtés sont **parallèles et de même sens**.

La définition de la géométrie plane du sens de deux demi-droites parallèles est applicable dans l'espace (paragraphe 0.1.). Ox et $O'x'$ sont deux demi-droites parallèles et de même sens si, dans leur plan, elles sont d'un même côté de OO' .

Considérons un angle $\widehat{xOy}$ (fig. 1.2.2.). Menons par un point O' deux demi-droites $O'x'$ et $O'y'$ respectivement parallèles à Ox et Oy et de même sens. On obtient l'angle $\widehat{x'O'y'}$. Que ces deux angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$ soient dans un même plan ou non, ils joueront le même rôle géométrique et nous les mesurerons par le même nombre.

Définition 1.2.1.

L'**angle de deux demi-droites** est l'un quelconque des angles formés par les parallèles à ces demi-droites menées par un point quelconque de l'espace.

Cette définition permet d'envisager l'angle de deux demi-droites non coplanaires (fig. 1.2.3.).

Mesure des angles dans le plan

Nous admettrons les résultats suivants qui ressemblent à ceux concernant les vecteurs : addition des angles, multiplication par des scalaires. Il s'agira indifféremment de demi-droites ou de vecteurs. Ces calculs supposent qu'à tout angle $\widehat{xOy}$ soit associé un **nombre réel** qui le mesure, noté (Ox, Oy) .

On suppose que (Ox, Oy) et (Oy, Ox) sont de signes contraires. C'est la **mesure algébrique** de l'angle. Elle est définie à « un tour près » sachant qu'un tour complet mesure 2π radians, ou 360 degrés.

Le résultat suivant, appelé **relation de Chasles** par analogie avec les opérations vectorielles, est à la base de tous les calculs d'angles, que ce soit en mécanique, en optique, etc.

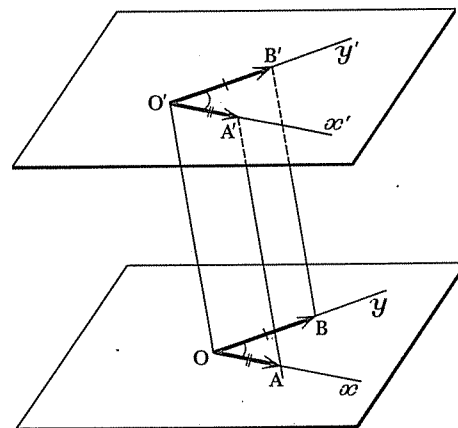


FIG. 1.2.2.

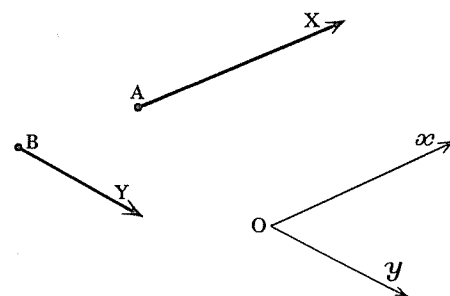
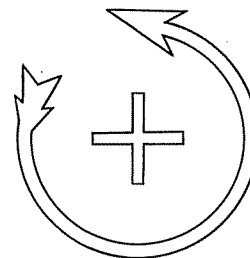


FIG. 1.2.3.

Remarque 1.2.1. — La mesure de l'angle est souvent appelée *angle* par abus de langage. Il en est de même au niveau des notations qui ne distinguent pas toujours l'angle et sa mesure.



Remarque 1.2.2. — Si l'on change *un* vecteur en son opposé, l'angle de vecteurs augmente de π car

$$(\mathbf{V}_1, -\mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) + (\mathbf{V}_2, -\mathbf{V}_2).$$

Le dernier terme représente un demi-tour, soit $\pi + 2k\pi$.

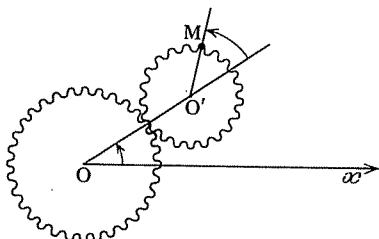


FIG. 1.2.4.

Théorème 1.2.1.

Soit trois vecteurs libres $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ d'un même plan. Ils forment des angles dont les mesures algébriques vérifient

$$(1.2.1.) \quad (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) + (\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3) + 2k\pi,$$

où k est un entier relatif quelconque.

Cette relation reste valable lorsque l'on remplace les vecteurs par les demi-droites.

Exemple 1.2.1.

Dans l'étude d'un mécanisme épicycloïdal (fig. 1.2.4.), nous voulons calculer l'angle $(Ox, \mathbf{OM})$ appelé *angle polaire* du vecteur $\mathbf{OM}$ par rapport à l'axe Ox . Appliquons la relation de Chasles :

$$(Ox, \mathbf{OM}) = (Ox, \mathbf{OO'}) + (\mathbf{OO'}, \mathbf{OM}) + 2k\pi.$$

Les deux angles au second membre sont généralement connus, sachant les vitesses de rotation des roues dentées.

La relation ci-dessus peut s'écrire aussi

$$(\mathbf{OO'}, \mathbf{OM}) = (Ox, \mathbf{OM}) - (Ox, \mathbf{OO'}) + 2k\pi.$$

Elle rappelle la relation 0.5.10. selon laquelle la mesure algébrique d'un vecteur est égale à l'abscisse de l'extrémité moins l'abscisse de l'origine.

L'axe Ox sert d'origine pour les angles et nous pouvons énoncer :

Théorème 1.2.2.

L'angle de deux vecteurs du plan est égal à l'angle polaire du vecteur extrémité diminué de l'angle polaire du vecteur origine

$$(1.2.2.) \quad (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = (Ox, \mathbf{V}_2) - (Ox, \mathbf{V}_1) + 2k\pi.$$

Exemple 1.2.2.

Considérons dans un plan la bissectrice $b'Ib$ des demi-droites Iu et Iv (fig. 1.2.5.). D'après la relation de Chasles,

$$(Iu, Iv) = (Iu, Ib) + (Ib, Iv) + 2k\pi.$$

Les deux angles au second membre sont déclarés *égaux* par raison de symétrie, c'est-à-dire que la bissectrice partage l'angle (Iu, Iv) en deux

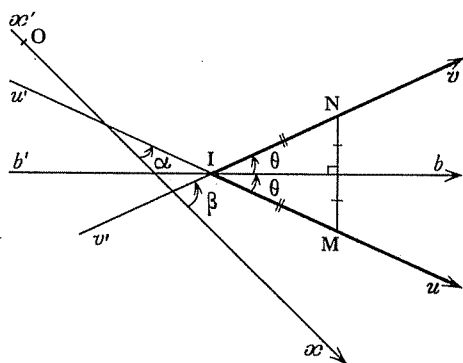


FIG. 1.2.5.

moitiés. Soit θ leur valeur commune, α et β les angles polaires de Iu et Iv par rapport à un axe de référence Ox . Nous pouvons écrire

$$\theta = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Par ailleurs,

$$(Ox, Ib) = (Ox, Iu) + (Iu, Ib) + 2k\pi = \alpha + \theta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

C'est-à-dire que l'angle polaire de la bissectrice est la **demi-somme** des angles polaires des côtés de l'angle. Il existe des constructions pour le partage d'un angle en n angles égaux la **trisection** de l'angle fait l'objet de l'exercice 3.2.2.

Produit de symétries d'axes concourants

Observons le résultat de deux symétries planes consécutives par rapport à deux droites orientées $u'Ou$ et $v'Ov$ du plan, données par les angles polaires

$$(Ox, Ou) = \alpha; \quad (Ox, Ov) = \beta \quad (\text{fig. 1.2.6}).$$

Calculons l'angle (OM, OM'') à l'aide de la relation de Chasles.

$$(OM, OM'') = (OM, OH) + (OH, OM') + (OM', OH') + (OH', OM'') = 2(OH, OH').$$

$$\text{Or} \quad (OH, OH') = (Ox, OH') - (Ox, OH) = \beta - \alpha,$$

$$\text{donc} \quad (OM, OM'') = 2(\beta - \alpha) = \text{Cte.}$$

Ce produit de symétries consiste à faire tourner OM d'un angle $2(\beta - \alpha)$: c'est une **rotation**. Les transformations ponctuelles (translation, rotation,...) sont étudiées au chapitre 2.

Si les axes de symétrie sont **orthogonaux**, M' et M'' sont alignés. C'est une **symétrie-point**.

Rapport de projection orthogonale

Soit dans le plan une droite de référence $x'Ox$ et une droite $u'Ou$ (fig. 1.2.7.) donnée par

$$(Ox, Ou) = \alpha.$$

C'est l'**angle polaire** de $u'Ou$ par rapport à $x'Ox$. Soit M un point de $u'Ou$, H sa projection orthogonale sur $x'Ox$. Le rapport $C = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$

Remarque 1.2.3. — Soit deux vecteurs V_1 et V_2 , et leurs symétriques V'_1 et V'_2 par rapport à une droite $x'Ox$ du même plan. Nous avons

$$(Ox, V_1) + (Ox, V'_1) = 0 + 2k\pi,$$

$$(Ox, V_2) + (Ox, V'_2) = 0 + 2k\pi,$$

d'où par soustraction

$$(V_1, V_2) + (V'_1, V'_2) = 0 + 2k\pi.$$

C'est-à-dire que la **symétrie change un angle de vecteurs en son opposé**.

Exercice 1.2.1. — Soit deux points fixes A et B d'un cercle de centre O et M un point quelconque de ce cercle. Montrer que

$$(MA, MB) = \frac{1}{2}(OA, OB) + k\pi.$$

On utilisera les médiatrices de MA et de MB . Ainsi l'**angle inscrit** est la moitié de l'**angle au centre**.

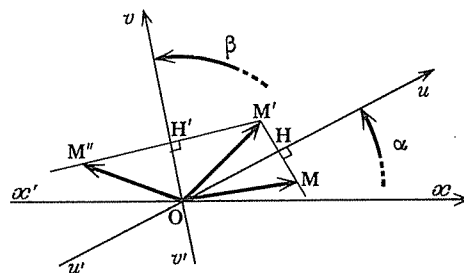


FIG. 1.2.6.

Remarque 1.2.4. — Lorsque l'on effectue deux symétries d'axes parallèles, il en résulte une **translation**. En effet (faire le dessin)

$$\begin{aligned} MM'' &= MH + HM' + M'H' + H'M'' \\ &= 2(HM' + M'H') \\ &= 2HH'. \end{aligned}$$

Ce produit de symétrie consiste à ajouter à OM le vecteur constant $2HH'$, car $OM'' = OM + 2HH'$.

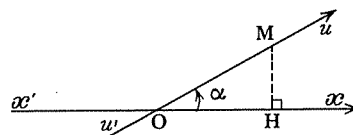


FIG. 1.2.7.

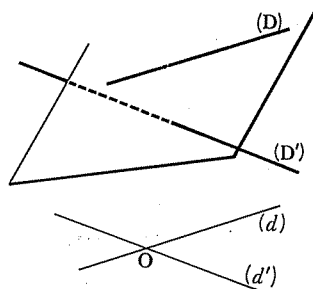


FIG. 1.2.8.

Remarque 1.2.5. — Il est commode de mesurer l'angle *aigu positif* comme détermination pour (D, D') .

Exercice 1.2.2. — Dédurre (1.2.3.) de (1.2.1.).

ne dépend pas du point M choisi, mais seulement de l'angle α .

Ce rapport $C(\alpha)$ est le *cosinus* de l'angle α , que le lecteur connaît bien, soit

$$(1.2.2.) \quad \overline{OH} = \overline{OM} \cdot \cos \alpha.$$

Angles de droites

Soit (D) et (D') deux droites quelconques de l'espace (d) et (d') leurs parallèles menées par un point O (fig. 1.2.8.). L'angle des droites (D) et (D') désignera l'un quelconque des angles orientés formés par les demi-droites correspondantes dans leur plan (fig. 1.2.1.). On le note (D, D') , et sa valeur n'est définie qu'à π près. Malgré cette restriction, les résultats précédents subsistent, notamment la *relation de Chasles* entre les angles formés par trois droites $(D), (D'), (D'')$ d'un plan

$$(1.2.3.) \quad (D, D'') = (D, D') + (D', D'') + k\pi.$$

Angle d'une droite et d'un plan

Soit AB un segment (ou un vecteur) et ab sa projection orthogonale sur le plan (P) (fig. 1.2.9.).

Nous supposons que AB perce (P) en O et que AB n'est pas perpendiculaire à (P) . Les projetantes Aa et Bb étant parallèles, nous avons

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Oa}{OA}.$$

Le rapport $\frac{Oa}{OA}$ est le cosinus de l'angle α , angle aigu que forme la droite AB avec sa projection. On a donc

$$(1.2.4.) \quad ab = AB \times \cos \alpha.$$

Si AB est perpendiculaire au plan (P) , le segment ab se réduit à un point, sa longueur est nulle. L'angle α n'est plus défini. On convient de dire qu'il est droit pour que la formule 1.2.4. soit vérifiée.

Si AB est parallèle au plan (P) (fig. 1.2.10.), le quadrilatère $ABba$ est un rectangle et $ab = AB$. L'angle α est nul, son cosinus vaut 1 et la relation 1.2.1. est vérifiée.

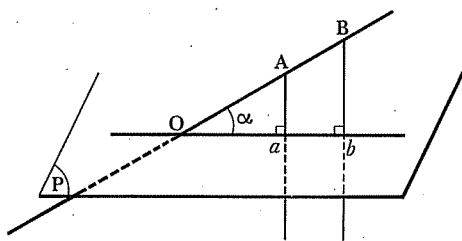


FIG. 1.2.9.

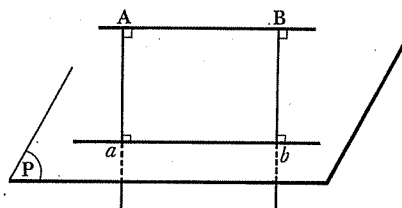


FIG. 1.2.10.

Nous donnons un nom à l'angle α :

Définition 1.2.2.

L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle aigu que fait cette droite avec sa projection sur le plan. Si la droite est perpendiculaire au plan, l'angle est droit.

L'angle α ne change pas si nous remplaçons la droite par une droite parallèle et le plan par un plan parallèle.

Nous pouvons énoncer le résultat de la formule 1.2.1.

Théorème 1.2.3.

La projection d'un segment (ou d'un vecteur) sur un plan a pour mesure le produit de la mesure du segment (ou de la mesure algébrique du vecteur) par le cosinus de l'angle de la droite qui le porte et du plan.

Pour terminer avec cette notion d'angle, étudions les angles aigus que fait une droite avec toutes les droites d'un plan.

Soit (D) une droite qui perce le plan (P) en un point O (fig. 1.2.11.). Si (D) n'est pas perpendiculaire au plan, traçons sa projection (d) sur le plan (P) . Soit (Δ) une droite quelconque de ce plan passant par O . D'un point A de (D) , abaissons la perpendiculaire AH sur (Δ) . Or, (Δ) est aussi perpendiculaire à Aa , projection orthogonale de A sur (P) . Par suite, (Δ) est perpendiculaire au plan AaH , donc à aH .

Soit α l'angle aigu $\widehat{AOa}$, β l'angle aigu (ou droit) de OD et (Δ) .

Dans le triangle rectangle AOH , nous avons

$$OH = OA \cos \beta$$

et dans le triangle OaA , nous avons

$$Oa = OA \cos \alpha.$$

Or $OH < Oa$ (hypoténuse du triangle OaA).

Par suite, $\cos \beta < \cos \alpha$.

α et β étant aigus, il s'ensuit $\beta > \alpha$.

Théorème 1.2.4.

De tous les angles aigus que fait une droite avec les droites d'un plan, le plus petit est celui de la droite et du plan.

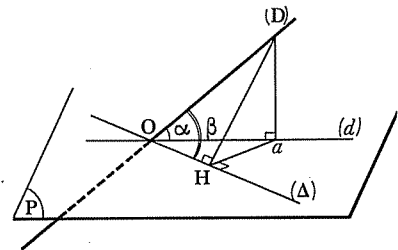


FIG. 1.2.11.

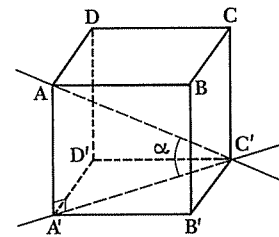


FIG. 1.2.12.

Exercice 1.2.2. — Déterminer l'angle d'une diagonale d'un cube avec chacune des faces (fig. 1.2.12.).

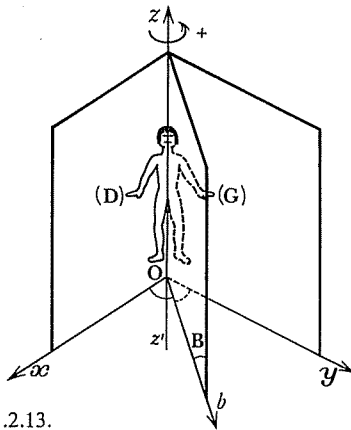


FIG. 1.2.13.

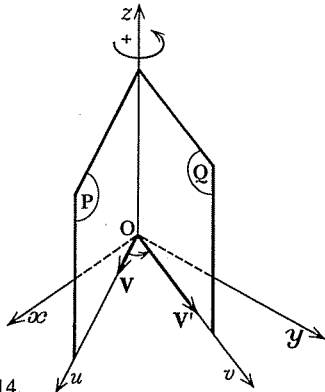


FIG. 1.2.14.

Remarque 1.2.6. — Les plans (P) et (Q) forment un dièdre (fig. 1.2.14.) dont l'arête $z'z$ est orientée et l'on peut poser

$$(P, z'z, Q) = (Ou, Ov).$$

C'est l'angle formé par la section droite menée par O.

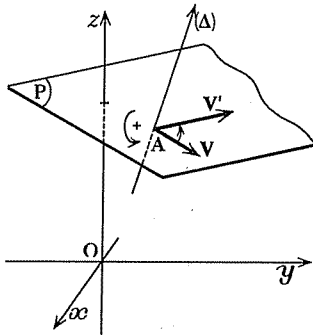


FIG. 1.2.15.

Éléments orientés dans l'espace

Un demi-plan (R) issu d'un axe $z'z$ peut tourner autour de cet axe dans deux sens différents. Considérons (fig. 1.2.13.) un trièdre trirectangle formé par les demi-droites Ox , Oy , Oz . Soit (B) le demi-bissecteur situé dans le quadrant xOy , et un observateur debout sur $z'z$, regardant vers (B).

Règle 1.2.1.

Nous dirons que le trièdre $Oxyz$ est **direct** si xOz est à la **droite** et yOz à la **gauche** de l'observateur précédent. Dans ces conditions nous posons

$$(1.2.5.) \quad (Ox, Oy) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

ce qui constitue une **orientation** du plan xOy .

Selon la même convention nous avons $(Ox, Ob) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et nous pouvons orienter tout angle de vecteurs (V, V') ou de demi-droites (Ou, Ov) **dans le plan xOy** (fig. 1.2.14.).

Considérons maintenant deux vecteurs quelconques de l'espace V et V' , que nous construisons à partir d'une même origine A (fig. 1.2.15.).

Deux cas peuvent se présenter :

1° Nous décidons d'**orienter** le plan (P) formé par A, V et V'. Cela peut se faire en orientant la perpendiculaire (Δ) à (P) au point A. L'angle (V, V') est alors orienté.

2° Le plan (P) n'est pas orienté.

Règle 1.2.2.

En l'absence d'orientation du plan formé par V et V', la notation (V, V') désignera la détermination comprise entre 0 et π de l'angle des vecteurs V et V'.

Nous allons voir maintenant comment ces notions d'angles et de distances vont se concrétiser à partir de **produits de vecteurs**.

1.3. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

Nous utilisons les résultats vus précédemment concernant les projections sur un axe. Il s'agira exclusivement de la *projection orthogonale*.

Théorème 1.3.1. (dit de la *projection orthogonale*)

La mesure algébrique de la projection orthogonale sur un axe dirigé d'un vecteur porté par un autre axe dirigé est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur le long de l'axe qui le porte, par le cosinus de l'angle des directions positives des deux axes.

Ceci signifie (fig. 1.3.1.).

$$(1.3.1.) \quad p = \| \mathbf{V} \| \cdot \cos \gamma.$$

p est la **composante** du vecteur $\mathbf{V}$ dans la direction d'un vecteur $\mathbf{V}'$, γ étant l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$. p peut être positive, nulle ou négative suivant que l'angle formé par les deux vecteurs est aigu, droit ou obtus (fig. 1.3.2.).

Exemple 1.3.1.

Imaginons que O (fig. 1.3.1.) soit un point matériel et qu'une force $\mathbf{V}$ agisse sur cette particule qui, sous l'action de cette force, se déplace d'un vecteur $\mathbf{V}'$ faisant un angle γ avec $\mathbf{V}$. Le **travail** $\mathcal{G}$ effectué par la force sur le point matériel est le produit du déplacement, soit $\| \mathbf{V}' \|$ par la mesure algébrique de la projection du vecteur $\mathbf{V}$ dans la direction $\mathbf{V}'$, puisque seule la composante de $\mathbf{V}$ dans la direction du déplacement sert au mouvement. Par suite, le **travail** $\mathcal{G}$, qui est un **scalaire**, est tel que

$$\mathcal{G} = \| \mathbf{V} \| \cdot \| \mathbf{V}' \| \cdot \cos (\mathbf{V}, \mathbf{V}').$$

Définition 1.3.1.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ est le nombre égal au **produit** des **modules** de ces vecteurs par le **cosinus de leur angle**.

Le produit scalaire se note $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}'$.

$$(1.3.2.) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' = \| \mathbf{V} \| \| \mathbf{V}' \| \cos (\mathbf{V}, \mathbf{V}').$$

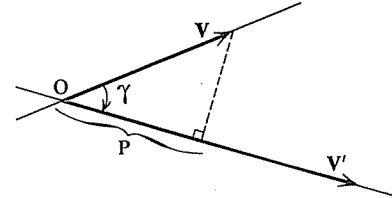


FIG. 1.3.1.

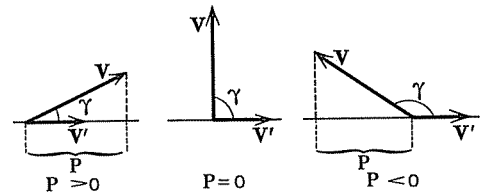


FIG. 1.3.2.

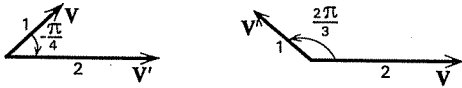


FIG. 1.3.3.

Exercice 1.3.1. — Calculer les produits scalaires des vecteurs de la figure 1.3.3.

Exercice 1.3.2. — Soit O et A deux points distincts du plan et k un nombre donné. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = k$?

Remarque 1.3.1. — Soit dans le plan un axe (Δ) portant un vecteur unitaire u . La projection d'un vecteur V sur (Δ) est $X = (V \cdot u) \cdot u$. Cette expression permettra l'expression vectorielle de la *symétrie* par rapport à (Δ) .

Exercice 1.3.4. — Soit un parallélogramme $ABCD$, de diagonales AC et BD . Montrer la relation

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Exercice 1.3.5. — Démontrer que, quels que soient les points A, B, C et D du plan, la relation suivante est vérifiée :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes (appeler D le point de concours de deux hauteurs).

La valeur du produit scalaire de deux vecteurs est donc un *nombre réel* indépendant du choix d'un système de référence dans l'espace. Le produit scalaire permet de déterminer l'angle de deux vecteurs, lorsque le produit scalaire est connu d'une autre manière (voir 1.6.). En effet, de la définition 1.3.1., nous tirons

$$(1.3.3.) \quad \cos(V, V') = \frac{V \cdot V'}{\|V\| \cdot \|V'\|}.$$

Par suite (fig. 1.3.1.), la mesure algébrique p de la projection de V dans la direction V' est d'après (1.3.1.)

$$p = \frac{V \cdot V'}{\|V'\|} = \|V\| \cdot \cos(V, V').$$

En particulier, si V' est le *vecteur unitaire* de l'axe sur lequel V est projeté orthogonalement, nous avons $\|V'\| = 1$ et

$$p = \|V\| \cos(V, V') = V \cdot V'$$

et le vecteur X projeté de V est

$$(1.3.4.) \quad X = (V \cdot V') V'.$$

Propriétés fondamentales du produit scalaire

De la définition 1.3.1., il s'ensuit

Théorème 1.3.2.

Deux vecteurs sont perpendiculaires si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

En effet, puisque V est orthogonal à V' , $\cos(V, V') = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ et donc $V \cdot V' = 0$. La réciproque est évidente si V et $V' \neq 0$.

Dans l'exemple 1.3.1., cela signifie qu'une force agissant sur une particule perpendiculairement à son déplacement ne fournit aucun travail.

Théorème 1.3.3.

Le produit scalaire d'un vecteur V par lui-même, appelé « carré scalaire » du vecteur V est égal au carré du module de ce vecteur.

En effet, de la relation $\cos(V, V) = \cos 0 = 1$, nous tirons

$$V \cdot V = \|V\|^2,$$

soit

$$(1.3.5.) \quad \|V\| = \sqrt{V \cdot V}.$$

Avec (1.3.3.) et (1.3.5.), il vient

$$(1.3.6.) \quad \cos(V \cdot V') = \frac{V \cdot V'}{\|V\| \cdot \|V'\|} = \frac{V \cdot V'}{\sqrt{V \cdot V} \sqrt{V' \cdot V'}}.$$

De la définition 1.3.1., nous déduisons l'égalité

$$(1.3.7.) \quad V \cdot V' = V' \cdot V.$$

Le produit scalaire est donc *commutatif*.

De même, si λ et λ' sont deux nombres réels quelconques, nous avons

$$(1.3.8.) \quad \lambda V \cdot \lambda' V' = \lambda \lambda' (V \cdot V').$$

A partir de la définition 1.3.1. et du théorème fondamental des projections (0.8.2.) (la mesure algébrique de la projection de $V'_1 + V'_2$ sur le support d'un vecteur V est la somme des mesures algébriques des projections de V'_1 et V'_2), il vient

$$(1.3.9.) \quad V \cdot (V'_1 + V'_2) = V \cdot V'_1 + V \cdot V'_2.$$

Cette relation exprime que le produit scalaire des vecteurs est distributif par rapport à l'addition des vecteurs.

Exemple 1.3.2.

Soit un triangle ABC (fig. 1.3.4.). Nous avons la relation vectorielle

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}.$$

Les carrés scalaires des deux membres de cette relation, compte tenu de la propriété de distributivité, sont

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

Avec les notations habituelles (fig. 1.3.4.), nous avons la relation

$$(1.3.10.) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Si l'on ajoute et retranche $2bc$ au second membre, il apparaît que

$$(1.3.11.) \quad a^2 = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos \hat{A}).$$

C'est-à-dire que $a^2 \leq (b + c)^2$ ou $a \leq b + c$, d'où le théorème :

Exercice 1.3.6. — Soit O le centre du cercle de rayon R , circonscrit à un triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle. Évaluer l'expression

$$E = GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

en faisant intervenir O et G .

Exercice 1.3.7. — Montrer que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Exercice 1.3.8. — Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe et si P et Q sont les milieux des diagonales, démontrer que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

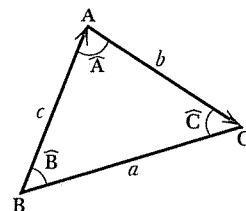


FIG. 1.3.4.

Remarque 1.3.2. — Des trois relations analogues à (1.3.10.) il est possible de déduire les théorèmes célèbres connus sous le nom de *cas d'égalité des triangles*.

1^{er} cas : 2 angles et 1 côté égaux ;

2^e cas : 1 angle et 2 côtés égaux ;

3^e cas : 3 côtés égaux.

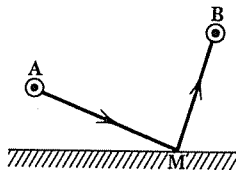


FIG. 1.3.5.

Exercice 1.3.9. — Déterminer le plus court chemin de A vers B en passant par un point C de la droite (D) (voir figure 1.3.5.).

Remarque 1.3.3. — La somme des angles d'un triangle est égale à π :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi.$$

Il suffit d'appliquer plusieurs fois la relation de Chasles entre les angles de vecteurs.

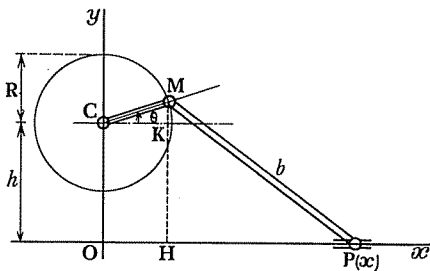


FIG. 1.3.6.

Exercice 1.3.10. — Dédurre de (1.3.10.) la relation

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

si p est le demi-périmètre du triangle (fig. 1.3.4.).

Exercice 1.3.11. — Montrer que

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' = \frac{1}{4} (\|\mathbf{V} + \mathbf{V}'\|^2 - \|\mathbf{V} - \mathbf{V}'\|^2).$$

Théorème 1.3.4.

Dans un triangle, la **longueur d'un côté** est **inférieure ou égale** à la somme des deux autres, soit

$$(1.3.12.) \quad \|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\|.$$

Autrement dit, la ligne droite est le **plus court chemin** de B vers C.

Par ailleurs si le triangle est rectangle en A, l'égalité 1.3.10. se simplifie et chacun reconnaît le **théorème de Pythagore** sur le carré de l'hypoténuse,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Exemple 1.3.3.

Considérons le système bielle-manivelle (fig. 1.3.6.). L'abscisse x du point P s'exprime facilement en fonction de l'angle $\theta = (\text{Ox}, \overrightarrow{\text{CM}})$. Nous écrivons

$$x = \overline{\text{OP}} = \overline{\text{OH}} + \overline{\text{HP}}.$$

Or $\overline{\text{OH}} = R \cos \theta$ et $\text{HP}^2 = \text{MP}^2 - \text{MH}^2$ d'après le théorème de Pythagore. MP est la longueur b de la bielle.

$$\overline{\text{HM}} = \overline{\text{HK}} + \overline{\text{KM}} = h + R \sin \theta,$$

d'où

$$x = R \cos \theta + \sqrt{b^2 - (h + R \sin \theta)^2}.$$

Les applications du produit scalaire sont nombreuses et variées. Nous les rencontrerons tout au long de ce volume. Dans les exemples qui suivent, nous allons voir des applications trigonométriques et géométriques.

Exemple 1.3.4.

Les formules trigonométriques usuelles sont bien connues. Nous les retrouvons à l'aide du produit scalaire.

Considérons le *cercle trigonométrique* de rayon unité (fig. 1.3.7.).

Soit M et M' deux points du cercle trigonométrique

$$(\|\overrightarrow{\text{OM}}\| = \|\overrightarrow{\text{OM}'}\| = 1)$$

tels que

$$(\text{Ox}, \overrightarrow{\text{OM}}) = \alpha, \quad (\text{Ox}, \overrightarrow{\text{OM}'} = \alpha'.$$

Si P et P' sont les projections orthogonales de M et M' sur Ox , la relation de Chasles permet d'écrire

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{PM}, \\ \vec{OM}' &= \vec{OP'} + \vec{P'M'}.\end{aligned}$$

Le produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{OM}'$ s'exprime de deux manières différentes

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \vec{OP} \cdot \vec{OP'} + \vec{PM} \cdot \vec{P'M'},$$

puisque les vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{P'M'}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\vec{OP'}$ et $\vec{PM}$.

D'autre part, $\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \cos(\alpha' - \alpha)$.

En identifiant les deux expressions du produit scalaire, nous avons

$$\cos(\alpha - \alpha') = \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha'.$$

En faisant $\alpha = a$, $\alpha' = -b$, puis $\alpha = a$, $\alpha' = b$, nous obtenons les relations bien connues

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b.\end{aligned}$$

Les formules donnant $\sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$ s'obtiennent en prenant

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - a, \quad \alpha' = b \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - a, \quad \alpha' = -b.$$

Exemple 1.3.5.

Considérons dans le plan un axe (Δ) muni d'un vecteur unitaire u . Tout vecteur V se projette orthogonalement sur (Δ) en un vecteur X donné par

$$(1.3.12.) \quad X = (V \cdot u) \cdot u \quad (\text{remarque 1.3.1}).$$

Remarquons que $X \cdot u = V \cdot u$, soit $(V - X) \cdot u = 0$.

Autrement dit, $Y = V - X$ est orthogonal à (Δ) . Nous avons $V = X + Y$. C'est une décomposition du vecteur V en deux composantes orthogonales (fig. 1.3.8.). Le vecteur $V' = X - Y$ a une interprétation simple : c'est le *symétrique* du vecteur V par rapport à (Δ) , soit, en remplaçant X et Y par leurs valeurs,

$$(1.3.13.) \quad V' = 2(V \cdot u) \cdot u - V.$$

C'est l'expression vectorielle de la symétrie. Cette formule appliquée

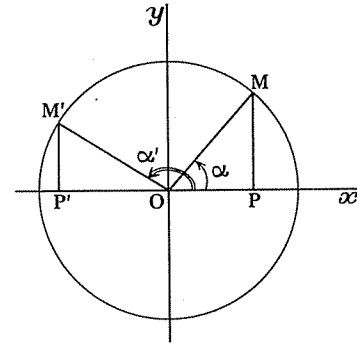


FIG. 1.3.7.

Exercice 1.3.12. — Soit trois points donnés A , B et C et des nombres réels a , b et c . Exprimer l'expression

$$E = a \vec{MA}^2 + b \vec{MB}^2 + c \vec{MC}^2$$

à l'aide du barycentre des points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. En déduire le lieu des points M tels que E est constant.

Remarque 1.3.4. — Soit deux vecteurs libres V_1 et V_2 , et leurs projections

$$X_1 = (V_1 \cdot u) u, \quad X_2 = (V_2 \cdot u) u.$$

Alors $X_1 + X_2 = [(V_1 + V_2) \cdot u] \cdot u$.

C'est-à-dire que la projection d'une somme est la somme des projections (cf. chap. 0).

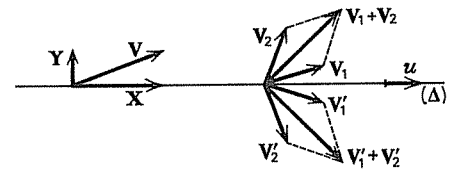


FIG. 1.3.8.

Remarque 1.3.5. — Soit V_1 et V_2 deux vecteurs du plan, V'_1 et V'_2 leurs symétriques par rapport à la droite (Δ) , exprimés à l'aide de la formule (1.3.11.). Il est facile de montrer que $V'_1 \cdot V'_2 = V_1 \cdot V_2$, c'est-à-dire que la *symétrie conserve le produit scalaire des vecteurs*.

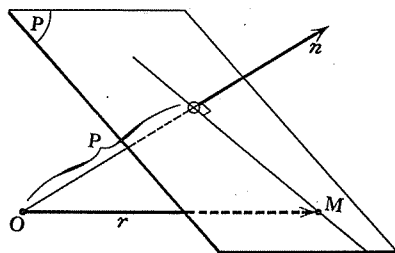


FIG. 1.3.9.

Exercice 1.3.13. — Déterminer les vecteurs X tels que $A \cdot X = c$, où c est un réel.

à deux vecteurs V_1 et V_2 (fig. 1.3.8.) permet de montrer que le symétrique d'une somme $V_1 + V_2$ est la somme des symétriques $V'_1 + V'_2$. De même le symétrique de $\lambda \cdot V$ est $\lambda \cdot V'$. Autrement dit, la symétrie agissant sur les vecteurs est une transformation *linéaire* (tome III).

Exemple 1.3.6.

Considérons un plan (P) . Nous savons (définition 0.2.2.) qu'un plan est déterminé par une direction n normale à ce plan. Cette direction n est perpendiculaire à toutes les droites du plan (fig. 1.3.9.).

Soit O un point quelconque de l'espace et M un point de P . Si n est unitaire, le produit scalaire $OM \cdot n$ s'écrit

$$OM \cdot n = p,$$

p désignant la distance du point O au plan (P) .

C'est à partir de cette relation que nous écrivons l'équation d'un plan (chapitre 5 et paragraphe 1.7.).

1.4. PRODUIT VECTORIEL

A deux vecteurs, nous venons d'associer un scalaire. Cependant de nombreuses applications physiques et géométriques associent à deux vecteurs un autre vecteur. Donnons quelques exemples.

Exemple 1.4.1.

Vitesse d'un corps en rotation autour d'un axe fixe (Δ) .

Considérons un disque (D) en rotation autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à son plan (fig. 1.4.1.).

Cette rotation peut être simplement décrite à partir d'un vecteur Ω défini ci-dessous.

La *direction* du vecteur Ω est celle de l'axe de rotation orienté de façon telle que la rotation s'effectue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur qui regarde Ω de son origine vers son extrémité. On peut également dire que le *sens* de Ω vis-à-vis de la rotation est celui du déplacement d'un tire-bouchon.

Le *module* de Ω , soit $\|\Omega\|$ est égal à la *vitesse angulaire de rotation* ω du disque considéré, soit $\|\Omega\| = \omega$.

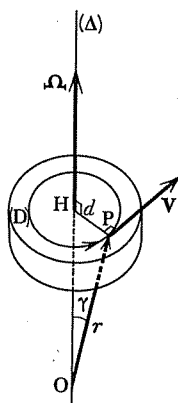


FIG. 1.4.1.

Remarque 1.4.1. — L'espace peut être *orienté* de deux manières différentes. Nous n'approfondissons pas ces questions ici.

La vitesse d'un point du disque D est le produit de la vitesse angulaire par la distance d du point à l'axe de rotation.

Soit P un point quelconque du disque situé à la distance d de l'axe de rotation Δ . Au cours du mouvement, P se déplace sur un cercle de rayon d . Sa vitesse est ωd . Soit r un vecteur fixant la position du point P à partir d'une origine O quelconque prise sur l'axe de rotation. Nous avons $HP = d = \|r\| \sin \gamma$, γ étant l'angle (Ω, r) .

Ainsi

$$\omega d = \|\Omega\| \cdot \|r\| \sin \gamma.$$

C'est le module de la vitesse V du point P.

Il est habituel de noter $V = \Omega \wedge r$, avec V perpendiculaire au plan de Ω et de r et

$$\|V\| = \|\Omega\| \cdot \|r\| \sin \gamma.$$

Nous allons généraliser cette notion.

Définition 1.4.1.

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs A et B pris dans cet ordre est un **troisième vecteur** C déterminé de la manière suivante (fig. 1.4.2.) :

a) Sa **direction** est perpendiculaire à la direction de plan définie par les vecteurs A et B .

b) Son **sens** est tel que le sens de rotation autour de C amenant A sur B soit le sens direct de l'espace [inverse de celui des aiguilles d'une montre, (cf. règle 1.2.1.)].

c) Son **module** est l'aire du parallélogramme construit sur A et B .

Le produit vectoriel se représente généralement par le symbole

$$(1.4.1.) \quad C = A \wedge B,$$

avec

$$(1.4.2.) \quad \|C\| = \|A\| \|B\| \sin(A, B),$$

l'angle (A, B) étant choisi entre 0 et π [cf. règle (1.2.2.)].

Par suite, si deux vecteurs sont parallèles, leur produit vectoriel est nul et réciproquement si A et B sont différents de 0 , vecteur nul.

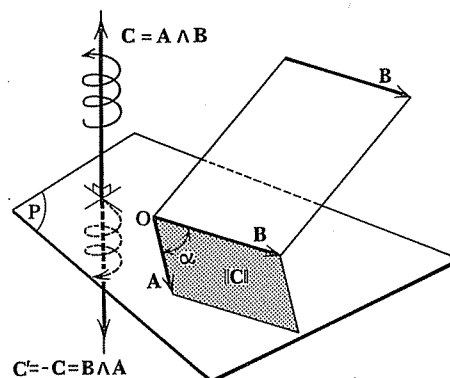


FIG. 1.4.2.

Remarque 1.4.2. — Considérons (fig. 1.4.3.) un conducteur rectiligne de longueur l parcouru par un courant d'intensité i , placé dans un champ magnétique uniforme B faisant un angle α avec le conducteur. L'expérience montre que ce conducteur est soumis à une force F orthogonale à la fois à lui-même et au champ B . Le module de la force est $\|F\| = B \cdot i \cdot l \cdot \sin \alpha$.

Cette force peut se représenter par

$$F = i \cdot l \wedge B,$$

où l est le vecteur qui coïncide avec la tige conductrice.

Si le conducteur n'est pas rectiligne, on envisage un « élément de longueur », soit la différentielle dl et la force élémentaire

$$dF = i \cdot dl \wedge B.$$

La force résultante sur le circuit s'obtiendra en effectuant une *intégrale curviligne* (chap. 6).

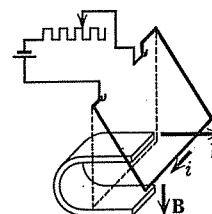


FIG. 1.4.3.

Remarque 1.4.3. — Le module de $C = A \wedge B$ représente aussi le double de l'aire du triangle construit à l'aide de A et B .

Remarque 1.4.4. — La littérature anglo-saxonne utilise souvent pour le produit vectoriel la notation $C = A \times B$.

Exercice 1.4.1. — Montrer que

$$\|A \wedge B\|^2 + |A \cdot B|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

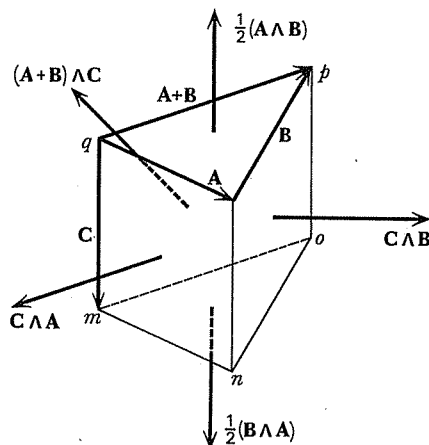


FIG. 1.4.4.

Exercice 1.4.2. — Démontrer à l'aide d'un produit vectoriel

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{1}{2R},$$

où a, b, c désignent les côtés opposés aux angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit.

En déduire qu'*'au plus grand angle est opposé le plus grand côté*.

Propriétés fondamentales du produit vectoriel

a) En permutant les vecteurs A et B , C est changé en $-C$, car le sens défini ci-dessous est inversé. Nous avons donc

$$(1.4.3.) \quad (B \wedge A) = -(A \wedge B) \quad (\text{fig. 1.4.2}).$$

Le **produit vectoriel** n'est **pas commutatif**. Il est dit **anticommutatif**.

b) En multipliant A ou B par un scalaire positif, *seul le module de C est changé, C est multiplié par le même scalaire*. En multipliant A ou B par un scalaire négatif, le sens de C est changé en même temps que son module est multiplié par le module du scalaire, C est donc encore multiplié par le scalaire.

Il en résulte que, quels que soient les signes des scalaires λ et λ' , les relations suivantes sont vérifiées :

$$(\lambda \cdot A) \wedge B = A \wedge (\lambda \cdot B) = \lambda [A \wedge B].$$

En combinant, nous obtenons

$$(1.4.4.) \quad \lambda A \wedge \lambda' B = \lambda \lambda' [A \wedge B].$$

c) Le **produit vectoriel** est **distributif** par rapport à l'addition vectorielle.

$$(1.4.5.) \quad C \wedge (A + B) = C \wedge A + C \wedge B.$$

Un exemple simple va nous permettre de retrouver cette propriété.

Exemple 1.4.2.

Considérons (fig. 1.4.4.) un prisme $mnopqr$ dont les côtés sont formés par les vecteurs A, B, C et $A + B$, C étant perpendiculaire au plan de A et B .

Il est possible de représenter (cf. définition 1.4.1.) l'*aire* de chaque face du prisme par un **vecteur** dont le module est égal à l'aire de la face considérée et dont la direction est normale à cette même face dirigée vers l'extérieur (par convention).

Le prisme étant une surface fermée, la projection de l'*aire* totale dans une direction quelconque doit être nulle, c'est-à-dire que le vecteur résultant de ceux représentant chaque aire doit être le vecteur nul. Soit

$$(A + B) \wedge C + \frac{1}{2} A \wedge B + \frac{1}{2} B \wedge A + C \wedge A + C \wedge B = 0.$$

Le produit vectoriel n'étant pas commutatif, il vient

$$\mathbf{C} \wedge (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{C} \wedge \mathbf{B}.$$

Nous allons maintenant voir quelques exemples où le produit vectoriel intervient.

Exemple 1.4.3.

Considérons un repère cartésien orthonormé (fig. 1.4.5.). Sur les axes Ox et Oy , choisissons deux vecteurs unitaires $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$. Si l'axe Oz choisi est tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct, le vecteur $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ est le vecteur unitaire de l'axe des z .

Si le trièdre n'a pas le sens direct conventionnel (sens de la pesanteur en mécanique), nous avons

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{k}.$$

Exemple 1.4.4.

En mécanique, le **moment** $\mathcal{M}$ d'une force $\mathbf{F}$ par rapport à un **point** O est défini comme le produit

$$\mathcal{M} = \|\mathbf{F}\| d,$$

où d est la distance (perpendiculaire) entre le point O et la droite support de la force $\mathbf{F}$ (fig. 1.4.6.).

Si $\mathbf{r}$ est un vecteur quelconque d'origine O , ayant son extrémité M sur la droite support de $\mathbf{F}$, d s'exprime par

$$d = \|\mathbf{r}\| \sin \alpha$$

et, par suite,

$$\mathcal{M} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{F}\| \sin \alpha$$

où α est l'angle formé par $\mathbf{r}$ et $\mathbf{F}$.

Par suite, d'après la définition 1.4.1.,

$$\mathcal{M} = \|\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}\|.$$

Le vecteur

$$\mathcal{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$$

est le **vecteur moment** de $\mathbf{F}$ par rapport au **point** O . Ce vecteur est perpendiculaire au plan déterminé par O et $\mathbf{F}$ et sa direction est celle d'un axe de rotation autour de O , rotation que la force $\mathbf{F}$ a tendance à produire.

Indiquons une conséquence de la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition vectorielle (fig. 1.4.7.).

Exercice 1.4.3. — Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrer que

$$\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC} = \mathbf{DA} \wedge \mathbf{DB} + \mathbf{DB} \wedge \mathbf{DC} + \mathbf{DC} \wedge \mathbf{DA}.$$

Exercice 1.4.4. — Montrer que l'aire d'un triangle

$$\text{est } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{où } p = \frac{a+b+c}{2},$$

le rayon du cercle inscrit $r = \frac{S}{p}$, le rayon du cercle

$$\text{circonsrit } R = \frac{abc}{4S}.$$

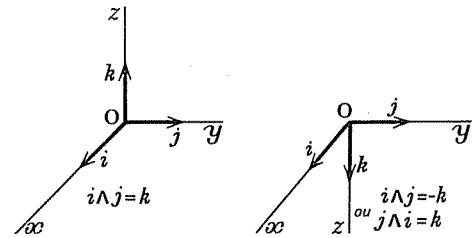


FIG. 1.4.5.

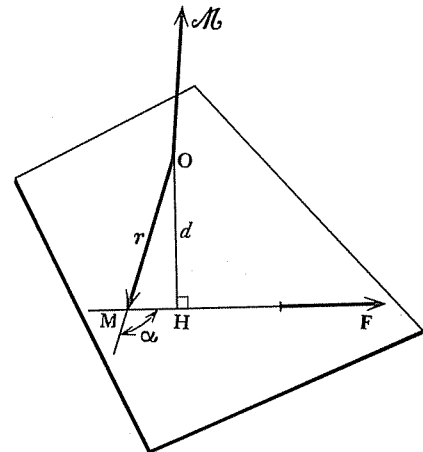


FIG. 1.4.6.

Exercice 1.4.5. — Chercher le lieu des points O tels que le moment $\mathcal{M}_O$ d'une force donnée $\mathbf{F}$, appliquée en un point donné A , soit parallèle à une direction donnée (vecteur $\mathbf{u}$).

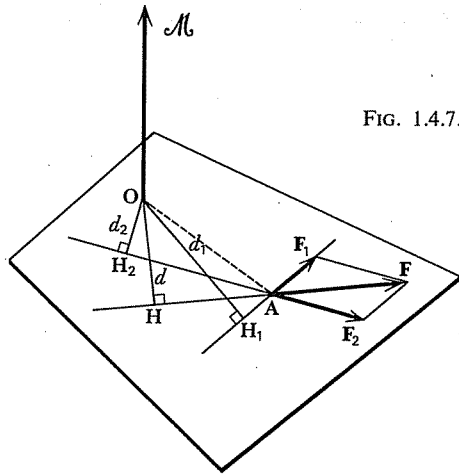


FIG. 1.4.7.

Si dans le plan de O et de F, le vecteur F est décomposé en deux composantes F_1 et F_2 , nous trouvons

$$\|F\| d = \|F_1\| d_1 + \|F_2\| d_2$$

car

$$OA \wedge F = OA \wedge F_1 + OA \wedge F_2.$$

Cette relation est connue sous le nom de théorème de *Varignon*.

Exemple 1.4.5.

Moment $\mathcal{G}_{(\Delta)}$ d'une force F par rapport à un axe $(\Delta) = b'b$ (fig. 1.4.8.).

Pour calculer le moment d'une force par rapport à un axe, nous menons par le point A origine de F un plan (P) perpendiculaire à l'axe $b'b$ qu'il coupe en a. Le vecteur F se décompose en une composante $F_{(\Delta)}$ parallèle à l'axe (Δ) , donc perpendiculaire au plan (P) et une composante $F_{(P)}$ sur la droite CC' intersection du plan (P) et du plan déterminé par les vecteurs $F_{(\Delta)}$ et F.

Le moment $\mathcal{G}_{(\Delta)}$ de la force F par rapport à l'axe (Δ) est défini comme la mesure algébrique du moment de la composante $F_{(P)}$ par rapport au point a. En valeur absolue

$$|\mathcal{G}_{(\Delta)}| = \|F_{(P)}\| \cdot d = \|F\| \cdot \cos \alpha \cdot d,$$

d étant la distance des deux droites bb' et cc' , prise sur leur perpendiculaire commune (paragraphe 1.1.).

Le signe du moment $\mathcal{G}_{(\Delta)}$ est + ou - suivant que $F_{(P)}$ tend à faire tourner autour de (Δ) dans le sens positif ou négatif (paragraphe 1.2.). Si $\mathcal{M}_O$ désigne le moment de F par rapport à un point quelconque O de (Δ) , on montre facilement que

$$(1.4.3.) \quad \mathcal{G}_{(\Delta)} = \mathcal{M}_O \cdot u \quad (\text{exercice 1.4.6.}),$$

où u est le vecteur unitaire de l'axe (Δ) .

Un exemple pratique de cette situation est donné figure 1.4.9. lorsqu'une force inclinée agit sur un disque monté sur arbre monté sur deux paliers.

Exemple 1.4.6.

Couple et moment d'un couple par rapport à un point ou à un axe.

Un couple est formé par deux forces parallèles de même module et de sens opposé (fig. 1.4.10. a). Appliqué sur un corps rigide, ce couple exerce une action de torsion.

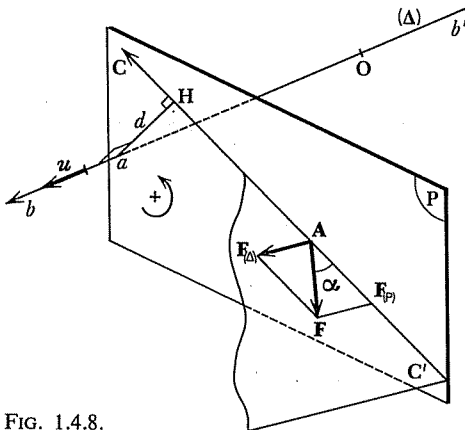


FIG. 1.4.8.

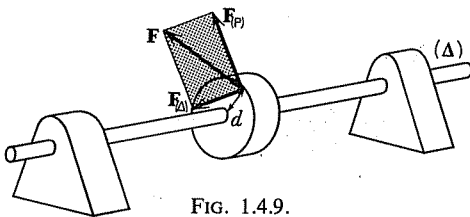


FIG. 1.4.9.

Exercice 1.4.6. — Montrer que le moment $\mathcal{G}_{(\Delta)}$ d'une force F par rapport à un axe (Δ) est égal au produit scalaire

$$\mathcal{G}_{(\Delta)} = \mathcal{M}_O \cdot u,$$

où $\mathcal{M}_O$ est le moment de F par rapport à un point quelconque O de l'axe (Δ) , u le vecteur unitaire de l'axe (Δ) .

Cherchons à évaluer le moment de ce couple par rapport à un point O quelconque.

Additionnons les moments de chaque force par rapport à O , soit (fig. 1.4.10. b)

$$\mathcal{M}_{/O} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \wedge (-\mathbf{F}),$$

ou

$$\mathcal{M}_{/O} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{F}.$$

$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ est un vecteur $\mathbf{e}$ dont le module est la distance d entre les deux droites parallèles, supports des forces $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$. Le moment $\mathcal{M}_{/O}$ est perpendiculaire au plan des forces $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$ (fig. 1.4.10. c) et nous avons

$$\|\mathcal{M}_{/O}\| = \|\mathbf{e}\| \cdot \|\mathbf{F}\| \sin \frac{\pi}{2},$$

soit

$$\|\mathcal{M}_{/O}\| = \|\mathbf{F}\| \cdot d.$$

En d'autres termes, le moment d'un couple par rapport à un point quelconque O a pour module le produit de l'intensité de la force par la distance entre les droites parallèles portant $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$. On retrouve la notion de distance (paragraphe 1.1.).

Le moment $\mathcal{G}_{(\Delta)}$ du couple par rapport à un axe (Δ) est la somme des moments de $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$ par rapport à (Δ) . On trouve comme précédemment

$$\mathcal{G}_{(\Delta)} = \mathcal{M}_{/O} \cdot \mathbf{u}, \text{ avec } \mathcal{M}_{/O} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{F}.$$

Double produit vectoriel

Considérons le produit vectoriel suivant :

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}.$$

C'est un vecteur $\mathbf{X}$. Puisqu'il est perpendiculaire à $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ qui est lui-même perpendiculaire au plan de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$, et qu'il est aussi perpendiculaire à $\mathbf{C}$, il s'ensuit que $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$ est un vecteur situé dans le plan de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ et perpendiculaire à $\mathbf{C}$ (fig. 1.4.11.).

Ainsi

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = m \cdot \mathbf{A} + n \cdot \mathbf{B}.$$

On montre (paragraphe 1.6.) que $m = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ et $n = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$.

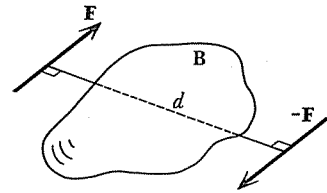


FIG. 1.4.10. a

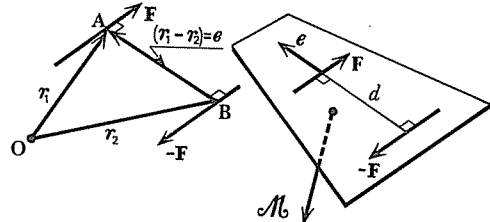


FIG. 1.4.10. b

FIG. 1.4.10. c

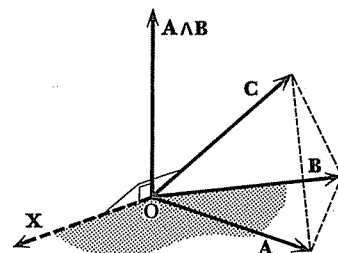


FIG. 1.4.11.

Exercice 1.4.7. — Calculer $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j})$, $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) \wedge \mathbf{i}$ a) directement, b) à l'aide de (1.4.6.) et (1.4.7.).

Exercice 1.4.8. — Étudier le problème de la *division vectorielle*, c'est-à-dire résoudre l'équation

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux vecteurs donnés. On utilisera (1.4.6.) ou (1.4.7.).

Exercice 1.4.9. — Montrer que si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ et que les deux conditions

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$$

sont vérifiées, nous avons $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Que se passe-t-il si l'une d'entre elles seulement est vérifiée?

Ainsi, le double produit vectoriel s'écrit

$$(1.4.6.) \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}$$

et de la même façon

$$(1.4.7.) \quad \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}.$$

Le *produit vectoriel n'est donc pas une opération associative*. (Il ne faut donc pas oublier les parenthèses.)

1.5. PRODUIT MIXTE DÉPENDANCE LINÉAIRE DES VECTEURS

Des combinaisons de produits vectoriels et de produits scalaires apparaissent fréquemment dans les applications. Le plus important de ces produits est le *produit mixte* de trois vecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ qui s'écrit

$$(1.5.1.) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}).$$

D'après les résultats des paragraphes 1.3. et 1.4., un tel produit est une quantité scalaire.

D'après la définition du produit scalaire de deux vecteurs, il vient (fig. 1.5.1.)

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}\| \cos \beta.$$

Or

$$h = \|\mathbf{A}\| \cos \beta,$$

où h est la hauteur du parallélépipède (P) formé avec $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.

D'après la définition du produit vectoriel, $\|\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}\|$ est l'aire (hachurée) de la base de (P).

Ainsi, la *valeur absolue du produit mixte* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ a une interprétation géométrique simple. Elle est égale au *volume du parallélépipède* (P) ayant $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ comme côtés adjacents.

Une autre conséquence des définitions du produit scalaire et du produit vectoriel est que si *deux vecteurs* dans le *produit mixte* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sont *parallèles*, ce *dernier est nul*. De même, si les trois vecteurs sont *coplanaires*, le produit mixte est nul.

Quant au signe du produit mixte, il dépend de l'orientation relative des trois vecteurs. Il est positif si, et seulement si, les trois vecteurs

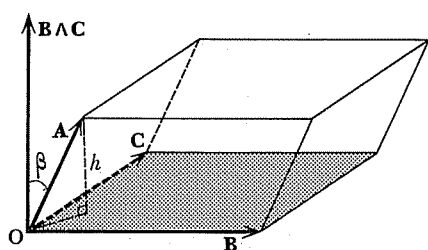


FIG. 1.5.1.

Exercice 1.5.1. — Soit un trièdre orthonormé repéré par i, j, k . On pose

$$\mathbf{A} = j + k, \quad \mathbf{B} = i + k \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = i + j.$$

Dessiner le parallélépipède engendré par $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. Calculer son volume. Décrire les parallélogrammes constitués par les faces.

Exercice 1.5.2. — Soit un trièdre orthonormé de sens direct, c'est-à-dire que les vecteurs de base i, j, k sont tels que

$$k = i \wedge j.$$

Calculer (i, j, u) , avec

$$u = i + j + k.$$

A, B et C forment un trièdre direct. Ceci signifie que **C** et $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ sont situés du même côté du plan déterminé par **A** et **B**. Il s'ensuit que

$$(1.5.2.) \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

et

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}.$$

par contre,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}).$$

Comme le produit scalaire est commutatif, nous avons avec 1.5.2.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}.$$

De plus, pour une constante quelconque k , nous obtenons

$$(1.5.3.) \quad (k \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = k (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}).$$

Application au produit scalaire de deux produits vectoriels

Considérons le produit

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}).$$

Posons $\mathbf{C} \wedge \mathbf{D} = \mathbf{u}$. Nous obtenons le produit mixte.

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \wedge (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})].$$

D'après la relation 1.4.7., il vient

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{D}],$$

d'où

$$(1.5.4.) \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ et $\mathbf{D} = \mathbf{B}$, nous obtenons

$$(1.5.5.) \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$

Cette relation est connue sous le nom d'*identité de Lagrange*.

En exprimant le produit scalaire à l'aide de sa définition dans l'égalité (1.5.5.), nous retrouvons l'expression du module du produit vectoriel

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\|^2 &= \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \|\mathbf{B}\|^2 \cos^2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \\ &= \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \|\mathbf{B}\|^2 \sin^2(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Exercice 1.5.3. — Calculer $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}, \mathbf{C} \wedge \mathbf{A}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ en fonction de $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Exercice 1.5.4. — Soit **A, B et C** trois vecteurs donnés, **X** un vecteur quelconque. Que peut-on dire du produit mixte $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{X}, \mathbf{B} \wedge \mathbf{X}, \mathbf{C} \wedge \mathbf{X})$?

Exercice 1.5.5. — Démontrer

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{D}) = 0.$$

Exercice 1.5.6. — Le vecteur $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ s'écrit $\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}$ ainsi que $\gamma \mathbf{C} + \delta \mathbf{D}$. Calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et en déduire

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \mathbf{D} = (\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \mathbf{A} + (\mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{D}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{C}.$$

Remarque 1.5.1. — L'étude de la *dépendance linéaire* est menée en détail au tome III. L'équation (1.5.6.) est identiquement vérifiée pour

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Si l'on peut trouver des nombres $k_1, \dots, k_n$ non tous nuls tels que la relation (1.5.6.) soit vérifiée, on peut diviser par l'un des nombres $k_i \neq 0$ et représenter le vecteur correspondant A_i comme une combinaison linéaire des autres. Ainsi, si $k_1 \neq 0$, nous obtenons à partir de la relation (1.5.6.),

$$A_1 = -\frac{k_2}{k_1} A_2 - \dots - \frac{k_n}{k_1} A_n.$$

Dans ce cas, les vecteurs sont dits *linéairement dépendants*. Si la relation (1.5.6.) n'est vérifiée que pour $k_1 = \dots = k_n = 0$, alors les vecteurs A_i sont dits *linéairement indépendants*.

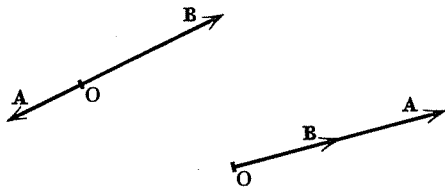


FIG. 1.5.2.

Remarque 1.5.2. — Supposons $A \cdot (B \wedge C) = 0$. Le vecteur A est orthogonal à $B \wedge C$, donc parallèle aux plans dirigés par B et C , soit

$$A = m \cdot B + n \cdot C.$$

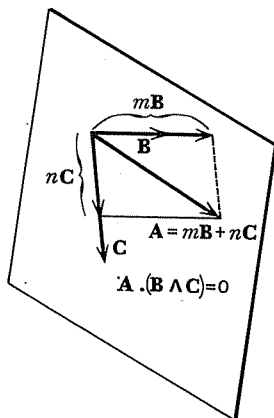


FIG. 1.5.3.

Application à la dépendance linéaire des vecteurs

Définition 1.5.1.

n vecteurs $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits *linéairement dépendants*, si l'un d'entre eux au moins peut être représenté comme une *combinaison linéaire* des $n - 1$ autres. Si aucun des n vecteurs ne peut être représenté de cette façon, ils sont dits *linéairement indépendants*.

Cela revient (remarque 1.5.1.) à l'étude de l'équation

$$(1.5.6.) \quad k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_n A_n = 0$$

d'inconnues $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Exemple 1.5.1.

Deux vecteurs A et B non identiquement nuls sont *linéairement dépendants* si A et B sont *colinéaires* (fig. 1.5.2.). En effet, dans ce cas, $A \wedge B = 0$.

Inversement, si $A \wedge B = 0$, alors

$$\|A \wedge B\| = \|A\| \cdot \|B\| \sin(A, B)$$

entraîne $(A, B) = 0$ ou π puisque $A \neq 0$ et $B \neq 0$ par hypothèse.

Par suite, nous pouvons énoncer :

Théorème 1.5.1.

Deux vecteurs sont *linéairement dépendants*, si, et seulement si, leur *produit vectoriel* est nul.

Exemple 1.5.2.

Trois vecteurs A, B et C non identiquement nuls sont *linéairement dépendants* s'ils sont *coplanaires* (fig. 1.5.3.).

En effet, la dépendance linéaire implique que l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres, soit par exemple

$$A = mB + nC.$$

Il s'ensuit que le produit mixte $A \cdot (B \wedge C) = 0$ et réciproquement (remarque 1.5.2.), d'où

Théorème 1.5.2.

Trois vecteurs sont *linéairement dépendants* si, et seulement si, leur *produit mixte* est nul.

1.6. EXPRESSION ANALYTIQUE DES OPÉRATIONS VECTORIELLES

Nous avons déjà vu au paragraphe 0.7. qu'un vecteur libre V dans l'espace rapporté à des axes rectangulaires ou non s'écrit avec la relation vectorielle fondamentale

$$(1.6.1.) \quad V = Xi + Yj + Zk,$$

X, Y et Z étant les composantes du vecteur V , les vecteurs i, j et k étant les vecteurs unitaires des axes du repère choisi.

Choisissons un repère orthonormé (O, i, j, k) .

Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs

Nous avons vu au paragraphe 1.3. que le produit scalaire de deux vecteurs vérifie des *propriétés de linéarité*. Il en résulte que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques V et V' écrits l'un et l'autre sous la forme (1.6.1.) est la somme des neuf produits partiels mis en évidence par la formule

$$V \cdot V' = (Xi + Yj + Zk) \cdot (X'i + Y'j + Z'k).$$

Comme les vecteurs i, j et k sont unitaires et orthogonaux deux à deux, nous avons

$$(i)^2 = (j)^2 = (k)^2 = 1,$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0.$$

Nous en déduisons l'expression suivante du produit scalaire :

$$(1.6.2.) \quad V \cdot V' = XX' + YY' + ZZ'.$$

Norme d'un vecteur. Distance des deux points

Dans le cas où le vecteur V' est égal au vecteur V , la relation 1.6.2. s'écrit

$$V \cdot V = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

D'autre part, la relation 1.3.2. s'écrit

$$V \cdot V = \|V\|^2.$$

Nous en tirons donc l'importante relation

$$(1.6.3.) \quad \|V\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Exercice 1.6.1. — Vérifier que les vecteurs suivants sont deux à deux orthogonaux :

$$V_1 = (1, 1, 1), \quad V_2 = (1, 2, -3), \\ V_3 = (5, -4, -1).$$

Exercice 1.6.2. — Déterminer un vecteur U orthogonal aux deux vecteurs $V_1 = (-1, 2, 0)$ et $V_2 = (-3, -1, 2)$.

Exercice 1.6.3. — Pour quelles valeurs de a , les vecteurs $U = (a, -2, 1)$ et $V = (2a, a, -4)$ sont-ils orthogonaux?

Exercice 1.6.4. — Calculer le travail fourni par une force $F = 2i + j - k$ (N) à un objet se déplaçant le long d'un segment représenté par le vecteur $r = 3i + 2j - 5k$ (m).

Exercice 1.6.5. — Les sommets d'un triangle sont situés aux points $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 3, 2)$ et $C(1, -2, 1)$. Déterminer la longueur de la médiane AM .

Exercice 1.6.6. — On peut montrer (nous l'admettrons) que le centre I du cercle inscrit d'un triangle (A, B, C) est le barycentre (paragraphe 0.7.) des sommets affectés des coefficients a, b et c , *longueurs* des côtés. Tracer un organigramme de calcul des coordonnées du point I connaissant les coordonnées des sommets A, B et C .

Lorsque A et B sont des points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) , nous retrouvons la formule donnant la distance de deux points

$$(1.6.4) \quad d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

L'expression 1.3.3. donnant le cosinus de deux vecteurs $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$ et $\mathbf{V}' = (X', Y', Z')$ devient

$$\cos(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}.$$

Composantes scalaires du produit vectoriel de deux vecteurs

Les vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ étant mis tous les deux sous la forme 1.6.1, leur produit vectoriel est la somme vectorielle des neuf produits partiels mis en évidence par la formule :

$$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' = (Xi + Yj + Zk) \wedge (X'i + Y'j + Z'k).$$

Or les vecteurs unitaires i, j et k , orthogonaux deux à deux, sont tels que

$$\begin{aligned} i \wedge i &= j \wedge j = k \wedge k = 0, \\ i \wedge j &= -j \wedge i = k, \\ j \wedge k &= -k \wedge j = i, \\ k \wedge i &= -i \wedge k = j. \end{aligned}$$

Il en résulte donc

$$(1.6.5) \quad \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' = (YZ' - ZY')i + (ZX' - XZ')j + (XY' - YX')k.$$

Ainsi, le produit vectoriel de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ a pour composantes scalaires $YZ' - ZY', ZX' - XZ', XY' - YX'$.

L'écriture de 1.6.3. est grandement facilitée si l'on remarque que cette formule peut être interprétée comme le développement d'un « déterminant » par rapport à sa première ligne (voir tome III).

$$(1.6.6) \quad \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}.$$

Mais attention, ce n'est pas un déterminant ordinaire, car les éléments de la première ligne sont des vecteurs. Il s'agit d'un calcul symbolique très commode.

Remarque 1.6.1. — Si les vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ sont situés dans le plan xOy , on a $Z = Z' = 0$. Le produit vectoriel $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$ se réduit d'après (1.6.6.) à $(XY' - YX')k$. Sa mesure algébrique le long de l'axe Oz qui le porte est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$.

Exercice 1.6.7. — Soit les trois vecteurs

$$\mathbf{U} = (1, -1, 1), \quad \mathbf{V} = (3, 1, -3), \quad \mathbf{W} = (3, 5, -9).$$

Calculer $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$ et $\mathbf{U} \wedge \mathbf{W}$. Que peut-on en déduire pour $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$?

Exercice 1.6.8. — Calculer l'aire du triangle de sommets A (2, -3, 1), B (1, -1, 2) et C (-1, 2, 3).

Exercice 1.6.9. — Déterminer un vecteur $\mathbf{u}$, de module 1, orthogonal aux vecteurs $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$ et $\mathbf{w} = (-3, -1, 2)$.

Expression analytique du produit mixte

Nous allons retrouver à l'aide des composantes scalaires des vecteurs les résultats du paragraphe 1.5.

Considérons trois vecteurs dans un repère orthonormé de vecteurs unitaires i, j, k et posons

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}.$$

Considérons le produit mixte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons (cf. chap. 1, tome III).

$$(1.6.7.) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

C'est le *déterminant* formé avec les composantes des vecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.

Les propriétés du produit mixte données au paragraphe 1.5. peuvent se retrouver à partir des règles de calcul des déterminants (chap. 1, tome III).

Composantes scalaires du double produit vectoriel

On peut aussi montrer à partir des composantes les formules 1.4.6. et 1.4.7. concernant le double produit vectoriel.

Nous nous placerons dans un repère cartésien orthonormé de vecteurs unitaires i, j et k , choisi de façon à simplifier les calculs. Prenons i dirigé selon C , j dans le plan formé par B et C et, bien sûr, $k = i \wedge j$, c'est-à-dire que ces vecteurs sont de la forme

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j},$$

$$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{i}.$$

Exercice 1.6.10. — Déterminer le volume du parallélépipède engendré par le sommet O des axes de coordonnées et les trois points $A(2, 1, 1)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(1, 1, 2)$. Dessiner ce solide.

Exercice 1.6.11. — Soit $\mathbf{V} = (a, b, c)$, $\mathbf{V}' = (a', b', c')$ et $\mathbf{V}'' = (a'', b'', c'')$. Montrer que

$$(a\mathbf{V} + a'\mathbf{V}' + a''\mathbf{V}'', b\mathbf{V} + b'\mathbf{V}' + b''\mathbf{V}'', c\mathbf{V} + c'\mathbf{V}' + c''\mathbf{V}'') = (\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'')^2.$$

Exercice 1.6.12. — Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux vecteurs donnés. Déterminer tous les vecteurs $\mathbf{X}$ tels que

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{X}) = \mathbf{0};$$

a) géométriquement; b) analytiquement.

Exercice 1.6.13. — Tracer un organigramme de calcul du double produit vectoriel

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_3) \text{ (relation 1.4.5.)}$$

Les données sont les coordonnées v_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$.

Ainsi

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_2 c_1 \cdot \mathbf{k},$$

d'où

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -b_2 c_1 \end{vmatrix} = -b_2 c_1 a_2 \mathbf{i} + a_1 b_2 c_1 \mathbf{j}.$$

Or nous avons écrit, relation 1.4.7.

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C}.$$

En effet, il est facile de vérifier cette proposition :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C} &= a_1 c_1 (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}) - (b_1 a_1 + b_2 a_2) c_1 \mathbf{i} \\ &= a_1 c_1 b_2 \mathbf{j} - b_2 a_2 c_1 \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Le lecteur constatera que ce paragraphe *ne contient pas de figures*. Nous avons fait de la *géométrie analytique* qui permet d'étudier des propriétés des figures du plan et de l'espace au moyen de calculs sur les coordonnées des points de ces figures. C'est la *méthode aveugle* qui, bien que très utile, ne doit pas faire abandonner l'aspect géométrique.

1.7. PREMIÈRES APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE ET DU PRODUIT VECTORIEL

Les applications sont nombreuses et se rencontreront dans tous les chapitres de ce volume.

Dans ce paragraphe, nous nous contenterons de voir *les équations des droites et des plans, les angles de deux directions* données dans le plan et l'espace. A ces notions fondamentales, nous associerons le calcul de *la distance d'un point à un plan ou à une droite* qui est indispensable pour la recherche de certains moments d'inertie (cf. paragraphe 4.9., tome I).

Angles de deux droites dans le plan

C'est une application directe du produit scalaire et du produit vectoriel.

Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points d'un plan muni d'un repère orthonormé xOy .

Soit $\hat{V}$ (fig. 1.7.1.) l'angle des vecteurs $\mathbf{OM}_1$ et $\mathbf{OM}_2$ compris entre 0 et π .

Le produit scalaire s'écrit

$$\mathbf{OM}_1 \cdot \mathbf{OM}_2 = \|\mathbf{OM}_1\| \cdot \|\mathbf{OM}_2\| \cdot \cos \hat{V},$$

soit
$$\cos \hat{V} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\|\mathbf{OM}_1\| \cdot \|\mathbf{OM}_2\|}.$$

La norme du produit vectoriel est

$$\|\mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{OM}_2\| = \|\mathbf{OM}_1\| \|\mathbf{OM}_2\| \cdot \sin \hat{V},$$

d'où

$$\sin \hat{V} = \frac{|x_1 y_2 - y_1 x_2|}{\|\mathbf{OM}_1\| \cdot \|\mathbf{OM}_2\|}.$$

Par suite,

$$\operatorname{tg} \hat{V} = \frac{|x_1 y_2 - y_1 x_2|}{x_1 x_2 + y_1 y_2}.$$

Quels que soient M_1 et M_2 pris sur deux droites (Δ_1) et (Δ_2) se coupant en un point O pris comme origine des coordonnées, nous avons, en prenant $\hat{V}$ compris entre 0 et π ,

$$(1.7.1.) \quad \operatorname{tg} \hat{V} = \frac{\|\mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{OM}_2\|}{\mathbf{OM}_1 \cdot \mathbf{OM}_2}.$$

La relation 1.7.1. donne la tangente de l'angle de deux droites indépendamment d'un système de coordonnées, que ces droites soient dans un même plan ou dans l'espace.

Nous allons maintenant caractériser les directions et les angles dans l'espace.

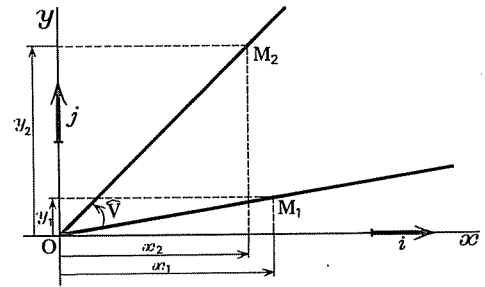


FIG. 1.7.1.

Exercice 1.7.1. — Soit les points $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que l'angle aigu des droites MA et MB ait une valeur constante θ .

Exercice 1.7.2. — Utiliser la relation (1.7.1.) pour déterminer l'angle $\hat{V}$ des droites OM_1 et OM_2 avec $M_1(1, 1, 1)$ et $M_2(+1, 0, 1)$ (repère orthonormé).

Remarque 1.7.1. — A partir de (1.7.1.) on détermine

$$W = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\|\mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{OM}_2\|}{\mathbf{OM}_1 \cdot \mathbf{OM}_2} \text{ et l'on prend}$$

$$\hat{V} = W \text{ si } \mathbf{OM}_1 \cdot \mathbf{OM}_2 > 0,$$

$$\hat{V} = W + \pi \text{ si } \mathbf{OM}_1 \cdot \mathbf{OM}_2 < 0,$$

$$\hat{V} = \frac{\pi}{2} \text{ si } \mathbf{OM}_1 \cdot \mathbf{OM}_2 = 0.$$

Exercice 1.7.3. — On peut montrer (nous l'admettrons) que l'orthocentre H d'un triangle ABC est le barycentre des sommets affectés des coefficients $\operatorname{tg} \hat{A}$, $\operatorname{tg} \hat{B}$ et $\operatorname{tg} \hat{C}$.

Tracer un organigramme de calcul des coordonnées du point H à partir des coordonnées des trois sommets.

Le numérateur de (1.7.1.) sera calculé à l'aide de l'identité de **Lagrange** (1.5.2.).

(On montre de même que le centre Ω du cercle circonscrit est le barycentre des sommets A , B et C affectés des coefficients $\operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}$, $\operatorname{tg} \hat{C} + \operatorname{tg} \hat{A}$, $\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B}$).

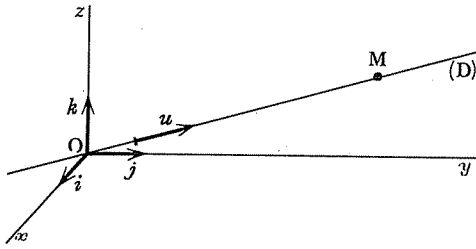


FIG. 1.7.2.

Directions et angles dans l'espace

Un ensemble de droites parallèles définit une **direction** (δ) de l'espace. Menons par une origine de coordonnées la parallèle (D) à cette direction. La connaissance des coordonnées a, b, c d'un point quelconque M de la droite (D) , détermine la direction (δ) (fig. 1.7.2.). Ces coordonnées sont appelées **coefficients directeurs** de la direction. Bien entendu, il est possible de remplacer le point M par un autre point quelconque de (D) , différent de l'origine des coordonnées O .

Ainsi, *les coefficients directeurs d'une direction ne sont déterminés qu'à un facteur constant près, positif ou négatif.*

Si un sens positif est choisi sur (D) , la direction (δ) est *orientée*.

Définition 1.7.1.

On appelle **cosinus directeurs** de la direction orientée (δ) les mesures algébriques α, β, γ des projections sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz du vecteur unitaire u de cette direction orientée.

Nous avons

$$u = \alpha \cdot i + \beta \cdot j + \gamma \cdot k, \quad \text{avec} \quad u^2 = 1.$$

Exemple 1.7.1.

Si le système d'axes est orthonormé, et seulement s'il en est ainsi, les relations classiques suivantes sont vérifiées :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Si $\|OM\| = r$, nous avons

$$a = \alpha \cdot r, \quad b = \beta \cdot r, \quad c = \gamma \cdot r$$

et

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \text{d'où} \quad r = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Les deux signes correspondent aux deux sens possibles qu'il est possible de choisir sur la droite (D) . Connaissant les **coefficients directeurs** a, b, c , nous avons donc les **cosinus directeurs** α, β, γ :

(1.7.2.)

$$\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \beta = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \gamma = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exercice 1.7.4. — Soit $M_1 (1, 1, 1)$ et $M_2 (m-1, m, m+1)$. Quel est le lieu du point M_2 ? Déterminer m pour que les droites OM_1 et OM_2 fassent entre elles un angle $\widehat{V} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 1.7.5. — Déterminer les cosinus directeurs de la droite (D) joignant $A (1, 1, 0)$ et $B (1, 0, 1)$; orientée positivement « vers les z croissant ».

Exercice 1.7.6. — Même exercice que précédemment pour la droite (D') joignant $A' (0, 1, 0)$ et $B' (1, 1, 1)$.

Une droite de l'espace (ou du plan) sera connue à partir de ses coefficients directeurs. Nous reviendrons sur les droites dans le plan et l'espace aux chapitres 3 et 5.

Exemple 1.7.2.

Angle de deux directions orientées dans un repère orthonormé.

Soit deux directions orientées de cosinus directeurs α, β, γ et α', β', γ' . Ces nombres sont les coordonnées des extrémités des deux vecteurs unitaires u et u' de ces directions (fig. 1.7.3.).

L'application du produit scalaire donne

$$u \cdot u' = \|u\| \cdot \|u'\| \cos \hat{V} = \cos \hat{V}$$

dans laquelle $\hat{V}$ désigne l'angle, compris entre 0 et π , des directions orientées. La relation précédente s'écrit d'après 1.6.2.

$$(1.7.3.) \quad \cos \hat{V} = \alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta' + \gamma \cdot \gamma'.$$

Si les deux directions ne sont pas orientées, on écrit, compte tenu des relations (1.7.2.)

$$\cos \hat{V} = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Nous remarquons les deux signes car deux directions non orientées font entre elles, soit un angle $\hat{V}$, soit un angle $\pi - \hat{V}$ (à π près de surcroît).

D'après 1.7.3., l'orthogonalité de deux directions orientées s'exprime par la relation

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Avec des coefficients directeurs quelconques a, b, c et a', b', c' relatifs à deux directions non orientées, la condition d'orthogonalité s'écrit

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0.$$

Équations des droites dans le plan

Considérons une droite (Δ) dans un repère orthonormé xOy . Soit (Δ') la normale à (Δ) menée par O qui coupe (Δ) en H et u un vecteur unitaire de (Δ') dont les composantes sur Ox et Oy sont α et β (cosinus directeurs de Δ).

Pour que le point $M(x, y)$ soit sur (Δ) , il faut, et il suffit, que le produit scalaire du vecteur OM et de u soit égal à la distance du point O

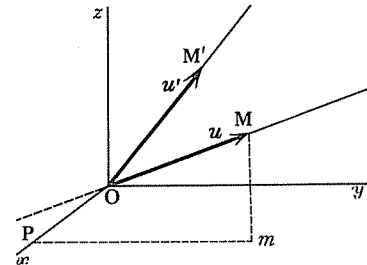


FIG. 1.7.3.

Exercice 1.7.7. — Trouver l'angle (D, D') des droites présentées dans les exercices 1.7.5. et 1.7.6. Faire le dessin.

Remarque 1.7.2. — Géométriquement, nous pouvons également retrouver la relation (1.7.3.) ce que nous ferons à titre d'exercice.

Sur la figure 1.7.3., considérons en effet le contour de coordonnées $OPmM$, M étant l'extrémité du vecteur unitaire u . Nous avons l'égalité vectorielle

$$OM = OP + Pm + mM.$$

Projetons orthogonalement cette relation sur l'autre direction de vecteur unitaire $OM' = u'$. Nous avons

$$\|OM\| \cos \hat{V} = \cos \hat{V} = \alpha \cos(Ox, OM) + \beta \cos(Oy, OM') + \gamma \cos(Oz, OM').$$

Nous retrouvons immédiatement la relation (1.7.3.)

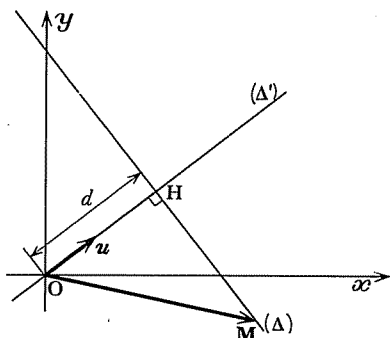


FIG. 1.7.4.

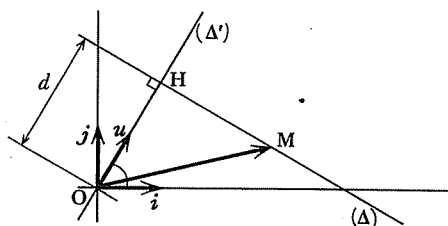


FIG. 1.7.5.

Exercice 1.7.8. — Soit trois droites données par leurs équations normales

$$x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

a) Chercher à quelle condition elles forment un triangle équilatéral.

b) Chercher à quelle condition ce triangle équilatéral est réduit à un point C (droites concourantes). On exprimera OC^2 de deux manières différentes en fonction de p_1, p_2 et p_3 (faire le dessin).

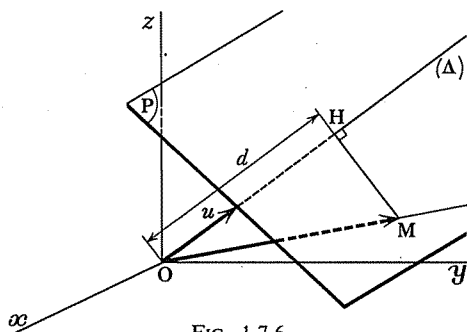


FIG. 1.7.6.

à la droite (Δ) , soit d , (fig. 1.7.4.). Quel que soit M sur la droite (Δ) , nous avons

$$\mathbf{OM} \cdot \mathbf{u} = d.$$

Les coordonnées du point M étant x et y , α et β étant les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{u}$, nous obtenons d'après 1.6.2.

$$(1.7.4.) \quad x \cdot \alpha + y \cdot \beta = d.$$

La relation (1.7.4.) est l'équation générale d'une droite, plus connue des lecteurs sous la forme

$$y = mx + h.$$

Comme le repère est orthonormé (fig. 1.7.5.), nous avons

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}.$$

La droite peut être représentée par ce que l'on appelle son *équation normale* du type 1.7.4., à savoir

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p.$$

Nous reviendrons sur les équations et propriétés des droites dans le plan au chapitre 3.

Représentation d'un plan par une équation du premier degré

Nous avons vu (exemple 1.3.6.) qu'un plan était caractérisé par un produit scalaire de deux vecteurs, en l'absence d'un système d'axes.

Nous allons maintenant considérer l'espace rapporté à un repère orthonormé.

Soit (Δ) une droite normale au plan passant par l'origine des coordonnées et sur laquelle nous choisissons un vecteur unitaire de composantes α, β, γ suivant Ox, Oy, Oz [cosinus directeurs de (Δ)].

Un point M quelconque du plan (fig. 1.7.6.) de coordonnées x, y, z appartient au plan (P) normal à la droite (Δ) précédente si le produit scalaire du vecteur $\mathbf{OM}$ et du vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de (Δ) a pour valeur d , distance de l'origine des coordonnées au plan (P) , soit

$$\mathbf{OM} \cdot \mathbf{u} = d.$$

En passant aux composantes, nous obtenons l'équation du plan

$$(1.7.5.) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = d.$$

Ainsi, tout plan est représenté par une équation du premier degré en x, y, z , et inversement (exercice 1.7.10.).

Nous reviendrons plus en détails sur les équations et les propriétés des plans au chapitre 5.

Distance d'un point à un plan ou à une droite

Ces problèmes de distance apparaissent en particulier dans la recherche des moments d'inertie d'un corps par rapport à un plan ou à une droite.

Exemple 1.7.3.

Moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de coordonnées.

Soit un corps solide et un axe (Δ) de cosinus directeurs α, β, γ , le vecteur unitaire sur cet axe étant u (fig. 1.7.7.).

Soit P un point du corps de coordonnées x, y, z dans le repère cartésien orthonormé de vecteurs unitaires i, j et k .

Le moment d'inertie cherché $I_{(\Delta)}$ (cf. paragraphe 4.9. tome I) est

$$I_{(\Delta)} = \int d^2 \cdot dm,$$

d étant la distance d'un point matériel P quelconque du corps à la droite (Δ) .

Or nous avons

$$d = \| u \wedge OP \| = \| OP \| \sin \theta.$$

D'autre part, d'après 1.6.4.,

$$u \wedge OP = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

soit

$$u \wedge OP = (\beta z - \gamma y) i + (\gamma x - \alpha z) j + (\alpha y - \beta x) k.$$

Le carré scalaire donne

$$d^2 = (u \wedge OP) \cdot (u \wedge OP),$$

soit

$$d^2 = \alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 (x^2 + z^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy.$$

Exercice 1.7.9. — Déterminer l'équation du plan normal au vecteur $V(1, 2, 2)$ et passant par $M(1, 1, 3)$. Quelle est la distance de l'origine O à ce plan?

Exercice 1.7.10. — Montrer que toute relation du type

$$ax + by + cz = d$$

est l'équation d'un plan, de direction normale (a, b, c) .

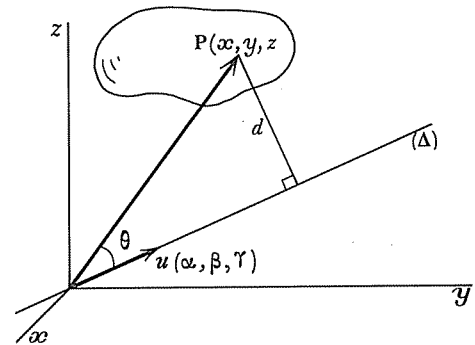


FIG. 1.7.7.

Exercice 1.7.11. — Soit deux droites (Δ) et (Δ') passant par les points A et A' , parallèles aux vecteurs u et u' . Montrer que la distance d de ces deux droites est

$$d = \frac{|(u, AA', u')|}{\|u \wedge u'\|}.$$

Remarque 1.7.3. — On peut aussi utiliser la formule (1.5.1.) soit

$$d^2 = u^2 \cdot OP^2 - (u \cdot OP)^2.$$

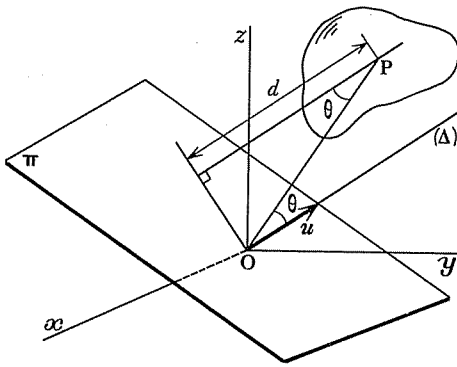


FIG. 1.7.8.

Exercice 1.7.12. — Déterminer le moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon R , centrée en O par rapport au plan (P) d'équation $x + y + z = 1$.

Exemple 1.7.4.

Moment d'inertie par rapport à un plan passant par le centre de coordonnées.

Soit un corps solide et un plan (π) , (fig. 1.7.8.) dont la direction normale a pour cosinus directeurs α, β, γ respectivement suivant des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . Si P est un point du corps de coordonnées x, y, z le moment d'inertie cherché (cf. paragraphe 4.9., tome I) est

$$I_{\pi} = \int d^2 \cdot dm,$$

où d est la distance d'un point matériel P quelconque du corps au plan considéré.

Nous avons

$$d = u \cdot \overrightarrow{OP} = \|\overrightarrow{OP}\| \cos \theta.$$

Par suite, en passant aux composantes, la distance d cherchée est

$$d = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

1.8. FONCTION VECTORIELLE. VITESSE ET ACCÉLÉRATION D'UNE PARTICULE

Nous avons déjà vu (relation 0.9.3.) qu'une courbe de l'espace dans un repère cartésien peut se représenter par la relation vectorielle suivante, écrite dans un repère orthonormé (O, i, j, k) :

$$(1.8.1) \quad \mathbf{r}(t) = x_1(t) \mathbf{i} + x_2(t) \mathbf{j} + x_3(t) \mathbf{k}.$$

Supposons que la fonction $\mathbf{r}(t)$ soit définie dans un voisinage de t_0 .

Notion de limite

Comme pour les fonctions d'une variable, nous dirons que la fonction vectorielle $\mathbf{r}(t)$ tend vers une *limite* $\mathbf{l}$, quand t tend vers t_0 , si $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{l}\|$ tend vers zéro quand t tend vers t_0 .

La recherche de la limite d'une fonction vectorielle se ramène à la recherche des limites de fonctions numériques.

Théorème 1.8.1.

La fonction vectorielle $\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$ admet une limite $\mathbf{l} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$ quand t tend vers t_0 si, et seulement si, les fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ admettent les limites respectives l_1 , l_2 et l_3 .

La limite d'une fonction vectorielle vérifie les mêmes propriétés que la limite des fonctions numériques. En particulier, elle est unique. Si la fonction $\mathbf{r}(t)$ est définie en t_0 , nous avons $\mathbf{l} = \mathbf{r}(t_0)$; la fonction est *continue* en ce point.

Dérivation d'une fonction vectorielle

Soit une fonction vectorielle $\mathbf{r}(t)$ définie dans un intervalle $]a, b[$.

Définition 1.8.1.

Une fonction vectorielle $\mathbf{r}(t)$ est dite *différentiable* en un point t_0 si la limite

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$$

existe. Le vecteur $\mathbf{r}'(t_0)$ est appelé *le vecteur dérivé* de $\mathbf{r}(t_0)$ (fig. 1.8.1.).

D'après la relation 1.8.1. et le théorème 1.8.1., nous avons

Théorème 1.8.2.

Le vecteur dérivé $\mathbf{r}'(t_0)$ existe si, et seulement si, les dérivées

$$x'_m(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_m(t_0 + \Delta t) - x_m(t_0)}{\Delta t}, \quad m = 1, 2, 3$$

des trois composantes de $\mathbf{r}(t_0)$ existent. Alors, le vecteur dérivé s'écrit

$$(1.8.2.) \quad \mathbf{r}'(t_0) = x'_1(t_0)\mathbf{i} + x'_2(t_0)\mathbf{j} + x'_3(t_0)\mathbf{k}.$$

Ainsi, pour dériver une fonction vectorielle, il suffit de dériver chacune des composantes.

Les règles habituelles de différenciation (cf. chapitre 3, tome I) subsistent. Nous avons

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{u})' &= \lambda' \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}' & (\lambda \text{ fonction de } t), \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' + \mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Remarque 1.8.1. — Démonstration du théorème 1.8.1. Supposons que $\mathbf{r}(t)$ tende vers $\mathbf{l}$. Alors,

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{l}\| = \sqrt{(x_1(t) - l_1)^2 + (x_2(t) - l_2)^2 + (x_3(t) - l_3)^2}$$

tend vers zéro. Comme $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a|$, nous en déduisons que $|x_1(t) - l_1|$, $|x_2(t) - l_2|$ et $|x_3(t) - l_3|$ tendent vers zéro quand t tend vers t_0 .

Réciproquement, lorsque $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ tendent respectivement vers l_1 , l_2 et l_3 , $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{l}\|$ tend vers zéro car

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|.$$

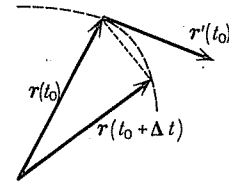


FIG. 1.8.1.

Remarque 1.8.2. — Si le vecteur $\mathbf{r}(t)$ admet des vecteurs dérivés en tout point d'un intervalle $]a, b[$, la fonction vectorielle $\mathbf{r}(t)$ est dite *dérivable* sur $]a, b[$, de dérivée $\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Si la fonction dérivée $\mathbf{r}'(t)$ est dérivable sur $]a, b[$, sa dérivée est appelée *dérivée seconde* et se note

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Exercice 1.8.1. — Soit une hélice circulaire dont tout point P est repéré par le vecteur

$$\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

Calculer

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|, \quad \left\| \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right\|.$$

Exercice 1.8.2. — Si

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 + 2t)\mathbf{i} - 3e^{-2t}\mathbf{j} + 2\sin 5t\mathbf{k},$$

Calculer

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Remarque 1.8.3. — Dérivées partielles d'une fonction vectorielle. Considérons la fonction vectorielle

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k,$$

où les composantes u_i admettent des dérivées partielles par rapport à n variables $t_1, \dots, t_n$. Alors la dérivée partielle de u par rapport à t_i est notée $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ et elle est définie comme la fonction vectorielle

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u_1}{\partial t_i} i + \frac{\partial u_2}{\partial t_i} j + \frac{\partial u_3}{\partial t_i} k.$$

De même

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_m} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_i \partial t_m} i + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_i \partial t_m} j + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_i \partial t_m} k.$$

Exercice 1.8.3. — Soit

$$u(x, y, z) = 3x^2y i + yz^2 j - xz k.$$

Calculer les dérivées partielles première et seconde au point $(1, -2, -1)$.

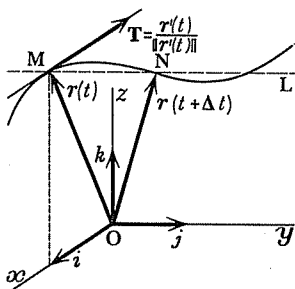


FIG. 1.8.2.

De plus, nous avons

Dérivée d'un produit scalaire :

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Dérivée d'un produit vectoriel :

$$(u \wedge v)' = (u' \wedge v) + (u \wedge v').$$

Dérivée du produit mixte :

$$(u, v, w)' = (u', v, w) + (u, v', w) + (u, v, w').$$

Les démonstrations seront faites à titre d'exercice (faire attention à l'ordre des vecteurs pour le produit vectoriel).

Exemple 1.8.1.

Si $r(t)$ est une fonction vectorielle de norme constante, soit

$$\|r(t)\| = C,$$

nous avons

$$\|r\|^2 = r \cdot r = C^2$$

et

$$(r \cdot r)' = 2r \cdot r' = 0.$$

Il s'ensuit que la dérivée d'une fonction vectorielle $r(t)$ de norme constante est soit le vecteur nul, soit un vecteur orthogonal à $r(t)$.

Tangente à une courbe (C) de l'espace

La tangente à la courbe (C) en un point M de (C) est la position limite MT, si elle existe, d'une droite MN quand N tend vers M le long de la courbe (fig. 1.8.2).

C'est la signification géométrique de la dérivée analogue pour une courbe de l'espace à celle d'une courbe plane (cf. paragraphe 1.6., tome I).

Si la courbe est donnée par le vecteur $r(t)$ et si $r(t)$ admet un vecteur dérivé $r'(t)$ non nul, la tangente à (C) au point M(t) a pour vecteur directeur $r'(t)$.

En effet, la droite MN admet pour vecteur directeur $\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$ si N(t + Δt) est repéré par le vecteur $r(t + \Delta t)$. Lorsque N tend vers M, c'est-à-dire que Δt tend vers zéro, $\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$ a pour limite $r'(t)$.

Ainsi, dans un repère orthonormé, les *coefficients directeurs* de la tangente à une courbe représentée par une relation vectorielle du type 1.8.1. sont $x'_1(t)$, $x'_2(t)$, $x'_3(t)$ (si ces dérivées existent).

Les *cosinus directeurs* a_i de cette tangente sont alors donnés par les relations 1.7.2. qui s'écrivent

$$a_i = \frac{\pm x'_i(t)}{\sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + x_3'^2(t)}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Le vecteur unitaire tangent $\mathbf{t}$ à la courbe donnée s'écrit

$$\mathbf{t} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k},$$

soit

$$(1.8.3.) \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

si $\mathbf{r}'(t)$ n'est pas nul. (Sinon, voir chapitre 3.)

Vitesse d'une particule

Soit $\mathbf{r}(t)$ le vecteur repérant la position d'une particule P en mouvement dans l'espace, t étant le temps.

Le vecteur

$$(1.8.4.) \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

est tangent à la trajectoire (C) de la particule P. Il est appelé le **vecteur vitesse** du mouvement.

Choisissons sur la trajectoire de P une origine O. Nous avons vu (tome I, paragraphe 4.4.) que la longueur de l'arc de courbe entre O (t_0) et P (t) est donnée par

$$(1.8.5.) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{x_1'^2(u) + x_2'^2(u) + x_3'^2(u)} du,$$

c'est l'*abscisse curviligne* de P par rapport à O, soit

$$(1.8.5.) \quad \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{V}\|.$$

Le vecteur $\mathbf{V}$ est porté par la tangente à la trajectoire.

Exercice 1.8.4. — Un point matériel se déplace le long d'une courbe d'équations paramétriques

$$x = 3e^{-2t}, \quad y = 4 \sin 3t, \quad z = 5 \cos 3t.$$

Déterminer son vecteur vitesse et le module du vecteur vitesse à l'instant 0.

Exercice 1.8.5. — Une particule se déplace le long de la courbe d'équations paramétriques

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t}.$$

Déterminer la longueur parcourue par la particule entre l'instant 0 et l'instant 10.

Remarque 1.8.4. — Si la trajectoire (C) est donnée par le vecteur $r(s)$, s étant la longueur d'un arc de courbe d'origine donnée (*abscisse curviligne*), nous pouvons écrire

$$\mathbf{V} = \frac{dr(s)}{dt} = \frac{dr(s)}{ds} \frac{ds}{dt}$$

soit

$$\mathbf{V} = \|\mathbf{V}\| \mathbf{T},$$

$\mathbf{T}$ étant le vecteur tangent à la trajectoire orientée.

$$(A) \quad \mathbf{T} = \frac{dr(s)}{ds} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}.$$

Pour un cercle de rayon R , nous avons

$$\mathbf{r}(t) = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j},$$

d'où

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -R \sin t \mathbf{i} + R \cos t \mathbf{j}$$

avec d'après (1.8.5.)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} = R^2,$$

d'où

$$s = \int_0^t R dt^* = R t$$

(longueur arc de courbe).

Ainsi, la représentation d'un cercle à l'aide de l'*abscisse curviligne* est

$$\mathbf{r}(s) = R \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} + R \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}.$$

Nous retrouvons bien la relation (A).

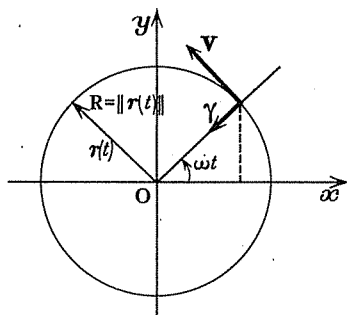


FIG. 1.8.3.

La formule 1.8.5. peut aussi s'écrire

$$(1.8.6.) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{r'(t) \cdot r'(t)} dt.$$

Les mécaniciens choisissent la notation équivalente (voir remarque 1.8.3.) pour la vitesse d'un point P

$$\mathbf{V}_P = \frac{d}{dt}(\mathbf{OP}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

$$\mathbf{V}_P = \frac{d\mathbf{P}}{ds} \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}_P\| \mathbf{t},$$

avec

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{P}}{ds},$$

où $\mathbf{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de la particule en P.

Accélération d'une particule

La dérivée du vecteur vitesse est appelée le *vecteur accélération* de la particule et est notée γ .

Ainsi

$$(1.8.6.) \quad \gamma(t) = \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2},$$

soit

$$\gamma(t) = \mathbf{V}'(t) = \mathbf{V}''(t).$$

Exemple 1.8.2.

La fonction vectorielle

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}$$

décrit le mouvement d'une particule P se déplaçant en sens inverse des aiguilles d'une montre sur un cercle (C) de rayon R , centré à l'origine d'un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Le *vecteur vitesse*

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

est tangent au cercle (C) (fig. 1.8.3.).

Son module est constant

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{r'(t) \cdot r'(t)} = R\omega.$$

La vitesse angulaire (vitesse divisée par la distance R au centre de rotation) est égale à ω .

Le vecteur accélération :

$$\gamma = \frac{dV}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - R\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$

On remarquera que $\|\mathbf{V}\| = Cte$, mais $\gamma \neq 0$, ce qui montre que le module de γ n'est pas en général le taux de variation de V .

Nous verrons au paragraphe 2.5. d'autres applications à la mécanique lorsque nous aurons étudié les changements de repères.

Exemple 1.8.3.

Sans avoir parlé des changements de repères, nous pouvons dès maintenant considérer le mouvement d'un point matériel P qui se déplace sur une ligne droite à partir du centre d'un disque qui tourne avec une vitesse angulaire ω .

La position du point matériel (P) est donnée par (fig. 1.8.4).

$$(1.8.7.) \quad \mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{u},$$

avec

$$(1.8.8.) \quad \mathbf{u}(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}.$$

Différentions (1.8.7.), le vecteur $\mathbf{u}$ étant fonction de la variable t , nous avons

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{u} + t \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$$

avec

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j},$$

par suite,

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0.$$

On retrouve le résultat de l'exemple 1.8.1., c'est-à-dire que $\mathbf{u}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ sont orthogonaux, $\mathbf{u}(t)$ étant un vecteur unitaire.

Exercice 1.8.6. — Une particule P est repérée par le vecteur $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + ct^2 \mathbf{k}$.

a) Calculer les vecteurs vitesse et accélération.

b) Montrer que le module du vecteur vitesse croît avec le temps, alors que le module du vecteur accélération reste constant. Que peut-on en déduire?

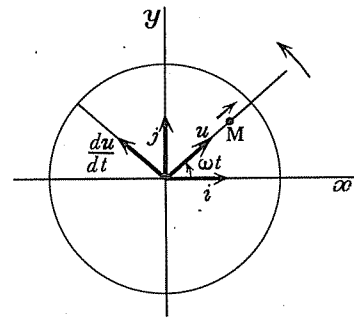


FIG. 1.8.4.

1.9. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

1.9.1. — Montrer que les plans passant par un point donné O et équidistants de deux points donnés A et B forment deux groupes de plans et que, dans chaque groupe, les plans passent par une droite fixe. Y a-t-il un plan commun aux deux groupes ?

1.9.2. — On donne deux points A et B . Mener par une droite donnée (D) un plan tel que les distances de A et B à ce plan soient égales (on dit que le plan est équidistant des deux points).

1.9.3. — Peut-on mener par un point, un plan équidistant de trois points, de quatre points ?

1.9.4. — Soit un triangle ABC dont les trois sommets sont situés d'un même côté d'un plan (P) donné. Démontrer que la somme des distances des points A , B et C au plan (P) est égale au triple de la distance à (P) du centre de gravité G du triangle ABC .

1.9.5. — Démontrer que si une droite fait des angles égaux avec trois droites de directions distinctes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

1.9.6. — Mener par un point une droite faisant des angles égaux avec trois droites données.

1.9.7. — Lieu des droites passant par un point donné et faisant des angles égaux avec deux droites données. Mener par un point une droite faisant des angles égaux avec trois droites données.

1.9.8. — Démontrer que si les côtés AB et AC d'un angle droit (AB, AC) percent un plan (P) en B et C , la projection de l'angle (AB, AC) est un angle obtus.

1.9.9. — Comment se projettent deux droites sur un plan parallèle à leur perpendiculaire commune ?

1.9.10. — On considère deux plans (P) et (Q) qui se coupent suivant la droite (D) . On joint un point A de (P) à un point B de (Q) , on projette A orthogonalement en a sur (Q) et l'on mène la perpendiculaire aH sur (D) .

1° Démontrer que l'angle $\beta = (HA, Ha)$ est constant lorsque A varie dans (P) .

2° Établir qu'entre l'angle β et l'angle α de la droite AB avec le plan (Q) , il existe la relation

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AH}{AB}.$$

1.9.11. — D'un point de l'espace, on abaisse les perpendiculaires sur les faces d'un dièdre. Comparer l'angle ainsi formé à l'angle plan du dièdre.

1.9.12. — Une droite est perpendiculaire au bissecteur d'un dièdre. Elle perce les faces en A et B et le bissecteur en C . Étudier la position des points A , B et C .

1.9.13. — Trouver le travail produit par une force F agissant sur une particule, si cette particule est déplacée d'un point A à un point B le long du segment AB , lorsque

- a) $A(0, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $F = i + j + k$,
 b) $A(0, -1, 2)$, $B(0, 0, 0)$, $F = k$;
 c) $A(2, 2, 2)$, $B(4, 4, 4)$, $F = -4j + 2k$;
 d) $A(4, 1, 3)$, $B(5, 2, 5)$, $F = i + j - k$.

Pourquoi le travail est-il égal à zéro dans d) ?

1.9.14. — Pour quelles valeurs de a_1 les vecteurs $a = a_1 i + 2j$ et $b = 3i + 4j - k$ sont-ils orthogonaux ?

1.9.15. — Trouver un vecteur unitaire $a_1 i + a_2 j$ perpendiculaire au vecteur $2i - 5j$.

1.9.16. — Montrer que les vecteurs $a = i + j + k$, $b = i + 2j - 3k$ et $c = -5i + 4j + k$ sont orthogonaux.

1.9.17. — Considérons le mécanisme articulé (fig. 1.9.1.) constitué par trois tiges de longueurs inégales. Les tiges OA et CB tournent autour de A et C . Leurs positions sont définies par les angles polaires φ et θ . Déterminer la relation entre φ et θ . On projettera l'égalité $OA + AB + BC + CO = 0$ sur les axes Ox et Oy , et l'on éliminera β . La relation finale, appelée *équation de Freudenstein* se présente sous la forme

$$K_1 \cdot \cos \theta - K_2 \cdot \cos \varphi + K_3 - \cos(\theta - \varphi) = 0,$$

$$\text{avec } K_1 = \frac{d}{c}, \quad K_2 = \frac{d}{a}, \quad K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ca}.$$

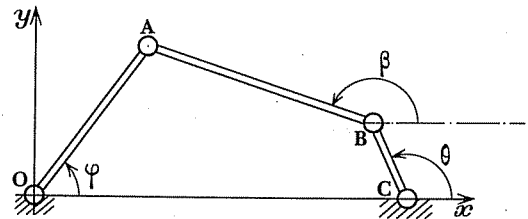


FIG. 1.9.1.

1.9.18. — Démontrer analytiquement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit est que l'un ou l'autre de ses côtés soit parallèle au plan.

1.9.19. — Dans un repère orthonormé, on donne

$$a = i + 2j - 3k, \quad b = i + 2j, \quad c = -i + j.$$

Trouver $a \wedge b$, $b \wedge a$, $(a - b) \wedge (b - c)$, $(b \wedge c)$ et $\|b \wedge c\|$, $(a \wedge b) \wedge c$, $a \wedge (b \wedge c)$.

1.9.20. — Trouver l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs suivants : $(i + j, i - j)$, $(i - j + k, i + j - k)$, $(i, i + j + k)$ et $(i + 2j - k, j + k)$.

1.9.21. — Deux boules de rayons égaux à $\frac{1}{2}$, placées en A_0 et B_0 , sont lancées à l'instant 0 sur un plan horizontal avec une même vitesse v sous des angles α et β (fig. 1.9.2.). Déterminer quelle relation α et β doivent vérifier pour que la collision ait lieu. Trouver l'instant t_0 à laquelle elle se produit.

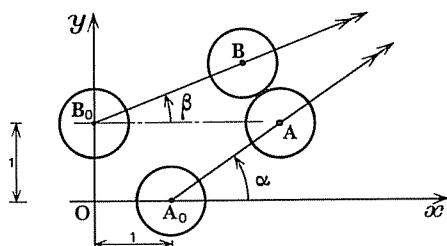


FIG. 1.9.2.

1.9.22. — Une force F a une ligne d'action passant par un point A. Trouver le moment $\mathcal{M}$ de F par rapport à un point O, lorsque

$$A(0, 0, 0), \quad O(0, 1, 0), \quad F = i + j;$$

$$A(1, 1, 0), \quad O(-5, 1, 0), \quad F = i;$$

$$A(0, -1, 4), \quad O(3, 0, 2), \quad F = 3i - j + 2k.$$

1.9.23. — Trouver un vecteur unitaire normal au plan passant par les points suivants :

$$a) (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);$$

$$b) (-1, 2, 3), (1, 1, 1), (2, -1, 3);$$

$$c) (0, -1, 0), (2, 2, 1), (1, 0, 1).$$

1.9.24. — Si $V = a \wedge b$, montrer que $a \cdot V = 0$ et $b \cdot V = 0$, à l'aide de la relation (1.4.6.).

1.9.25. — Trouver le volume des parallélépipèdes construits à partir des vecteurs donnés dans un repère orthonormé

$$a) i, -j, 3k;$$

$$b) 2j + k, i - j, -j + 4k;$$

$$c) i + j, i - j, k;$$

$$d) j + k, i + j, i - 3k.$$

Le lecteur pourra avec intérêt représenter ces parallélépipèdes à titre d'exercice.

1.9.26. — Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $a = i + 2j - k$, $b = 3i - 4k$, $c = -i + j$ et $d = 2i - j + 3k$. Trouver

$$a) a \wedge (c \wedge d);$$

$$b) (b \wedge c) \cdot (b \wedge d);$$

$$c) (b \wedge a) \wedge (c \wedge d);$$

$$d) (a \wedge b) \wedge (c \wedge d).$$

1.9.27. — Si $r(t)$ est le vecteur position d'une particule en mouvement $t \geq 0$, trouver l'allure des trajectoires, le vecteur vitesse, la vitesse et le vecteur accélération quand

$$a) r(t) = ti;$$

$$b) r(t) = t^2 k;$$

$$c) r(t) = 3 \cos 2t i + 3 \sin 2t j;$$

$$d) r(t) = t \sin t i - j.$$

1.9.28. — Calculer la distance de l'origine des coordonnées à la droite joignant les points P $(0, \lambda, h)$ et Q $(\mu, 0, -h)$. Condition nécessaire et suffisante pour que cette distance ait pour valeur h ?

1.9.29. — On considère le réseau cristallin cubique à faces centrées dont le motif élémentaire est représenté figure 1.9.3. L'atome A situé sur la diagonale (au quart de celle-ci) est placé dans le tétraèdre OPQR. Déterminer l'angle (AO, AP) et les angles similaires.

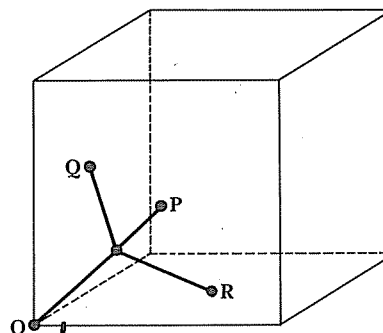


FIG. 1.9.3.

1.9.30. — L'ordinateur est d'un grand intérêt en géométrie pour le tracé d'éléments d'une figure sur imprimante ou leur affichage sur écran vidéo. Soit deux points $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$.

a) Afficher ces points sur l'écran, ainsi que le segment $A_1 A_2$ dont chaque point M est défini par

$$\vec{OM} = \vec{OA_1} + \lambda \cdot \vec{A_1 A_2},$$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$. On fait varier λ de 0,1 en 0,1, par exemple.

b) Afficher la droite (D) définie par A_1 et A_2 , en ne programmant que les points situés dans les limites de l'écran. On peut utiliser l'équation :

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

Faire varier x pas à pas et opérer un test sur y .

c) Soit $A_3(x_3, y_3)$ un autre point non aligné avec A_1 et A_2 . Afficher un rayon lumineux issu de A_3 et le rayon réfléchi sur (D) .

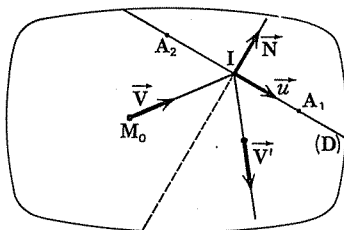
d) Tracer le triangle $A_1 A_2 A_3$ sur l'écran, ainsi que les médianes, les hauteurs et les médiatrices.

1.9.31. — Afficher sur écran les cercles

a) de centre $A(x_0, y_0)$ et de rayon R , en utilisant les formules 3.8.3, l'angle θ variant de 0,1 en 0,1 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

b) circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$ (voir plus haut). Tracer également le cercle inscrit.

1.9.32. — On suppose tracée la droite de 1.9.30.b. Soit $M_0(x_0, y_0)$ d'où l'on envoie la bille dans une direction $\vec{V}(a, b)$.



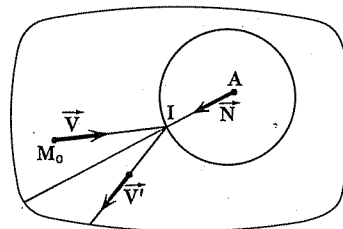
1° Le programme de ce calcul commence par la détermination de I , point d'impact sur (D) .

2° La bille repart selon

$$\vec{V}' = 2(\vec{V} \cdot \vec{N})\vec{N} - \vec{V} \text{ (symétrie)}$$

si $\vec{N}$ est normal à (D) et unitaire. Programmer le tracé du chemin suivi par la bille.

3° Même question en remplaçant (D) par le cercle de 1.9.31. a. $\vec{N}$ est le vecteur unitaire porté par $\vec{AI}$.



4° Deux points lumineux A_3, A_4 s'affichent sur l'écran avant que l'on trace le rayon issu de M_0 . Les positions de ces points sont aléatoires (tirées au sort, voir corrigé).

Le joueur doit choisir $\vec{V}(a, b)$ pour que le rayon réfléchi passe entre L_1 et L_2 . Si c'est le cas, il gagne un point et son total s'affiche en bas à gauche. Programmer ce jeu pour deux joueurs (arrêt dès que l'un des joueurs obtient 6 points).

Transformations ponctuelles. Changements de coordonnées.

2.0. LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

L'examen comparé de deux figures (F) et (F') de l'espace suggère parfois un *procédé géométrique* permettant de mettre en correspondance les points M de (F) avec les points (M') de (F'). Cela revient à utiliser des fonctions de (F) sur (F'), appelées *transformations ponctuelles*. Les plus connues sont les translations, symétries, rotations, homothéties. Elles ne sont pas définies sur une figure donnée, mais en tout point de l'espace. On peut aussi effectuer en chaîne plusieurs transformations $T_1, T_2, \dots$. Il en résulte une transformation composée, notée

$$T = \dots \circ T_2 \circ T_1.$$

Ces produits sont rarement commutatifs. Par contre, ils sont associatifs :

$$(T_3 \circ T_2) \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1).$$

Enfin, nous chercherons à construire la transformation inverse T^{-1} d'une transformation donnée T, pour repasser de la figure (F') à la figure (F).

Nous étudions brièvement les transformations planes, puis les transformations dans l'espace.

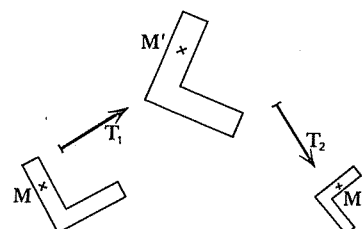


FIG. 2.0.1.

Remarque 2.0.1. — Étant donné deux points A et B et une transformation T, on peut transformer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$, avec $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$. On peut noter $\mathbf{T}$ cette transformation *vectorielle* associée de façon évidente à la transformation *ponctuelle* T. Nous parlerons par exemple du symétrique d'un vecteur, etc.

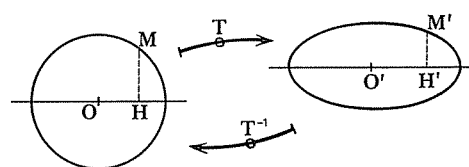


FIG. 2.0.2.

L'*aspect analytique* de ces transformations ponctuelles nous conduit à présenter les systèmes de références classiques. Ceux-ci permettent la représentation des figures. Nous indiquons aussi les formules qui permettent de passer d'un système de référence à un autre dans le plan ou dans l'espace.

Nous donnons l'application de ces notions fondamentales à l'étude des corps solides en mouvement qu'il faut savoir repérer à chaque étape de leur mouvement propre ou de leur mouvement les uns par rapport aux autres dans le cas d'assemblage de solides.

2.1. LES TRANSFORMATIONS PLANES

Nous avons déjà rencontré dans les chapitres 0 et 1 :

- les projections orthogonales,
- les symétries par rapport à une droite,
- les translations,
- les rotations.

Rappelons quelques propriétés déjà vues.

a) Les symétries conservent la *longueur* (paragraphe 0.10.) des segments, ainsi que les *angles* de droites ou de vecteurs au signe près (remarque 1.2.3.).

b) Le produit de deux symétries par rapport à deux axes (Δ) et (Δ') est (paragraphe 1.2.) :

- une *rotation* de centre I si (Δ) et (Δ') sont concourantes en un point I,
- une *translation* si (Δ) et (Δ') sont parallèles.

Inversement, toute rotation ou toute translation se décompose facilement en un produit de symétries d'une infinité de manières. Ainsi, d'après la propriété a), une rotation et une translation conservent les longueurs et les angles. D'une façon générale, tout produit de symétries conserve les longueurs, et les angles au signe près (fig. 2.1.1.).

Définition 2.1.1.

Une transformation qui conserve les longueurs est appelée *isométrie*.

Il est facile de montrer qu'une telle transformation conserve les angles, au signe près. En effet, si un triangle ABC est transformé en un

Remarque 2.1.1. — Rappelons (remarque 1.2.3.) qu'une symétrie change un angle de vecteurs en son opposé. En particulier, elle conserve le *parallélisme* et l'*orthogonalité* des droites du plan. Un produit de n symétries *conserve* les angles si n est *pair*, les change en leurs *opposés* si n est *impair*.

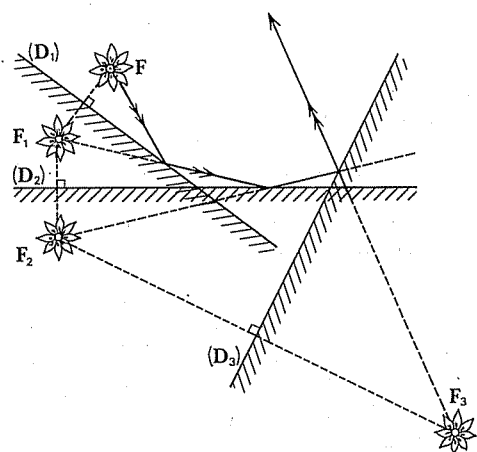


FIG. 2.1.1.

triangle $A'B'C'$, (fig. 2.1.2.) nous avons

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}'$ (relation 1.3.10.),
soit $\cos \hat{A} = \cos \hat{A}'$, ce qui signifie $\hat{A}' = \hat{A}$, ou $\hat{A}' = -\hat{A}$ à $2k\pi$ près.

L'isométrie est *directe* si l'angle est conservé, *inverse* si l'angle est transformé en son opposé. Deux figures qui se correspondent dans une isométrie sont *isométriques*. Par abus de langage, on dit que ce sont des *figures égales* (directement ou inversement).

Translation plane

Cette transformation sera utile pour représenter le mouvement d'un objet sans rotation.

Définition 2.1.2.

Étant donné un vecteur libre V du plan, la *translation* $\mathcal{T}_V$ est la transformation qui envoie un point M en un point M' tel que

$$(2.1.1.) \quad \overrightarrow{MM'} = V \quad (\text{fig. 2.1.3}).$$

La translation $\mathcal{T}_V$ transforme tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur égal $\overrightarrow{A'B'}$. En effet

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}.$$

Ainsi la translation conserve la *longueur*. Un *angle* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est transformé en un angle égal $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ de côtés parallèles au précédent et de même sens. Une translation transforme toute droite (D) en une droite (D') parallèle à (D) , tout cercle (C) de centre ω en un cercle (C') de rayon égal, de centre ω' translaté de ω (exercice).

Considérons un repère cartésien de centre O . La relation (2.1.1.) s'écrit sous la forme

$$(2.1.2.) \quad \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + V.$$

Les coordonnées x', y' de M' se déduisent aisément de celles de M par les formules

$$(2.1.3.) \quad \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b. \end{aligned}$$

Enfin le produit de deux translations $\mathcal{T}_{V_1}$ et $\mathcal{T}_{V_2}$ est commutatif et donne une nouvelle translation $\mathcal{T}_{V_1+V_2}$.

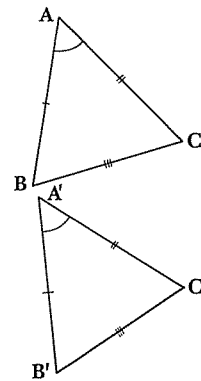


FIG. 2.1.2.

Remarque 2.1.2. — Nous savons (exemple 1.3.4.) qu'une *symétrie* agissant sur les vecteurs libres (remarque 2.0.1.) est une transformation *linéaire*, soit

$$T(V_1 + V_2) = T(V_1) + T(V_2),$$

$$T(\lambda \cdot V) = \lambda \cdot T(V).$$

Il en est de même pour les *rotations* qui sont des produits de symétries.

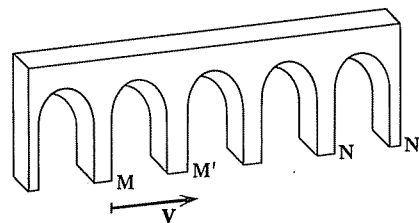


FIG. 2.1.3.

Exercice 2.1.1. — Un disque tourne dans son plan autour d'un point A situé sur sa circonférence. Une tige assujettie à passer par le centre O , garde une direction fixe (fig. 2.1.4.). Chercher le lieu des extrémités M et N du diamètre formé par la tige.

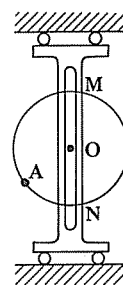


FIG. 2.1.4.

Exercice 2.1.2. — Pour le système articulé (fig. 2.1.5.) les points A et B sont supposés fixes. Déterminer le lieu des points E et F sachant que les tiges DF et CE restent verticales.

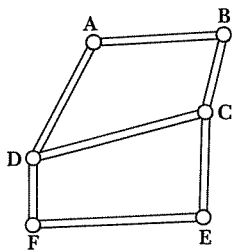


FIG. 2.1.5.

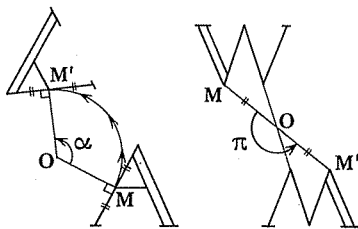


FIG. 2.1.6. a

FIG. 2.1.6. b

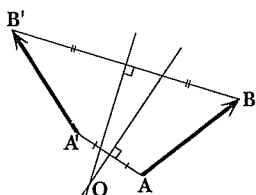


FIG. 2.1.7.

Exercice 2.1.3. — Soit deux plans inclinés orthogonaux de section droite xOy sur lesquels roulent deux wagonnets liés par une corde de longueur $2a$ joignant les milieux M et N des wagonnets (fig. 2.1.8.).

On marque les points A sur Ox , B sur Oy tels que $OA = OB = a$.

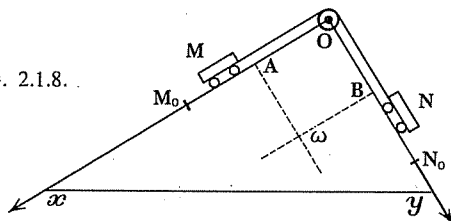


FIG. 2.1.8.

Rotation plane

Cette transformation sera utile pour décrire le mouvement d'un objet dont un point est maintenu fixe.

Définition 2.1.3.

Étant donné un point fixe O et un angle α , la **rotation** $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ est la transformation qui envoie un point M en un point M' tel que

$$\begin{cases} \|OM'\| = \|OM\|, \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha + 2k\pi \quad (\text{fig. 2.1.6. a}). \end{cases}$$

Le lecteur montrera facilement que la rotation $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ est une isométrie.

Si $\alpha = \pi$, les points M, O, M' sont alignés et la rotation s'appelle **symétrie de centre O** (fig. 2.1.6. b).

Considérons l'image A'B' d'un vecteur AB (fig. 2.1.7.). Il est facile de montrer que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha.$$

En effet, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) - (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{AB})$.

De plus, $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

Or, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'})$ puisque la rotation conserve les angles d'une figure d'où

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha.$$

Inversement, considérons deux figures directement égales faisant entre elles un angle α ($\alpha \neq 0 + 2k\pi$). Il est facile de montrer qu'il existe un centre de rotation O tel que $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ envoie une figure sur l'autre.

Dans ce cas, les **médiatrices** des segments AA' et BB' passent par O : cela fournit une construction du centre O à la règle et à l'équerre (fig. 2.1.7.).

Exemple 2.1.1.

Soit deux points O_1 et O_2 donnés dans le plan. On effectue successivement $\mathcal{R}_{O_1,\alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{O_2,\alpha_2}$ (fig. 2.1.9. a).

Une figure (F) est transformée successivement en deux figures (F_1) et (F_2), un vecteur AB en deux vecteurs A_1B_1 et A_2B_2 . Nous avons

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{AB}, \mathbf{A_2B_2}) &= (\mathbf{AB}, \mathbf{A_1B_1}) + (\mathbf{A_1B_1}, \mathbf{A_2B_2}) \\
 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2k\pi.
 \end{aligned}$$

Ainsi tout vecteur $\mathbf{AB}$ tourne d'un angle fixe $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, ce qui signifie que la composée des deux rotations $\mathcal{R}_{O_1, \alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{O_2, \alpha_2}$ est en général une rotation $\mathcal{R}_{O_3, \alpha_3}$ où O_3 est un centre à déterminer, et

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2k\pi.$$

Le lecteur construira le centre O_3 en traçant deux médiatrices sur la figure 2.1.9. b, comme sur la figure 2.1.7. Notons que ce produit de rotations de centres distincts n'est pas commutatif.

Cas particulier : si $\alpha_3 = 0 + 2k\pi$ la composée des rotations $\mathcal{R}_{O_1, \alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{O_2, \alpha_2}$ n'est plus une rotation. On obtient une **translation** car l'image d'un vecteur $\mathbf{AB}$ est un vecteur $\mathbf{A_2B_2}$ égal à $\mathbf{AB}$.

Indiquons pour terminer l'expression vectorielle d'une rotation $\mathcal{R}_{O, \alpha}$ à l'aide du vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de l'axe orienté perpendiculaire au plan. Il est immédiat (fig. 2.1.10.) que

$$(2.1.4.) \quad \mathbf{OM}' = \cos \alpha \cdot \mathbf{OM} + \sin \alpha \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{OM}.$$

Tous les résultats précédents peuvent se montrer vectoriellement en utilisant cette égalité (2.1.4.).

Il est facile d'en déduire les coordonnées de M' (x' , y') connaissant celle de M (x , y) en utilisant un repère orthonormé d'origine O ,

$$(2.1.5.) \quad \begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, \\ y' &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

ainsi que l'écriture matricielle correspondante (cf. tome III).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Homothétie. Similitude plane

Ces deux transformations ne conservent pas la longueur, contrairement aux précédentes.

Définition 2.1.4.

Étant donné un point fixe O et un réel k , l'**homothétie** $\mathcal{H}_{O, k}$ est la transformation qui envoie un point M en un point M' tel que

$$(2.1.6.) \quad \mathbf{OM}' = k \cdot \mathbf{OM}.$$

Comparer, en module et en direction, les vecteurs $\mathbf{AM}$ et $\mathbf{BN}$. Montrer que la médiatrice de MN passe par un point fixe ω et préciser la nature du triangle ωMN .

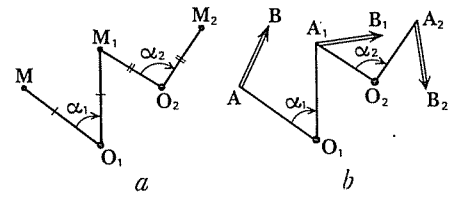


FIG. 2.1.9. a

FIG. 2.1.9. b

Exercice 2.1.4. — Construire le centre O_3 (exemple 2.1.1.) sachant que $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Décrire la rotation $\mathcal{R}_{O_3, \alpha_3}$.

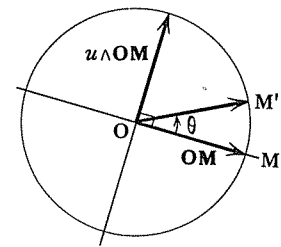


FIG. 2.1.10.

Exercice 2.1.5. — Soit deux rotations $\mathcal{R}_{O_1, \alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{O_2, \alpha_2}$ qui s'expriment vectoriellement par

$$\begin{aligned} \mathbf{O_1M_1} &= \cos \alpha_1 \cdot \mathbf{O_1M} + \sin \alpha_1 \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{O_1M}, \\ \mathbf{O_2M_2} &= \cos \alpha_2 \cdot \mathbf{O_2M_1} + \sin \alpha_2 \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{O_2M_1}. \end{aligned}$$

a) Exprimer $\mathbf{O_2M_2}$ en fonction de $\mathbf{O_1M}$ et de $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

b) Chercher le point invariant en posant

$$\mathbf{M} = \mathbf{M_2} = \mathbf{O_3}.$$

c) On donne les coordonnées (a_1, b_1) de O_1 , (a_2, b_2) de O_2 dans un repère orthonormé xOy . Calculer les coordonnées (a_3, b_3) de O_3 en fonction des précédentes.

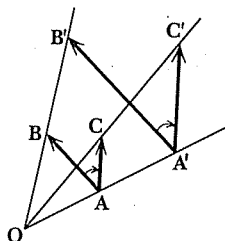


FIG. 2.1.11.

Exercice 2.1.6. — Considérons une transformation ponctuelle qui transforme tout vecteur V du plan en le vecteur $V' = k \cdot V$. Montrer que c'est une homothétie de rapport k . Comment peut-on trouver le centre ($k \neq 1$)?

Exercice 2.1.7. — Soit un triangle ABC . Construire un carré $MNPQ$ inscrit dans ce triangle, le côté MN étant confondu avec BC .

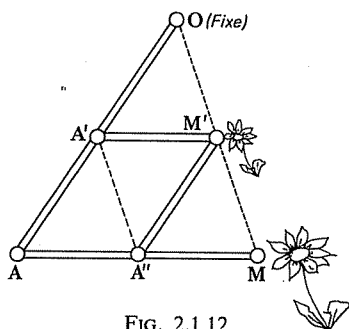


FIG. 2.1.12.

Exercice 2.1.8. — Soit deux droites (D) et (D') sécantes en O , et un point A extérieur à (D) et (D') . Construire un cercle passant par A et tangent aux deux droites (D) et (D') .

Exercice 2.1.9. — (suite de l'exercice 2.1.3.). — Trouver le lieu du point I , milieu de MN , et celui du point P , sommet du rectangle $MONP$.

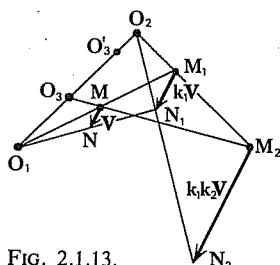


FIG. 2.1.13.

Tout vecteur AB est transformé en un vecteur $A'B' = k \cdot AB$. Il suffit d'appliquer la relation de Chasles. En conséquence, une homothétie conserve les **angles** de vecteurs, que k soit positif ou négatif, (fig. 2.1.11.). D'ailleurs pour $k = -1$, $\mathcal{H}_{O,-1}$ est la rotation $\mathcal{R}_{O,\pi}$.

L'homothétie $\mathcal{H}_{O,k}$ transforme une droite (D) en une droite (D') parallèle à (D) , un cercle (C) de centre ω et de rayon R en un cercle (C') de rayon $|k| \cdot R$, de centre ω' homothétique de ω .

Exemple 2.1.2.

Considérons l'appareil (fig. 2.1.12.) appelé **pantographe**. Le point O est fixé sur la planche à dessin. Le stylet placé en M suit les contours d'une figure (F) . Le crayon placé en M' dessine une figure (F') . Comme A' est le milieu de OA , et A'' celui de AM , la droite $A'A''$ est parallèle à OM (théorème de *Thalès*). M' est le milieu de OM , donc

$$OM' = \frac{1}{2} \cdot OM.$$

La figure (F') est donc homothétique de (F) dans l'homothétie $\mathcal{H}_{O,\frac{1}{2}}$. On obtient une réduction de moitié.

Exemple 2.1.3.

Considérons deux homothéties $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ et $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ effectuées l'une après l'autre dans cet ordre. Si les centres O_1 et O_2 sont confondus, le résultat est l'homothétie $\mathcal{H}_{O_1,k_1 \cdot k_2}$ (exercice).

Dans le cas contraire, il est plus difficile de conclure. Cependant, tout vecteur V est transformé en un vecteur $k_1 k_2 V$ (fig. 2.1.13.). Le résultat est donc une homothétie de rapport $k_3 = k_1 k_2$, de centre O_3 à déterminer (on suppose $k_1 k_2 \neq 1$). Ce centre O_3 est invariant par le produit des deux homothéties, soit

$$\mathcal{H}_{O_1,k_1} \quad \mathcal{H}_{O_2,k_2} \\ O_3 \longmapsto O'_3 \longmapsto O_3$$

et $O_1 O'_3 = k_1 \cdot O_1 O_3$ et $O_2 O_3 = k_2 \cdot O_2 O'_3$.

Ces égalités entraînent que les points O_3 et O'_3 (fig. 2.1.13.) sont alignés avec O_1 et O_2 . Cela fournit une construction graphique du centre O_3 (fig. 2.1.13.).

Il suffit de construire le transformé M_2 d'un point M et de tracer MM_2 qui passe nécessairement par O_3 .

Si $k_1 k_2 = 1$, la composée des homothéties est une **translation** car le transformé d'un vecteur MN est alors un vecteur égal $M_2 N_2$.

Théorème 2.1.1.

Le produit des homothéties $\mathcal{H}_{O_1, k_1}$ et $\mathcal{H}_{O_2, k_2}$ est en général une **homothétie** $\mathcal{H}_{O_3, k_3}$ dont le centre O_3 est aligné avec O_1 et O_2 , le rapport k_3 étant égal à $k_1 k_2 \neq 1$. Si $k_1 k_2 = 1$, il s'agit d'une **translation**.

L'exemple suivant traite une application importante de ce théorème.

Exemple 2.1.4.

Soit un triangle ABC et une droite (Δ) qui coupe BC en P, CA en Q, AB en R (fig. 2.1.14.). Le produit de $\mathcal{H}_{P, \frac{PC}{PB}}$ par $\mathcal{H}_{Q, \frac{QA}{QC}}$ effectué dans cet ordre transforme B en A ce que le lecteur montrera.

Ce produit est une homothétie de centre aligné avec P et Q, et avec A et B. C'est donc le point R.

Son rapport est égal à $\frac{RA}{RB}$ et à $\frac{PC}{PB} \times \frac{QA}{QC}$, d'où l'égalité

$$(2.1.7.) \quad \frac{PC}{PB} \cdot \frac{QA}{QC} \cdot \frac{RB}{RA} = 1.$$

Réciproquement cette égalité assure l'**alignement** de trois points P, Q, R. C'est le théorème de **Ménélaus**.

Nous allons maintenant composer une homothétie et une rotation pour définir la notion très importante de **figures semblables**.

Définition 2.1.5.

La transformation,

$$\sigma(O, \alpha, k) = \mathcal{R}_{O, \alpha} \circ \mathcal{H}_{O, k}$$

est appelée **similitude plane** de centre O, d'angle α et de rapport k .

Les figures se correspondant par une similitude sont dites **semblables** (fig. 2.1.12.).

D'après les résultats précédents, une similitude conserve les angles au signe près. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est transformé en un vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ tel que

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{A'B'}\| &= k \cdot \|\overrightarrow{AB}\|, \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) &= \alpha. \end{aligned}$$

Exercice 2.1.10. — Montrer que le point O_3 (exemple 2.1.3.) est donné par

$$\overrightarrow{O_1 O_3} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \cdot \overrightarrow{O_1 O_2}.$$

Remarque 2.1.3. — Le lecteur vérifiera sur une figure que le produit de deux homothéties n'est pas commutatif.

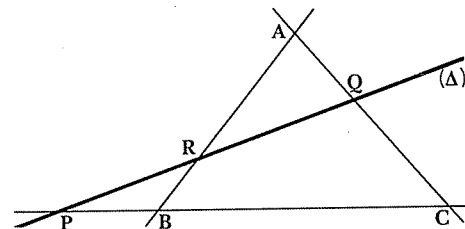


FIG. 2.1.14.

Exercice 2.1.11. — Montrer que trois points P, Q et R, pour lesquels l'égalité (2.1.7.) est vérifiée, sont alignés. (On utilisera provisoirement le point Q' intersection de PR et de AC.)

Exercice 2.1.12. — Soit un triangle ABC et trois points P sur BC, Q sur CA, R sur AB tels que les droites AP, BQ, CR soient concourantes en un point O (faire la figure). Montrer que

$$\frac{PC}{PB} \times \frac{QA}{QC} \times \frac{RB}{RA} = -1.$$

(On appliquera le théorème de Ménélaüs d'abord au triangle ABP coupé par ROC, puis au triangle APC coupé par BOQ.) Réciproquement, cette égalité assure que AP, BQ et CR sont concourantes. C'est le théorème de **Ceva**.

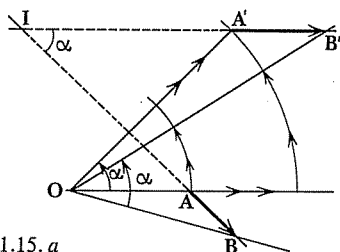


FIG. 2.1.15. a

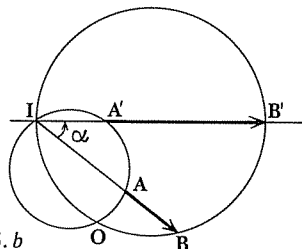


FIG. 2.1.15. b

Remarque 2.1.4. — Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ dont les angles formés par les côtés sont deux à deux égaux.

Nous pouvons écrire les relations (exercice 1.4.2.)

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c},$$

$$\frac{\sin \widehat{A'}}{a'} = \frac{\sin \widehat{B'}}{b'} = \frac{\sin \widehat{C'}}{c'}$$

et

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

puisque les angles sont égaux. Les triangles sont *semblables* dans une similitude de rapport k (au signe près).

Remarque 2.1.5. — Le lecteur connaît déjà

1° le lieu des points dont le *rapport des distances* à deux points fixes A et B est constant;

2° le lieu des points d'où l'on voit un segment AB sous un *angle constant*. Ce sont en général deux cercles (C) et (C') (paragraphe 3.3.).

Exercice 2.1.13. — Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) , interpréter la transformation définie par

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Inversement, considérons deux figures (F) et (F') *semblables*, c'est-à-dire qu'un vecteur AB de (F) et son homologue $A'B'$ de (F') vérifient

$$(2.1.6) \quad \begin{cases} \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|} = k \text{ (Cte)}, \\ (AB, A'B') = \alpha \text{ (Cte)}. \end{cases}$$

Existe-t-il un point O et une similitude de centre O qui transforme une figure en l'autre?

Si ce point existe, nous avons pour tout A

$$(OA, OA') = \alpha \quad \text{et} \quad \|OA'\| = k \cdot \|OA\|.$$

Ces deux relations définissent deux lieux géométriques qui sont des *cercles* (voir remarque 2.1.5.), d'où une construction possible du point O .

En effet, considérons un vecteur AB de la figure (F) et son homologue $A'B'$ dans (F') , dont les supports se coupent en I (fig. 2.1.15. a).

Les points I, A, A' d'une part, I, B, B' d'autre part, sont *cocycliques* avec O car les segments AA' et BB' sont vus, des points O et I , sous l'angle α . La construction consiste à tracer les cercles (IAA') et (IBB') qui se recoupent au point cherché O (fig. 2.1.15. b).

Notons que les nombres et fonctions *complexes* (chapitre 4) permettent aussi de traiter ces questions.

Il existe beaucoup d'autres transformations ponctuelles que nous n'étudierons pas ici.

Citons l'*affinité orthogonale* d'axe (Δ) et de rapport k , notée $\mathcal{A}_{\Delta, k}$, qui transforme un point M en M' tel que $HM' = k \cdot HM$ (fig. 2.1.16.), où H est la projection orthogonale de M sur (Δ) . Cette transformation sera utile pour transformer une ellipse en cercle, et inversement.

Citons aussi l'*inversion* dont nous parlerons brièvement à propos du cercle (chapitre 3).

Après ces transformations planes, nous allons voir quelques transformations classiques dans l'espace.

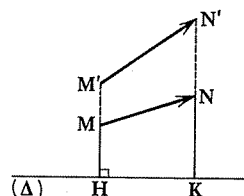


FIG. 2.1.16.

2.2. TRANSFORMATIONS SPATIALES

Nous allons revoir ou voir successivement la translation, la rotation autour d'un axe, la symétrie par rapport à une droite, par rapport à un point ou à un plan, la symétrie des figures, l'homothétie.

Translation

La définition est analogue à celle de la géométrie plane.

Définition 2.2.1.

Étant donné un vecteur libre V de l'espace, la **translation** $\mathcal{T}_V$ est la transformation qui envoie un point M en un point M' tel que

$$(2.2.1.) \quad \overrightarrow{MM'} = V.$$

Comme la translation plane, la translation dans l'espace transforme un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur égal $\overrightarrow{A'B'}$, conserve les longueurs et les angles.

Enfin, le produit de deux translations $\mathcal{T}_{V_1}$ et $\mathcal{T}_{V_2}$ est commutatif. Nous obtenons la translation $\mathcal{T}_{V_1+V_2}$.

Exemple 2.2.1.

La transformée d'une droite par translation est une droite qui lui est parallèle.

Le transformé d'un angle par translation est un angle égal dont les côtés sont respectivement parallèles aux côtés du premier et de même sens.

Un plan (P) parallèle à la translation $\overrightarrow{AB}$ se correspond à lui-même.

Si (P) n'est pas parallèle au vecteur de translation, son transformé est un plan (P') qui lui est parallèle.

Si (C) est un cercle du plan (P) , le cercle (C') transformé de (C) par la translation $\overrightarrow{AB}$ est un cercle (C') de même rayon dont le plan est parallèle à celui de (C) .

Rotation autour d'un axe

Lorsque l'on se fixe deux points A et B d'une figure (F) de l'espace (par exemple deux points sur l'arête d'une plaque (P) rectangulaire, figure 2.2.1.), celle-ci peut tourner autour de la droite qui joint les deux points.

Exercice 2.2.1. — Soit deux plans sécants (P) et (Q) , A un point variable de (P) , B un point variable de (Q) . Déterminer le lieu géométrique des points A et B sachant que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à un vecteur donné V .

Exercice 2.2.2. — Soit un trièdre de sommet O formé par trois plans (P) , (Q) et (R) . Déterminer un triangle dont les sommets A , B et C appartiennent respectivement aux plans (P) , (Q) et (R) , tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient respectivement égaux à deux vecteurs donnés V et V' .

Remarque 2.2.1. — Contrairement au cas de la rotation plane, l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'})$ entre un vecteur et son transformé n'est pas égal à θ (sauf si $AM \perp (\Delta)$). Ceci est visible sur la figure 2.2.1.

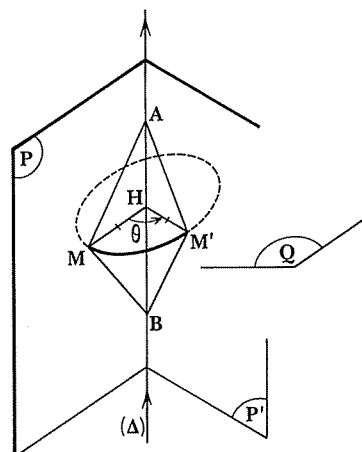


FIG. 2.2.1.

Remarque 2.2.2. — Une figure (F) globalement invariante par toute rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$ d'axe (Δ) donné est une figure de *révolution* d'axe (Δ) (fig. 2.2.2. a). Si (F) est invariante pour $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, on dit que (Δ) est un *axe de répétition* d'ordre n (fig. 2.2.2. b) pour $n = 5$.

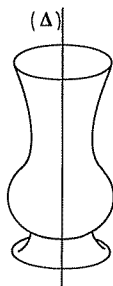


FIG. 2.2.2. a

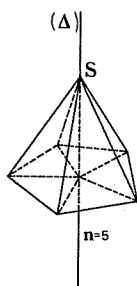


FIG. 2.2.2. b

Exercice 2.2.3. — Soit O un point quelconque de l'axe (Δ). Montrer que la rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \theta}$ s'exprime vectoriellement à l'aide du vecteur unitaire u de (Δ) par

$$\mathbf{OM}' = \cos \alpha \cdot \mathbf{OM} + \sin \alpha \cdot (u \wedge \mathbf{OM}) + (1 - \cos \alpha) \cdot (u \cdot \mathbf{OM}) \cdot u.$$

En déduire l'expression matricielle dans un repère orthonormé (i, j, u).

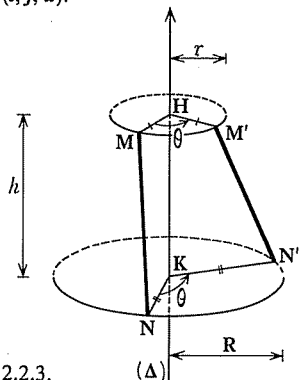


FIG. 2.2.3.

Exercice 2.2.4. — Caractériser les axes des rotations qui transforment un point donné A en un point donné A'.

Exercice 2.2.5. — Construire l'axe (Δ) de la rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$ qui transforme un vecteur donné $\mathbf{AB}$ en un vecteur donné $\mathbf{A'B'}$ non coplanaire avec $\mathbf{AB}$. Indiquer comment trouver l'axe (Δ) et l'angle de rotation α dans un repère donné.

La droite AB s'appelle *l'axe de rotation*.

Dans cette rotation, tous les points de l'axe restent fixes. Tout autre point M de la plaque reste à des distances constantes de A et de B. Le triangle MAB tourne autour de AB et sa hauteur MH garde une longueur invariable. L'angle (HA, HM) demeurant droit, le point M décrit un cercle ou une portion de cercle centré en H dans le plan (Q) mené par H perpendiculaire à AB (fig. 2.2.1.).

Définition 2.2.2.

La *rotation* d'axe (Δ) et d'angle θ est la transformation ponctuelle $\mathcal{R}_{\Delta, \theta}$ qui, à tout point M de l'espace associe le point M' de la façon suivante :

- on mène par M le plan (Q) orthogonal à (Δ) en un point H,
- on effectue dans le plan (Q) orienté par (Δ) la rotation $\mathcal{R}_{H, \theta}$ qui transforme M en M'.

Notons que le dièdre (P, Δ , P') de la figure 2.2.1. formé par les deux positions de la plaque a pour valeur θ (cf. paragraphe 1.2.).

La rotation dans l'espace a beaucoup de points communs avec la rotation plane (sauf la propriété de la remarque 2.2.1.), en particulier

Théorème 2.2.1.

La *rotation* autour d'un axe conserve la longueur des segments ainsi que les angles de vecteurs.

Soit un segment MN (fig. 2.2.3.) et son image M'N' dans une rotation d'angle θ autour de (Δ). Nous avons.

$$\mathbf{M'N'} = \mathbf{M'H} + \mathbf{HK} + \mathbf{KN'}.$$

En calculant le carré scalaire, nous trouvons

$$\mathbf{M'N'}^2 = r^2 + R^2 + h^2 + 2 Rr \cos (\mathbf{HM'}, \mathbf{KN'}).$$

Or
$$\mathbf{MN}^2 = r^2 + R^2 + h^2 + 2 Rr \cos (\mathbf{HM}, \mathbf{KN})$$

et $(\mathbf{HM'}, \mathbf{KN'}) = (\mathbf{HM}, \mathbf{KN})$, car la rotation plane conserve les angles, d'où $\|\mathbf{M'N'}\| = \|\mathbf{MN}\|$.

Les *angles* en position quelconque sont également conservés. Il résulte de ces propriétés que les transformés d'une droite, d'un plan, d'une sphère, etc. sont une droite, un plan, une sphère, etc.

Dans un repère orthonormé (O, i, j, k), la rotation $\mathcal{R}_{k, \theta}$ s'exprime par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Retournement

Considérons un axe (Δ) et la rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \pi}$ (fig. 2.2.4.). Cette rotation particulière est appelée **retournement d'axe** (Δ) ou **symétrie** par rapport à (Δ) .

Exemple 2.2.2.

Symétrique d'une droite

Soit un axe de symétrie (D) et une droite (Δ) de l'espace.

— Si la droite (Δ) rencontre l'axe (D) en un point O , sa symétrique (Δ') passera par O et sera dans le plan des droites (Δ) , (D) , (Δ') . La droite (D) est bissectrice des droites (Δ) et (Δ') (fig. 2.2.4.).

— Si la droite (Δ) est parallèle à (D) , sa symétrique (Δ') est dans le plan de (Δ) et de (D) . Elle est parallèle à (D) et (Δ') , la droite (D) étant équidistante de (Δ) et (Δ') .

— Si les droites (D) et (Δ) ne sont pas dans un même plan, la symétrique (Δ') n'est pas dans le même plan que (Δ) . Pour l'obtenir, on prend le symétrique de deux points de (Δ) par rapport à (D) .

Symétrique d'un plan

Soit (D) un axe de symétrie et un plan (P) .

Si (D) est perpendiculaire à (P) , ce dernier coïncide avec son symétrique.

Si (P) est parallèle à (D) , son symétrique (P') est parallèle à (P) . Les distances de (P) à (D) et de (P') à (D) sont identiques (cf. paragraphe 1.1.). Si (P) contient (D) , il est confondu avec son symétrique.

D'une façon générale, le symétrique d'un plan (P) par rapport à une droite (D) qui le perce en O est un plan (P') qui coupe (P) suivant une droite (Δ) coupant D orthogonalement en O (fig. 2.2.5.).

Mais, nous venons de voir que dans certains cas la figure symétrique d'une droite ou d'un plan par rapport à une droite (D) peut être cette droite ou ce plan. Ceci conduit à la définition de l'axe de symétrie d'une figure.

Définition 2.2.3.

Une figure (F) admet un **axe de symétrie** (D) lorsqu'elle coïncide avec sa symétrique par rapport à (D) .

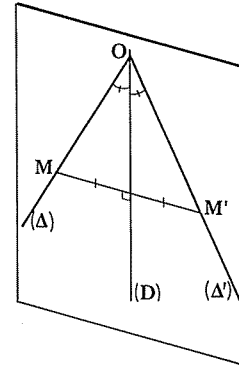


FIG. 2.2.4.

Remarque 2.2.3. — Soit O un point quelconque de l'axe (Δ) . Le **retournement** s'exprime vectoriellement à l'aide du vecteur unitaire u de (Δ) sous la forme

$$\overrightarrow{OM'} = 2 (\overrightarrow{OM} \cdot u) \cdot u - \overrightarrow{OM}.$$

Exercice 2.2.6. — Soit deux droites (D) et (D') quelconques. Déterminer des retournements qui transforment (D) en (D') , suivant les différents cas de figure.

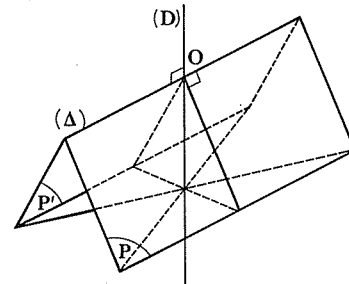


FIG. 2.2.5.

Exercice 2.2.7. — Soit deux axes parallèles (Δ_1) et (Δ_2) . On effectue successivement les retournements d'axes (Δ_1) et (Δ_2) . Étudier la transformation qui en résulte.

Exercice 2.2.8. — Même exercice que (2.2.7.) en supposant que (Δ_1) et (Δ_2) sont concourants. Que se passe-t-il si (Δ_1) et (Δ_2) sont orthogonaux?

Exercice 2.2.9. — Même exercice que (2.2.7.) en supposant que (Δ_1) et (Δ_2) sont quelconques : ni parallèles ni concourants. On notera (D) leur perpendiculaire commune qui coupe (Δ_1) en O_1 , (Δ_2) en O_2 (fig. 2.2.6.) (Δ'_1) et (Δ'_2) les parallèles à (Δ_1) et (Δ_2) menées par O_2 et O_1 . Montrer que les deux retournements reviennent à la *rotation* $\mathcal{R}_{D,2\theta}$ suivie (ou précédée) par la *translation* $\mathcal{T}_{2.O_1O_2}$ parallèle à (D) . La transformation obtenue s'appelle *vissage* ou *déplacement hélicoïdal* d'axe (D) , d'angle 2θ , de vecteur $2 \cdot O_1O_2$.

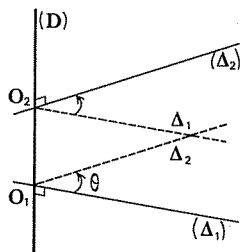


FIG. 2.2.6.

Exemple 2.2.3.

Un segment AB admet pour axes de symétrie la droite AB et les perpendiculaires à AB en son milieu.

Un plan admet pour axe de symétrie toutes les droites qu'il contient ainsi que toutes les droites qui lui sont perpendiculaires.

Un cercle admet pour axe de symétrie la perpendiculaire menée à son plan par son centre et tous ses diamètres.

Considérons enfin le *produit* $\mathcal{R}_{\Delta_2,\pi} \circ \mathcal{R}_{\Delta_1,\pi}$ de deux retournements, qui fait l'objet des exercices 2.2.7. à 2.2.9. On obtient en général un *déplacement hélicoïdal* dont l'axe (D) est la perpendiculaire commune à (Δ_1) et (Δ_2) , c'est-à-dire une rotation d'axe (D) assortie d'une translation parallèle à (D) .

Symétrie par rapport à un point ou à un plan

Définition 2.2.4.

Deux points P et P' sont dits *symétriques par rapport à un point* O , appelé *centre de symétrie* si, et seulement si, le point O est le milieu du segment PP' .

Si P décrit une figure (F) , le point P' décrit une figure (F') qui est la *figure symétrique de (F) par rapport au point O* .

Exemple 2.2.4.

Soit (D) une droite et O un centre de symétrie.

Si (D) passe par O , sa symétrique est elle-même.

Si (D) ne passe pas par O , la droite OM joignant O à un point quelconque M de (D) engendre un plan (P) défini par O et la droite (D) . Le symétrique M' de M est dans le plan (P) et décrit une droite (D') parallèle à (D) (fig. 2.2.7. a).

Si (D) est une demi-droite, la figure symétrique est une demi-droite de sens contraire (fig. 2.2.7. b).

La figure symétrique d'un segment AB par rapport à un point est un segment égal $A'B'$ (fig. 2.2.7. c).

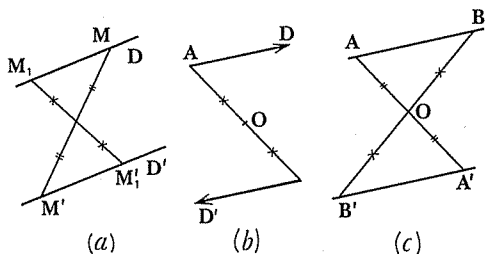


FIG. 2.2.7.

Exemple 2.2.5.

Soit un plan (P) et un point O, centre de symétrie.

Si (P) passe par O, il est son propre symétrique.

Si (P) ne passe pas par O, considérons la normale à (P) passant par O qui perce (P) en H. Le plan (P'), mené parallèlement à (P) par H', symétrique de H par rapport à O, est le symétrique de (P) par rapport à O (fig. 2.2.8.).

Tout point M de (P) est symétrique d'un point M' de (P') par rapport à O.

Le symétrique d'un cercle (C) de (P) est un cercle (C') de (P') dont les centres sont des points symétriques et les rayons sont égaux.

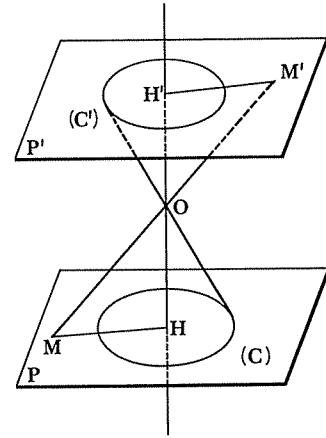


FIG. 2.2.8.

Définition 2.2.5.

Deux points M et M' sont dits *symétriques par rapport à un plan* (P) appelé *plan de symétrie*, si, et seulement si, le plan (P) est le plan médiateur du segment MM'.

Si M décrit une figure (F), le point M' décrit une figure (F') qui est appelée figure symétrique de (F) par rapport au plan (P).

La symétrie par rapport à un plan se rencontre en particulier en physique dans l'étude des miroirs plans.

Exemple 2.2.6.

On utilise pour étudier la *polarisation* de la lumière deux miroirs plans (fig. 2.2.10.) dans lesquels un rayon se réfléchit successivement. Si les deux miroirs forment un dièdre d'angle β , il est facile de montrer que l'image de la lampe L subit une rotation d'angle 2β par rapport à l'arête du dièdre. Pour observer les propriétés physiques de la lumière, on fait tourner M_2 autour d'un axe.

Homothétie dans l'espace

C'est la même définition qu'en géométrie plane, et ce sont les mêmes propriétés (paragraphe 2.1.).

Exercice 2.2.10. — Considérons un trièdre trirectangle Oxyz dont les trois faces sont constituées par des miroirs plans (fig. 2.2.9.). Montrer que le rayon réfléchi est parallèle au rayon incident, qu'il y ait deux, ou trois réflexions. C'est le principe des *cataphotes* de la signalisation routière.

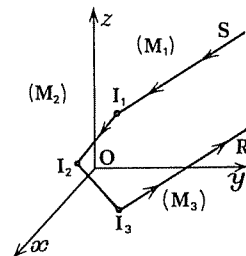


FIG. 2.2.9.

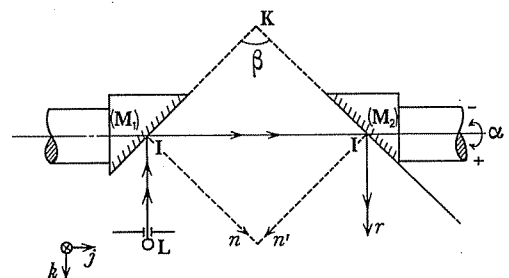


FIG. 2.2.10.

Exercice 2.2.11. — Les miroirs (M_1) et (M_2) sont montés sur deux cylindres coaxiaux (fig. 2.2.10.). Le miroir *polariseur* (M_1) est fixe. Le miroir *analyseur* (M_2) peut tourner d'un angle α à partir de la position initiale où les miroirs sont orthogonaux ($\beta = \frac{\pi}{2}$). Calculer β en fonction de α , ainsi que ($LI, I'r$).

Remarque 2.2.3. — Les perspectives se rapportent à un type important de transformations appelées *homographies*, que nous n'étudierons pas ici. Il y a bien d'autres méthodes de perspective plus évoluées.

Exercice 2.2.12. — Soit un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, Oz , et S le point de coordonnées (a, b, c) . Un point $M(x, y, z)$ devient $M'(x', y', z')$ par perspective de centre S sur xOy . Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z .

Perspective

Nous citons seulement deux exemples de perspectives, la perspective *parallèle* et la perspective *centrale* sur un plan donné (P). Elles constituent des procédés de représentation plane d'une figure de l'espace. La perspective parallèle s'effectue dans la direction d'un vecteur donné V (fig. 2.2.11.). C'est tout simplement une *projection parallèle* (chapitre 0).

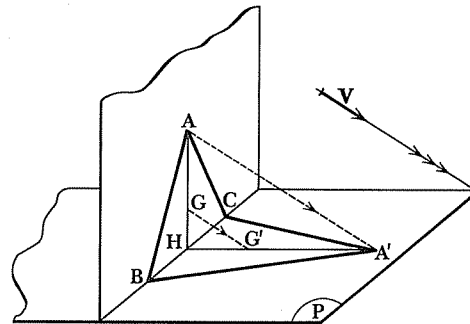


FIG. 2.2.11.

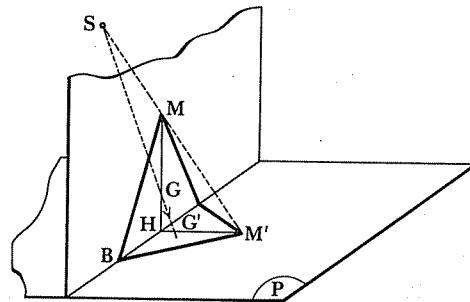


FIG. 2.2.12.

La perspective centrale est précisée par la donnée du point S . L'image M' d'un point M s'obtient de la façon suivante (fig. 2.2.12.) : on mène la droite SM qui perce le plan (P) en M' , si elle n'est pas parallèle à (P). Cette perspective ne peut s'étudier véritablement qu'en faisant référence aux propriétés des cônes et des pyramides. Il est possible d'obtenir les dessins en perspective à l'aide d'un ordinateur muni d'une imprimante ou d'un écran. Il suffit de programmer les formules fournissant les coordonnées du point projeté.

2.3. CHOIX D'UN RÉFÉRENTIEL

L'étude d'une courbe du plan ou de l'espace, l'étude d'une surface peuvent être simples ou compliquées suivant le repère dans lequel elles s'expriment.

Dans le tome I (chapitres 3 et 4), nous avons déjà vu l'importance du choix du système de coordonnées pour le calcul des surfaces, des volumes, la détermination des centres de gravité ou le calcul des moments d'inertie.

Lorsque nous étudions le mouvement d'une particule par exemple, les équations générales du mouvement *sous forme vectorielle* sont indépendantes des systèmes de référence. Toutefois, l'étude d'un mouvement particulier nécessite le choix d'un référentiel déterminé dans lequel il faut traduire les équations vectorielles. Il faut donc connaître les *composantes*, sur les axes choisis, des quantités vectorielles qui forment les équations générales.

En pratique, deux systèmes de référence sont couramment utilisés en *géométrie plane* : les *coordonnées cartésiennes* et les *coordonnées polaires*.

En *géométrie dans l'espace*, nous utiliserons les *coordonnées cartésiennes*, les *coordonnées cylindriques* ou semi-polaires et les *coordonnées sphériques*.

Nous avons déjà présenté les coordonnées cartésiennes aux chapitres 0 et 1. Nous allons préciser les notations dans ces systèmes usuels de référence et voir comment passer d'un système à un autre.

Les coordonnées polaires

Soit un point fixe O du plan, appelé *pôle* et soit Ox une demi-droite issue de O appelée *axe polaire*.

Soit $u'Ou$ un axe faisant avec Ox un angle θ compté positivement dans le sens trigonométrique. Nous portons sur cet axe le point M défini par la mesure algébrique ρ du vecteur OM (fig. 2.3.2.).

La connaissance des nombres θ et ρ détermine le point M ; ces nombres sont appelés *coordonnées polaires* du point M . θ est l'*angle polaire*, ρ est le *rayon vecteur*.

Un point M étant donné, deux sens positifs opposés peuvent être

Remarque 2.3.1. — Il existe de nombreux procédés de repérage d'un point M dans le plan, par exemple, la donnée des distances r_1 et r_2 de M à deux points fixes F_1 et F_2 . Ce sont des *coordonnées bipolaires*. Avec ces coordonnées, certaines courbes se représentent par des équations simples; les ellipses de foyers F_1 et F_2 : $r_1 + r_2 = \text{Cte}$ (fig. 2.3.1.), les cercles centrés sur la droite F_1F_2 : $\frac{r_2}{r_1} = \text{Cte}$, les lemniscates de Bernoulli : $r_1 \cdot r_2 = \text{Cte}$. Il existe bien d'autres façons de repérer un point.

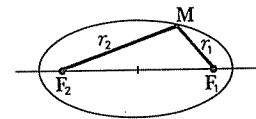


FIG. 2.3.1.

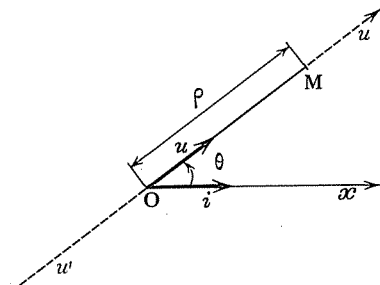


FIG. 2.3.2.

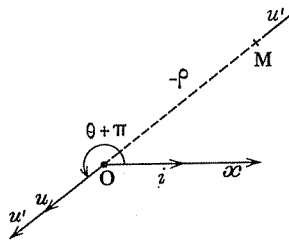


FIG. 2.3.3.

Remarque 2.3.2. — Une fonction

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

se traduit en coordonnées polaires par une fonction $(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta)$ et réciproquement.

Exercice 2.3.1. — Soit un point $M(\rho, \theta)$. Quelles sont les coordonnées (ρ', θ') du point M' transformé de M par la similitude $\sigma(O, \alpha, k)$?

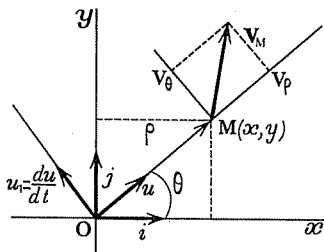


FIG. 2.3.4.

Exercice 2.3.2. — Déterminer le lieu des points tels que

- $\rho = \cos \theta$,
- $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$,
- $\rho = \cos(\theta - \theta_0)$, θ_0 donné,
- $\rho = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_0)}$, θ_0 donné.

Exercice 2.3.3. — Calculer $\frac{du_1}{dt}$, $\frac{d^2u_1}{dt^2}$.

choisis sur la droite OM . Le point M a une double infinité de coordonnées polaires, à savoir

$$\rho = \|OM\|, \quad \theta = (Ox, OM) + 2k\pi,$$

$$\rho = -\|OM\|, \quad \theta = (Ox, OM) + \pi + 2k\pi,$$

où k désigne un entier arbitraire positif, négatif ou nul (fig. 2.3.3.).

Au chapitre 3, nous verrons les avantages de cette représentation en étudiant les courbes définies par une équation polaire $\rho = f(\theta)$ et au chapitre 4, en étudiant les nombres complexes.

Il est facile de constater que les points M , dont l'angle polaire a une valeur déterminée, le rayon vecteur restant arbitraire, ont pour lieu géométrique une **droite** passant par O . De même, les points M ayant un **rayon** vecteur déterminé, l'angle polaire restant arbitraire, ont pour lieu géométrique un **cercle** de centre O . Les lignes $\theta = \text{constante}$ et $\rho = \text{constante}$ sont les **lignes de coordonnées** en coordonnées polaires.

Le passage des coordonnées cartésiennes rectangulaires aux coordonnées polaires

Adjoignons à l'axe Ox , l'axe Oy qui fait avec lui l'angle $+\frac{\pi}{2}$ (fig. 2.3.4.). Le théorème de la projection orthogonale permet de calculer les coordonnées x et y du point M , connaissant ses coordonnées polaires ρ et θ . En projetant sur Ox et Oy le vecteur OM , nous avons

$$(2.3.1.) \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Inversement, pour x et y donnés, nous avons

$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\rho}.$$

Les deux systèmes de coordonnées polaires vérifient donc

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

Vectoriellement (fig. 2.3.4.), nous écrivons

$$OM = \rho \cdot u.$$

Le vecteur unitaire u étant tel que

$$u = \cos \theta \, i + \sin \theta \, j,$$

le vecteur unitaire u_1 de la normale à OM s'écrit

$$u_1 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot i + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot j,$$

soit

$$u_1 = -\sin\theta \cdot i + \cos\theta \cdot j = \frac{du}{dt}.$$

Nous retrouvons le résultat de l'exemple (1.8.1.), à savoir que la dérivée d'un vecteur unitaire est un vecteur unitaire perpendiculaire au précédent.

Un vecteur V_M du plan ayant son origine au point M aura des composantes suivant u et u_1 qui seront notées V_ρ et V_θ . Nous allons écrire sur un exemple les formules qui relient les composantes V_ρ et V_θ de V , aux composantes du même vecteur sur les axes Ox et Oy.

Nous allons choisir cet exemple en mécanique où x, y, ρ et θ seront des fonctions du temps, V étant la vitesse V_M d'une particule M du plan xOy.

Exemple 2.3.1.

Nous avons vu (paragraphe 1.8.) que la vitesse d'un point M du plan se déplaçant sur une trajectoire (C), définie dans un repère ortho-normé Oxy de vecteurs unitaires i et j , est donnée par

$$(2.3.2.) \quad V_M = x'(t) \cdot i + y'(t) \cdot j = \frac{d \mathbf{OM}(t)}{dt},$$

$\mathbf{OM}(t)$ est la fonction vectorielle représentant la trajectoire (C) et s'écrit

$$\mathbf{OM}(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j.$$

Imaginons une particule M (assimilable à une personne) se déplaçant à partir du centre d'un disque en ligne droite (fig. 2.3.6.). Sa position est repérée par le vecteur

$$\mathbf{OM} = \rho(t) \cdot u.$$

Le vecteur unitaire u tourne avec le disque à la vitesse angulaire $\theta(t)$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Un tel problème est bien adapté à l'utilisation des coordonnées polaires. Il faut exprimer (fig. 2.3.6.) les composantes V_ρ et V_θ suivant u et u_1 .

Remarque 2.3.3. — Considérons un *dipôle électrostatique* formé par deux charges opposées $+q$ et $-q$ distantes d'une longueur l (fig. 2.3.5.). Nous voulons évaluer le *potentiel* V et le champ E créés par ce dipôle en tout point M du plan. Nous avons

$$V = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2},$$

soit, en fonction des coordonnées polaires,

$$r_1 = \rho + AK_1 \approx \rho + \frac{l}{2} \cos\theta,$$

$$r_2 = \rho - BK_2 \approx \rho - \frac{l}{2} \cos\theta,$$

$$\text{d'où } r_1 - r_2 \approx l \cos\theta, \quad r_1 r_2 \approx \rho^2 - \frac{l^2 \cos^2\theta}{4}.$$

Si ρ est grand par rapport à l , nous avons

$$V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos\theta}{\rho^2}.$$

Le calcul du champ $E = E_\rho \cdot u + E_\theta \cdot u_1$ se fera au chapitre 6.

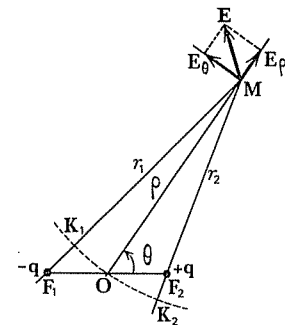


FIG. 2.3.5.

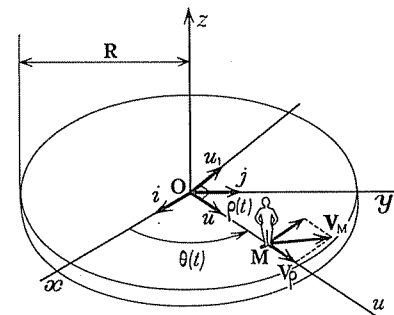


FIG. 2.3.6.

Exercice 2.3.4. — Supposons le déplacement de M (exemple 2.3.2.) défini par

$$\rho(t) = R(1 - e^{-t}), \\ \theta(t) = t.$$

Déterminer les vecteurs $\mathbf{V}_M$ et γ_M , ainsi que leurs normes.

Exercice 2.3.5. — Donner l'expression de l'accélération d'une particule en coordonnées cartésiennes.

Exercice 2.3.6. — Sur le disque de l'exemple 2.3.1. (fig. 2.3.6.) est placé un petit disque tournant de rayon r , centré à une distance l de O (fig. 2.3.7.). Calculer la vitesse $\mathbf{V}_M$ et l'accélération γ_M d'un point M situé sur la périphérie du petit disque. Sachant qu'à l'instant $t = 0$,

$$(\mathbf{Ox}, \mathbf{OC}) = (\mathbf{OC}, \mathbf{OM}) = 0,$$

à quels instants $\|\mathbf{V}_M\|$ est-elle maximale quand $\omega_1 = \omega_2 = \omega$?

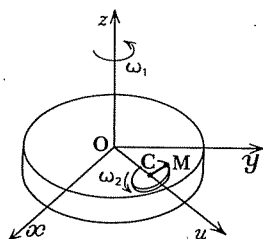


FIG. 2.3.7.

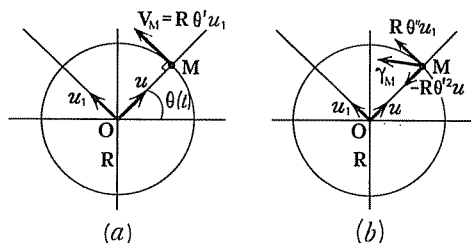


FIG. 2.3.8.

Exercice 2.3.7. — Déterminer l'accélération tangentielle et l'accélération normale d'un point matériel qui se déplace sur l'ellipse définie par

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

Nous avons

$$\mathbf{OM} = \rho(t) \mathbf{u},$$

d'où

$$\mathbf{V}_M = \rho'(t) \mathbf{u} + \rho(t) \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Or

$$\mathbf{u} = \cos \theta(t) \mathbf{i} + \sin \theta(t) \mathbf{j},$$

d'où

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\theta' \sin \theta(t) \mathbf{i} + \theta' \cos \theta(t) \mathbf{j} = \theta' \cdot \mathbf{u}_1.$$

Par suite, la **vitesse** de la particule M en **coordonnées polaires** s'écrit

$$(2.3.3) \quad \mathbf{V}_M = \rho' \cdot \mathbf{u} + \rho \theta' \cdot \mathbf{u}_1,$$

avec

$$\rho(t) = \pm \sqrt{x^2(t) + y^2(t)},$$

$$\theta(t) = \text{Arc tg} \frac{y(t)}{x(t)} + k\pi.$$

Pour l'**accélération** de la particule M en **coordonnées polaires**, on obtient de la même manière

$$(2.3.4) \quad \gamma_M = \frac{d\mathbf{V}_M}{dt} = (\rho'' - \rho \theta'^2) \mathbf{u} + (\rho \theta'' + 2 \rho' \theta') \mathbf{u}_1.$$

Le coefficient de $\mathbf{u}$ s'appelle l'**accélération normale** et celui de $\mathbf{u}_1$ l'**accélération tangentielle**.

Le cas particulier du mouvement circulaire s'obtient immédiatement à partir des relations (2.3.3.) et (2.3.4.), où $\rho(t) = R = \text{Cte}$, soit

$$\mathbf{V}_M = R \theta' \cdot \mathbf{u}_1.$$

La vitesse est tangente au cercle. Nous retrouvons les résultats de l'exemple 1.8.2. (fig. 2.3.8. a).

Pour l'accélération (fig. 2.3.8. b), nous avons

$$\gamma_M = -R \theta'^2 \mathbf{u} + R \theta'' \mathbf{u}_1,$$

l'accélération n'est radiale que si la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ est constante (exemple 1.8.2.).

Les coordonnées cylindriques

Un point M défini dans l'espace par ses coordonnées cartésiennes (paragraphe 0.9.) peut aussi être repéré par ses coordonnées ρ , θ , z dont la signification apparaît sur la figure 2.3.9.

Ces coordonnées se relient facilement aux coordonnées cartésiennes par les relations

$$(2.3.5.) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Il est facile d'en déduire les formules de correspondance inverse (exercice).

Un vecteur $\mathbf{V}$ de l'espace se projette, sur le rayon orienté en une **composante radiale** V_ρ , sur la normale au plan HOM orientée en une **composante tangentielle** V_θ , sur l'axe Oz, c'est la **composante axiale** V_z .

Nous allons voir comment exprimer un vecteur $\mathbf{V}$ en coordonnées cylindriques ρ , θ , z , en prenant pour vecteur $\mathbf{V}$ la vitesse d'une particule de l'espace.

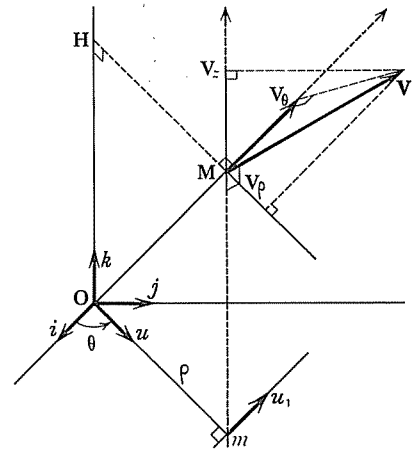


FIG. 2.3.9.

Exemple 2.3.2.

Considérons une particule M qui se déplace suivant une courbe représentée par une fonction vectorielle différentiable dans un repère orthonormé, de vecteurs unitaires $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{OM}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

En coordonnées cylindriques, d'après les relations (2.3.5.), nous avons (fig. 2.3.9.)

$$\mathbf{OM}(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \mathbf{i} + \rho(t) \sin \theta(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k},$$

ou
$$\mathbf{OM}(t) = \rho(t) \cdot \mathbf{u} + z(t) \mathbf{k}.$$

Par suite, la **vitesse** de la particule M en **coordonnées cylindriques** s'exprime par

$$(2.3.6.) \quad \mathbf{V}_M(t) = \rho'(t) \mathbf{u} + \rho \cdot \theta'(t) \cdot \mathbf{u}_1 + z'(t) \mathbf{k},$$

avec

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \theta'(t) \cdot \mathbf{u}_1.$$

Exercice 2.3.8. — Donner les relations inverses des relations (2.3.5.).

Exercice 2.3.9. — Exprimer le vecteur

$$\mathbf{A} = z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

en coordonnées cylindriques.

Exercice 2.3.10. — Déterminer le lieu des points tels que $z = k \cdot \rho$, où k est un réel fixe non nul.

Exercice 2.3.11. — Écrire l'équation cartésienne de chacun des ensembles suivants :

a) $\rho = 4, \quad z = 0,$

b) $\rho = 4,$

c) $\theta = \frac{\pi}{2},$

d) $\theta = \frac{\pi}{3}, \quad z = 1.$

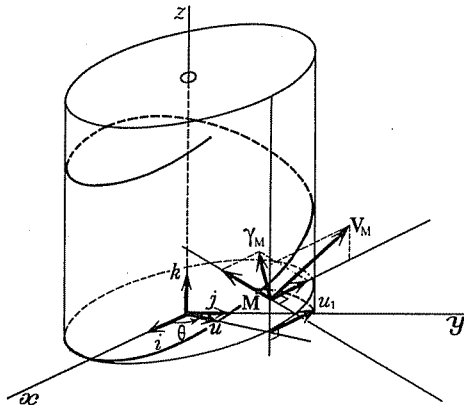


FIG. 2.3.10.

Exercice 2.3.12. — Exprimer chacun des ensembles suivants en coordonnées sphériques :

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, b) $z^2 = 3(x^2 + y^2)$,
 c) $z = x^2 + y^2$, d) Plan $y = x$.

Exercice 2.3.13. — Quel est le lieu des points tels que

- a) $\varphi = \text{Cte}$,
 b) $r \cos \varphi = \text{Cte}$?

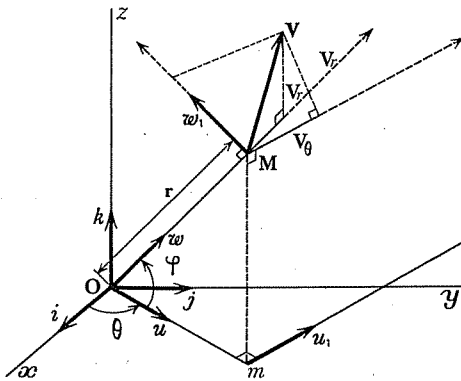


FIG. 2.3.11.

Pour l'accélération de cette même particule en *coordonnées cylindriques*, nous obtenons

$$(2.3.7) \quad \gamma_M(t) = (\rho'' - \rho\theta'^2) \mathbf{u} + (\rho\theta'' + 2\rho'\theta') \mathbf{u}_1 + z'' \cdot \mathbf{k}.$$

Le lecteur comparera les relations (2.3.6.) et (2.3.7.) avec les relations (2.3.3.) et (2.3.4.) en coordonnées polaires.

Exemple 2.3.3.

Considérons une particule qui se déplace sur l'hélice circulaire (fig. 2.3.10.) représentée par la fonction vectorielle

$$\mathbf{OM}(t) = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k},$$

M se déplace sur le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$.

Un tel exemple se prête particulièrement bien à une représentation en coordonnées cylindriques. Nous avons

$$\mathbf{OM}(t) = R \cdot \mathbf{u} + ct \mathbf{k}.$$

Soit

$$\mathbf{V}_M(t) = R\theta'(t) \cdot \mathbf{u}_1 + c \mathbf{k}$$

et

$$\gamma_M(t) = -R\theta'^2 \cdot \mathbf{u} + R\theta'' \cdot \mathbf{u}_1.$$

L'accélération est dans le plan $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$, donc dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre sur lequel se déplace la particule.

Les coordonnées sphériques

Un point M de l'espace peut être défini par ses coordonnées r , θ et φ dont la signification apparaît sur la figure 2.3.11., avec r positif et en général $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Nous avons

$$\mathbf{OM} = r \cos \varphi \cdot \mathbf{u} + r \sin \varphi \cdot \mathbf{k}$$

et

$$\mathbf{u} = \cos \theta \cdot \mathbf{i} + \sin \theta \cdot \mathbf{j},$$

d'où

$$(2.3.8.) \quad \begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \cos \theta, \\ y = r \cdot \cos \varphi \sin \theta, \\ z = r \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

Il est donc facile d'en déduire les formules de correspondance inverse (exercice 2.3.14.).

Considérons une sphère (S) de centre O (fig. 2.3.12.) et de rayon r . Un vecteur $\mathbf{V}$ quelconque de l'espace ayant son origine M sur la sphère (S) se projette

- sur le rayon $\mathbf{OM}$ orienté et donne la **composante radiale** V_r sur $\mathbf{w}$,
- sur la normale orientée au plan $\mathbf{MOz}$ c'est-à-dire sur la tangente en M au parallèle de la sphère S qui donne la **composante tangentielle** V_θ sur $\mathbf{u}_1$,
- sur la tangente en M au méridien ($\mathcal{M}$) de la sphère S qui donne la **composante méridienne** V_φ sur $\mathbf{w}_1$.

Nous allons exprimer les composantes d'un vecteur $\mathbf{V}$ en coordonnées sphériques r, θ, φ en prenant pour vecteur $\mathbf{V}$ la vitesse d'une particule dans l'espace.

Exemple 2.3.4.

Considérons une particule M qui se déplace sur une courbe représentée par une fonction vectorielle différentiable dans le repère orthonormé $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\mathbf{OM}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

En coordonnées sphériques d'après les relations (2.3.8.), nous avons (fig. 2.3.10.).

$$\mathbf{OM}(t) = r(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t) \mathbf{i} + r(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t) \mathbf{j} + r(t) \sin \varphi(t) \mathbf{k}.$$

Or

$$\mathbf{u} = \cos \theta(t) \mathbf{i} + \sin \theta(t) \mathbf{j},$$

d'où

$$\mathbf{OM}(t) = r(t) \cos \varphi(t) \mathbf{u} + r(t) \sin \varphi(t) \mathbf{k} = r(t) \cdot \mathbf{w}$$

que nous aurions pu écrire immédiatement.

Remarque 2.3.4. — L'angle θ , choisi entre 0 et 2π , s'appelle **longitude**, l'angle φ choisi entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ s'appelle **latitude**. Au tome I, nous avons utilisé la **colatitude**, ce qui revient au même.

Exercice 2.3.14. — Écrire un programme pour le calcul des coordonnées sphériques r, θ, φ sachant les coordonnées cartésiennes x, y, z . On prendra $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.3.15. — Déterminer les relations de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cylindriques.

Remarque 2.3.5. — Les vecteurs $\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1$ forment une base orthonormée directe.

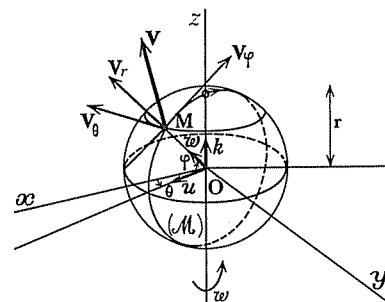


FIG. 2.3.12.

Nous avons pour la vitesse

$$\mathbf{V}_M(t) = r' \mathbf{w} + r \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

Or

$$\mathbf{w} = \cos \varphi(t) \mathbf{u} + \sin \varphi(t) \mathbf{k},$$

d'où

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\varphi' \sin \varphi \mathbf{u} + \cos \varphi \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \varphi' \cos \varphi \mathbf{k},$$

soit

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \varphi' \cdot \mathbf{w}_1 + \theta' \cos \varphi \cdot \mathbf{u}_1.$$

Par suite, nous pouvons écrire

$$(2.3.9.) \quad \mathbf{V}_M(t) = r \cos \varphi \cdot \theta' \cdot \mathbf{u}_1 + r \cdot \mathbf{w} + r\varphi' \mathbf{w}_1.$$

En comparant (2.3.6.) avec (2.3.9.), nous remarquons que (2.3.9.) peut s'écrire immédiatement.

Exemple 2.3.5.

Considérons le cas particulier d'une particule M se déplaçant sur le méridien $\mathcal{M}$ d'une sphère de rayon R tournant avec une vitesse angulaire constante ω , c'est-à-dire $\theta(t) = \omega t$ (fig. 2.3.12.).

Le mouvement de M peut être représenté par la fonction vectorielle

$$\mathbf{OM}(t) = R \cos \gamma t \mathbf{w} + R \sin \gamma t \mathbf{k},$$

où γ vitesse angulaire de M sur le méridien $\mathcal{M}$ est supposée constante ($\varphi(t) = \gamma t$).

Puisque $\mathbf{w}$ tourne avec la sphère à la vitesse angulaire ω , nous avons

$$\mathbf{w} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}.$$

En différentiant, nous obtenons

$$(2.3.10.) \quad \mathbf{V}_M(t) = \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt} = R \cos \gamma t \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \gamma R \sin \gamma t \mathbf{w} + \gamma R \cos \gamma t \mathbf{k},$$

c'est-à-dire

$$(2.3.11.) \quad \mathbf{V}_M(t) = (R \cos \gamma t) \omega \cdot \mathbf{u}_1 + \gamma R \cdot \mathbf{w}_1.$$

La vitesse est dans le plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$.

Exercice 2.3.16. — Déterminer l'accélération γ_M en coordonnées sphériques.

Exercice 2.3.17. — Calculer l'accélération γ_M dans l'exemple 2.3.5.

La relation (2.3.11.) s'obtient directement à partir de (2.3.9.) en faisant $\rho = R = \text{Cte}$, $\varphi = \gamma t$, $\theta = \omega t$.

Nous reviendrons sur la relation (2.3.10.) quand nous parlerons de la composition des vitesses au paragraphe 2.7.

2.4. CHANGEMENT DE COORDONNÉES CARTÉSIENNES DANS LE PLAN

Nous venons de voir deux types de changement de coordonnées. Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons examiner les changements de repère en coordonnées cartésiennes.

Comme nous le verrons au chapitre 3, l'équation d'un cercle centré à l'origine est simple. Il en est de même pour l'équation d'une ellipse si son grand axe et son petit axe sont les axes de coordonnées d'un repère orthonormé. Si l'ellipse est placée de façon quelconque par rapport aux axes de coordonnées choisis, il sera intéressant de pouvoir trouver son équation dans ce système d'axes. (Réduction des coniques chapitre 3.)

Soit donc deux axes de coordonnées Ox et Oy appelés *axes anciens* et ωX , ωY deux autres axes appelés *nouveaux axes* (fig. 2.4.1.). Notons que ces axes ne sont pas nécessairement perpendiculaires, que les angles qu'ils forment ne sont pas obligatoirement égaux, que les longueurs des vecteurs unitaires ne sont pas nécessairement égales. Les coordonnées x et y d'un point M quelconque du plan sont les *anciennes coordonnées* et les coordonnées X et Y sont les *nouvelles coordonnées*.

Le problème du changement de coordonnées peut s'énoncer ainsi : *exprimer les anciennes coordonnées du point M en fonction des nouvelles coordonnées et inversement.*

Pour résoudre ce problème, il faut connaître les données précises sur la position des nouveaux axes par rapport aux anciens.

Soit x_0 et y_0 les coordonnées de ω par rapport à Ox et Oy , p_1 et q_1 les composantes suivant Ox et Oy du vecteur unitaire u de ωX , p_2 et q_2 les composantes suivant les mêmes axes du vecteur unitaire v de ωY .

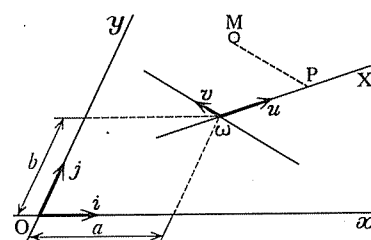


FIG. 2.4.1.

Exercice 2.4.1. — Soit un triangle ABC dont les coordonnées des sommets sont connues dans un repère quelconque

$$A(a_1, a_2), \quad B(b_1, b_2), \quad C(c_1, c_2).$$

On décide d'utiliser un nouveau repère d'origine A , défini par

$$\begin{aligned} u &= \overrightarrow{AB}, \\ v &= \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Écrire les formules de changement de coordonnées dans les deux sens.

D'après les résultats du paragraphe 0.9., nous écrivons

$$(2.4.1.) \quad \begin{cases} \mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \\ \omega \mathbf{M} = X \mathbf{u} + Y \mathbf{v}, \\ \mathbf{O}\omega = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}, \\ \mathbf{u} = p_1 \mathbf{i} + q_1 \mathbf{j}, \\ \mathbf{v} = p_2 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j}. \end{cases}$$

Nous avons l'égalité vectorielle

$$\mathbf{OM} = \mathbf{O}\omega + \omega \mathbf{M},$$

soit à partir des égalités vectorielles (2.4.1.)

$$x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = (x_0 + p_1 X + p_2 Y) \mathbf{i} + (y_0 + q_1 X + q_2 Y) \mathbf{j}.$$

Par suite, nous obtenons

$$(2.4.2.) \quad \begin{cases} x = x_0 + p_1 X + p_2 Y, \\ y = y_0 + q_1 X + q_2 Y. \end{cases}$$

Observons que $(p_1 q_2 - q_1 p_2)$ est différent de zéro si les axes ωX et ωY sont distincts.

En résolvant le système (2.4.2.) en X et Y (cf. tome III, chapitre 1), nous obtenons les formules inverses

$$(2.4.3.) \quad \begin{cases} X = \frac{q_2 (x - x_0) - p_2 (y - y_0)}{p_1 q_2 - q_1 p_2}, \\ Y = \frac{-q_1 (x - x_0) + p_1 (y - y_0)}{p_1 q_2 - q_1 p_2}. \end{cases}$$

Les formules (2.4.2.) et (2.4.3.) résolvent le problème posé, qui peut aussi être formulé sous forme matricielle (voir remarque 2.4.1.).

Quelques cas particuliers sont intéressants :

1° Translation des axes

Si les axes ωX et ωY sont parallèles aux axes Ox et Oy et de même sens, on passe des uns aux autres par une simple *translation* (paragraphe 2.1.). Prenons $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, soit $p_1 = 1$, $q_1 = 0$, $p_2 = 0$, $q_2 = 1$ (fig. 2.4.2.) et, par suite,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X, \\ y &= y_0 + Y. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1. — La représentation matricielle des formules (2.4.2.) et (2.4.3.) (tome III, paragraphe 2.1.) s'obtient directement à partir des éléments de mise en place des axes nouveaux, soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice de passage soit inversible (cf. tome III, paragraphe 2.7.) étant $\det p \neq 0$, soit $p_1 q_2 - q_1 p_2$ différent de zéro, c'est-à-dire les axes ωX et ωY distincts. La matrice P est la matrice de transformation.

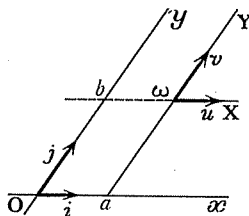


FIG. 2.4.2.

2° Cas où les repères $\{O, i, j\}$ et $\{\omega, u, v\}$ sont orthonormés

Si les repères anciens et nouveaux sont orthonormés et si le sens de rotation de $\frac{\pi}{2}$ qui amène Ox sur Oy est le même que celui qui amène ωX sur ωY , la connaissance de p_1, q_1, p_2, q_2 est parfaitement déterminée par celle de l'angle α que fait ωX avec Ox (fig. 2.4.3.). Ce sont les *cosinus directeurs* de ωX et ωY (cf. paragraphe 1.7.)

$$p_1 = \cos \alpha, \quad p_2 = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha,$$

$$q_1 = \sin \alpha, \quad q_2 = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha.$$

Les formules (2.4.2.) et (2.4.3.) s'écrivent alors :

$$(2.4.4.) \quad \begin{cases} x = x_0 + X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = y_0 + X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}$$

et

$$(2.4.5.) \quad \begin{cases} X = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha, \\ Y = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha. \end{cases}$$

Si les axes anciens et nouveaux ont même origine, il suffit de faire $x_0 = y_0 = 0$ dans les formules précédentes. C'est la **rotation des axes** dans le plan.

Au chapitre 3, des applications directes de ces changements de coordonnées seront données.

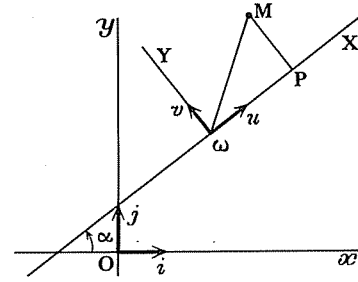


FIG. 2.4.3.

Exercice 2.4.2. — Déterminer les formules de changements de coordonnées quand les nouveaux axes $\omega X, \omega Y$ sont les deux bissectrices des anciens $\left(\alpha = \frac{\pi}{4} \right)$. Écrire la nouvelle équation de l'hyperbole équilatère $xy = k$.

2.5. CHANGEMENT DE REPÈRE ORTHONORMÉ DANS L'ESPACE

Soit Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires dits *axes anciens* et soit $\omega X, \omega Y, \omega Z$ trois axes de coordonnées rectangulaires dits *nouveaux axes*.

Un point M arbitraire de l'espace a pour coordonnées x, y, z par rapport à l'ancien repère, X, Y, Z par rapport au nouveau.

Le problème du changement de coordonnées consiste, comme en géométrie analytique à deux dimensions, à exprimer les coordonnées anciennes en fonction des nouvelles et inversement.

Remarque 2.5.1. — On utilise de nombreux repères en *astronomie* : repères liés au système solaire, repères liés à la Terre ou à une autre planète, etc.

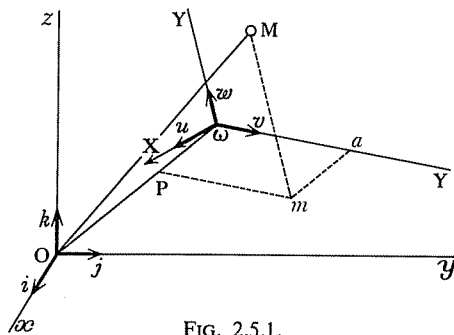


FIG. 2.5.1.

C'est un problème fondamental, notamment en mécanique. Si (S_1) est un solide en mouvement par rapport à un point ω , on peut considérer un repère (ω, X, Y, Z) lié au solide mobile par rapport à un repère fixe (O, x, y, z) . Un point du solide peut être mobile par rapport au repère (ω, X, Y, Z) lui-même mobile par rapport au repère (O, x, y, z) . C'est la **composition des mouvements** sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 2.7.

Les données du problème sont tous les éléments de mise en place des axes nouveaux par rapport aux axes anciens.

Soit x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ω par rapport à Ox, Oy, Oz sur lesquels on choisit des vecteurs unitaires i, j, k de même norme.

Appelons p_1, q_1, r_1 les composantes suivant Ox, Oy, Oz du vecteur unitaire u de ωX , p_2, q_2, r_2 et p_3, q_3, r_3 les composantes suivant les mêmes axes des vecteurs unitaires v de ωY et w de ωZ les trois vecteurs unitaires ayant même norme. Les p_i, q_i, r_i sont les *cosinus directeurs* des directions $\omega X, \omega Y$ et ωZ (cf. paragraphe 1.7.).

Nous avons les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} u &= p_1 i + q_1 j + r_1 k, \\ v &= p_2 i + q_2 j + r_2 k, \\ w &= p_3 i + q_3 j + r_3 k. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire l'égalité vectorielle (fig. 2.5.1.).

$$OM = O\omega + \omega M.$$

En utilisant les relations vectorielles précédentes et les égalités

$$OM = xi + yj + zk$$

et

$$\omega M = Xu + Yv + Zw,$$

nous obtenons

$$(2.5.1.) \quad \begin{cases} x = x_0 + p_1 X + p_2 Y + p_3 Z, \\ y = y_0 + q_1 X + q_2 Y + q_3 Z, \\ z = z_0 + r_1 X + r_2 Y + r_3 Z. \end{cases}$$

Remarque 2.5.2. — Les p_i, q_i, r_i sont les cosinus directeurs de $\omega X, \omega Y$ et ωZ et vérifient

$$p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 = 1, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Les axes $\omega X, \omega Y, \omega Z$ étant rectangulaires deux à deux et munis de vecteurs unitaires de même norme, nous avons trois relations exprimant que les produits scalaires deux à deux sont nuls :

$$p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Les axes $\omega X, \omega Y$ et ωZ étant distincts deux à deux (cf. remarque (2.5.2.) et chapitre 1, tome III), nous résolvons (2.5.1.) par rapport à X, Y, Z pour obtenir les formules inverses

$$(2.5.2.) \quad \begin{cases} X = p_1(x - x_0) + q_1(y - y_0) + r_1(z - z_0), \\ Y = p_2(x - x_0) + q_2(y - y_0) + r_2(z - z_0), \\ Z = p_3(x - x_0) + q_3(y - y_0) + r_3(z - z_0). \end{cases}$$

Quelques cas particuliers sont intéressants :

1° Translation des axes

Si les axes nouveaux sont directement parallèles aux anciens, nous avons les formules de simple translation des axes

$$\begin{cases} x = x_0 + X, \\ y = y_0 + Y, \\ z = z_0 + Z. \end{cases}$$

On retrouve l'expression du carré de la distance de deux points

$$\begin{aligned} \omega \mathbf{M} \cdot \omega \mathbf{M} &= \|\omega \mathbf{M}\|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \end{aligned}$$

2° Rotation des axes dans le plan

Si les axes Oz et OZ sont confondus et si θ désigne l'angle des directions Ox et OX mesuré dans la direction orientée de Oz (fig. 2.5.2.), nous avons

$$\begin{cases} p_1 = \cos \theta, \\ p_2 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta, \\ p_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = \sin \theta, \\ q_2 = \cos \theta, \\ q_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = 0, \\ r_3 = 1, \end{cases}$$

Les formules (2.5.2.) se réduisent à

$$(2.5.3.) \quad \begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta, \\ z = Z. \end{cases}$$

Remarque 2.5.3. — La représentation matricielle des formules (2.4.1.) et (2.4.2.) (tome III, paragraphe 2.1.) s'obtient directement à partir de la mise en place des axes nouveaux, soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

La matrice P est la *matrice de la transformation*. P étant inversible (tome III, paragraphe 2,7.) nous obtenons

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

La formule matricielle reste valable même si les repères sont quelconques. P désigne alors la matrice de passage de i, j, k à u, v, w .

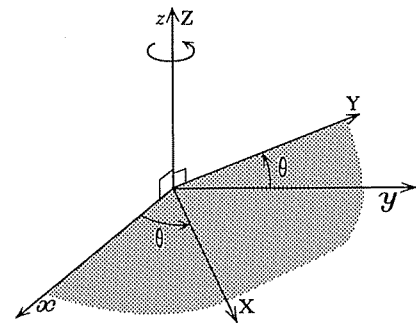


FIG. 2.5.2.

Exercice 2.5.1. — Écrire les formules de changement de coordonnées pour le nouveau repère :

$$\omega(1, 0, 0), \quad u = i + j, \quad v = i - j, \quad w = 2k.$$

Exercice 2.5.2. — Écrire les formules de changement de coordonnées pour le nouveau repère :

$$\omega(2, 3, -1), \quad u = 2i + j + 3k, \\ v = -i + j + k, \quad w = i + 2j + k.$$

2.6. ANGLES D'EULER

Au paragraphe 2.5., nous venons de voir qu'il est possible de passer d'un repère orthonormé à un autre par la connaissance des neuf cosinus directeurs fixant la position du nouveau système par rapport à l'ancien.

Dans ce paragraphe, nous allons voir que trois *paramètres* indépendants suffisent pour passer d'un système à l'autre. Ce sont les *angles d'Euler*.

Pour repérer la position du repère orthonormé direct

$$(T) (O', X, Y, Z)$$

par rapport au repère orthonormé $(T_0) (O, i_0, j_0, k_0)$, nous considérons tout d'abord (fig. 2.6.1.) le vecteur OO' qui fixe la position de O' par rapport au repère (T_0) .

Ensuite, il faut se fixer l'orientation de (T) par rapport à (T_0) , c'est-à-dire la « situation angulaire » de (T) par rapport à (T_0) .

Soit alors le trièdre $(T_1) (O, i_1, j_1, k_1)$ d'axes parallèles à ceux de (T) . Ainsi, fixer l'orientation de (T) par rapport à (T_0) revient à fixer l'orientation de (T_1) par rapport à (T_0) (fig. 2.6.1.).

Nous allons d'abord considérer le cas général où aucun des axes de (T_1) n'est parallèle aux axes de (T_0) .

Décrire la situation de (T_1) par rapport à (T_0) requiert la donnée de *trois paramètres*. Nous choisissons trois paramètres angulaires qui sont les *angles d'Euler* définis comme suit :

Les vecteurs i_0 et i_1 non colinéaires définissent une direction de plan. Soit n le vecteur orthogonal à ce plan. Ce vecteur mené de O est perpendiculaire à l'axe Oz_0 , il est donc dans le plan Ox_0y_0 .

Sur la figure 2.6.2., le nouvel axe On est *l'axe des nœuds* du positionnement de (T) ou (T_1) par rapport à (T_0) .

Posons

$$\psi = (i_0, n) \text{ orienté par } k_0, \text{ appelé } \textit{précession},$$

$$\theta = (k_0, k_1) \text{ orienté par } n, \text{ appelé } \textit{nutation},$$

$$\varphi = (n, i_1) \text{ orienté par } k_1, \text{ appelé } \textit{rotation propre}.$$

Tout d'abord vérifions que les angles ψ , θ et φ permettent d'amener le repère (T_1) sur (T_0) et réciproquement.

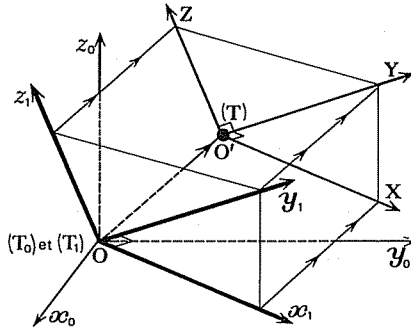
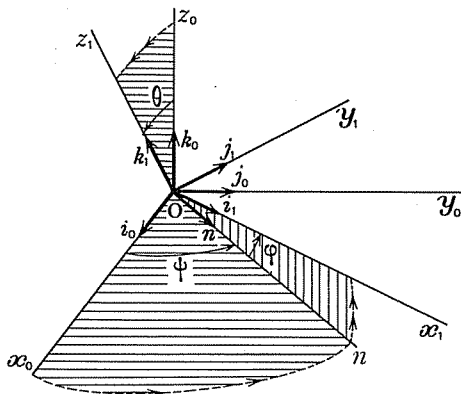


FIG. 2.6.1.



On perpendiculaire au plan (k_0, k_1)
 Oz_1 perpendiculaire au plan (n, i_1)

FIG. 2.6.2.

La rotation d'axe Oz_0 et d'angle ψ fait passer du repère

$$(O, i_0, j_0, k_0)$$

au repère (O, n, p, k_0) [fig. 2.6.3].

La rotation d'axe On et d'angle θ fait passer du repère (O, n, p, k_0) au repère (O, n, q, k_1) [fig. 2.6.4].

Enfin, la rotation d'axe Oz_1 et d'angle φ fait passer du repère (O, n, q, k_1) au repère (O, i_1, j_1, k_1) [fig. 2.6.5].

Nous avons ainsi au cours de chacune des rotations précédentes les correspondances suivantes :

$$\text{Rotation d'angle } \psi \text{ autour de } Oz_0 \begin{cases} i_0 \rightarrow n, \\ j_0 \rightarrow p, \\ k_0 \rightarrow k_0. \end{cases}$$

$$\text{Rotation d'angle } \theta \text{ autour de } On \begin{cases} n \rightarrow n, \\ p \rightarrow q, \\ k_0 \rightarrow k_1. \end{cases}$$

$$\text{Rotation d'angle } \varphi \text{ autour de } Oz_1 \begin{cases} n \rightarrow i_1, \\ q \rightarrow j_1, \\ k_1 \rightarrow k_1. \end{cases}$$

Nous désirons connaître i_1, j_1, k_1 en fonction de $i, j, k, \psi, \theta, \varphi$, et réciproquement.

D'après ce qui précède, la rotation autour de Oz_1 (fig. 2.6.5.) conduit à

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos \varphi \cdot n + \sin \varphi \cdot q, \\ j_1 &= -\sin \varphi \cdot n + \cos \varphi \cdot q. \end{aligned}$$

Dans la rotation autour de Oz_0 (fig. 2.6.3.), nous avons

$$\begin{aligned} n &= \cos \psi i_0 + \sin \psi j_0, \\ p &= -\sin \psi i_0 + \cos \psi j_0. \end{aligned}$$

Dans la rotation autour de On (fig. 2.6.4.), nous avons

$$q = \cos \theta \cdot p + \sin \theta \cdot k_0.$$

Par suite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (2.6.1.) \quad i_1 &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) i_0 \\ &+ (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) j_0 + (\sin \varphi \sin \theta) k_0, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

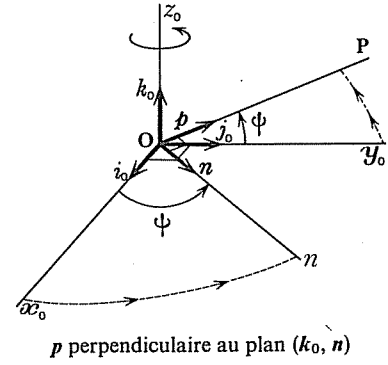


FIG. 2.6.3.

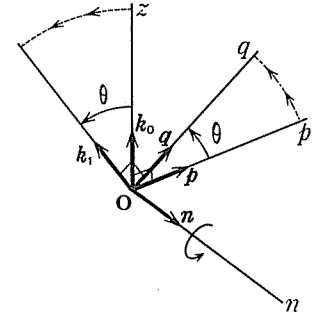


FIG. 2.6.4.

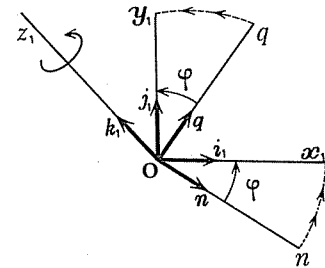


FIG. 2.6.5.

Remarque 2.6.1. — Le tableau 2.6.2. rend compte d'une transformation ponctuelle qui est le produit de trois rotations

$$\mathcal{R}_{Oz_1, \varphi} \circ \mathcal{R}_{Oy, \theta} \circ \mathcal{R}_{Oz_0, \psi}.$$

Un tel produit est en fait *une* certaine rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$, où (Δ) est un axe passant par O , et α un angle à déterminer. L'axe (Δ) se trouve en recherchant les points *invariants* dans la transformation ce qui, en termes de calcul matriciel, revient à chercher la direction propre associée à la valeur propre 1 (tome III, chapitre 3).

Exercice 2.6.1. — Donner le tableau permettant de déduire i_0, j_0, k_0 connaissant $i_1, j_1, k_1, \psi, \theta, \varphi$.

Nous en tirons le **tableau de passage** suivant permettant de déduire (i_1, j_1, k_1) en fonction de $(i_0, j_0, k_0, \psi, \theta, \varphi)$:

(2.6.2.)

	i_0	j_0	k_0
i_1	$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta$	$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta$	$\sin \varphi \sin \theta$
j_1	$-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta$	$-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta$	$\cos \varphi \sin \theta$
k_1	$\sin \psi \sin \theta$	$-\cos \psi \sin \theta$	$\cos \theta$

Si $\varphi = \theta = 0$ (rotation des axes dans le plan), nous retrouvons les formules (2.5.3.) avec des notations différentes. Tous les cas particuliers peuvent s'obtenir à partir du tableau (2.6.2.). Le lecteur le fera à titre d'exercice.

2.7. APPLICATION DES CHANGEMENTS DE REPÈRE A LA MÉCANIQUE

C'est dans cette science que se trouvent de nombreuses applications des changements de repères. En effet, il faut pouvoir étudier des corps solides en mouvement et savoir les repérer à chaque instant de leur mouvement.

Or dans le mouvement d'assemblage de solides, certains sont en mouvement par rapport aux autres.

Il y aura donc des repères orthonormés qui se *déplaceront les uns par rapport aux autres* alors que dans les deux paragraphes précédents les repères étaient fixes.

Composition des vitesses d'un point matériel

Exemple 2.7.1.

Reprenons l'exemple 2.3.5. sous l'angle de la composition des vitesses. Considérons une particule P (fig. 2.7.1.) se déplaçant sur le méridien $(\mathcal{M})$ d'une sphère (S) de rayon R avec une vitesse angulaire constante $\gamma > 0$. La sphère (S) de centre O tourne avec la vitesse angulaire constante ω .

Remarque 2.7.1. — Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 1.8., soit $r(t)$ la position d'un mobile P .

Le vecteur $v_P = \frac{dr}{dt}$ est le *vecteur vitesse* du mouvement de P porté par la tangente à la trajectoire. Prenons un point de référence P_0 sur la trajectoire de P . Nous avons (cf. paragraphe 1.8.)

$$v_P = \frac{ds}{dt} t = \sqrt{r'(t) \cdot r'(t)} \cdot t$$

t étant le vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$$\frac{dr}{ds} = t = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left\| \frac{dr}{dt} \right\|}.$$

Cherchons la vitesse du point P dans le mouvement ainsi considéré. Le point P se déplace dans un repère (T_1) (O, x_1, y_1, z_0) lié au méridien considéré. Ce repère (T_1) est lui-même mobile par rapport à un repère fixe (T_0) (O, x_0, y_0, z_0) . Les vecteurs unitaires sont notés comme au paragraphe 2.6.

Le mouvement de P sur $(\mathcal{M})$ peut être représenté par la fonction vectorielle

$$\mathbf{OP}(t) = R \cos \gamma t \cdot \mathbf{i}_1 + R \sin \gamma t \cdot \mathbf{k}.$$

L'axe Ox_1 du repère (T_1) tourne avec la sphère et Ox_1 fait un angle ωt par rapport à l'axe fixe Ox_0 , c'est-à-dire

$$(2.7.1.) \quad \mathbf{i}_1(t) = \cos \omega t \cdot \mathbf{i}_0 + \sin \omega t \cdot \mathbf{j}_0.$$

Par suite, nous pouvons écrire

$$(2.7.2.) \quad \mathbf{V}(P) = \frac{d\mathbf{OP}}{dt} = R \cos \gamma t \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} - \gamma R \sin \gamma t \cdot \mathbf{i}_1 + \gamma R \cos \gamma t \cdot \mathbf{k}.$$

Ainsi $\mathbf{V}(P)$ se compose

— d'une **vitesse relative** dans le repère (T_1)

$$\mathbf{V}_R(P) = -\gamma R \sin \gamma t \cdot \mathbf{i}_1 + \gamma R \cos \gamma t \cdot \mathbf{k}$$

qui est tangente au méridien $(\mathcal{M})$,

— d'une **vitesse d'entraînement** du repère (T_1) , P étant considéré comme fixe dans (T_1) ,

$$\mathbf{V}_E(P) = R \cos \gamma t \frac{d\mathbf{i}_1}{dt}$$

qui est dans un plan parallèle à Ox_0y_0 et tangente au parallèle passant par P.

Nous avons

$$(2.7.3.) \quad \mathbf{V}(P) = \mathbf{V}_R(P) + \mathbf{V}_E(P).$$

Cette vitesse (relation 2.2.11. de l'exemple 2.3.5.) est dans le plan tangent à la sphère en P. Elle a une composante tangente au méridien en P soit $\mathbf{V}_R(P)$ et une tangente au parallèle à P soit $\mathbf{V}_E(P)$.

Nous allons maintenant présenter le **cas général** non relié à une configuration géométrique déterminée.

Considérons un point P mobile par rapport à un repère ortho-normé (T_1) , d'origine O_1 lui-même mobile par rapport à un repère (T_0) , d'origine O.

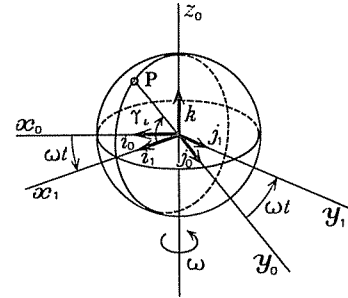


FIG. 2.7.1.

Exercice 2.7.1. — Déterminer le module $\|\mathbf{V}_P\|$ de la vitesse dans l'exemple 2.7.1.

Exercice 2.7.2. — Une cabine cylindrique de centre de gravité G effectue un mouvement composé.

a) L'axe GX tourne autour de Oz avec la vitesse angulaire ω_1 (fig. 2.7.2.).

b) La cabine tourne autour de son axe GX avec la vitesse angulaire ω_2 . Au départ, les trièdres fixes et mobiles sont homologues par translation. On distingue le point M $(X = 0, Y = r, Z = 0)$. Calculer $\mathbf{V}_M$ à tout instant.

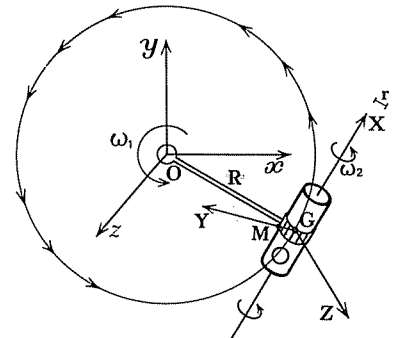


FIG. 2.7.2.

Nous avons la relation vectorielle suivante :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OO}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{P}.$$

Par suite, nous pouvons écrire

$$(2.7.4.) \quad \mathbf{V}(\mathbf{P}) = \frac{d\mathbf{OP}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{OO}_1) + x_1 \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right] + \left[\frac{dx_1}{dt} \mathbf{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \mathbf{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \mathbf{k}_1 \right].$$

En considérant P fixe dans (T_1) , soit $x_1 = \text{Cte}$, $y_1 = \text{Cte}$, $z_1 = \text{Cte}$, $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ se limite à l'expression entre les premiers crochets qui est donc la *vitesse d'entraînement* de P dans son mouvement par rapport à (T_0) .

En considérant le seul mouvement de P dans le repère (T_1) , $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ se limite à l'expression entre les deuxièmes crochets. C'est la *vitesse relative* $\mathbf{V}_R(\mathbf{P})$.

La vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ est la composition des deux vitesses précédentes (relation 2.7.3.).

Composition des accélérations d'un point matériel

Exemple 2.7.2.

Déterminons l'accélération du point dans l'exemple (2.7.1.) (fig. 2.7.1.). De la vitesse de P obtenue dans la relation 2.7.1., nous déduisons l'accélération de P

$$(2.7.5.) \quad \gamma(\mathbf{P}) = \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{P})}{dt} = R \cos \gamma t \frac{d^2 \cdot \mathbf{i}_1}{dt^2} - 2 \gamma R \sin \gamma t \frac{d \cdot \mathbf{i}_1}{dt} - \gamma^2 R \cos \gamma t \cdot \mathbf{i}_1 - \gamma^2 R \sin \gamma t \cdot \mathbf{k}.$$

En considérant le seul mouvement du point matériel (P) sur le méridien $\mathcal{M}$, nous obtenons l'*accélération relative*

$$\gamma_R(\mathbf{P}) = -\gamma^2 R \cos \gamma t \cdot \mathbf{i}_1 - \gamma^2 R \sin \gamma t \cdot \mathbf{k}.$$

En considérant P comme fixe sur le méridien, on obtient l'entraînement de P lié au repère (T_1) dans son mouvement vis-à-vis du repère (T_0) . C'est l'*accélération d'entraînement* $\gamma_E(\mathbf{P})$:

$$\gamma_E(\mathbf{P}) = R \cos \gamma t \frac{d^2 \cdot \mathbf{i}_1}{dt^2}.$$

En regardant la relation (2.7.5.), nous remarquons qu'il subsiste un terme complémentaire : c'est l'**accélération complémentaire** ou de **Coriolis**.

$$\gamma_C(P) = -2 \gamma_R \sin \gamma t \frac{d \cdot i_1}{dt}.$$

L'accélération du point P d'après la relation 2.7.5. et les relations intermédiaires ci-dessus est

$$(2.7.6.) \quad \gamma(P) = \gamma_E(P) + \gamma_R(P) + \gamma_C(P).$$

Comme pour les vitesses, nous allons retrouver ce résultat dans le **cas général**.

Considérons un point mobile P par rapport à un repère (T_1) , d'origine O_1 , lui-même mobile par rapport à un repère T_0 , d'origine O.

Nous pouvons écrire $\mathbf{OP} = \mathbf{OO}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{P}$,

soit $\mathbf{OP} = \mathbf{OO}_1 + x_1(t) \mathbf{i}_1(t) + y_1(t) \mathbf{j}_1(t) + z_1(t) \mathbf{k}_1(t)$,

$\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ et $\mathbf{k}_1$ étant des vecteurs unitaires du repère (T_1) mobile par rapport à (T_0) .

Par suite, nous avons

$$(2.7.7.) \quad \gamma(P) = \left[\frac{d^2 \mathbf{OO}_1}{dt^2} + x_1 \frac{d^2 \mathbf{i}_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 \mathbf{j}_1}{dt^2} + z_1 \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{dt^2} \right] \\ + \left[\frac{d^2 x_1}{dt^2} \mathbf{i}_1 + \frac{d^2 y_1}{dt^2} \mathbf{j}_1 + \frac{d^2 z_1}{dt^2} \mathbf{k}_1 \right] \\ + 2 \left[\frac{dx_1}{dt} \frac{d \mathbf{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d \mathbf{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d \mathbf{k}_1}{dt} \right].$$

En considérant P fixe dans (T_1) , γ_P se limite à l'expression entre les premiers crochets qui est l'**accélération d'entraînement** $\gamma_E(P)$ dans son mouvement par rapport à (T_0) .

En considérant le seul mouvement de P dans le repère (T_1) , $\gamma(P)$ se limite à l'expression dans les deuxièmes crochets. C'est l'**accélération relative** $\gamma_R(P)$.

Il reste dans la relation (2.7.7.) un terme complémentaire qui est l'expression entre les troisièmes crochets : c'est l'**accélération complémentaire** ou de **Coriolis**.

L'accélération $\gamma(P)$ est la composition de ces trois accélérations (relation 2.7.6.).

Exercice 2.7.3. — Déterminer l'accélération γ_M du point M de la cabine (exercice 2.7.2.).

Exercice 2.7.4. — En décomposant le mouvement, montrer que l'accélération de Coriolis dans l'exemple 2.7.1. est

$$\gamma_C(t) = 2 \rho'(t) \frac{du}{dt}.$$

Remarque 2.7.2. — L'accélération de Coriolis $\gamma_C(P)$ figurant dans la relation (2.7.7.) peut s'exprimer à l'aide du vecteur instantané de rotation Ω (voir 2.7.8.). Nous avons

$$\frac{d \mathbf{i}_1}{dt} = \Omega \wedge \mathbf{i}_1, \quad \frac{d \mathbf{j}_1}{dt} = \dots$$

d'où $\gamma_C(P) = 2 \Omega \wedge \mathbf{V}_R(P)$.

Remarque 2.7.3. — L'accélération de Coriolis est nulle dans les cas suivants :

- a) $\Omega = 0$ (remarque 2.7.2.), donc mouvement de translation pure;
- b) $\Omega // \mathbf{V}_R(P)$.

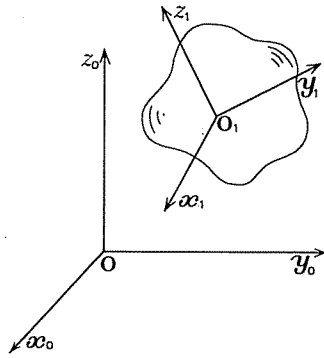


FIG. 2.7.3.

Champ des vitesses d'un solide en mouvement

C'est une application directe des *angles d'Euler* (paragraphe 2.6.).

Soit un solide (S_1) en mouvement par rapport à un point auquel on associe un repère fixe (T_0) (O, x_0, y_0, z_0) (fig. 2.7.3.).

Considérons un repère (T_1) lié au solide (S_1). Les points de (S_1) sont mobiles par rapport à l'espace fixe. Nous allons examiner quelques mouvements particuliers de solides.

Exemple 2.7.3.

Dans une *translation*, tous les points du solide ont même vitesse par rapport au repère T_0 . Par suite, si P est un point quelconque du solide, nous avons

$$\mathbf{V}(P) = \mathbf{V}(O_1),$$

vitesse exprimée dans (T_0) et notée

$$\mathbf{V}(O_1) = \frac{d}{dt}(\mathbf{OO}_1).$$

Exemple 2.7.4.

Dans une *rotation autour d'un axe fixe* Oz_0 (fig. 2.7.4.), nous avons vu (exemple 1.4.1.) que cette rotation peut être décrite à partir d'un vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ dirigé suivant l'axe de rotation. C'est l'*axe instantané de rotation*.

Si (T_1) (x_1, y_1, z_1) est lié au solide S_1 , ce repère est défini à partir du repère fixe T_0 (x_0, y_0, z_0) par l'intermédiaire d'un angle

$$\psi(t) = (Ox_0, Ox_1).$$

Toujours d'après l'exemple (1.4.1.) et le paragraphe 2.2., un point P de (S_1) se déplace sur un cercle de rayon r dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation Oz_0 . Sa vitesse est perpendiculaire au plan de $\boldsymbol{\Omega}$ et de $\mathbf{OP}(t)$ fonction vectorielle fixant la position de P par rapport à O :

$$(2.7.8.) \quad \mathbf{V}(P) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}(t),$$

soit

$$\mathbf{V}(P) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OH} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HP}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{OH}$ étant perpendiculaires, nous avons

$$\mathbf{V}(P) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HP}$$

Remarque 2.7.4. — En combinant translation et rotation on obtient

$$\mathbf{V}(P) = \mathbf{V}(O_1) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O_1P},$$

où O_1 est un point lié au solide.

Cette relation est à la base de la *cinématique* du solide.

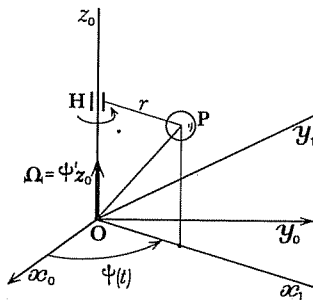


FIG. 2.7.4.

et

$$\| \mathbf{V}(P) \| = \psi'(t) \cdot \| \mathbf{HP} \| = r\psi',$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\Omega} = \psi' \cdot \mathbf{k}_0.$$

Exemple 2.7.5.

Dans un *solide en rotation autour d'un point fixe* O (fig. 2.7.5.), on fait un raisonnement identique en utilisant les angles d'Euler (paragraphe 2.6.).

Soit un repère fixe (T_0) d'origine O et un repère (T_1) lié au solide de même origine. Un point P du solide se déplace au sens instantané du terme sur une sphère de centre O et de rayon $\mathbf{OP}(t)$.

Le point P du repère (T_1) est connu par les coordonnées d'Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ et nous avons

$$(2.7.9.) \quad \mathbf{V}(P) = \mathbf{V}_\psi(P) + \mathbf{V}_\theta(P) + \mathbf{V}_\varphi(P).$$

L'indice exprime que la composante est prise respectivement dans une

— rotation autour de Oz_0 :

$$\mathbf{V}_\psi = \psi' \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{OP};$$

— rotation autour de la ligne des nœuds :

$$\mathbf{V}_\theta = \theta' \mathbf{n} \wedge \mathbf{OP};$$

— rotation autour de l'axe Oz_1 :

$$\mathbf{V}_\varphi = \varphi' \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{OP}.$$

Par suite, nous avons

$$\mathbf{V}(P) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP},$$

où

$$(2.7.10.) \quad \boldsymbol{\Omega} = \psi' \mathbf{k}_0 + \theta' \mathbf{n} + \varphi' \mathbf{k}_1$$

est le *vecteur instantané de rotation*.

Le lecteur retrouvera à titre d'exercice les résultats concernant l'accélération d'un point d'un solide dans les mouvements des trois exemples précédents (exercice 2.7.6.).

L'accélération $\gamma_P = \frac{d\mathbf{V}(P)}{dt}$ se calcule aisément

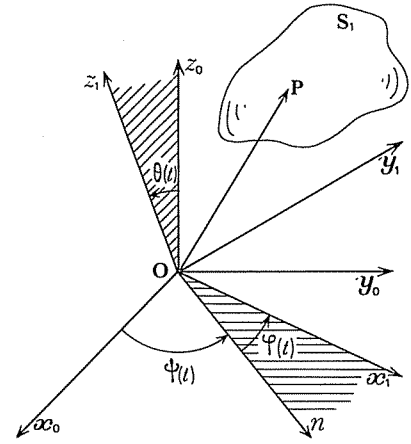


FIG. 2.7.5.

Exercice 2.7.5. — Un solide tourne avec la vitesse angulaire ω , autour de l'axe $x = y = z$ orienté dans le sens des x croissants. Déterminer le lieu géométrique, à un instant donné, des points P tels que $\mathbf{V}_P$ fait un angle donné avec une direction donnée.

Remarque 2.7.5. — Nous déduisons de (2.7.10.) les composantes p, q, r du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ dans le trièdre fixe

$$\begin{cases} p = \psi' \sin \theta \cdot \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, \\ q = \psi' \sin \theta \cdot \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \\ r = \psi' \cos \theta + \varphi'. \end{cases}$$

Exercice 2.7.6. — Montrer que

— dans le cas d'un solide en translation

$$\gamma(P) = \gamma(O_1),$$

O_1 origine de T_1 mobile par rapport à T_0 d'origine O ;

— dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (fig. 2.7.4.)

$$\gamma(P) = \Omega' \wedge OP + \Omega \wedge V(P),$$

soit

$$\gamma(P) = \Omega' \wedge OP - \omega^2 \cdot HP.$$

Retrouver les diverses composantes de l'accélération;

— dans le cas d'un solide en rotation autour d'un point fixe (fig. 2.7.5.)

$$\gamma(P) = \Omega' \wedge OP + \omega^2 \cdot PH.$$

mais H n'est plus fixe.

Exercice 2.7.7. — Calculer $\|\Omega\|$ (cf. relation 2.7.10.).

$$\gamma_P = \frac{d(\Omega \wedge OP)}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} \wedge OP + \Omega \wedge \frac{dOP}{dt}.$$

Or

$$\frac{dOP}{dt} = V_P = \Omega \wedge OP,$$

d'où

$$(2.7.11.) \quad \gamma_P = \frac{d\Omega}{dt} \wedge OP + \Omega \wedge (\Omega \wedge OP).$$

En développant le double produit vectoriel, nous retrouvons les expressions de la remarque 2.7.5.

2.8. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

2.8.1. — Soit deux miroirs plans d'arête commune (section droite, fig. 2.8.1.). Le miroir horizontal est fixe tandis que l'autre peut tourner autour de l'arête. Soit $\theta = (\text{Ox}, \text{Ou})$. On envoie un rayon du point L (1, 1) parallèlement à la direction de $u = 2i - j$.

a) Choisir θ de sorte que le point M (2, 1) soit éclairé par le rayon après deux réflexions.

b) Choisir θ pour que L soit éclairé à nouveau après deux réflexions.

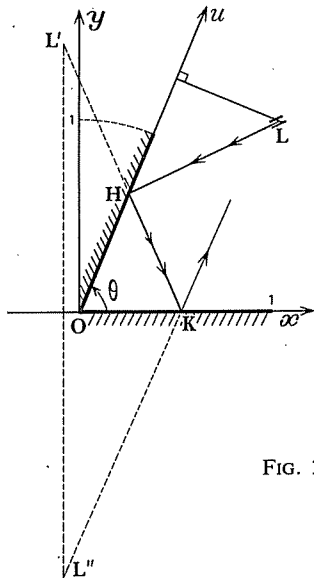


FIG. 2.8.1.

2.8.2. — Soit un triangle ABC et un parallélogramme BCDE. Les perpendiculaires menées de D à AB et de E à AC se coupent en M. Trouver le lieu du point M lorsque D décrit une droite ou un cercle donné.

2.8.3. — Construire un trapèze ABCD de bases AB et AC connaissant

a) l'angle $\hat{A}$, les longueurs AD et BC, l'une des longueurs AB ou AC;

b) les longueurs AC, BD, l'angle (AC, BD) des diagonales et l'une des bases.

2.8.4. — Soit un cercle fixe de centre O et un point fixe ω . On construit un triangle équilatéral ABC de centre de gravité ω , dont le sommet A décrit le cercle O. Trouver les lieux géométriques des sommets B et C.

2.8.5. — Soit I, J et K les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC. On construit extérieurement au triangle le segment JN perpendiculaire au côté AC et égal à sa moitié, puis le segment KP

perpendiculaire à AB et égal à sa moitié. Démontrer que les segments IN et IP sont égaux et perpendiculaires.

2.8.6. — Soit Oxy un repère orthonormé. Étudier la nature de la transformation définie par les relations

$$x' = x + ay, \quad y' = -ax + y \quad (a \neq 0).$$

2.8.7. — Construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée connaissant l'un des points de contact.

2.8.8. — Soit D et D' deux droites homologues dans la rotation (Δ, θ) . Appelons OA et OA' les perpendiculaires communes à Δ et D d'une part, Δ et D' d'autre part.

a) Montrer que la bissectrice intérieure de (OA, OA') est l'axe d'un retournement transformant D en D'.

b) Déterminer un second retournement transformant D' en D.

2.8.9. — Soit la courbe (C) définie dans un repère orthonormé par l'équation

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Soit ωX et ωY deux nouveaux axes rectangulaires dont l'origine ω a pour coordonnées

$$x = -\frac{d}{c}, \quad y = \frac{a}{c},$$

l'angle $\alpha = (\text{Ox}, \omega X) = \frac{\pi}{4}$. Trouver par rapport à ces axes

l'équation de la courbe (C). (Cas particulier où $y = \frac{x+1}{x-2}$.)

2.8.10. — Les axes anciens Oxyz et les axes nouveaux OXYZ sont de même origine et forment deux trièdres orthonormés et de même sens; OX se projette sur les plans xOy , yOz , zOx suivant les bissectrices intérieures des angles xOy , yOz , zOx ; OY est situé dans le plan xOy ; l'angle zOZ est aigu. Montrer que le tableau des neuf cosinus est

	x	y	z
X	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
Z	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$

Les courbes planes.

3.1. LA DROITE

Nous avons vu au paragraphe 1.7., comme application du produit scalaire de deux vecteurs, que *toute équation du premier degré en x et y représente une ligne droite* dans un repère orthonormé Oxy .

L'équation d'une droite (Δ) quelconque du plan s'écrit dans un *repère quelconque*

$$(3.1.1.) \quad Ax + By + C = 0.$$

Cette relation est équivalente, si B est non nul, à

$$(3.1.2.) \quad y = mx + h,$$

avec
$$m = -\frac{A}{B} \quad \text{et} \quad h = -\frac{C}{B}.$$

Vérifions que (3.1.2.) définit bien une droite en repère quelconque. Soit H et K (fig. 3.1.1.) les points de coordonnées respectives $(0, h)$ et $(1, m + h)$. Soit M un point quelconque dont les coordonnées x et y vérifient (3.1.2.). Les composantes de $\overrightarrow{HM}$ s'écrivent alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y - h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.1.1. — Soit la droite (D_λ) d'équation

$$\lambda x + (2\lambda + 7)y - (5\lambda + 2) = 0.$$

Quelle est la valeur de λ telle que

a) le coefficient directeur m est -1 ;

b) (D) rencontre Ox en $A(-5, 0)$?

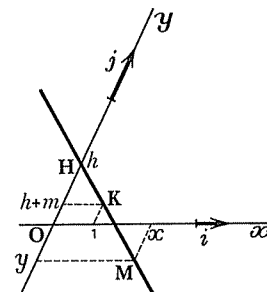


FIG. 3.1.1.

Remarque 3.1.1. — Si C est différent de O dans l'équation (3.1.1.) cette dernière peut se mettre sous la forme

$$ux + vy + 1 = 0,$$

où les quantités $u = \frac{A}{C} = -\frac{1}{a}$ et $v = \frac{B}{C} = -\frac{1}{b}$ sont appelées les *coordonnées tangentielles* de la droite (Δ) .

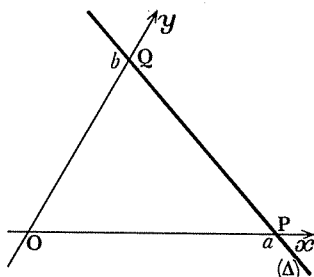


FIG. 3.1.2.

Exercice 3.1.2. — Soit la droite (Δ_μ) d'équation $(\mu - 1)x + (2\mu - 1)y + 5 - \mu = 0$.

Choisir μ de façon que

- $(\Delta_\mu) \parallel Ox$,
- $(\Delta_\mu) \parallel Oy$,
- (Δ_μ) passe par O ,
- (Δ_μ) passe par $A(3, -2)$.

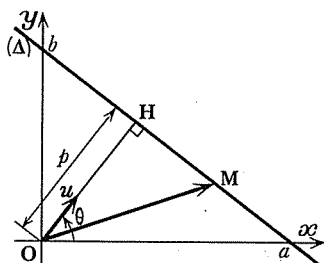


FIG. 3.1.3.

D'autre part, les composantes de HK sont $(1, m)$.

Nous avons donc $HM = x \cdot HK$, ce qui signifie que M appartient à la droite HK .

Rappelons que m s'appelle le *coefficient directeur* de la droite et h l'*ordonnée à l'origine*.

Exemple 3.1.1.

Dans le cas général, la droite coupe les axes Ox et Oy en deux points distincts P et Q (fig. 3.1.2.). Si a est l'abscisse de P et b l'ordonnée de Q , l'équation

$$(3.1.3) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

est du premier degré et représente la droite PQ . Cette équation fait apparaître l'abscisse et l'ordonnée des points d'intersections de la droite avec les axes de coordonnées.

Dans la suite, nous nous placerons dans un repère orthonormé, sauf mention contraire.

Cas d'un repère orthonormé

Dans ce cas, les expressions (3.1.1.) à (3.1.3.) subsistent. Il est possible de mettre en évidence une autre forme remarquable de l'équation d'une droite. Soit p ($p > 0$) et θ un système de coordonnées polaires (cf. paragraphe 2.2.) de la projection orthogonale H de l'origine des coordonnées sur la droite donnée (Δ) (fig. 3.1.3.). Si M est un point quelconque de la droite (Δ) , le produit scalaire du vecteur OM par le vecteur unitaire u de la normale OH est

$$OM \cdot u = \|OM\| \cdot \|u\| \cos \theta = p,$$

d'où

$$(3.1.4) \quad x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

Cette équation est appelée l'*équation normale de la droite*.

Cette équation (3.1.4.) peut s'obtenir à partir de la forme

$$Ax + By + C = 0$$

avec

$$\frac{\cos \theta}{A} = \frac{\sin \theta}{B} = \frac{-p}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

La distance de l'origine des coordonnées à la droite est

$$(3.1.5.) \quad p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

et les cosinus directeurs de la normale à la droite proposée sont

$$\alpha = \cos \theta = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\beta = \sin \theta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

c'est-à-dire les résultats de l'exemple (1.7.1.) liant les coefficients directeurs aux cosinus directeurs.

Exemple 3.1.2.

Soit une droite (Δ) d'équation

$$Ax + By + C = 0.$$

Sur une normale à cette droite, nous pouvons déterminer un sens positif, par exemple celui du vecteur de cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

L'équation de la normale (Δ') passant par l'origine des coordonnées est de la forme

$$\alpha'x + \beta'y = 0,$$

où α' et β' sont les cosinus directeurs de (Δ'). Ils sont tels que (orthogonalité)

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Le calcul conduit à

$$\alpha' = \mp \beta = \mp \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\beta' = \pm \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

L'équation de la normale (Δ') à (Δ) passant par l'origine est

$$-Bx + Ay = 0.$$

Exercice 3.1.3. — Soit un miroir plan dont le profil est la droite (D) d'équation normale

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = d \quad (\text{fig. 3.1.4}).$$

On considère des rayons incidents issus d'une source lumineuse placée en O, d'angle polaire β . Déterminer l'équation normale du rayon réfléchi.

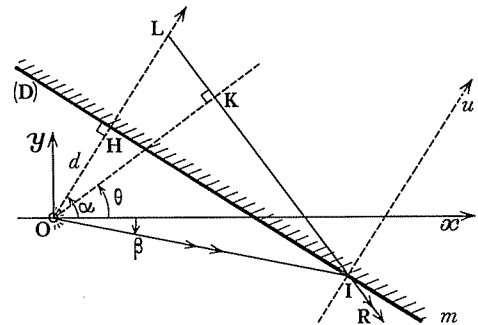


FIG. 3.1.4.

Exercice 3.1.4. — Déterminer λ (exercice 3.1.1.) pour que la distance de O à (D_λ) soit égale à 1.

Exercice 3.1.5. — Déterminer l'équation normale de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3.1.6. — Soit un dioptré plan (fig. 3.1.5.) dont une section droite est portée par la droite (D) d'équation

$$x + y = d, \quad \text{avec } d > 0.$$

On considère des rayons incidents issus d'une source lumineuse placée en O, d'angle polaire β . Déterminer β pour que le rayon réfracté éclaire le point A (2, d).

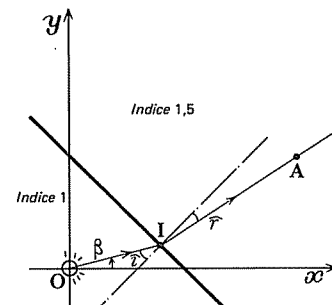


FIG. 3.1.5.

Exemple 3.1.3.

Distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite (Δ) passant par l'origine des coordonnées d'équation

$$Ax + By = 0.$$

Un système de cosinus directeurs du vecteur unitaire u de cette droite est

$$-\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad + \quad \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

D'après les résultats de l'exemple (1.7.3.), la distance cherchée est

$$d = \sqrt{(u \wedge OM_0)^2},$$

soit

$$(3.1.6) \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Exercice 3.1.7. — Calculer la distance du point $M_0(1, 1)$ à la droite d'équation $2x - y = 1$.

Exercice 3.1.8. — Déterminer le point M de la bissectrice ($y = x$) dont la distance à la droite d'équation $2x - y = 0$ est égale à 1.

Angles de deux droites en axes orthonormés

D'après la relation (1.7.1.), la tangente de l'angle $\hat{V}$ formé par deux droites se coupant en un point O est telle que

$$\operatorname{tg} \hat{V} = \frac{\|OM_1 \wedge OM_2\|}{OM_1 \cdot OM_2}.$$

Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées de M_1 et M_2 , nous obtenons

$$(3.1.7) \quad \operatorname{tg} \hat{V} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 x_2 + y_1 y_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

Exercice 3.1.9. — Déterminer l'angle des deux droites

$$\begin{aligned} (D_1) \quad & x + 2y + 1 = 0, \\ (D_2) \quad & x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

$m_1 = \frac{y_1}{x_1}$ et $m_2 = \frac{y_2}{x_2}$ étant les pentes des droites (Δ_1) et (Δ_2) qui portent les vecteurs OM_1 et OM_2 .

Si les droites ont pour équations

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

nous avons $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2},$

d'où

$$(3.1.8) \quad \operatorname{tg} \hat{V} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Si les droites sont parallèles, nous avons avec les relations (3.1.7.) ou (3.1.8)

$$m_1 = m_2 \quad \text{ou} \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0.$$

Si les droites sont perpendiculaires, nous avons

$$1 + m_1 m_2 = 0 \quad \text{ou} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Exemple 3.1.4.

Si une droite (Δ) est connue par son équation

$$Ax + By + C = 0$$

cela signifie que sa pente est $m = -\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

La droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) a pour pente $\frac{B}{A}$ ($A \neq 0$).

Son équation est de la forme

$$y = \frac{B}{A}x + h,$$

soit

$$Ay - Bx - K = 0.$$

La normale à (Δ) passant par l'origine des coordonnées a pour équation

$$Ay - Bx = 0.$$

Nous retrouvons le résultat de l'exemple (3.1.2.).

Les équations des droites ainsi présentées reposent sur la connaissance des *cosinus directeurs* ou de *coefficients directeurs de la normale à la droite considérée*.

Nous allons maintenant voir une autre façon de représenter une droite.

Exercice 3.1.10. — Déterminer les relations entre λ et μ pour que les droites (D_λ) et (Δ_μ) des exercices (3.1.1.) et (3.1.2.) soient

- a) parallèles,
- b) orthogonales,
- c) sécantes en un point de l'axe Ox ,
- d) sécantes en un point de l'axe Oy .

Exercice 3.1.11. — Soit (D'_λ) et (Δ'_μ) les normales à (D_λ) et (Δ_μ) passant par l'origine O (exercices 3.1.1., 3.1.2.).

Quelle est la condition sur λ et μ pour que (D'_λ) et (Δ'_μ) déterminent un segment de longueur 1 sur la droite $y = 1$?

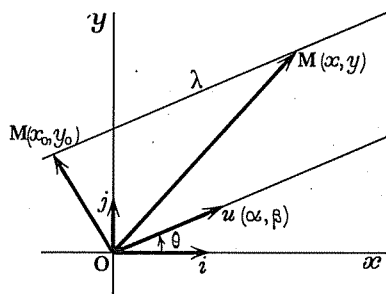


FIG. 3.1.6.

Exercice 3.1.12. — Soit $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Déterminer les valeurs du paramètre λ (3.1.9.) telles que le point $M(x, y)$ appartienne à la fois à la droite (D) et à la parabole d'équation $y = x^2$.

Représentation paramétrique d'une droite connaissant sa direction et un point

Soit une droite (Δ) passant par le point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et de direction représentée par un vecteur u .

Un point M quelconque de la droite (fig. 3.1.6.) est tel que

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{M_0M},$$

u étant le vecteur unitaire de (Δ) et λ la mesure du vecteur $\vec{M_0M}$ le long de (Δ) , nous avons

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \lambda u.$$

Soit

$$\vec{OM} = (x_0 + \alpha\lambda)\vec{i} + (y_0 + \beta\lambda)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

où $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$ sont les cosinus directeurs de la direction positive choisie sur (Δ) et non plus de la normale.

Il en résulte pour (Δ) la **représentation paramétrique** à l'aide du paramètre λ :

$$(3.1.9.) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\lambda, \\ y = y_0 + \beta\lambda. \end{cases}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous obtenons

$$\alpha y - \beta x = \alpha y_0 - \beta x_0,$$

$$\text{soit} \quad \alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) = 0.$$

— β et α sont les cosinus directeurs de la normale à la droite de cosinus directeurs α et β .

Exemple 3.1.5.

Nous allons utiliser la représentation paramétrique pour chercher la **distance d'un point à une droite**.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ le point et (Δ) la droite d'équation $Ax + By + C = 0$. La droite perpendiculaire à (Δ) a pour pente $\frac{B}{A}$. On choisit sur cette droite un sens positif de cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Écrivons que le point M de coordonnées $x_0 + \alpha\lambda$, $y_0 + \beta\lambda$ (fig. 3.1.7.) est sur la droite (Δ), c'est-à-dire

$$A(x_0 + \alpha\lambda) + B(y_0 + \beta\lambda) + C = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$\lambda = \overline{M_0H} = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A\alpha + B\beta} = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

La distance cherchée, prise en valeur absolue a pour expression

$$\|M_0H\| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

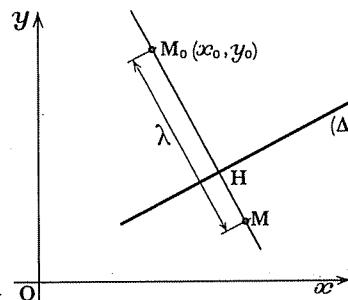


FIG. 3.1.7.

3.2. ÉQUATION DE DROITES DÉFINIES PAR CERTAINES CONDITIONS

Commençons par le problème le plus simple qui est de *former l'équation de la droite de pente donnée m qui passe par le point donné* $M_0(x_0, y_0)$. Cette équation est de la forme

$$(3.2.1.) \quad y = mx + h,$$

m désignant la pente donnée et h l'ordonnée à l'origine qui est ici l'inconnue du problème.

Nous écrivons que la droite passe par le point donné $M_0(x_0, y_0)$, c'est-à-dire

$$y_0 = mx_0 + h.$$

Nous obtenons immédiatement

$$h = y_0 - mx_0.$$

En portant cette valeur de h dans l'équation (3.2.1.), l'équation cherchée devient

$$(3.2.2.) \quad y - y_0 = m(x - x_0).$$

Exercice 3.2.1. — La droite (D) (fig. 3.2.1.) d'équation

$$x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3} = 1$$

représente le profil d'un miroir plan. Déterminer l'angle polaire β d'un rayon incident issu de O pour que le rayon réfléchi éclaire A (−2, 2).

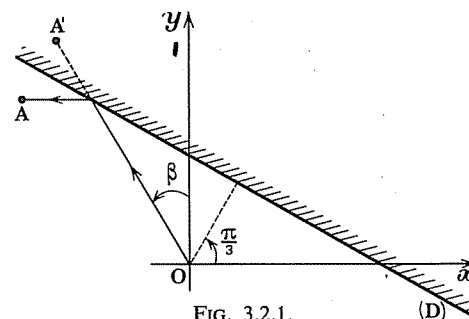


FIG. 3.2.1.

Remarque 3.2.1. — Pour former l'équation de la droite joignant deux points donnés $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$, on peut aussi écrire que la droite dont l'équation est de la forme

$$y = mx + h$$

et passe par M_1 , soit $y_1 = mx_1 + h$, passe par M_2 , soit $y_2 = mx_2 + h$, et déterminer les deux inconnues m et h ce qui donne l'équation (3.2.2.).

Exercice 3.2.2. — Déterminer les équations des supports des côtés AB et AC d'un triangle ABC dont le sommet A est situé sur la bissectrice d'équation $y = x$ et B et C sont portés par Ox, d'abscisses respectives b et c .

Exercice 3.2.3. — Les supports des côtés AB et AC d'un triangle ABC ont pour équations respectives

$$x - 3y + 5 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0.$$

Si les sommets B et C sont portés par Ox, quelle est l'équation de la médiane issue de A?

Remarque 3.2.2. — On peut utiliser les *déterminants* (cf. chapitre 1, tome III) pour obtenir les relations (3.2.3.) et (3.2.4.). Pour que les points M_1, M_2 et M_3 soient alignés, il faut, et il suffit, qu'il existe trois coefficients A, B et C non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + C &= 0. \end{aligned}$$

Un tel système homogène en A, B, C n'a de solutions autres que la solution nulle que si, et seulement si, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui n'est autre que la relation (3.2.4.). L'équation (3.2.3.) s'écrit de même

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Droite joignant deux points donnés

Nous désirons former l'équation de la droite joignant deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$. D'après ce qui précède, cette équation est de la forme

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Cette fois, la pente est l'inconnue et nous allons la déterminer en écrivant que la droite passe par le point $M_2(x_2, y_2)$, soit

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Ceci s'énonce :

La pente de la droite qui joint deux points est le rapport de la différence de leurs ordonnées à la différence de leurs abscisses prises dans le même ordre.

Dans ces conditions l'équation de la droite cherchée s'écrit

$$(3.2.3.) \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Conditions pour que trois points soient alignés

Pour que trois points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ soient alignés, il faut, et il suffit, que les valeurs $x = x_3, y = y_3$ vérifient l'équation précédente (3.2.3.).

Cette condition peut s'écrire

$$(3.2.4.) \quad \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

ce qui exprime en fait que les droites M_1M_2 et M_1M_3 ont même pente.

Intersection de deux droites

Considérons deux droites (D) et (D') définies par les équations

$$(3.2.4.) \quad \begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0. \end{aligned}$$

Elles se coupent si le système admet une solution unique en x, y . La condition nécessaire et suffisante pour que ce système linéaire admette

une solution (cf. chapitre 1, tome III) est que

$$AB' - BA' \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}.$$

En d'autres termes (cf. relation 3.1.5.), cela signifie que *les pentes des droites considérées sont différentes*.

Les coordonnées du point d'intersection sont

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, il n'y a pas d'intersection, les droites sont parallèles.

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, les deux droites ont une infinité de points d'intersection. Elles sont confondues.

Faisceau linéaire de droites

Si les droites précédentes ont un point commun M, toutes les droites définies par l'équation générale

$$(3.2.5.) \quad Ax + By + C + \lambda (A'x + B'y + C') = 0,$$

dans laquelle λ désigne un paramètre arbitraire, passent par le point M.

La famille de droites (3.2.5.) est appelée un *faisceau linéaire de droites*.

Suivant la notation abrégée du géomètre anglais Salmon (1819-1904), posons

$$\begin{aligned} Ax + By + C &\equiv D, \\ A'x + B'y + C' &\equiv D'. \end{aligned}$$

L'équation générale (3.2.5.) s'écrit

$$D + \lambda D' = 0,$$

soit avec deux paramètres homogènes α et α' tels que $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$,

$$\alpha D + \alpha' D' = 0.$$

Exercice 3.2.4. — Sur la courbe $y = \frac{4}{x}$, soit les points A, B et C d'abscisses -1 , $+1$ et $+8$. Trouver le point de concours des hauteurs du triangle ABC et vérifier qu'il est situé sur la courbe.

Exercice 3.2.5. — Sur la courbe (μ) d'équation $y = x^2 + \frac{1}{x}$, soit les points M et M' d'abscisse λ et $-\lambda$. Montrer que les tangentes à (μ) en M et M' se coupent sur (μ) . Écrire en fonction de λ l'équation de la droite MM'.

Remarque 3.2.3. — Si les droites (D) et (D') sont parallèles, la valeur commune de leur pente est

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}.$$

Or, d'après la propriété fondamentale des proportions, nous avons

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} = -\frac{A + \lambda A'}{B + \lambda B'}.$$

Par suite, les droites représentées par l'équation (3.2.5.) sont parallèles à (D) et (D') et forment un faisceau de droites parallèles.

Exercice 3.2.6. — Montrer analytiquement que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Les côtés A_2A_3 , A_3A_1 et A_1A_2 sont portés par les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) d'équations normales

$$(D_i) \quad x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Exercice 3.2.7. — Les droites D_1 , D_2 , D_3 d'équations respectives $y = 0$, $24x + 3y - 768 = 0$, $24x - 7y + 168 = 0$ forment un triangle ABC dont on déterminera les sommets et l'orthocentre. Montrer que l'angle (D_1, D_3) est double de l'angle (D_2, D_1) .

Exercice 3.2.8. — Former les équations des bissectrices intérieures du triangle ABC qui fait l'objet de l'exercice 3.2.7. Vérifier que ces bissectrices concourent et trouver les coordonnées de leur point d'intersection. On écrira que les distances du point d'intersection aux côtés AB et AC sont égales.

Condition nécessaire et suffisante pour que trois droites soient concourantes

Pour que trois droites (D) , (D') , (D'') définies par les équations

$$D = Ax + By + C = 0, \quad D' = A'x + B'y + C' = 0,$$

$$D'' = A''x + B''y + C'' = 0,$$

soient concourantes, il faut, et il suffit, que (D'') appartienne au faisceau linéaire défini par (D) et (D') . Ceci signifie que l'on peut trouver trois nombres α , α' , α'' tels que l'on ait identiquement

$$(3.2.6.) \quad \alpha D + \alpha' D' + \alpha'' D'' = 0.$$

Cette condition exprime que si (D) et (D') sont parallèles, (D'') leur est également parallèle.

La relation (3.2.6.) doit être valable quels que soient x et y , par suite, on doit avoir

$$\alpha A + \alpha' A' + \alpha'' A'' = 0,$$

$$\alpha B + \alpha' B' + \alpha'' B'' = 0,$$

$$\alpha C + \alpha' C' + \alpha'' C'' = 0.$$

Pour qu'il existe trois nombres α , α' , α'' différents de zéro, on doit avoir (tome III)

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

Cette relation permet d'exprimer directement que les droites (D) , (D') , (D'') sont concourantes ou parallèles.

3.3. LE CERCLE

Nous avons vu comme conséquence du produit scalaire que le carré de la distance de deux points $M(x, y)$ et $C(a, b)$ est donné par

$$\|MC\|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Nous allons utiliser ce résultat pour trouver l'équation cartésienne d'un cercle. Rappelons qu'un cercle de centre C et de rayon R est le

lieu des points M situés à la distance R du centre C. L'équation du cercle de centre C (a, b) et de rayon R (fig. 3.3.1.) est, par suite,

$$(3.3.1.) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Cette équation s'écrit encore

$$(3.3.2.) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

L'équation est de la forme générale

$$(3.3.3.) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Réciproquement, considérons une équation de la forme (3.3.3.). Elle peut s'écrire

$$(3.3.4.) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Trois cas peuvent alors se présenter.

— Si $a^2 + b^2 - c > 0$, l'équation (3.3.4.) est celle d'un cercle de centre C (a, b) et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

— Si $a^2 + b^2 - c = 0$, l'équation (3.3.4.) n'a qu'une seule solution $x = a, y = b$.

— Si $a^2 + b^2 - c < 0$, l'équation (3.3.4.) n'a pas de solution dans le plan réel. On dit qu'elle représente un *cercle imaginaire*.

Exemple 3.3.1.

Le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

a pour centre l'origine et pour rayon R.

Le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

est centré au point C (a, 0); il a pour rayon $R = a$. Il passe par l'origine.

Cercle de diamètre donné

Soit $M_1 (x_1, y_1)$ et $M_2 (x_2, y_2)$ deux points du plan. Si M est un point du cercle de diamètre M_1M_2 (fig. 3.3.2.), les droites MM_1 et

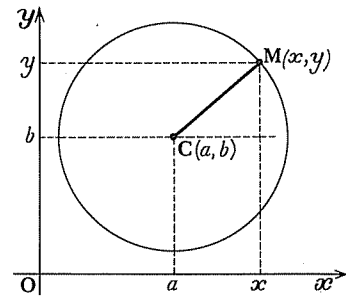


FIG. 3.3.1.

Exercice 3.3.1. — Écrire l'équation des cercles qui satisfont aux conditions suivantes :

- a) $C = (-4, 2)$, $r = 5$,
- b) $C = (3, -5)$, $r = 1$,
- c) $C = (-3, 2)$ et passant par (2, 6).

Exercice 3.3.2. — Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle, lorsque les équations suivantes représentent des cercles :

- a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$,
- b) $x^2 + 2x + y^2 + 2 = 0$,
- c) $x^2 - 2x + y^2 = 0$,
- d) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$.

Exercice 3.3.3. — Soit A (a, 0) et B (-a, 0) deux points donnés. Déterminer le lieu des points M tels que l'angle (MA, MB) soit égal à θ donné.

Exercice 3.3.4. — Écrire l'équation du cercle

- a) passant par les points (-4, 0), (0, 3) et (0, -5);
- b) passant par les points (2, -1), (-2, 3) et centré sur la droite d'équation $y = x$.

Exercice 3.3.5. — Pour quelle valeur de d l'équation suivante représente-t-elle un cercle :

$$ay^2 + cx^2 + d(y^2 - m^2x^2) + 2(y - mx) = 0$$

avec a, c et m donnés?

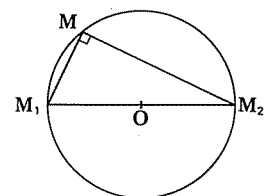


FIG. 3.3.2.

Exercice 3.3.6. — Trouver l'équation du cercle dont le diamètre est déterminé par les intersections de la droite d'équation $y = 2x - 3$ avec les axes.

MM_2 sont perpendiculaires. En effet, le produit scalaire $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_1}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_2}) \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 0,\end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2}$.

Nous pouvons énoncer

Théorème 3.3.1.

Tout diamètre d'un cercle (C) est vu d'un point quelconque du cercle sous un angle droit.

L'équation du cercle (C) de diamètre M_1M_2 s'obtient en écrivant que $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0$ à l'aide de l'expression analytique, soit

$$(3.3.5) \quad (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

Exemple 3.3.2.

Cherchons les points M du plan dont le rapport des distances à deux points fixes A et B a une valeur donnée $k \neq 1$, soit

$$(3.3.6) \quad \frac{MA}{MB} = k.$$

Les bissectrices de l'angle $\widehat{AMB}$ coupent AB en I et J (fig. 3.3.3.) et nous avons

$$\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

Les points I et J sont donc fixes et, puisque l'angle $\widehat{IMJ}$ est droit, le point M appartient au cercle (C) de diamètre IJ.

Inversement si M appartient à (C), nous admettrons (cf. 0.10.4.) que (3.3.6.) est vérifiée, d'où le théorème :

Théorème 3.3.2.

L'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à deux points fixes A et B a une valeur donnée $k \neq 1$ est le cercle de diamètre IJ tel que les points I et J divisent le segment AB dans le rapport k (paragraphe 0.5.).

Exercice 3.3.7. — Montrer que le rayon du cercle de l'exemple 3.3.2. est $R = \frac{ak}{k^2 - 1}$, avec $a = AB$.

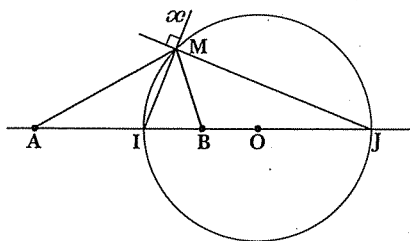


FIG. 3.3.3.

En réalité nous avons

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}},$$

c'est-à-dire que la division (ABIJ) est harmonique (paragraphe 0.5.).

Segment vu sous un angle donné

Le théorème (3.3.1.) se généralise au cas d'un angle quelconque, le diamètre étant remplacé par une corde M_1M_2 .

Théorème 3.3.3.

Toute corde d'un cercle (C) est vue d'un point quelconque M du cercle sous un angle constant α ou $\alpha - \pi$ suivant que le point M décrit l'arc $\widehat{M_1M_2}$ ou $\widehat{M_2M_1}$ (fig. 3.3.4.).

Démonstration :

Soit M un point de l'arc $\widehat{M_1M_2}$, et α l'angle inscrit (MM_1, MM_2) . Les droites MM_1 et MM_2 sont respectivement perpendiculaires aux droites Ou et Ov , bissectrices des angles (OM, OM_1) et (OM, OM_2) , et

$$(MM_1, MM_2) = (Ou, Ov) + \pi.$$

Calculons d'autre part l'angle au centre

$$\begin{aligned} (OM_1, OM_2) &= (OM_1, OM) + (OM, OM_2) \\ &= 2 (OM_1, Ou) + 2 (Ov, OM_2) \\ &= 2 [(OM_1, Ou) + (Ou, Ov) + (Ov, OM_2) - (Ou, Ov)] \\ &= 2 (OM_1, OM_2) - 2 (Ou, Ov). \end{aligned}$$

Nous déduisons de ces calculs (exercice)

$$(OM_1, OM_2) = 2 (MM_1, MM_2) = 2 \alpha.$$

C'est-à-dire que l'angle inscrit (MM_1, MM_2) , moitié de l'angle au centre (OM_1, OM_2) , est donc indépendant du point M considéré sur l'arc $\widehat{M_1M_2}$.

Réciproquement le lieu géométrique des points M d'où un segment M_1M_2 est vu sous un angle fixe α est un arc de cercle passant par les points M_1 et M_2 .

Exercice 3.3.8. — Soit sur un axe $x'Ox$ trois points A, B et C d'abscisses 1, 2, 3. Déterminer les points M du plan tels que l'on ait à la fois

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA}{MC} = 2.$$

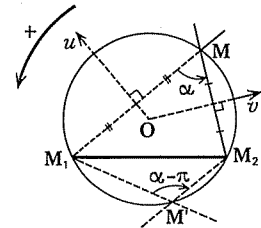


FIG. 3.3.4.

Exercice 3.3.9. — On considère deux cercles (C) et (C') de centres O et O', sécants en deux points A et B. Soit une sécante variable (Δ), passant par B, qui coupe (C) en M et (C') en M'. Montrer que le segment MM' est vu du point A sous un angle fixe α égal à (AO, AO') : c'est l'angle des cercles (C) et (C').

Exercice 3.3.10. — Soit deux cercles (C) et (C') d'équations

$$(C) \quad x^2 + y^2 - 2ax + 2by + c = 0,$$

$$(C') \quad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Déterminer à quelle condition sur a, b, c, a', b' et c' les deux cercles (C) et (C') sont orthogonaux.

Exercice 3.3.11. — Montrer que le lieu géométrique des points M (fig. 3.3.5.) dont les projections sur les côtés d'un triangle sont en ligne droite est le cercle circonscrit au triangle. La droite $\alpha\beta\gamma$ est la *droite de Simson* relative au point M du triangle ABC .

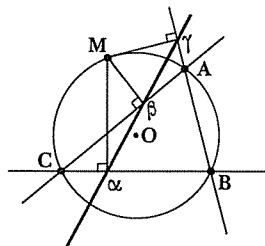


FIG. 3.3.5.

Si l'on considère l'angle de droites (MM_1, MM_2) défini à π près au lieu de l'angle des vecteurs, on ne distingue plus α et $\alpha - \pi$. Le lieu géométrique est alors le cercle complet. Nous en déduisons une condition pour que quatre points donnés soient cocycliques.

Théorème 3.3.4.

Quatre points A, B, C , et D sont *cocycliques* si, et seulement si,

$$(CA, CB) = (DA, DB) + k\pi$$

(ou l'une quelconque des égalités du même type).

Tangentes à un cercle

Soit le cercle d'équation

$$(3.3.7.) \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Cherchons la pente de la tangente en un point quelconque M . Rappelons que, d'après le tome I, c'est la dérivée de la fonction au point M . Comme l'équation (3.3.7.) est de la forme générale $f(x, y) = \text{Cte}$, la différentielle en un point $M(x, y)$ s'écrit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M dy = 0.$$

Pour le cercle centré à l'origine et de rayon R , nous avons donc

$$2x dx + 2y dy = 0,$$

soit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

C'est la pente de la tangente en M au cercle d'équation (3.3.7.).

La tangente en M au cercle est perpendiculaire au rayon OM dont la pente est $\frac{y}{x}$. Si X et Y sont les coordonnées d'un point quelconque de la tangente en M , l'équation de cette tangente est

$$(3.3.8.) \quad Y - y = -\frac{x}{y}(X - x)$$

qui s'écrit, puisque $x^2 + y^2 = R^2$,

$$Xx + Yy - R^2 = 0.$$

Remarque 3.3.1. — Lorsque le cercle n'est pas centré à l'origine, les résultats ci-contre restent vrais en effectuant un changement d'axes.

Exercice 3.3.12. — Soit le cercle (C) de centre O et de rayon 1, A et B les points de coordonnées $(2, 0)$ et $(2, 2)$. Déterminer le point M du cercle tel qu'une bille lancée du point A et se réfléchissant au point M passe par B .

En introduisant l'angle polaire $(Ox, OM) = \theta$ (fig. 3.3.6.), nous avons $x = R \cos \theta$ et $y = R \sin \theta$. La tangente en M a pour équation

$$X \cos \theta + Y \sin \theta - R = 0.$$

C'est l'équation normale (3.1.4.).

Exemple 3.3.3.

Recherche des tangentes de pente donnée

Soit m (donné) la pente de la tangente en un point M. Les coordonnées du point M où il existe une tangente de pente m , sont déterminées par le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ -\frac{x}{y} = m, \end{cases}$$

de solutions $y = \frac{\pm R}{\sqrt{1+m^2}}, \quad x = \frac{\mp mR}{\sqrt{1+m^2}}.$

L'équation de la tangente d'après (3.3.7.) s'écrit

$$(3.3.8.) \quad Y = mX \pm R \sqrt{1+m^2}.$$

Il y a deux tangentes de pente m , (Δ_1) et (Δ_2) parallèles. Elles sont symétriques par rapport au centre du cercle (fig. 3.3.6.).

Exemple 3.3.4.

Tangentes issues d'un point donné

Nous voulons mener par un point P (x_1, y_1) une tangente au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et déterminer la pente de cette tangente.

Pour que l'une des droites (3.3.8.) passe par le point P, il faut, et il suffit, que

$$(y_1 - mx_1)^2 = R^2 (1 + m^2).$$

La relation précédente est une équation du second degré en m dont les racines sont les pentes des tangentes (Δ_1) et (Δ_2) issues de P au cercle (fig. 3.3.3.). Nous écrivons

$$(x_1^2 - R^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Les racines sont réelles si

$$x_1^2y_1^2 - (x_1^2 - R^2)(y_1^2 - R^2) \geq 0,$$

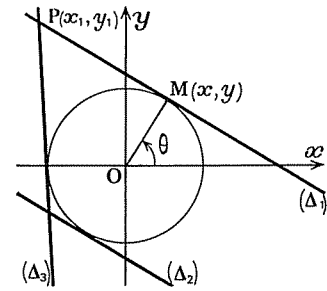


FIG. 3.3.6.

Exercice 3.3.13. — Écrire l'équation de la tangente de pente m au cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0.$$

Exercice 3.3.14. — Écrire l'équation d'un cercle tangent aux deux axes et passant par le point P (2, 1).

Exercice 3.3.15. — Écrire les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$, issues du point P (5, 4).

Exercice 3.3.16. — Calculer la longueur des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$, issues du point P (-1, 2).

Exercice 3.3.17. — Soit un cylindre de verre vu de profil selon le cercle (C) tangent à Ox et Oy (fig. 3.3.7.) et de rayon 1 (indice de réfraction $n = 1,5$). Un rayon incident émis de O sous l'angle β se réfracte en I et en J. Déterminer β pour que le rayon émergent éclaire le point K (3, 2).

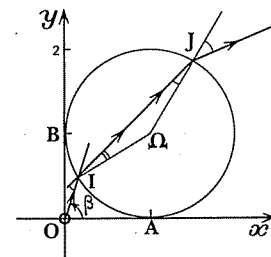


FIG. 3.3.7.

c'est-à-dire $x_1^2 + y_1^2 - R^2 \geq 0$,
ce qui signifie que P n'est pas intérieur au cercle.

La construction de tangentes à un cercle est très fréquente en physique, comme le suggère l'exemple suivant :

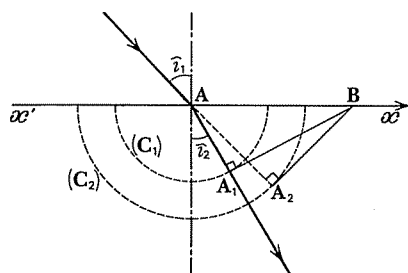


FIG. 3.3.8.

Exemple 3.3.5.

On peut construire le rayon réfracté en A à travers un dioptré plan, en traçant deux cercles (C_1) et (C_2) de centre A, de rayons n_1 et n_2 (fig. 3.3.8.). Le rayon incident recoupe (C_2) en A_2 . La tangente en A_2 à (C_2) recoupe $x'x$ en B. On mène la tangente BA_1 au cercle (C_1) . Alors AA_1 est le rayon réfracté, il suffit de vérifier

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2.$$

En effet

$$n_2 = AA_2 = AB \sin i_1,$$

$$n_1 = AA_1 = AB \sin i_2.$$

D'où la relation cherchée.

C'est la *construction de Huygens*.

Représentation paramétrique d'un cercle

La fonction vectorielle

$$\mathbf{OM}(\theta) = R \cos \theta \cdot \mathbf{i} + R \sin \theta \cdot \mathbf{j}$$

représente un cercle de rayon R centré à l'origine.

En effet, nous avons $\|\mathbf{OM}\| = R$, quel que soit θ . Nous pouvons considérer que le paramètre θ varie de 0 à 2π car la fonction vectorielle est périodique. Les équations

$$(3.3.9). \quad \begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \end{cases}$$

sont les *équations paramétriques* du cercle.

En éliminant θ entre les deux équations, nous obtenons l'équation classique $x^2 + y^2 = R^2$. De nombreux problèmes conduisent à des équations du genre (3.3.9.).

Remarque 3.3.2. — L'équation polaire d'un cercle est très simple si le pôle est le centre du cercle, soit $\rho = R$. Si le cercle passe par le pôle et est centré sur Ox, l'équation polaire est $\rho = 2R \cos \theta$ (exercice).

Exemple 3.3.6.

Soit une plaque ($\mathcal{P}$) dont on connaît les moments d'inertie I_x et I_y par rapport aux axes principaux Ox et Oy ($I_{xy} = 0$). Calculons les moments d'inertie par rapport à deux axes OX et OY déduits des précédents par une rotation d'angle α (tome I, chapitre 4).

Nous avons

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Les moments I_X , I_Y , I_{XY} se déduisent des précédents (exercice) par les formules

$$u = I_X = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha,$$

$$I_Y = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha$$

$$v = I_{XY} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha.$$

Par rapport à deux axes auxiliaires Ou et Ov (fig. 3.3.9.) le point (u, v) décrit un cercle de centre $\Omega \left[\frac{1}{2} (I_x + I_y), 0 \right]$, de rayon $\frac{1}{2} (I_x - I_y)$. Ce cercle permet de lire les valeurs de I_X , I_{XY} , I_Y , coordonnées de P et P' .

Puissance par rapport à un cercle

Soit un cercle (C) de centre ω , de rayon R , et P un point fixe. Soit (Δ) une sécante quelconque passant par P , coupant le cercle en A et B (fig. 3.3.10. a et b).

Le produit $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ est appelé **puissance du point P par rapport au cercle (C)** , et se note

$$(3.3.10.) \quad \mathcal{P}_C(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

Théorème 3.3.5.

La puissance d'un point par rapport à un cercle ne dépend pas de la sécante choisie.

Remarque 3.3.3. — La représentation graphique ci-dessous est due à *Mohr*. Nous verrons au chapitre 5 une méthode graphique similaire pour l'étude des contraintes au sein d'un solide soumis à des efforts (cercles de Mohr).

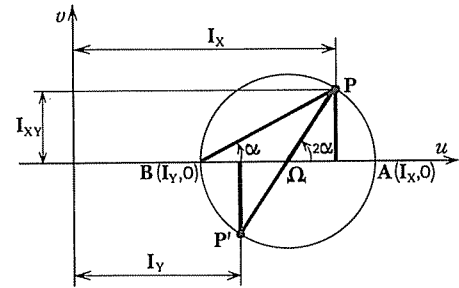


FIG. 3.3.9.

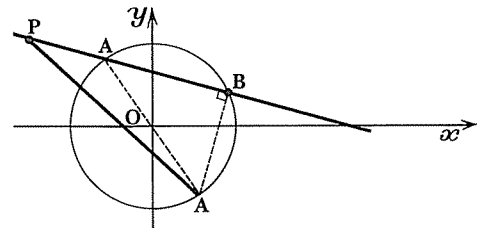


FIG. 3.3.10. a

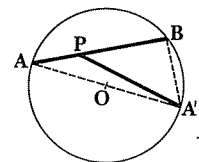


FIG. 3.3.10. b

Exercice 3.3.18. — Calculer la puissance du point $P(2, -3)$ par rapport aux cercles (C) et (C') d'équations respectives

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 3x + 4y + 6 &= 0, \\x^2 + y^2 + 2x - 3y - 25 &= 0.\end{aligned}$$

Remarque 3.3.4. — Si $\mathcal{P}_C(P) > 0$, P est extérieur au cercle (C) (fig. 3.3.10. a). Si $\mathcal{P}_C(P) < 0$, P est intérieur au cercle (C) (fig. 3.3.10. b). Si $\mathcal{P}_C(P) = 0$, P appartient au cercle (C).

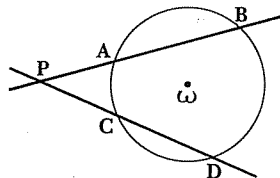


FIG. 3.3.11.

Exercice 3.3.19. — Montrer que, dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur est égal au produit des longueurs des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

En effet, nous pouvons écrire que

$$\mathcal{P}_C(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA} \cdot \overline{PA'},$$

si A' désigne le point diamétralement opposé à A sur A' (fig. 3.3.10. a et 3.3.10. b).

$$\mathcal{P}_C(P) = (\overline{PO} + \overline{OA}) \cdot (\overline{PO} + \overline{OA'}),$$

$$\mathcal{P}_C(P) = \overline{PO}^2 + \overline{OA} \cdot \overline{OA'},$$

$$(3.3.11.) \quad \mathcal{P}_C(P) = d^2 - R^2,$$

en appelant d la distance OP.

Si le cercle est donné par l'équation (3.3.3.),

$$\mathcal{P}_C(P) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c,$$

où x_0, y_0 désignent les coordonnées de P.

Déduisons une conséquence importante du théorème (3.3.5.).

En menant au cercle (C) deux sécantes PAB et PCD, issues de P (fig. 3.3.11.), nous avons la relation

$$\mathcal{P}_C(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Réciproquement, supposons que deux droites AB et CD se coupent en un point P tel que

$$(3.3.12.) \quad \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Les quatre points A, B, C et D sont *cocycliques*.

En effet, supposons que PC recoupe le cercle circonscrit à (ABC) en D' . La puissance de P par rapport au cercle est $\overline{PC} \cdot \overline{PD'}$. D'après le théorème (3.3.5.) et la relation (3.3.12.) nous en déduisons $\overline{PD'} = \overline{PD}$, soit $D = D'$.

Axe radical et faisceaux de cercles

Soit (C) et (C') deux cercles de rayons R et R' (fig. 3.3.12.). Nous cherchons s'il existe des points P ayant même puissance par rapport aux cercles (C) et (C'). Ils vérifient

$$\begin{aligned}\text{soit} \quad PC^2 - R^2 &= PC'^2 - R'^2, \\PC^2 - PC'^2 &= R^2 - R'^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad (\overline{PC} - \overline{PC'}) \cdot (\overline{PC} + \overline{PC'}) &= R^2 - R'^2, \\ \overline{C'C} \cdot 2 \overline{PI} &= R^2 - R'^2, \end{aligned}$$

si I est le milieu de $\overline{CC'}$.

En utilisant l'expression du produit scalaire à l'aide des projections orthogonales, nous avons

$$2 \overline{CC'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2,$$

où H désigne la projection de P sur $\overline{CC'}$.

Nous appellerons **axe radical** des deux cercles la droite, lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles.

Il est évident que l'axe radical passe par tout point commun à deux cercles (car $d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2 = H^2$, fig. 3.3.12. b). Cela permet de construire facilement l'axe radical de deux **cercles sécants** en joignant leurs points d'intersection. Dans le cas contraire, nous indiquons une construction ci-contre.

Soit (C) et (C') des cercles d'équations respectives

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Appelons C et C' les premiers membres des équations précédentes.

L'équation de l'axe radical peut alors s'écrire

$$D = C - C' = 0,$$

$$\text{ou} \quad 2(a - a')x + 2(b - b')y + c - c' = 0.$$

Nous allons maintenant étudier, par analogie avec les faisceaux linéaires de droites, les faisceaux de cercles.

Définition 3.3.1.

L'ensemble des cercles constitué par le cercle (C') et les cercles d'équation $C + \lambda C' = 0$ est appelé **faisceau linéaire de cercles** admettant (C) et (C') comme cercles de base.

Supposons les centres ω et ω' des cercles (C) et (C') distincts.

Remarquons que, si $D = C - C' = 0$ est l'équation de l'axe radical des cercles (C) et (C'), l'équation $C + \lambda C' = 0$ peut s'écrire

$$C + \lambda(C + D) = 0,$$

$$\text{soit} \quad C + \frac{\lambda}{1 + \lambda} D = 0, \quad \text{si } \lambda \neq -1.$$

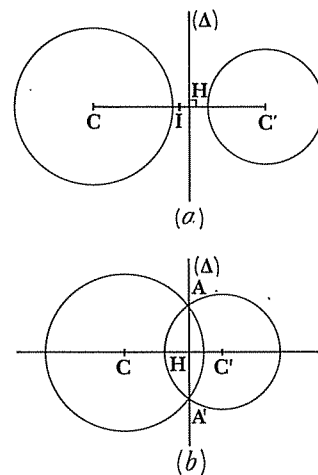


FIG. 3.3.12.

Exercice 3.3.20. — Déterminer les axes radicaux des cercles d'équations

a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ et $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$,

b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ et $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$.

Remarque 3.3.5. — Soit trois cercles (C), (C') et (C'') dont les centres ne sont pas alignés. L'axe radical des cercles (C) et (C') et celui des cercles (C) et (C'') se coupent en un point I. Ce point I appartient à l'axe radical de (C') et (C'') puisque $\mathcal{P}_C(I) = \mathcal{P}_{C'}(I) = \mathcal{P}_{C''}(I)$.

I s'appelle le **centre radical** des trois cercles. Pour construire l'axe radical (Δ) de deux cercles non sécants (C) et (C'), il suffit donc d'en construire un troisième (ω) coupant les deux premiers en AB et A'B' respectivement. Le point d'intersection de AB et A'B' est le centre radical I. Il suffit donc pour construire (Δ) d'abaisser la perpendiculaire de I à $\overline{CC'}$.

Exercice 3.3.21. — Effectuer la construction de la remarque (3.3.5.).

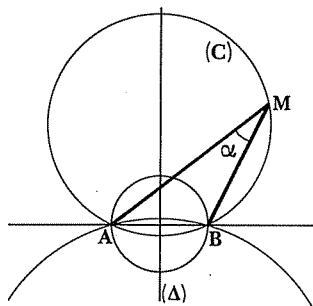


FIG. 3.3.13.

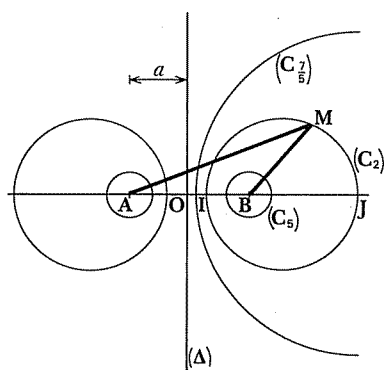


FIG. 3.3.14.

Remarque 3.3.6. — Les faisceaux de cercles se rencontrent dans l'étude des *champs de vecteurs*. Soit par exemple un milieu liquide alimenté par une arrivée de liquide au point A (fig. 3.3.13-14.) et qui se vide au point B avec un débit égal. On montre que les lignes du champ de vitesse, ou *lignes de courant* sont théoriquement les cercles du faisceau à points de base A et B (fig. 3.3.13.). Dans ce cas les lignes équipotentiels sont les cercles du faisceau à points limites A et B (fig. 3.3.14.). On démontre que tout cercle du premier faisceau est *orthogonal* à tout cercle du second, et inversement.

L'ensemble des cercles du faisceau a donc une équation de la forme $C + \mu D = 0$, dans laquelle D désigne l'axe radical des cercles de base (C) et (C') (non concentriques). La droite (D) s'appelle l'*axe radical du faisceau*.

Exemple 3.3.7.

L'ensemble des cercles passant par deux points donnés A et B est un faisceau de cercles admettant la droite AB pour axe radical. Les centres des cercles sont alignés sur une perpendiculaire à AB (fig. 3.3.13.). C'est un *faisceau à points de base*. Chacun des cercles est le lieu des points d'où la corde AB est vue sous un angle donné.

Exemple 3.3.8.

Pour toute constante $k \neq 1$, traçons le cercle (C_k) , lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$ (théorème 3.3.2.). Il est facile de montrer que c'est un faisceau d'axe radical (Δ) , médiatrice de AB (fig. 3.3.14.). En effet la division (ABIJ) est harmonique, ce qui s'exprime par

$$\overline{OI} \cdot \overline{OJ} = \overline{OA}^2 \quad (\text{cf. 0.5.16}).$$

Donc $\mathcal{P}_{C_k}(O) = \overline{OI} \cdot \overline{OJ} = a^2$, indépendant de k . C'est un *faisceau à points limites*.

Nous terminons ce paragraphe sur le cercle par l'étude rapide d'une transformation ponctuelle, l'*inversion*, non traitée au chapitre 2. Le lecteur verra au chapitre 4 le rôle de l'inversion à l'occasion de l'étude des fonctions complexes.

L'inversion

Présentons d'abord un instrument de dessin appelé *inverseur*.

Exemple 3.3.9.

L'inverseur est rivé au point O (fig. 3.3.15.). Une pointe fixée en D suit une courbe donnée (γ) . Le crayon fixé en B dessine une courbe

transformée (γ'). Calculons la puissance de O par rapport au cercle variable (C) de centre A, passant par B

$$\mathcal{P}_C(O) = \overline{OB} \cdot \overline{OD} = l^2 - a^2.$$

C'est une constante μ . D'où la définition :

Définition 3.3.2.

Étant donné un point fixe O et un réel μ , l'**inversion** de pôle O et de puissance μ est la transformation ponctuelle $\mathcal{I}_{O,\mu}$ qui envoie un point M en M' situé sur OM, tel que

$$(3.3.13.) \quad \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \mu.$$

Si μ est positif et $\overline{OM} = \sqrt{\mu}$, nous avons aussi $\overline{OM'} = \sqrt{\mu}$, c'est-à-dire que le point M est invariant (B et D confondus, losange aplati dans l'exemple 3.3.9.). Le cercle de centre O et rayon $\sqrt{\mu}$ est invariant. C'est le **cercle d'inversion**.

Citons pêle-mêle quelques propriétés de l'inversion :

- a) deux points M et N, non alignés avec O, et leurs inverses M' et N' sont **cocycliques** (cf. relation 3.3.12.),
- b) l'inverse d'une **droite** (D) ne passant pas par O est un **cercle** (C) passant par O, et réciproquement (exercice 3.3.22.),
- c) l'inverse d'un **cercle** (C) ne passant pas par O est un cercle (C') ne passant pas par O, et réciproquement (exercice 3.3.24.).

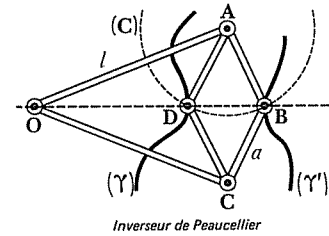
Nous étudions maintenant les courbes coniques et en premier lieu l'**ellipse**.

3.4. L'ELLIPSE

Définition 3.4.1.

L'**ellipse** est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes F et F' de ce plan est une constante $2a$.

Les points F et F' sont les **foyers** de l'ellipse. Choisissons un repère orthonormé, l'axe des x étant la droite FF', et l'axe des y, la médiatrice de FF'.



Inverseur de Peaucellier

FIG. 3.3.15.

Exercice 3.3.22. — Démontrer la propriété (b) en utilisant la propriété (a). On note H la projection de O sur (D).

Exercice 3.3.23. — Montrer que

$$\mathcal{I}_{O,\mu'} \circ \mathcal{I}_{O,\mu} = \mathcal{H}_{O,\frac{\mu}{\mu'}}$$

Exercice 3.3.24. — Démontrer la propriété (c) en prenant $\mu' = \mathcal{P}_C(O)$ dans l'exercice (3.3.23.).

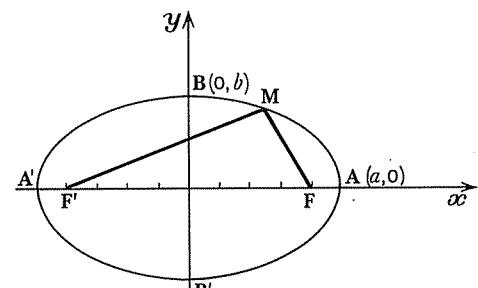


FIG. 3.4.1.

Remarque 3.4.1. — Si $a = b$, l'ellipse est un cercle de rayon a .

Exercice 3.4.1. — Déterminer l'équation de l'ellipse de foyers $F(3, 0)$ et $(-3, 0)$ et de sommets $(5, 0)$ et $(-5, 0)$.

Exercice 3.4.2. — Prolonger le segment MF' d'une longueur égale à $\|MF\|$ sur la figure 3.4.1. Soit Φ le point obtenu. En déduire que l'ellipse est le lieu des *centres des cercles* passant par F , tangents au cercle (Γ) de centre F' et de rayon $2a$.

Remarque 3.4.2. — L'équation

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

représente une ellipse de centre (x_0, y_0) et dont les axes de longueur $2a$ et $2b$ sont parallèles aux axes de coordonnées.

Exercice 3.4.3. — Déterminer les foyers et les axes des ellipses suivantes :

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; b) $x^2 + 3y^2 = 3$;

c) $5x^2 + 2y^2 = 20$; d) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$.

Soit c et $-c$ les abscisses respectives de F et F' , et

$$(3.4.1.) \quad \|MF\| + \|MF'\| = 2a, \quad \text{avec} \quad a > c.$$

Pour tout point $M(x, y)$ du plan nous avons (fig. 3.4.1.)

$$\begin{aligned} \|MF'\|^2 &= (x + c)^2 + y^2, \\ \|MF\|^2 &= (x - c)^2 + y^2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \|MF'\|^2 - \|MF\|^2 &= (\|MF'\| + \|MF\|) \cdot (\|MF'\| - \|MF\|) \\ &= 4cx. \end{aligned}$$

Si le point M appartient à l'ellipse, la relation (3.4.1.) entraîne

$$\|MF'\| - \|MF\| = \frac{2cx}{a},$$

soit

$$(3.4.2.) \quad \|MF\| = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad \|MF'\| = a + \frac{cx}{a}.$$

Par suite, nous obtenons à partir des relations (3.4.1.) et (3.4.2.) que les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse vérifient

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

soit

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 + c^2 - a^2 = 0.$$

En posant $a^2 - c^2 = b^2$ et en divisant par b^2 , il vient

$$(3.4.3.) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad a > b.$$

L'équation (3.4.3.) est l'*équation de l'ellipse* dans le système d'axes défini précédemment.

L'ellipse d'équation (3.4.3.) admet les axes Ox et Oy pour axes de symétrie. L'axe Ox est appelé *axe focal* de la courbe et l'axe Oy , axe non focal. Le point O est centre de symétrie de la courbe.

L'ellipse coupe l'axe des x en deux points A et A' d'abscisses $+a$ et $-a$, et l'axe des y en deux points B et B' d'ordonnées $+b$ et $-b$ (fig. 3.4.1.), appelés *sommets* de l'ellipse. AA' est le *grand axe* de l'ellipse et BB' le *petit axe*.

Réciproquement, toute équation du type

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

définit une ellipse.

Si $a > b$, les foyers F et F' sont portés par Ox et ont pour abscisse $\pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Nous avons alors $\|MF\| + \|MF'\| = 2a$.

Si $a < b$, les foyers F et F' sont portés par Oy , qui est alors l'axe focal de cette ellipse. Les foyers ont pour ordonnées $\pm \sqrt{b^2 - a^2}$. Nous avons alors $\|MF\| + \|MF'\| = 2b$ (fig. 3.4.2).

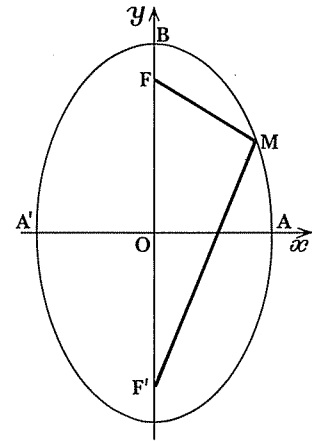


FIG. 3.4.2.

Directrices d'une ellipse

Traçons la droite (Δ) parallèle à Oy d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ (fig. 3.4.3). Nous calculons

$$\|MH\| = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a}{c} \left(a - \frac{cx}{a} \right),$$

soit, d'après (3.4.2.),

$$\frac{\|MF\|}{\|MH\|} = \frac{c}{a} = \text{Cte.}$$

Réciproquement, la condition $\frac{\|MF\|^2}{\|MH\|^2} = \frac{c^2}{a^2}$ conduit immédiatement à l'équation (3.4.3.).

Par suite, nous obtenons une *deuxième définition de l'ellipse*.

L'ellipse est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant et inférieur à 1.

La droite (Δ) est la *directrice* relative au foyer F . La directrice $x = -\frac{a^2}{c}$ est associée au foyer F' .

L'*excentricité* e de l'ellipse est le rapport $\frac{c}{a}$.

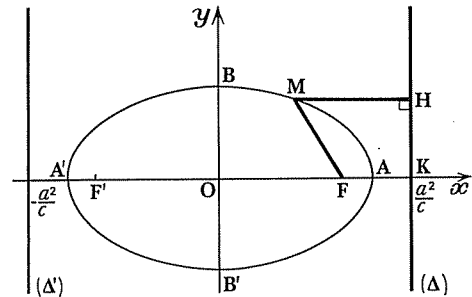


FIG. 3.4.3.

Exercice 3.4.4. — Écrire l'équation de l'ellipse de foyers $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ et d'excentricité $\frac{1}{4}$.

Remarque 3.4.3. — En utilisant la deuxième définition de l'ellipse et en appelant ρ le rayon vecteur MF et θ l'angle (Fx, FM) , il est possible de trouver une équation polaire de l'ellipse

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Cette équation de l'ellipse apparaît dans les *mouvements des planètes* autour du Soleil (lois de Kepler).

Exercice 3.4.5. — Démontrer qu'une ellipse admet l'équation précédente pour équation polaire.

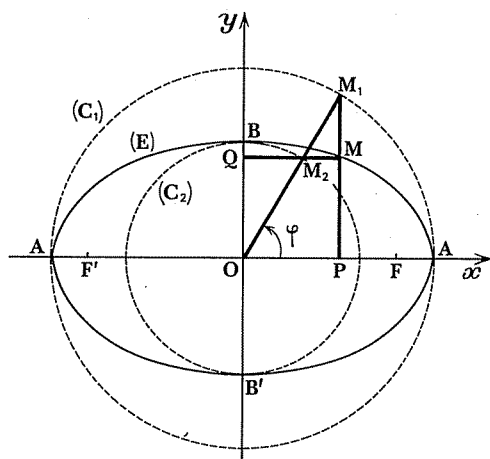


FIG. 3.4.4.

Équations paramétriques de l'ellipse

Soit l'équation de l'ellipse (E)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad b < a.$$

Pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à (E), il faut, et il suffit, qu'il existe un nombre réel φ tel que $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ soient le cosinus et le sinus de cet angle (fig. 3.4.4.).

La fonction vectorielle

$$\mathbf{OM}(\varphi) = a \cos \varphi \mathbf{i} + b \sin \varphi \mathbf{j}$$

représente une ellipse dans le plan Oxy , centrée à l'origine, dont les grand et petit axes sont parallèles aux axes Ox et Oy respectivement.

Les équations

$$(3.4.4.) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi, \end{cases}$$

constituent un système d'équations paramétriques de l'ellipse (E).

φ est appelé l'*anomalie excentrique* du point M.

Au point M de l'ellipse, dont les coordonnées sont données par les relations (3.4.4.), faisons correspondre le point M_1 du plan dont les coordonnées sont

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi.$$

Le lieu géométrique de M_1 (cf. paragraphe 3.3.) est le cercle (C_1) , $x^2 + y^2 = a^2$.

C'est le *cercle principal (C_1) de l'ellipse* (fig. 3.4.4.). L'anomalie excentrique φ du point M est l'angle (Ox, OM_1) .

Les points M et M_1 ont même abscisse et leurs ordonnées sont dans le rapport constant

$$\frac{\| \mathbf{PM} \|}{\| \mathbf{PM}_1 \|} = \frac{b}{a}.$$

L'ellipse (E) est l'homologue de son cercle principal (C_1) dans l'*affinité orthogonale* d'axe AA' et de rapport $\frac{b}{a}$ (ou $-\frac{b}{a}$).

Exercice 3.4.6. — Montrer que le système d'équations

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 + t^2}$$

est un système d'équations paramétriques de l'ellipse privée du point $A'(-a, 0)$.

Exercice 3.4.7. — Soit G et G' les projetés des foyers F et F' sur la tangente en M à l'ellipse.

a) Montrer que F et F' sont situés sur le cercle principal (C_1) .

b) Montrer que $\overline{FG} \cdot \overline{F'G'} = b^2$, quel que soit M. On calculera pour cela la puissance $\mathcal{P}_{C_1}(O)$.

Nous pouvons également associer au point M (fig. 3.4.4.) le point M_2 de coordonnées

$$x = b \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

qui décrit le cercle (C_2) d'équation $x^2 + y^2 = b^2$.

C'est le **cercle secondaire** (C_2) .

Les points M_2 et M ont même ordonnée et leurs abscisses sont dans le rapport constant

$$\frac{\|QM\|}{\|QM_2\|} = \frac{a}{b}.$$

L'ellipse (E) est l'homologue de son cercle principal (C_2) dans l'affinité orthogonale d'axe BB' et de rapport $\frac{a}{b}$ (ou $-\frac{a}{b}$).

Exemple 3.4.1.

Considérons une tige AB dont les extrémités A et B restent sur Ox et Oy. Quand la tige varie (fig. 3.4.6.) le point M marqué sur celle-ci décrit une ellipse. En effet, si nous posons $\varphi = (Ax', AB)$, nous avons

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$$

Cela fournit un procédé graphique pour construire l'ellipse considérée.

Comme pour le cercle au paragraphe 3.3., nous allons voir sous formes d'exemples quelques problèmes relatifs aux tangentes à l'ellipse.

Exemple 3.4.2.

Tangente en un point M (x, y) à une ellipse (E) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La pente de la tangente en un point M (x, y) de la courbe

$$f(x, y) = \text{Cte}$$

$$\text{est} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Exercice 3.4.8. — Déterminer le lieu du point M du système articulé (fig. 3.4.5.). On calculera les coordonnées de M en fonction de l'angle $\beta = (Ox, OI)$.

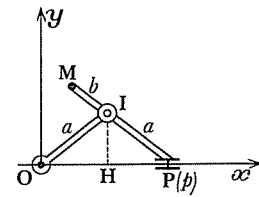


FIG. 3.4.5.

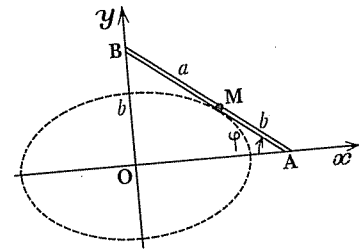


FIG. 3.4.6.

Exercice 3.4.9. — Déterminer l'équation des tangentes à l'ellipse d'équation $3x^2 + 4y^2 = 13$, parallèles à la droite d'équation $y = 3x + 4$.

Exercice 3.4.10. — Quel est le lieu du point d'intersection de deux tangentes à l'ellipse, perpendiculaires entre elles?

Exercice 3.4.11. — On construit un tuyau convergent dont le profil est constitué par deux arcs d'ellipses identiques qui se raccordent à mi-parcours selon une tangente d'angle polaire $\frac{\pi}{6}$ (fig. 3.4.7.). Déterminer une représentation paramétrique du profil connaissant les dimensions imposées.

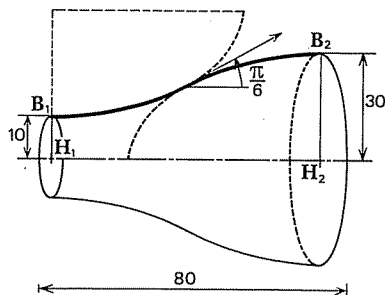


FIG. 3.4.7.

Exercice 3.4.12. — Quelle est l'équation de la normale à l'ellipse $2x^2 + y^2 = 3$, orthogonale à la droite $y + 2x = 0$?

Exercice 3.4.13. — On représente les moments d'inertie d'une plaque (cf. exemple 3.3.6.) de la façon suivante :

a) On mène à partir du point O et sous l'angle α un vecteur ON de longueur $\frac{S}{I_x}$ où S est la surface de la plaque. Montrer que N décrit une ellipse.

b) On donne au vecteur ON la longueur $\frac{I_x I_y}{SI_x}$. Déterminer la nouvelle courbe. Ce sont les *ellipses d'inertie*.

Au point M (x, y), l'ellipse admet donc pour tangente la droite

$$(3.4.5.) \quad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0.$$

A l'aide des coordonnées paramétriques de l'ellipse, l'équation de la tangente s'écrit en remplaçant x par $a \cos \varphi$ et y par $b \sin \varphi$,

$$(3.4.6.) \quad \frac{X \cos \varphi}{a} + \frac{Y \sin \varphi}{b} - 1 = 0.$$

A titre d'exercice, le lecteur montrera qu'il existe *deux tangentes de pente donnée m* à l'ellipse. Leurs équations sont

$$(3.4.7.) \quad Y = mX \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2}.$$

De même, il montrera que l'équation donnant les pentes *m* des tangentes issues d'un point P (x_1, y_1) est

$$(3.4.8.) \quad (x_1^2 - a^2) m^2 - 2 x_1 y_1 m + y_1^2 - b^2 = 0.$$

Exemple 3.4.3.

Normale en un point M (x, y) de l'ellipse (E) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les résultats se déduisent immédiatement de ceux de l'exemple (3.4.2.).

La pente de cette normale est $\frac{a^2 y}{b^2 x}$, d'où l'équation de cette normale

$$(3.4.9.) \quad \frac{a^2 X}{x} - \frac{b^2 Y}{y} - c^2 = 0.$$

A l'aide des coordonnées paramétriques de l'ellipse, l'équation de cette normale est

$$(3.4.10.) \quad aX \sin \varphi - bY \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Exemple 3.4.4.

Soit T et N les intersections de la tangente et de la normale en M (x, y) avec l'axe Ox.

Nous calculons facilement

$$\overline{OT} = \frac{a^2}{x} \quad \text{et} \quad \overline{ON} = \frac{c^2}{a^2} x,$$

d'où

$$\overline{OT} \cdot \overline{ON} = c^2 = \overline{OF}^2.$$

Cela signifie (0.5.16.) que la division $FF'NT$ est harmonique. Les droites qui joignent M à ces quatre points forment un faisceau harmonique (exercice 0.5.8.), et deux d'entre elles sont perpendiculaires. Aussi (exercice 0.10) MT et MN sont les *bissectrices* de MF et MF' (fig. 3.4.8.). Ce résultat peut se démontrer analytiquement (exercice 3.4.14.); nous l'énonçons ci-dessous.

Théorème 3.4.1.

La tangente MT et la normale MN sont les bissectrices de l'angle formé par les rayons vecteurs MF et MF' .

Ainsi un rayon lumineux issu de F se réfléchit sur l'ellipse en un rayon passant par F' , et inversement. Deux personnes se parlant à distance dans un tunnel elliptique s'entendent bien si elles se placent chacune en un foyer.

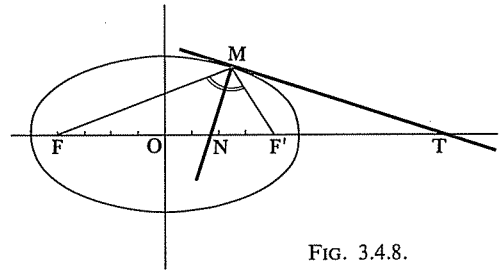


FIG. 3.4.8.

Exercice 3.4.14. — Montrer analytiquement le résultat du théorème 3.4.1.

Exercice 3.4.15. — On suppose que le segment FF' porte une charge électrique uniforme de densité λ .

a) Montrer que le champ électrique créé en tout point $M(x, y)$ par un élément de longueur a pour

module $\|d\mathbf{E}\| = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} d\alpha$ si cet élément est vu de M sous l'angle $d\alpha$.

b) En déduire que le champ $\mathbf{E}$ créé par le segment FF' en un point M de l'ellipse est normal à celle-ci. On décomposera FF' en petits éléments de longueur obtenus en partageant l'angle $\widehat{FMF'}$ en petits angles égaux, symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{FMF'}$.

L'ellipse de foyers F et F' est alors une *ligne équipotentielle* de ce champ (cf. chapitre 6) dans le plan xOy .

3.5. L'HYPERBOLE

Définition 3.5.1.

L'*hyperbole* est le lieu géométrique des points du plan dont la différence des distances à deux points fixes F et F' est constante et égale à $2a$.

Les points F et F' sont les *foyers* de l'hyperbole.

Exemple 3.5.1.

Considérons deux sources lumineuses de même longueur d'onde $\lambda = VT$, et même phase 0, placées en F et en F' . Nous examinons la vibration résultante en tout point du plan.

Posons $\| \mathbf{MF} \| = r$ et $\| \mathbf{MF}' \| = r'$.

Les vibrations émises en F et F' se représentent par

$$y_0(t) = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Elles se propagent (dans le vide) et arrivent déphasées au point M sous la forme

$$y(t) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

$$y'(t) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{\lambda} \right),$$

la vibration résultante a pour **amplitude** (paragraphe 4.5.)

$$A = a \sqrt{2 \cos \varphi},$$

où φ est la différence des phases :

$$\varphi = 2\pi \frac{r - r'}{\lambda}.$$

L'amplitude A est maximale si $\varphi = 2k\pi$, soit

$$r - r' = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aussi les zones d'éclairage maximal appelées **franges d'interférences** sont des hyperboles de foyers F et F' (fig. 3.5.1.).

Choisissons la droite FF' pour axe des x et la médiatrice de FF' pour axe des y (fig. 3.5.2.) d'un repère orthonormé. Soit c et -c les abscisses des foyers F et F' et

$$\left| \| \mathbf{MF} \| - \| \mathbf{MF}' \| \right| = 2a \quad (a < c).$$

En effectuant des calculs analogues à ceux de l'ellipse, nous obtenons l'équation vérifiée par tout point de l'hyperbole

$$(3.5.1.) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad c^2 - a^2 = b^2.$$

Cette équation (3.5.1.) est **l'équation de l'hyperbole**.

Étude de la courbe

L'hyperbole admet les axes Ox et Oy comme axes de symétrie et O comme centre de symétrie. L'axe Ox est appelé **axe focal**.

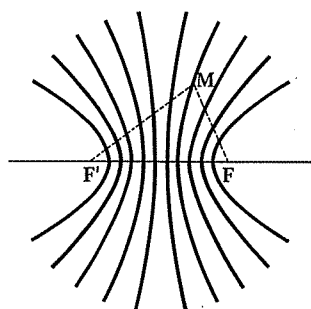


FIG. 3.5.1.

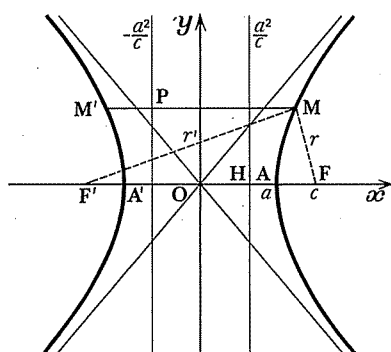


FIG. 3.5.2.

Exercice 3.5.1. — Établir l'équation de l'hyperbole (3.5.1.).

Remarque 3.5.1. — Une équation du type

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

définit une hyperbole de foyers F et F' portés par Oy. Cette hyperbole est dite « conjuguée » de celle d'équation (3.5.1.).

Il n'y a aucun point de l'hyperbole sur l'axe des y . Les points d'intersection de l'hyperbole avec l'axe des x sont les **sommets** A et A' de l'hyperbole.

Pour déterminer la forme de l'hyperbole, il suffit, puisque O est centre de symétrie d'étudier la courbe d'équation

$$y = b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \quad \text{avec} \quad x > a.$$

Remarquons que lorsque x tend vers $+\infty$, y tend aussi vers $+\infty$. Il nous faut donc rechercher l'asymptote si elle existe.

En utilisant le développement limité (cf. annexe 1 tome I) de $\sqrt{1+u}$ lorsque u tend vers zéro, nous obtenons

$$y = \frac{b}{a} x \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \right], \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) = 0,$$

soit

$$y = \frac{b}{a} x - \frac{ba}{2x} + \frac{b}{ax} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right).$$

Par suite, la droite d'équation $y = \frac{b}{a} x$ est **asymptote** à la courbe et la courbe est située en dessous de son asymptote.

Il est facile de voir que la fonction est croissante (composée de fonctions croissantes).

Le tracé de la courbe se complète à l'aide des symétries, ce qui entraîne que la droite d'équation $y = -\frac{b}{a} x$ est aussi asymptote.

Directrices d'une hyperbole

Au foyer F (fig. 3.5.2.), associons la droite HP d'équation $x = \frac{a^2}{c}$.

Si M appartient à la branche de droite de l'hyperbole, nous pouvons écrire

$$\| \mathbf{PM} \| = \left(x - \frac{a^2}{c} \right) = \frac{a}{c} \| \mathbf{MF} \|.$$

Si M appartient à la branche de gauche, nous avons

$$\| \mathbf{MP} \| = \left(\frac{a^2}{c} - x \right) = \frac{a}{c} \| \mathbf{MF} \|.$$

Exercice 3.5.2. — Déterminer les équations des hyperboles suivantes :

(H₁) de foyers $F = (3, 0)$ et $F' = (-3, 0)$ et de sommets $A = (2, 0)$ et $A' = (-2, 0)$;

(H₂) de foyers $F = (3, 0)$ et $F' = (-3, 0)$ et passant par $(2, 4)$.

Remarque 3.5.2. — L'équation

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

représente une hyperbole de centre (x_0, y_0) et dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Exercice 3.5.3. — Tracer les hyperboles

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$

b) $5x^2 - 2y^2 = 20.$

Exercice 3.5.4. — Montrer que l'hyperbole « conjuguée » a mêmes asymptotes que l'hyperbole d'équation (3.5.1.).

Dans les deux cas, le rapport des distances MF et MP est constant et sa valeur supérieure à l'unité. Réciproquement, la relation

$$\frac{\|MP\|}{\|MF\|} = \frac{a}{c} \quad \text{avec} \quad \frac{a}{c} > 1$$

conduit à la relation (3.5.1.).

Nous obtenons la *deuxième définition de l'hyperbole*.

L'hyperbole est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant et supérieur à 1.

La droite d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ est la *directrice* relative au foyer F.

Le rapport constant $e = \frac{c}{a} > 1$ est l'*excentricité*.

A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier quelques propriétés des hyperboles analogues à celles des ellipses. Ces propriétés se déduisent de celles des ellipses en changeant b^2 en $-b^2$.

Ainsi la tangente à l'hyperbole au point M de coordonnées x et y a pour équation (comparer avec la relation 3.4.5.)

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0.$$

Il est aussi possible de mener deux tangentes de pente m à une hyperbole, lorsque $m^2 \geq \frac{b^2}{a^2}$. Les équations sont alors (comparer avec la relation 3.4.7.)

$$Y = mX \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}.$$

L'équation aux pentes des tangentes menées à l'hyperbole par un point P (x_1, y_1) est (comparer avec la relation 3.4.8.)

$$(x_1^2 - a^2) m^2 - 2 m x_1 y_1 + y_1^2 + b^2 = 0.$$

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes

C'est une application des formules de changement de coordonnées dans le plan (relations 2.3.2.).

Remarque 3.5.3. — En utilisant la deuxième définition de l'hyperbole et en appelant ρ le rayon vecteur MF et θ l'angle (Fx, FM), il est possible de trouver une équation polaire de l'hyperbole

$$\rho = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}.$$

Exercice 3.5.5. — Déterminer l'équation polaire de l'hyperbole.

Exercice 3.5.6. — Déterminer l'équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $5y^2 - 3x^2 + 2 = 0$, parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 3.5.7. — Déterminer l'équation de la normale à l'hyperbole $3y^2 - 2x^2 = 2$, perpendiculaire à la droite d'équation $3y - x = 9$.

Écrivons en effet l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ de l'hyperbole dans le système d'axes formé par les asymptotes OX et OY, en général non perpendiculaires (fig. 3.5.3).

Les formules de changement d'axes sont

$$x = p_1 X + p_2 Y, \quad y = q_1 X + q_2 Y,$$

en désignant par p_1, q_1 et p_2, q_2 les composantes suivant Ox et Oy des vecteurs unitaires u et v de OX et OY.

Désignons par α l'angle (Ox, OX) tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$. Nous en tirons $\cos \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \alpha = \frac{b}{c}$ puisque $c^2 = a^2 + b^2$. Il vient donc

$$p_1 = \frac{a}{c}, \quad q_1 = -\frac{b}{c}, \quad p_2 = \frac{a}{c}, \quad q_2 = \frac{b}{c}.$$

Les formules de changement d'axes s'écrivent

$$x = \frac{a}{c}(X + Y), \quad y = \frac{b}{c}(-X + Y).$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3.5.1.) de l'hyperbole, nous obtenons la nouvelle équation

$$(3.5.2.) \quad XY = \frac{c^2}{4}.$$

Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire lorsque les asymptotes sont orthogonales, l'hyperbole est dite *équilatère*.

Son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0,$$

ou

$$(3.5.3.) \quad x^2 - y^2 - a^2 = 0.$$

L'équation de l'hyperbole équilatère écrite dans le système d'axes orthogonaux formé par ses asymptotes est d'après (3.5.2.)

$$XY = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2}, \quad \text{puisque } c^2 = 2a^2.$$

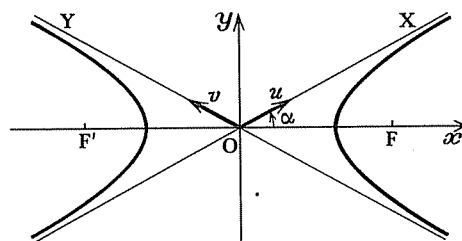


FIG. 3.5.3.

Exercice 3.5.8. — Montrer que le produit des distances d'un point M de l'hyperbole à ses asymptotes est constant et égal à $\frac{a^2 b^2}{c^2}$.

Remarque 3.5.4. — Les hyperboles équilatères se rencontrent fréquemment dans les applications pratiques. Ainsi, la loi de Mariotte pour l'étude des gaz parfaits s'écrit $pv = RT$, ou encore $v = \frac{RT}{p}$.

La courbe représentative du volume en fonction de la pression est une hyperbole équilatère à température constante.

Dans un autre domaine, l'hyperbole est la *trajectoire d'une particule* chargée repoussée par une particule fixe de même signe.

Équations paramétriques de l'hyperbole

L'équation de l'hyperbole (H)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à l'hyperbole (H), il faut, et il suffit, qu'il existe un nombre réel t tel que

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t,$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Remarque 3.5.5.**Autres équations paramétriques de l'hyperbole**

Soit l'équation de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette relation ressemble à

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

(cf. annexe 1, tome I).

Posons $\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t$ et $\frac{y}{b} = \operatorname{sh} t$, où x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque de la branche d'hyperbole définie par $x \geq 0$. Les équations

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases}$$

constituent un système d'équations paramétriques de la branche de l'hyperbole définie par $x \geq 0$. Nous utiliserons quelquefois d'autres systèmes d'équations paramétriques de cette branche d'hyperbole. Ainsi, nous déduisons

$$\begin{cases} x = a \frac{1+u^2}{1-u^2}, \\ y = \frac{2bu}{1-u^2}, \end{cases}$$

du précédent système grâce aux formules donnant $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$ en fonction de $\operatorname{th} \frac{t}{2}$ (analogues à celles de la trigonométrie).

Nous en déduisons la représentation paramétrique

$$(3.5.4.) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} a \left(t + \frac{1}{t} \right), \\ y = \frac{1}{2} b \left(t - \frac{1}{t} \right). \end{cases}$$

Une autre représentation de l'hyperbole se déduit de l'équation (3.5.1.), transformée en somme de carrés

$$\frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2},$$

soit

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En posant

$$\frac{a}{x} = \cos \varphi,$$

et

$$\frac{ay}{bx} = \sin \varphi,$$

nous obtenons

$$(3.5.5.) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{\cos \varphi}, \\ y = b \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

3.6. LA PARABOLE

Définition 3.6.1.

La **parabole** est le lieu géométrique des points du plan équidistants d'un point fixe, appelé **foyer**, et d'une droite fixe appelée **directrice**.

Nous choisissons des axes orthonormés tels que le foyer ait pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, et que la directrice ait pour équation $x = -\frac{p}{2}$ (fig. 3.6.1.).

La définition donnée ci-dessus, se traduit immédiatement par la relation

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

ce qui s'écrit sous la forme plus connue

$$(3.6.1.) \quad y^2 - 2px = 0.$$

C'est l'**équation de la parabole**. L'axe Ox est axe de symétrie et s'appelle l'axe focal de la parabole. Le point O est le **sommet** de la parabole.

D'autre part, toute équation du type

$$(3.6.2.) \quad x^2 - 2py = 0$$

est l'équation d'une parabole de foyer $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ et de directrice ayant pour équation $y = -\frac{p}{2}$ (faire la figure).

Nous allons maintenant voir quelques propriétés des paraboles.

Exemple 3.6.1.

Tangente en un point

Soit $M(x, y)$ un point quelconque de la parabole définie par l'équation (3.6.1.).

En différentiant (3.6.1.), nous avons

$$2y dy - 2p dx = 0.$$

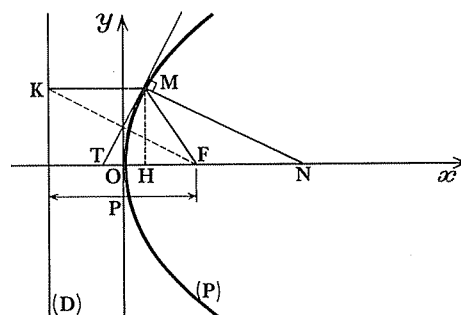


FIG. 3.6.1.

Remarque 3.6.1. — L'équation

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

représente une parabole d'axe horizontal, de sommet (x_0, y_0) .

Exercice 3.6.1. — Un point matériel se déplace dans le plan xOy et sa position est donnée par $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos 2 \omega t$. Montrer qu'il décrit un arc de parabole.

Exercice 3.6.2. — Établir les équations des paraboles suivantes :

- a) foyer (3, 0) et directrice $x = -3$,
- b) foyer (0, -2) et directrice $y = 2$,
- c) foyer (4, 2) et sommet (1, 2),
- d) sommet (0, 0) et directrice $y = 1$.

Exercice 3.6.3. — Déterminer le foyer, le sommet et la directrice des paraboles suivantes :

- a) $y^2 = -6x$, b) $8x = y^2$,
- c) $-y = 12x^2$, d) $12y = x^2$.

Exercice 3.6.4. — Montrer que le symétrique du foyer F par rapport aux tangentes à la parabole appartient à la directrice.

Exercice 3.6.5. — Déterminer les tangentes à la parabole d'équation $y^2 = 4x$

- a) de pente 1,
- b) passant par A (0, 2).

La pente de la tangente à la parabole en un point M quelconque de cette dernière est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

La tangente a ainsi pour équation, X et Y étant les coordonnées d'un point courant de cette tangente,

$$(Y - y) = \frac{p}{y}(X - x).$$

Or

$$y^2 = 2px.$$

Par suite, nous obtenons pour équation de la tangente en un point M quelconque

$$(3.6.3.) \quad Yy - p(X + x) = 0.$$

Tangente de pente donnée

Si la tangente doit avoir une pente donnée m , il en résulte

$$m = \frac{p}{y}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{p}{2m^2}.$$

L'équation (3.6.3.) se réduit à

$$(3.6.4.) \quad Y = mX + \frac{p}{2m}.$$

Contrairement à l'ellipse, l'hyperbole et le cercle, la parabole n'admet qu'une tangente de pente donnée.

Tangentes issues d'un point

D'après (3.6.3.), les tangentes menées par un point P (x_1 , y_1) sont telles que

$$y_1 = mx_1 + \frac{p}{2m}.$$

Les pentes m sont racines de l'équation du second degré

$$2x_1m^2 - 2y_1m + p = 0.$$

Pour que les tangentes soient réelles, il faut, et il suffit, que

$$y_1^2 - 2px_1 \geq 0,$$

c'est-à-dire que le point P doit être *extérieur* à la parabole.

Les tangentes sont rectangulaires, si le produit de leurs pentes $m_1 m_2$ est égal à -1 . Or,

$$m_1 m_2 = \frac{p}{2x_1} = -1.$$

Par suite, le lieu des points P tel que les tangentes à la parabole menées de ce point soient rectangulaires est la droite $x = -\frac{p}{2}$. C'est la directrice (D) ou l'axe des y dans la représentation de la figure (3.6.1.).

Normale à la parabole en un point

Sa pente est $-\frac{y}{p}$, d'où son équation

$$(3.6.5.) \quad p(Y - y) + y(X - x) = 0.$$

Exemple 3.6.2.

Dans les exemples que nous allons présenter, nous allons voir quelques *propriétés fondamentales de la tangente et de la normale*.

La tangente en M (x, y) (fig. 3.6.1.) coupe l'axe Ox en un point T d'abscisse X obtenu en faisant $Y = 0$ dans l'équation (3.6.3.), soit

$$x = \overline{OH} = -\overline{OT}.$$

Le sommet de la parabole est le milieu de la *sous-tangente* HT.

En faisant $Y = 0$ dans l'équation de la normale (3.6.5.), l'abscisse X du point N où la normale coupe Ox est

$$\| \text{ON} \| = x + p,$$

donc $\| \text{HN} \| = p$ (fig. 3.6.1.). HN est la *sous-normale*, de longueur constante, égale au paramètre p .

Nous apprendrons à chercher (tome IV, chapitre 1) des courbes à sous-tangente ou sous-normale constantes.

Exercice 3.6.6. — Déterminer le lieu des points d'intersection de deux tangentes à la parabole, perpendiculaires entre elles.

Exercice 3.6.7. — Soit K la projection d'un point M quelconque de la parabole d'équation (3.6.1.) sur la directrice (D) d'équation $x = -\frac{p}{2}$. Montrer que la médiatrice de KF est la tangente en M à la parabole.

3.7. NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES CONIQUES

L'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des *coniques*. Nous verrons au chapitre 5 que ce nom leur est donné car ces courbes sont des intersections de cônes avec des plans. Mais nous avons déjà vu que ces courbes pouvaient être définies de la même façon.

Définition 3.7.1.

Une *conique* est le lieu géométrique des points M tels que le rapport des distances à un point fixe F, appelé *foyer*, et à une droite (D), appelée *directrice*, est constant :

$$(3.7.1.) \quad \frac{\|MF\|}{\|MH\|} = e,$$

où e est l'*excentricité* et H la projection orthogonale de M sur (D).

Nous allons établir l'équation des coniques dans le cas où le foyer F est à l'origine O (fig. 3.7.1.). Soit (D) la directrice associée, d'équation normale

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - q = 0.$$

Nous avons, si M a pour coordonnées (x, y) ,

$$\|MO\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\|MH\| = |x \cos \alpha + y \sin \alpha - q|,$$

$$\text{soit} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = e |x \cos \alpha + y \sin \alpha - q|,$$

$$\text{ou encore} \quad x^2 + y^2 = e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - q)^2.$$

En développant et en ordonnant, nous obtenons

$$(3.7.2.) \quad (1 - e^2 \cos^2 \alpha) x^2 + (1 - e^2 \sin^2 \alpha) y^2 - 2 e^2 \cos \alpha \sin \alpha xy + 2 q \cdot e^2 \cos \alpha x + 2 q \cdot e^2 \sin \alpha y - e^2 \cdot q^2 = 0.$$

Cette équation est de la forme générale

$$(3.7.3.) \quad Ax^2 + 2 Bxy + Cy^2 + 2 Dx + 2 Ey + F = 0.$$

Nous obtiendrions encore une équation de cette forme si le foyer n'était pas à l'origine.

Réciproquement, nous voulons savoir si une équation du type (3.7.3.) représente une conique.

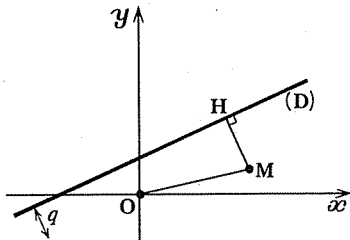


FIG. 3.7.1.

Nous allons d'abord montrer que l'équation (3.7.3.) peut en général se ramener à une équation de la forme

$$(3.7.4.) \quad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0,$$

après une translation d'axes convenable.

Si $T = x_0 i + y_0 j$ est le vecteur translation (fig. 3.7.2.) nous avons les relations suivantes entre les nouvelles coordonnées et les anciennes :

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0, & \text{ou encore} & \quad x = x' + x_0, \\ y' &= y - y_0, & & \quad y = y' + y_0, \end{aligned}$$

En reportant dans (3.7.3.), nous obtenons

$$A(x' + x_0)^2 + 2B(x' + x_0)(y' + y_0) + C(y' + y_0)^2 + 2D(x' + x_0) + 2Ey' + F = 0.$$

Soit

$$\begin{aligned} Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + (2Ax_0 + 2By_0 + 2D)x' \\ + (2Cy_0 + 2Bx_0 + 2E)y' + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 \\ + 2Ey_0 + F = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière relation est du type (3.7.4.) lorsque nous avons

$$(3.7.5.) \quad \begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0, \end{cases}$$

et que nous posons

$$(3.7.6.) \quad F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Le système (3.7.5.) admet pour solution

$$(3.7.7.) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{CD - EB}{B^2 - AC}, \\ y_0 = \frac{AE - DB}{B^2 - AC} \end{cases} \quad \text{si } B^2 - AC \neq 0.$$

En changeant x' en $-x'$ et y' en $-y'$, nous remarquons que l'équation (3.7.4.) reste inchangée. Le point ω de coordonnées (x_0, y_0) dans l'ancien système est donc **centre de symétrie** de la courbe.

Si nous notons $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (3.7.3.), nous voyons que la première équation de (3.7.5.) a pour premier membre la dérivée partielle première par rapport à x de $f(x, y)$ au point (x_0, y_0) . De même, la deuxième équation de (3.7.5.) a pour premier membre la dérivée partielle première par rapport à y de $f(x, y)$ au point (x_0, y_0) .

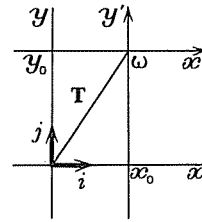


FIG. 3.7.2.

Remarque 3.7.1. — Dans le cas où l'équation (3.7.3.) ne présente pas de terme en xy , il suffit de compléter les carrés. En effet, l'équation

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

s'écrit

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} = 0.$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre

$$\omega\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right)$$

si A, C et $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$ sont strictement positifs (ou strictement négatifs).

C'est l'équation d'une hyperbole de centre

$$\omega\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right)$$

si A et C sont de signes contraires.

C'est l'équation d'une parabole si A ou C sont nuls.

Exercice 3.7.1. — Déterminer la nature des courbes d'équations

a) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0,$

b) $y^2 + 6x - 6y + 21 = 0,$

c) $x^2 + y^2 - 2ax + 2y + 2 = 0.$

Exercice 3.7.2. — Déterminer les centres de symétrie, s'ils existent, des courbes d'équations

- a) $x^2 - 2xy - y^2 - 12 = 0$,
 b) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 16y + 2 = 0$,
 c) $y^2 - 2xy + x^2 - 4x = 0$,
 d) $-5y^2 + 12xy + 48y - 36 = 0$.

Exercice 3.7.3. — Déterminer le centre de symétrie, s'il existe, de la courbe d'équation

$$x^2 + 2axy + y^2 - 2ax + 2y + 2 = 0,$$

où a est un paramètre réel.

Exercice 3.7.4. — Déterminer le lieu géométrique des centres des coniques d'équation

$$K^2y^2 - K(1 - K)xy + x^2 - aK^2y = 0$$

lorsque K varie.

Remarque 3.7.2. — Compte tenu des relations (3.7.5.), F' peut aussi s'écrire

$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F.$$

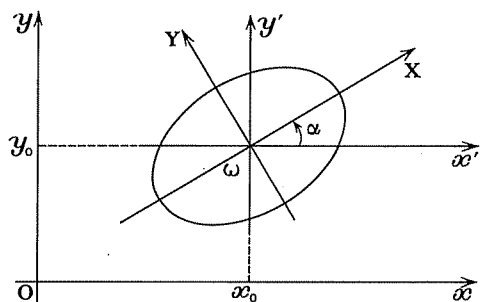


FIG. 3.7.3.

Exercice 3.7.5. — Un point matériel se déplace dans le plan xOy sous l'action d'un champ de forces $F = -kxi - kyj$. Montrer que sa trajectoire est en général une ellipse.

Remarque 3.7.3. — Si $F' = 0$, l'équation (3.7.8.) est l'équation de *deux droites* réelles quand $AC - B^2 < 0$.

De plus, F' est la valeur $f(x_0, y_0)$.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 3.7.1.

Soit l'équation

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si $B^2 - AC$ est différent de zéro, cette équation s'écrit sous la forme

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0,$$

où x' et y' désignent les coordonnées d'un point dans le système d'axes $x'Oy'$ translaté du premier.

Les coordonnées de ω , centre de symétrie de la courbe, sont les solutions du système

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

De plus, nous avons $F' = f(x_0, y_0)$.

Nous allons montrer que l'équation (3.7.4.) peut se ramener à une équation de la forme

$$(3.7.8.) \quad A'X^2 + B'Y^2 + F' = 0,$$

par une *rotation des axes* autour du centre ω .

Soit ωX et ωY les axes nouveaux déduits de $\omega x'$ et $\omega y'$ par rotation d'un angle α autour de ω (fig. 3.7.3.) Les formules de changement de coordonnées (2.3.4.) s'écrivent

$$\begin{aligned} x' &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y' &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{aligned}$$

La nouvelle équation de la conique s'écrit à partir de l'équation (3.7.4.) :

$$A(X \cos \alpha - Y \sin \alpha)^2 + 2B(X \cos \alpha - Y \sin \alpha)(X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + C(X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2 + F' = 0.$$

Pour que les termes en XY disparaissent, il faut, et il suffit, que

$$(C - A) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0.$$

Si l'on excepte le cas $A = C$, $B = 0$ où l'équation (3.7.3.) représente un cercle réel ou imaginaire (chapitre 4), l'angle α est défini par la condition

$$(3.7.9.) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}.$$

La nouvelle équation de la conique est alors de la forme

$$A'X^2 + C'Y^2 + F' = 0.$$

Les nouveaux coefficients A' , C' ont pour valeurs

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ C' &= A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

soit

$$A'C' = AC - B^2.$$

Si $AC - B^2 > 0$, A' et C' sont de même signe. L'équation (3.7.8.) est celle d'une *ellipse* si F' est positif.

Si $AC - B^2 < 0$, A' et C' sont de signes contraires. L'équation (3.7.8.) est celle d'une *hyperbole* si $F' \neq 0$.

Nous pouvons retrouver les résultats précédents à l'aide des matrices. Nous avons vu dans le tome III, chapitre 3, qu'une forme quadratique,

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

peut s'écrire

$$Q(x, y) = \lambda X^2 + \mu Y^2,$$

où λ et μ désignent les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Soit, dans notre cas, $Q(x', y') = Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont les solutions de l'équation

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0.$$

Ces racines sont réelles toutes deux (exercice). Plusieurs cas peuvent se présenter :

Exercice 3.7.6. — Déterminer la nature des courbes dont les équations sont données dans l'exercice (3.7.2.).

Exercice 3.7.7. — Discuter la nature des coniques $x^2 + 2axy + y^2 - 2ax + 2y + 2 = 0$.

Exercice 3.7.8. — Transformer l'équation donnée et tracer la conique dans les cas suivants :

a) $x^2 + xy + y^2 + 3y + 4 = 0$,

b) $2x^2 - 3xy + y^2 - 6x + 5y + 4 = 0$,

c) $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$,

d) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2(1 + \sqrt{3})x - 2(1 - \sqrt{3})y + 2 = 0$.

Déterminer l'aire s'il s'agit d'ellipses.

Exercice 3.7.9. — Nous réalisons pour un oscilloscope un signal abscisse $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi_1)$ et un signal ordonnée $y(t) = b \sin(\omega t + \varphi_2)$. Déterminer la trajectoire suivie par $M[x(t), y(t)]$.

Remarque 3.7.4. — Une conique est définie en général par *cinq* points car l'équation (3.7.3.) comporte six coefficients définis à un facteur près. Il existe une théorie des faisceaux de coniques prolongeant celle des faisceaux de droites ou de cercles.

Si (D_1) , (D_2) et (D_3) sont trois droites formant un triangle $M_1M_2M_3$ (fig. 3.7.4.). Les coniques circonscrites à ce triangle ont pour équation générale

$$\lambda_1 D_2 \cdot D_3 + \lambda_2 D_3 \cdot D_1 + \lambda_3 D_1 \cdot D_2 = 0.$$

Les coefficients λ_1 , λ_2 et λ_3 sont alors déterminés à un facteur près par deux conditions supplémentaires.

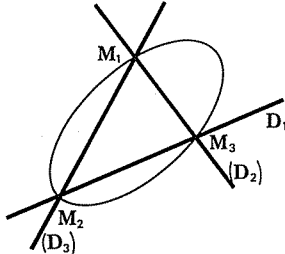


FIG. 3.7.4.

Exercice 3.7.10. — Déterminer l'équation de la conique passant par les cinq points $M_1 (1, 0)$, $M_2 (3, 0)$, $M_3 (0, 1)$, $M_4 (1, 3)$ et $M_5 (4, 4)$. Étudier la conique obtenue.

a) $AC - B^2 < 0$, les deux racines sont de signes contraires. L'équation (3.7.8.) est alors l'équation d'une *hyperbole*, si F' est non nul;

b) $AC - B^2 > 0$, les deux racines sont de même signe. L'équation (3.7.8.) est alors l'équation d'une *ellipse* si F' est positif.

Revenons au cas où $AC - B^2 = 0$. Le système (3.7.5.) est alors indéterminé si $CD = EB$ et impossible si $CD \neq EB$.

L'équation (3.7.3.) s'écrit dans le cas où $AC - B^2 = 0$ sous la forme

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

si A et C sont tous deux positifs

$$\text{ou} \quad (x\sqrt{-A} + y\sqrt{-C})^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

si A et C sont tous deux négatifs.

En posant

$$X = 2Dx + 2Ey + F,$$

$$Y = \sqrt{A}x + \sqrt{C}y \quad \text{ou} \quad Y = \sqrt{-A}x + \sqrt{-C}y,$$

nous obtenons

$$Y^2 = X.$$

C'est l'équation d'une *parabole*.

En résumé, l'équation (3.7.3.) représente

- une ellipse si $AC - B^2$ et F' sont positifs,
- une hyperbole si $AC - B^2$ est négatif et $F' \neq 0$,
- une parabole si $AC - B^2$ est nul et $D \times E \neq 0$,
- deux droites *sécantes* si $F' = 0$ et $AC - B^2 < 0$,
- deux droites *parallèles* (ou confondues), si

$$AC - B^2 = D \times E = 0.$$

L'équation se factorise alors sous la forme $D_1 \cdot D_2 = 0$ si les droites ont pour équations $D_1 = 0$ et $D_2 = 0$ (remarque 3.7.3.).

3.8. LES COURBES PARAMÉTRÉES DANS LE PLAN

Nous supposons le lecteur familiarisé avec l'étude et le tracé des courbes données sous forme explicite

$$y = f(x)$$

(cf. annexe 1 et paragraphes 1.6. et 1.7. du tome I).

Mais, il n'est pas toujours possible de transformer l'équation $h(x, y) = 0$ d'une courbe sous la forme dite résolue $y = f(x)$, et, même si cette opération est possible, l'étude du tracé de la courbe peut être très difficile.

D'autre part, de nombreuses courbes apparaissent directement sous forme paramétrique (en mécanique, par exemple, où le paramètre est souvent le temps).

Bien que nous ayons déjà rencontré de telles représentations au tome I et dans les paragraphes précédents de ce chapitre, rappelons qu'une *courbe paramétrée* est une courbe où l'abscisse, par exemple x , et l'ordonnée, par exemple y , sont données en fonction d'un *paramètre*. Ce paramètre peut être le temps t , un angle φ ou θ , etc.

Elle se présente soit sous la forme

$$(3.8.1.) \quad x = f(t), \quad y = g(t)$$

soit sous forme vectorielle

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

Donnons tout d'abord quelques exemples déjà rencontrés.

Exemple 3.8.1.

La ligne droite

Si α et β sont les cosinus directeurs d'une direction positive choisie sur la droite, la *représentation paramétrique* à l'aide d'un paramètre λ d'une droite passant par un point $M_0(x_0, y_0)$ est (cf. équation 3.1.9.)

$$(3.8.2.) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\lambda, \\ y = y_0 + \beta\lambda. \end{cases}$$

Le cercle

L'équation paramétrique d'un cercle de rayon R , centré en un point $\omega(x_0, y_0)$ est

$$(3.8.3.) \quad \begin{cases} x = x_0 + R \cos \theta, \\ y = y_0 + R \sin \theta. \end{cases}$$

L'ellipse

Les formules (3.4.4.) donnent une représentation d'une ellipse

Remarque 3.8.0. — Il est commode de tracer une courbe paramétrée sous la forme (3.8.1.) à l'aide d'un ordinateur muni d'une table traçante ou d'un écran cathodique. Il suffit de faire calculer les valeurs successives de $x(t)$ et $y(t)$ quand le paramètre t progresse suivant un *pas* h déterminé (fig. 3.8.0.) entre deux valeurs a et b .

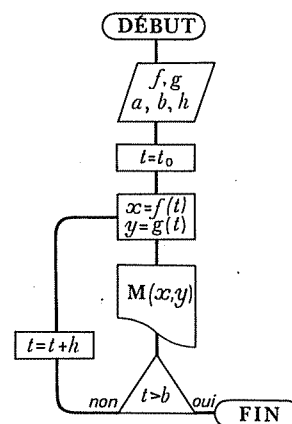


FIG. 3.8.0.

Remarque 3.8.1. — Nous avons vu que l'ellipse et l'hyperbole admettaient plusieurs représentations paramétriques simples. De manière générale, une même courbe admet une *infinité* de représentations paramétriques.

Exercice 3.8.1. — Établir l'équation cartésienne des courbes suivantes données par leur équation paramétrique :

a) $x = at^2, \quad y = a^2t^3,$

b) $x = \frac{at + b}{t + 1}, \quad y = \frac{ct + d}{t + 1},$

c) $x = a \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right), \quad y = b \sin 2t,$

d) $x = \frac{at^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1 + t^2}.$

Exercice 3.8.2. — Déterminer un système d'équations paramétriques pour les courbes suivantes :

- a) $y = x^4 + 1$,
 b) $y = \text{Log}(\text{Log } x)$,
 c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (poser $y = tx$).

Exercice 3.8.3. — Déterminer des représentations paramétriques de la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

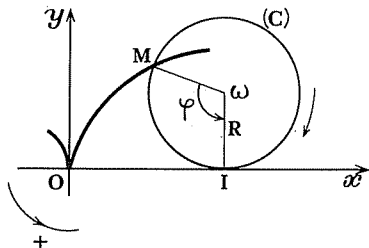


FIG. 3.8.1.

Exercice 3.8.4. — Une roue dentée de rayon r et de centre O' roule sans glisser à l'intérieur d'une roue dentée de rayon R et de centre O , considérée comme fixe. Montrer que les équations de la trajectoire d'un point M de la roue mobile sont

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{R - r}{r} \theta \right), \\ y = (R - r) \sin \theta + r \sin \left(\frac{R - r}{r} \theta \right), \end{cases}$$

si le point M est initialement en $M_0(R, 0)$.

Si $\frac{R}{r} = n$ avec n entier, la courbe s'appelle *hypocycloïde* à n rebroussements.

Si la petite roue roule à l'extérieur de la grande, la courbe s'appelle *épicycloïde* à n rebroussements.

Les équations sont alors

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos \left(\frac{R + r}{r} \theta \right), \\ y = (R + r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R + r}{r} \theta \right), \end{cases}$$

avec les mêmes conditions initiales.

centrée à l'origine des coordonnées

$$(3.8.4.) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$$

L'hyperbole

Nous avons vu qu'une représentation paramétrique de l'hyperbole (H) est

$$(3.8.5.) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta}, \\ y = b \operatorname{tg} \theta. \end{cases}$$

Exemple 3.8.2.

La cycloïde

Soit un cercle (C) de rayon R qui roule sans glisser sur une droite (D). Soit M un point de (C) lié à (C) (fig. 3.8.1.). La trajectoire de M s'appelle une *cycloïde*.

Au cours du mouvement de (C), il arrive que M soit sur D . Choisissons l'un de ces points comme origine et appelons-le O . Nous pouvons alors achever le repère orthonormé Oxy , tel que Ox soit porté par (D).

Nous voulons exprimer les coordonnées du point M , en fonction de l'angle $(\omega M, \omega I) = \varphi$.

Nous avons l'égalité vectorielle

$$(3.8.6.) \quad \mathbf{OM} = \mathbf{OI} + \mathbf{I\omega} + \mathbf{\omega M}.$$

Dans l'hypothèse du roulement sans glissement, nous avons

$$\overline{OI} = \widehat{IM} = R\varphi,$$

d'où

$$\mathbf{OI} = R\varphi \mathbf{i}.$$

De plus, nous pouvons calculer l'angle polaire de ωM , soit

$$(\mathbf{Ox}, \omega \mathbf{M}) = (\mathbf{Ox}, \omega \mathbf{I}) + (\omega \mathbf{I}, \omega \mathbf{M}),$$

$$(\mathbf{Ox}, \omega \mathbf{M}) = -\frac{\pi}{2} - \varphi.$$

$$\text{D'où} \quad \omega \mathbf{M} = R \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \mathbf{i} + R \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \mathbf{j},$$

soit $\omega \mathbf{M} = -R \sin \varphi \mathbf{i} - R \cos \varphi \mathbf{j}$.

D'autre part, $\mathbf{I}\omega = R \mathbf{j}$.

En appliquant (3.8.6), nous obtenons

$$\mathbf{OM} = R\varphi \mathbf{i} + R \mathbf{j} - R \sin \varphi \mathbf{i} + R \cos \varphi \mathbf{j}.$$

Comme $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

nous déduisons la représentation paramétrique

$$(3.8.7.) \quad \begin{cases} x = R(\varphi - \sin \varphi), \\ y = R(1 - \cos \varphi). \end{cases}$$

Premières remarques sur les courbes paramétrées

Soit une courbe paramétrée donnée par les équations

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$$

Nous noterons $\mathbf{M}(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ et $\mathbf{r}(t)$ le vecteur de composantes $(f(t), g(t))$.

Le premier travail est de chercher le **domaine de définition** des fonctions f et g .

Exemple 3.8.3.

Soit

$$x = \frac{t^2 + t - 2}{t(t - 2)}, \quad y = \frac{t^2 + t - 2}{t - 2}.$$

La fonction $x = f(t)$ n'est définie que pour $t \neq 0$ et $t \neq 2$. La fonction $y = g(t)$ n'est définie que pour $t \neq 2$.

Pour t tendant vers zéro, $f(t)$ tend vers l'infini, avec le signe de t alors que $g(0)$ vaut 1. La droite $y = 1$ sera donc asymptote.

Pour t tendant vers 2, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers l'infini, avec le signe de $t - 2$.

Ensuite, nous examinons si les **fonctions** sont **périodiques**, afin de réduire l'intervalle d'étude.

Remarque 3.8.2. — Rappelons qu'une fonction f est paire si $f(t) = f(-t)$ et qu'une fonction f est impaire si $f(-t) = -f(t)$ (tome I).

Exercice 3.8.5. — Déterminer l'intervalle d'étude des courbes paramétrées suivantes :

a) $x = at^2, \quad y = a^2t^3,$

b) $x = a \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right), \quad y = b \sin 2t,$

c) $x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t,$

d) $x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{1}{\sin t},$

e) $x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \quad y = \frac{at(1 - t^2)}{1 + t^2}.$

Exemple 3.8.4.

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \cos \frac{t}{3} + \sin \frac{t}{3}. \end{cases}$$

Nous avons

$$f(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi) = \cos t = f(t),$$

$$g(t + 6\pi) = g(t).$$

Donc le point $M(t + 6\pi)$ coïncide avec le point $M(t)$. Il suffit donc de faire varier t sur un intervalle de longueur 6π .

Enfin, nous étudions la *parité des fonctions* f et g . En effet, cette parité entraîne des symétries et donc une réduction de l'intervalle d'étude.

Plus précisément,

- si f et g sont impaires, la courbe est symétrique par rapport à O ,
- si f est impaire et g paire, la courbe est symétrique par rapport à Oy ,
- si g est impaire et f paire, la courbe est symétrique par rapport à Ox .

Exemple 3.8.5.

Soit la cycloïde de l'exemple (3.8.2.) d'équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin \varphi) = f(\varphi) \\ y &= R(1 - \cos \varphi) = g(\varphi) \end{aligned} \quad \text{avec } R > 0.$$

Les fonctions f et g sont toujours définies.

Remarquons que

$$\begin{aligned} f(\varphi + 2\pi) &= f(\varphi) + 2\pi R, \\ g(\varphi + 2\pi) &= g(\varphi). \end{aligned}$$

Le point $M(\varphi + 2\pi)$ se déduit donc du point $M(\varphi)$ par une translation $\mathbf{T} = 2\pi R\mathbf{i}$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π .

D'autre part, nous avons

$$f(-\varphi) = -f(\varphi), \quad g(-\varphi) = g(\varphi).$$

Exercice 3.8.6. — Quels sont les coefficients directeurs de la normale au point ordinaire $M(t)$ d'une courbe d'équations paramétriques, $x = f(t)$, $y = g(t)$?

La courbe est donc symétrique par rapport à Oy . Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$ par exemple.

Tangente

Nous avons vu au paragraphe 1.8. que si une courbe est donnée par un vecteur $\mathbf{r}(t)$, de vecteur dérivé $\mathbf{r}'(t_0)$ au point t_0 , alors la tangente à la courbe au point $M(t_0)$ a pour vecteur directeur $\mathbf{r}'(t_0)$, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Si les fonctions f et g sont dérivables, la tangente à la courbe en $M(t_0)$ admet donc pour vecteur directeur

$$(f'(t_0), g'(t_0)) \text{ si } f'(t_0) \text{ et } g'(t_0)$$

sont toutes deux non nulles.

Les points tels que les dérivées f' et g' sont non toutes deux nulles s'appellent des **points ordinaires**. L'équation de la tangente au point $M(t_0)$ est, si $(f'(t_0), g'(t_0)) \neq (0, 0)$

$$(3.8.8) \quad f'(t_0)(Y - g(t_0)) = g'(t_0)(X - f(t_0)).$$

Si la première s'annule seule, soit $f'(t_0) = 0$, la tangente est parallèle à Oy . Si la deuxième s'annule seule, soit $g'(t_0) = 0$, la tangente est parallèle à Ox .

Exemple 3.8.6.

Soit la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2 - t, \\ y = t^3. \end{cases}$$

Nous avons $x' = 2t - 1$, $y' = 3t^2$.

Tout point M de la courbe est point ordinaire.

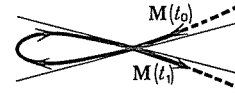
Au point $M\left(\frac{1}{2}\right)$, la tangente est parallèle à Oy et au point $M(0)$, la tangente est parallèle à Ox .

Nous allons maintenant étudier le cas des **points singuliers** (ou stationnaires), c'est-à-dire des points tels que $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$. Supposons que $\mathbf{r}(t)$ soit p fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert contenant t_0 et que nous ayons

$$\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}''(t_0) = \dots = \mathbf{r}^{(p-1)}(t_0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}^{(p)}(t_0) \neq \mathbf{0}.$$

Alors, nous pouvons écrire la formule de Taylor vectorielle qui se réduit à

Remarque 3.8.3. — Remarquons que nous pouvons avoir $M(t_0) = M(t_1)$ pour $t_0 \neq t_1$. Un tel point est dit **point double** (fig. ci-dessous). Cependant la tangente pour $t = t_0$ peut être différente de la tangente pour $t = t_1$. Pour cela, nous éviterons de parler de « tangente en M ».



Exercice 3.8.7. — Rechercher les points doubles de la courbe définie ci-dessous :

$$x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

Que peut-on dire des tangentes aux points doubles ?

Remarque 3.8.4. — Lorsque $M(t)$ est point ordinaire, il est facile d'étudier la convexité. En effet, la pente de la tangente à la courbe est $m(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = y'_x$.

Pour que la courbe soit convexe, il faut, et il suffit, que y''_x soit positive, ce qui signifie $f'(t) m'(t) \geq 0$, si m est dérivable.

Exercice 3.8.8. — Montrer que tout point de la courbe d'équations paramétriques $x^2 = t^2 \operatorname{Log} t$, $y = t (\operatorname{Log} t)^2$ est point ordinaire. Étudier la convexité.

Remarque 3.8.5. — La formule de Taylor-Young s'étend aux fonctions vectorielles. Soit $r(t)$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle $[t_0, t_0 + h]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Nous supposons que r admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre p . Si t est un point quelconque de l'intervalle $[t_0, t_0 + h]$, nous avons

$$r(t) = r(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} r'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} r''(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} [r^{(n)}(t_0) + \varepsilon(t)],$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$.

Exercice 3.8.9. — Déterminer le (ou les) point(s) singulier(s) des courbes dont les équations paramétriques sont données ci-dessous. Préciser la tangente en ce point.

a) $x = t^2 + \frac{2}{t}$, $y = t^2 + \frac{1}{t^2}$,

b) $x = 2e^t - t^2 - 2t$, $y = t^3$.

Exercice 3.8.10. — Déterminer le vecteur tangent en tout point de la courbe

$$\begin{aligned} x &= \cos 3t + 3 \cos t, \\ y &= \sin 3t + 3 \sin t. \end{aligned}$$

$$r(t) - r(t_0) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} (r^{(p)}(t_0) + \varepsilon(t)),$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$.

Cette égalité signifie que la droite $M(t_0)M(t)$ est parallèle au vecteur $r^{(p)}(t_0) + \varepsilon(t)$. Lorsque $M(t)$ tend vers $M(t_0)$ sur la courbe, la droite admet une position limite : elle devient parallèle au vecteur $r^{(p)}(t_0)$.

Si les fonctions f et g sont continûment dérivables jusqu'à l'ordre p et si p est le premier entier tel que

$$(f^{(p)}(t_0), g^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0),$$

la tangente en un point singulier $M(t_0)$ est parallèle au vecteur $(f^{(p)}(t_0), g^{(p)}(t_0))$.

Exemple 3.8.7.

Soit la courbe d'équations paramétriques

$$x = t^2, \quad y = t^2 - t^3.$$

Le vecteur dérivée $(2t, 2t - 3t^2)$ est nul pour $t = 0$. L'origine est donc point singulier.

Le vecteur dérivée seconde vaut $(2, 2)$ pour $t = 0$. Donc la tangente à l'origine est parallèle au vecteur $(2, 2)$.

Exemple 3.8.8.

Soit la cycloïde de l'exemple (3.8.2.). Nous avons

$$x'_\varphi = R(1 - \cos \varphi), \quad y'_\varphi = R \sin \varphi,$$

d'où

$$x'_\varphi = 0, \quad \text{pour } \varphi = 0,$$

$$y'_\varphi = 0, \quad \text{pour } \varphi = 0 \text{ et } \varphi = \pi.$$

Pour $\varphi = \pi$, la courbe admet une tangente horizontale.

Pour $\varphi = 0$, la courbe admet un point singulier. Le vecteur dérivée seconde $(R \sin \varphi, R \cos \varphi)$ n'est pas le vecteur nul. Il est égal à $(0, R)$. La tangente pour $\varphi = 0$ est donc verticale.

Forme au voisinage d'un point

Tout comme pour les fonctions d'une variable, il est intéressant de connaître la forme d'une courbe au voisinage d'un point, en particulier sa position par rapport à la tangente. Le lecteur débutant peut sauter cette rubrique et étudier directement les branches infinies.

Exemple 3.8.8. (suite)

Revenons sur la cycloïde. Pour $\varphi = 0$, la tangente est verticale. Nous voyons par symétrie que la courbe traverse sa tangente. Nous verrons plus loin qu'un tel point est un point de rebroussement de première espèce (fig. 3.8.2.).

Nous allons maintenant étudier le cas général.

Soit p le plus petit entier tel que $r^{(p)}(t_0) \neq 0$.

Soit $q > p$ le plus petit entier tel que $r^{(q)}(t_0)$ ne soit *ni nul ni parallèle à* $r^{(p)}(t_0)$. Donc pour tout $p \leq r < q$, $r^{(r)}(t_0)$ est nul ou colinéaire à $r^{(p)}(t_0)$. Ainsi $r^{(p)}(t_0)$ et $r^{(q)}(t_0)$ forment un *repère* que nous allons utiliser pour préciser la forme de la courbe.

Écrivons la formule de Taylor-Young en un point t du voisinage de t_0 :

$$(3.8.9) \quad r(t) - r(t_0) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} r^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^{p+1}}{(p+1)!} r^{(p+1)}(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^q}{q!} r^{(q)}(t_0) + \varepsilon(t),$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$.

Cette relation (3.8.9.) peut s'exprimer sous la forme

$$(3.8.10.) \quad r(t) - r(t_0) = X r^{(p)}(t_0) + Y r^{(q)}(t_0),$$

où X est de la forme $\frac{(t - t_0)^p}{p!} (1 + \alpha(t))$,

et Y est de la forme $\frac{(t - t_0)^q}{q!} (1 + \beta(t))$.

Les fonctions α et β tendent vers zéro lorsque t tend vers t_0 . Nous avons donc

$$X \sim \frac{(t - t_0)^p}{p!}, \quad Y \sim \frac{(t - t_0)^q}{q!}.$$

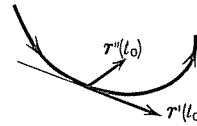


FIG. 3.8.2.

Remarque 3.8.6. — Le lecteur débutant retiendra simplement

- a) le *vecteur tangent* au point $M(t_0)$ est $r'(t_0)$, si ce vecteur n'est pas nul;
- b) par rapport à la tangente, la courbe est située dans le *demi-plan* contenant le vecteur $r''(t_0)$, si celui-ci n'est ni nul ni parallèle au précédent (fig. 3.8.2.);
- c) il y a en général un point d'*inflexion* pour $t = t_0$ lorsque $r''(t_0)$ est nul ou parallèle à $r'(t_0)$, soit

$$\begin{vmatrix} f'(t_0) & f''(t_0) \\ g'(t_0) & g''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque 3.8.7. — En fait, la formule (3.8.9.) se réduit à

$$(3.8.10.) \quad r(t) - r(t_0) = X r^{(p)}(t_0) + Y r^{(q)}(t_0)$$

en posant

$$X = \frac{(t - t_0)^p}{p!} \left[1 + \frac{(t - t_0)}{(p+1)!} \lambda_{p+1} + \dots + \frac{(t - t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!} \lambda_{q-1} + \frac{(t - t_0)^{q-p}}{q!} \varepsilon_X \right]$$

et $Y = \frac{(t - t_0)^q}{q!} (1 + \varepsilon_Y).$

où $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{q-1}$ désignent les composantes des vecteurs $r^{(p+1)}(t_0), \dots, r^{(q-1)}(t_0)$ par rapport à $r^{(p)}(t_0)$ et ε_X et ε_Y les composantes de ε par rapport à $r^{(p)}(t_0)$ et $r^{(q)}(t_0)$.

Exercice 3.8.11. — Effectuer les calculs ci-contre pour

a) $x = \frac{t^2}{(t-2)(t+1)}, y = \frac{t^2(t+2)}{t+1}$ pour $t = 0$,

b) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

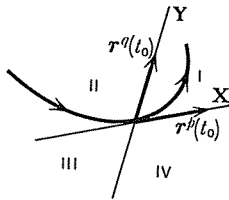


FIG. 3.8.3.

Exercice 3.8.12. — Soit la courbe d'équations paramétriques $x = te^t$, $y = \frac{e^t}{t}$. Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente.

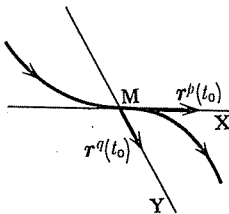


FIG. 3.8.4.

Exercice 3.8.13. — Déterminer les points d'inflexion, s'ils existent, de la courbe d'équations paramétriques

$$x = t^2 \operatorname{Log} t, \quad y = t (\operatorname{Log} t)^2.$$

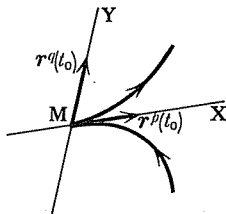


FIG. 3.8.5.

Remarque 3.8.8. — Un point ordinaire ($p = 1$) ne peut être un point de rebroussement.

Plusieurs cas peuvent alors se présenter.

- **Premier cas :** p impair et q pair (par exemple, $p = 1$ et $q = 2$).

Quand $|t - t_0|$ est assez petit, X a le signe de $t - t_0$ et Y est positif. La courbe est donc du même côté de la tangente que le vecteur $r^{(q)}(t_0)$, au voisinage de t_0 (fig. 3.8.3). Elle traverse la droite parallèle à $r^{(q)}(t_0)$ au point $M(t_0)$: c'est la forme courante.

Exemple 3.8.9.

Reprenons la cycloïde, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ par exemple.

Le vecteur dérivée seconde $(R, 0)$ n'est pas parallèle au vecteur dérivée première (R, R) . La courbe est donc du même côté de la tangente que le vecteur dérivée seconde (remarque 3.8.6.). Il en est de même pour $0 < \varphi < 2\pi$.

- **Deuxième cas :** p impair et q impair.

Quand $|t - t_0|$ est assez petit, X et Y ont le signe de $(t - t_0)$. La courbe traverse sa tangente et la droite parallèle à $r^{(q)}(t_0)$ passant par $M(t_0)$ (fig. 3.8.4.). Le point $M(t_0)$ est appelé un **point d'inflexion**.

Exemple 3.8.10.

Reprenons l'exemple (3.8.6.) page 165.

$$r'(t) = (2t - 1, 3t^2),$$

$$r''(t) = (2, 6t).$$

Les vecteurs $r'(t)$ et $r''(t)$ sont parallèles lorsque $t = 0$ et $t = 1$.

$$r^{(p)}(t) = (0, 6) \quad \text{pour tout } t.$$

Les points $M(0)$ et $M(1)$ sont donc des points d'**inflexion**.

- **Troisième cas :** p pair et q impair.

Quand $|t - t_0|$ est assez petit, X est positif et Y a le signe de $t - t_0$. La courbe traverse sa tangente, mais reste du même côté que la parallèle à $r^{(q)}(t_0)$ au point $M(t_0)$ (fig. 3.8.5.). Le point $M(t_0)$ est appelé un **point de rebroussement de première espèce**.

Exemple 3.8.11.

Reprenons l'exemple (3.8.7.).

Au point O , la tangente est parallèle au vecteur dérivée seconde

(2, 2). Le vecteur dérivée troisième en O est $(0, -6)$; il est non parallèle à la tangente en O. Donc O est un point de rebroussement de première espèce.

• *Quatrième cas : p pair et q pair.*

Quand $|t - t_0|$ est assez petit, X et Y sont tous deux positifs. La courbe reste d'un même côté de la tangente et de la parallèle à $r^{(q)}(t_0)$ au point M (t_0) (fig. 3.8.6.). Le point M (t_0) est appelé un **point de rebroussement de deuxième espèce**.

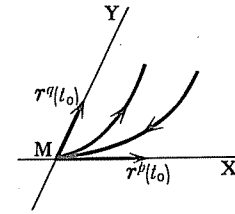


FIG. 3.8.6.

Exemple 3.8.12.

Soit la courbe d'équations paramétriques

$$x = e^{t-1} - t, \quad y = t^3 - 3t.$$

Nous avons

$$x' = e^{t-1} - 1, \quad y' = 3t^2 - 3.$$

Le point M (1) est donc point singulier. La tangente au point M (1) est parallèle au vecteur dérivée seconde $(1, 6)$. Remarquons que le vecteur dérivée troisième est aussi $(1, 6)$. Le vecteur dérivée quatrième est $(1, 0)$. Donc le point M (1) est un point de rebroussement de deuxième espèce.

Branches infinies

Nous pouvons étendre aux courbes paramétrées les définitions données pour les fonctions d'une variable (cf. annexe 1, tome I).

Ainsi, une courbe admet une **branche infinie** quand t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$), si la distance de M (t) à l'origine tend vers l'infini quand t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$). Cette notion est indépendante de l'origine choisie. Pour une courbe d'équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$, cela signifie que l'une au moins des fonctions f ou g tend vers l'infini quand t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$).

Nous énonçons sans démonstration le résultat sur lequel repose les recherches de branches infinies.

Exercice 3.8.14. — Déterminer les points particuliers des courbes de l'exercice (3.8.11.).

Remarque 3.8.8. — Détermination pratique des branches paraboliques et des asymptotes.

a) Si $f(t)$ a une limite finie x_0 lorsque t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$) et que $g(t)$ tend vers $\mp \infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote.

b) Si $g(t)$ a une limite finie y_0 lorsque t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$) et que $f(t)$ tend vers l'infini, la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote.

c) Si $f(t)$ et $g(t)$ tendent toutes deux vers l'infini,

nous formons le rapport $\frac{g(t)}{f(t)}$. Si ce rapport a pour limite 0 ou $\pm \infty$, la courbe admet une branche parabolique dans la direction de Ox ou de Oy respectivement. Si ce rapport a une limite finie et non nulle m , l'équation de la droite de pente m en un point $M(t)$ est

$$Y - g(t) = m(X - f(t)).$$

Il faut donc étudier la limite de $g(t) - mf(t)$ quand t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$). Si $g(t) - mf(t)$ tend vers l'infini, la courbe présente une branche parabolique dans la direction de pente m . Si $g(t) - mf(t)$ tend vers une limite h quand t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$), la courbe admet la droite d'équation $Y = mX + h$ comme asymptote.

Exercice 3.8.15. — Déterminer les branches infinies pour la courbe de l'exercice (3.8.11. a).

Théorème 3.8.1.

Pour qu'une courbe admette une direction asymptotique quand t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$), il faut, et il suffit, ou bien, que $\frac{g(t)}{f(t)}$ tende vers une limite finie m et la direction asymptotique a alors pour pente m , ou bien, que $\frac{g(t)}{f(t)}$ tende vers l'infini et la direction asymptotique est l'axe Oy .

Tout comme pour les fonctions d'une variable, la courbe peut admettre alors une **asymptote** : c'est le cas lorsque la droite de direction asymptotique m , menée par un point $M(t)$ de la courbe, tend vers une position limite lorsque t tend vers t_0 (ou $\pm \infty$). Si, au contraire cette droite s'éloigne à l'infini, la courbe présente une **branche parabolique**.

Nous allons voir sur un exemple comment déterminer pratiquement s'il y a une branche parabolique ou une asymptote.

Exemple 3.8.13.

Reprenons la courbe (C) de l'exemple (3.8.4.) d'équations paramétriques

$$(3.8.10.) \quad x = \frac{t^2 + t - 2}{t(t-2)}, \quad y = \frac{t^2 + t - 2}{(t-2)}.$$

Des problèmes se posent lorsque t tend vers $\pm \infty$ et lorsque $t = 0$ ou $t = 2$.

Lorsque t tend vers $\pm \infty$, x tend vers 1 et y tend vers $\pm \infty$.

La courbe admet la droite $x = 1$ comme asymptote.

La différence $x - 1 = \frac{3t - 2}{t^2 - 2t}$ est du signe de t à l'infini. Donc la courbe est à droite de son asymptote quand y tend vers $+\infty$ et à gauche quand y tend vers $-\infty$.

Lorsque t tend vers 0, y tend vers 1 et x tend vers l'infini avec le signe de t .

La droite $y = 1$ est asymptote à la courbe. La différence

$$y - 1 = \frac{t^2}{t-2}$$

est négative lorsque t tend vers zéro. La courbe est au-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers l'infini.

Lorsque t tend vers 2^+ , x tend vers $+\infty$ et y vers $+\infty$.

Lorsque t tend vers 2^- , x tend vers $-\infty$ et y vers $-\infty$.

Le rapport $\frac{y}{x} = t$ a pour limite 2.

La courbe admet donc 2 comme direction asymptotique lorsque t tend vers 2.

Formons la différence

$$y - 2x = \frac{t^2 + t - 2}{t}.$$

Elle tend vers 2 lorsque t tend vers 2. Il y a donc une asymptote d'équation

$$y = 2x + 2.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par la différence

$$y - 2x - 2 = \frac{(t-2)(t+1)}{t}.$$

Cette différence a le signe de $t - 2$ quand t tend vers 2. Donc la courbe est au-dessus de son asymptote quand x tend vers $+\infty$ et au-dessous lorsque x tend vers $-\infty$.

La courbe coupe son asymptote oblique en un point A. Pour déterminer le paramètre t pour lequel $M(t) = A$ nous écrirons l'égalité $y = 2x + 2$ à l'aide de l'expression paramétrique de x et y . Nous obtenons l'équation du troisième degré

$$t^3 - 3t^2 + 4 = 0$$

de racines évidentes $t = -1$ et $t = 2$. Il est évident que seule la valeur $t = -1$ convient.

Les coordonnées de A sont alors $x = -\frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

Construction des courbes paramétrées

Pour construire une courbe paramétrée définie par les équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, nous adopterons le plan suivant.

- Recherche du domaine de définition de f et g .
- Recherche du domaine d'étude. Les propriétés de périodicité,

Exercice 3.8.16. — Soit un segment de longueur a , dont l'extrémité H avance sur l'axe Ox, tandis que le point M tourne à chaque instant. On pose $x = \overline{OH}$ et $\theta = (\overline{Hx}, \overline{HM})$. Déterminer x en fonction de θ pour que la trajectoire de M soit tangente au segment à tout instant (avec $x = 0$ quand $\theta = \frac{\pi}{2}$). On obtient la *tractrice*, rencontrée dans le mouvement d'une voiture qui se gare le long d'un trottoir (l'axe Ox) (fig. 3.8.7).

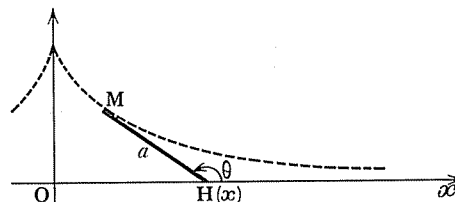


FIG. 3.8.7.

Exercice 3.8.17. — Étudier la courbe paramétrée définie par les équations

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t + \frac{1}{2t^2}.$$

Exercice 3.8.18. — On considère le lieu géométrique $(\mathcal{C})$ du point M, intersection de la droite verticale (Δ) telle que $\overline{HA} = t$, et de la droite (Δ') passant par O, d'angle polaire $\alpha = \frac{\pi t}{2}$ (fig. 3.8.8.). Déterminer les équations paramétriques de la courbe $(\mathcal{C})$. Montrer que l'équation cartésienne est $y = \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$. Soit un point N de $(\mathcal{C})$, d'angle polaire θ , et M le point de $(\mathcal{C})$ tel que $AH = \frac{1}{3} AK$. Montrer que l'angle polaire α de M est le tiers de θ : cette construction revient à la trisection de l'angle θ . La courbe $(\mathcal{C})$ s'appelle *trisectrice*.

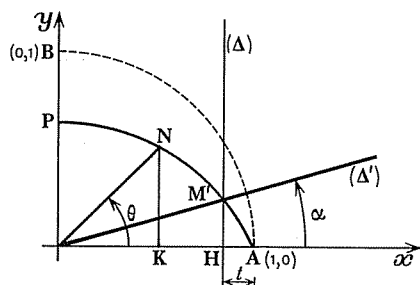


FIG. 3.8.8.

Exercice 3.8.19. — Construire la courbe d'équations paramétriques

$$x = \cos t, \quad y = \sin t (1 + \cos t).$$

Exercice 3.8.20. — Construire la courbe appelée *folium de Descartes* définie par les équations paramétriques

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

de parité, de symétrie permettent parfois d'étudier la courbe sur un domaine plus petit que les domaines de définition de f et g .

c) Étude du sens de variation de f et g , en précisant les maximums ou les minimums de f et g .

d) Détermination des points remarquables (intersection avec les axes, points singuliers, points d'inflexion, points doubles), et des tangentes en ces points.

e) Étude des branches infinies éventuelles.

f) Tracé de la courbe.

Exemple 3.8.13. (suite)

Nous allons achever la construction de la courbe définie dans l'exemple (3.8.13.)

$$x = \frac{t^2 + t - 2}{t(t-2)}, \quad y = \frac{t^2 + t - 2}{t-2}.$$

Nous avons déjà déterminé son domaine de définition (exemple 3.8.3.). Les fonctions f et g ne sont ni périodiques, ni paires, ni impaires.

Étudions les variations de f et de g

$$x'_t = f'(t) = \frac{-3t^2 + 4t - 4}{t^2(t-2)^2},$$

$$y'_t = g'(t) = \frac{t(t-4)}{(t-2)^2}.$$

Nous en déduisons le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
x'_t	—	—	—	—	—
x	$1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow +1$		
y	$-\infty \rightarrow 1$	$1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow +\infty$	
y'_t	+	0	—	—	0

Les points d'intersection avec Ox ou avec Oy s'obtiennent en cherchant les solutions de

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

puisque x et y ont même numérateur.

Nous obtenons $t = 1$ et $t = -2$. L'origine des coordonnées est donc point double. La courbe a deux tangentes à l'origine

$$T_1 = (-3, -3) \quad \text{et} \quad T_{-2} = \left(-\frac{7}{16}, \frac{12}{16}\right).$$

Comme x_t ne s'annule jamais, tout point de la courbe est point ordinaire. Il n'y a pas de point d'inflexion.

Il ne reste qu'à tracer la courbe (fig. 3.8.9.).

Exemple 3.8.14.

Reprenons la cycloïde de l'exemple (3.8.5.)

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi).$$

Nous avons vu qu'il suffisait de l'étudier sur $[0, \pi]$ (exemple 3.8.5.).

Comme $x'_\varphi = R(1 - \cos \varphi)$, $y'_\varphi = R \sin \varphi$, nous pouvons dresser le tableau de variations suivant :

φ	0	π
x'_φ	0	+
x	0	πR
y	0	$2R$
y'_φ	0	+

Tout point entre 0 et π est point ordinaire. La pente de la tangente entre 0 et π est

$$m(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \cotg \frac{\varphi}{2}.$$

Donc

$$m'(\varphi) = -\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

D'après la remarque (3.8.4.), nous en déduisons que la courbe est concave entre 0 et π .

La courbe ne présentant pas de branches infinies, il ne reste qu'à la tracer (fig. 3.8.10.).

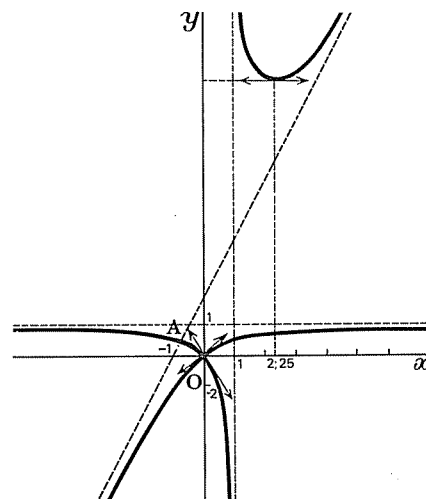


FIG. 3.8.9.

Exercice 3.8.21. — Étudier l'hypocycloïde de l'exercice (3.8.4.) lorsque $R = 4$ et $r = 1$. Ses équations paramétriques sont alors

$$x = 4 \cos^3 \theta, \quad y = 4 \sin^3 \theta.$$

Exercice 3.8.22. — Étudier la courbe paramétrée d'équations

$$x = \sin \frac{t}{3}, \quad y = \sin \frac{t}{2}.$$

C'est une *courbe de Lissajous*.

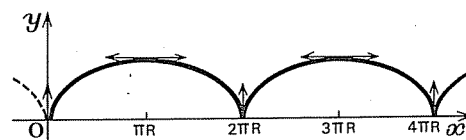


FIG. 3.8.10.

3.9. COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES

Nous avons déjà rencontré des courbes définies par leur équation polaire, en particulier les coniques dont le foyer était choisi comme pôle (cf. remarque 3.5.3.). Nous allons donner quelques autres exemples classiques avant d'étudier ces courbes en détail.

Exemple 3.9.1.

Équation d'une droite ne passant pas par le pôle.

Une telle droite (D) admet pour équation cartésienne

$$Ax + By + C = 0, \text{ avec } C \neq 0.$$

Remplaçons x et y par leur expression en fonction des coordonnées polaires ρ, θ , soit $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$.

Nous obtenons

$$A\rho \cos \theta + B\rho \sin \theta + C = 0,$$

soit

$$(3.9.1) \quad \rho = \frac{-C}{A \cos \theta + B \sin \theta}.$$

Exemple 3.9.2.

Limaçon de Pascal.

Soit (C) un cercle de diamètre a , O un point fixe du cercle (C) et b une longueur donnée ($b > 0$) (fig. 3.9.1.). Toute droite (D) passant par O recoupe le cercle (C) en un point P. Désignons par M et M' les points de (D) dont la distance à P est b . Si la droite (D) est tangente en O au cercle, les points M et M' sont aussi définis de la manière précédente. L'ensemble des points M et M' s'appelle un *limaçon de Pascal*.

Nous allons chercher à trouver une relation entre les coordonnées de M, c'est-à-dire l'équation de la courbe. Choisissons O comme pôle et OA, où A désigne le point diamétralement opposé à O, comme axe polaire. Notons $\theta = (Ox, Ou)$, où Ou est l'axe porté par OP. Nous avons alors $\overline{OP} = a \cos \theta$, puisque P appartient au cercle de diamètre OA.

Si M appartient au limaçon de Pascal, nous avons

$$\overline{OM} = \overline{OP} + b,$$

Exercice 3.9.1. — Établir directement l'équation polaire d'une droite.

Exercice 3.9.2. — Déterminer l'équation polaire d'un cercle passant par le pôle, sachant les coordonnées polaires (R) du centre.

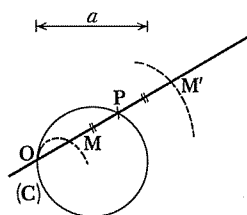


FIG. 3.9.1.

Remarque 3.9.1. — Les équations polaires sont très utiles pour l'étude des *came*s et *excentriques*, car le déplacement horizontal de la tige (fig. 3.9.2.) est fonction de l'angle de rotation de la came.

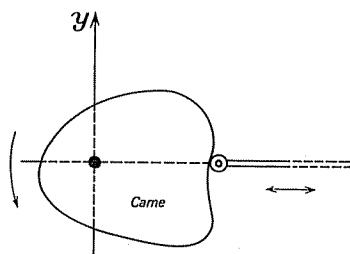


FIG. 3.9.2.

soit

$$(3.9.2.) \quad \rho = a \cos \theta + b.$$

Nous allons maintenant étudier les courbes définies par leur équation polaire $\rho = f(\theta)$. Elles peuvent évidemment se traiter comme des courbes paramétrées d'équations $x = f(\theta) \cos \theta$, $y = f(\theta) \sin \theta$. Toutefois, cette méthode n'est pas forcément la plus simple.

Intervalle d'étude

Après avoir cherché le domaine de définition de $\rho = f(\theta)$, nous étudierons la périodicité de la fonction f , ce qui permettra de réduire l'intervalle d'étude à une période.

Nous chercherons ensuite les symétries éventuelles de la courbe pour réduire l'intervalle de variation. Ainsi, si la fonction est paire ou vérifie $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à Ox. Par contre, si la fonction est impaire ou vérifie $f(\pi - \theta) = f(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à Oy. La courbe est symétrique par rapport à O

si $f(\theta + n\pi) = f(\theta)$, avec n impair

ou si $f(\theta + n\pi) = -f(\theta)$ avec n pair.

Exemple 3.9.3.

Reprenons le limaçon de Pascal $\rho = a \cos \theta + b$. ρ ne change pas lorsque θ augmente de 2π . Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π . ρ ne change pas non plus lorsque θ est changé en $-\theta$. La courbe est symétrique par rapport à Ox. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur π , par exemple $[0, \pi]$ et de compléter par symétrie.

Tangente en un point

Soit $M(\theta)$ le point de coordonnées (ρ, θ) de la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$. Nous allons supposer dans la suite la fonction f dérivable.

Avec les notations précisées sur la figure 3.9.3., nous avons

$$OM(\theta) = \rho u.$$

Exercice 3.9.3. — Déterminer l'intervalle d'étude pour

a) $\rho = a \sin 2\theta$,

b) $\rho = a \cos 3\theta$,

c) $\rho = \frac{a}{\sin \frac{\theta}{2}}$

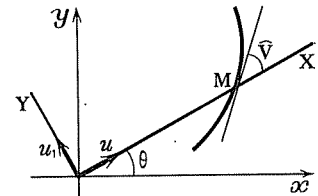


FIG. 3.9.3.

En appliquant les résultats du paragraphe 2.7., nous obtenons

$$\frac{d \mathbf{OM}(\theta)}{d\theta} = \rho'_\theta \mathbf{u} + \rho \mathbf{u}_1,$$

avec

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

et

$$\mathbf{u}_1 = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

Exercice 3.9.4. — Déterminer quelques points avec leur tangente pour la courbe

$$\rho = 1 + \cos \theta.$$

Nous pouvons donc exprimer dans le repère orthonormé $(O, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$ la pente de la tangente en $M(\theta)$, soit

$$(3.9.3.) \quad \operatorname{tg} \hat{V} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{\rho}{\rho'_\theta}$$

où $\hat{V}$ désigne l'angle de la tangente en $M(\theta)$ avec la droite portée par $\mathbf{u}$.

Si $f'(\theta) = 0$, la tangente est parallèle au vecteur $\mathbf{u}_1$ en ce point $M(\theta)$.

Si $f(\theta)$ s'annule pour une valeur θ_0 , la courbe passe par le pôle. La tangente est alors la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.

Exemple 3.9.4.

Soit le limaçon de Pascal $\rho = a \cos \theta + b$, $\rho'_\theta = -a \sin \theta$.

La pente de la tangente en un point $M(\theta)$, lorsque θ est compris strictement entre 0 et π , est

$$\operatorname{tg} V = \frac{a \cos \theta + b}{-a \sin \theta}.$$

Remarquons que selon les valeurs de a et b , différents cas particuliers peuvent se présenter

$$a) \quad \rho = 0, \text{ si } -1 \leq -\frac{b}{a} \leq 1, \text{ soit } b \leq a.$$

La tangente est alors la droite d'équation polaire $\theta_0 = \operatorname{Arc} \cos -\frac{b}{a}$.

$$b) \quad \rho = 0 \text{ et } \rho'_\theta = 0 \text{ si } b = a.$$

La tangente est alors Ox. Un tel point $M(\theta)$ est un point singulier.

Branches infinies

L'étude des branches infinies comporte trois cas principaux.

a) ρ tend vers l'infini pour une valeur finie θ_0 .

La courbe admet une branche infinie de direction asymptotique OX, telle que $(Ox, OX) = \theta_0$ (fig. 3.9.4.). Pour déterminer l'asymptote éventuelle, nous utiliserons les coordonnées de M (θ) dans le repère OXY

$$X = \rho \cos(\theta - \theta_0), \quad Y = \rho \sin(\theta - \theta_0).$$

Quand θ tend vers θ_0 , X tend vers $\pm \infty$.

Si Y tend vers $\pm \infty$, la courbe admet une branche parabolique dans la direction de OX₀.

Si Y tend vers une limite l , la droite d'équation $Y = d$ est asymptote.

b) ρ tend vers l'infini avec θ .

Nous dirons alors que la courbe admet une *branche spirale* (fig. 3.9.5.).

c) ρ tend vers une limite finie lorsque θ tend vers l'infini.

Nous dirons alors que la courbe admet un *cercle asymptote* (fig. 3.9.6.).

Tracé des courbes en coordonnées polaires

Le tracé des courbes en polaires nécessite toujours de savoir si ρ s'annule. Nous ne donnerons pas de plan précis de l'étude. Le lecteur cherchera à préciser les points précédemment énoncés.

Exemple 3.9.5.

Achevons l'étude du limaçon de Pascal dans le cas $b < a$.

Nous pouvons dresser le tableau de variation à partir des résultats des exemples (3.9.3.) et (3.9.4.) :

θ	0	θ_0	π
ρ'_θ		—	
ρ	$a + b$	$\rightarrow 0$	$-a + b$

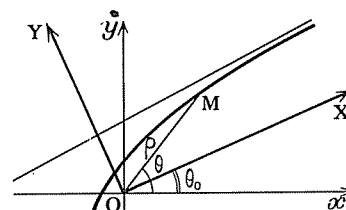


FIG. 3.9.4.

Exercice 3.9.5. — Étudier les branches infinies pour les courbes

- $\rho = \frac{1}{\cos 2\theta}$,
- $\rho = \theta$,
- $\rho = 1 + e^{-\theta}$,
- $\rho = 1 + \tan \frac{\theta}{2}$.

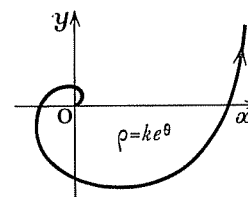


FIG. 3.9.5.

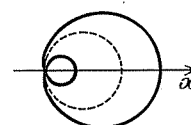


FIG. 3.9.6.

Exercice 3.9.6. — Préciser l'étude du limaçon de Pascal $\rho = a \cos \theta + b$ dans les cas où $b \geq a$. Si $b = a$, la courbe est une *cardioïde*.

Remarquons que p est positif, puis négatif. Il est souvent important pour le tracé des courbes données par leur équation polaire de faire cette remarque.

3.10. ENVELOPPES DES COURBES PLANES

Nous avons vu dans les paragraphes précédents qu'un *point* M vérifiant une propriété $\mathcal{P}$, décrivait en général une courbe (C) , lieu géométrique de M . Nous allons étudier dans ce paragraphe les *courbes* astreintes à vérifier une propriété $\mathcal{P}$. Elles restent, en général, *tangentes à une courbe fixe* (E) .

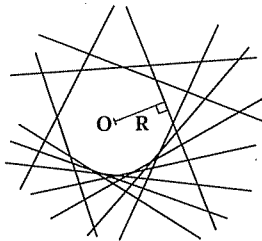


FIG. 3.10.1.

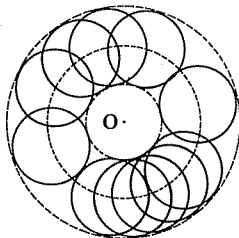


FIG. 3.10.2.

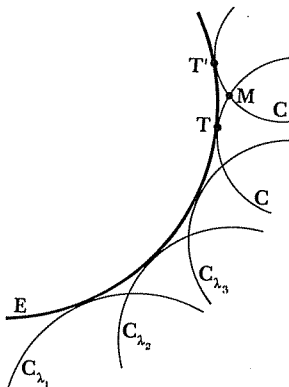


FIG. 3.10.3.

Exemple 3.10.1.

Soit une droite (D) astreinte à rester à une distance donnée R d'un point fixe O . Il est facile de voir que (D) reste tangente au cercle de centre O et de rayon R (fig. 3.10.1.).

Exemple 3.10.2.

Soit un cercle (O) de centre fixe O et de rayon R donné. Le centre ω d'un cercle (ω) de rayon r ($r < R$) décrit le cercle de centre O et de rayon R .

Le cercle (ω) reste tangent aux cercles de centre O et de rayons respectifs $R + r$ et $R - r$ (fig. 3.10.2.).

Considérons maintenant une famille de courbes planes (C_λ) dépendant d'un paramètre λ et définies par l'équation générale

$$(3.10.1.) \quad F(x, y, \lambda) = 0,$$

dans laquelle λ désigne un paramètre arbitraire.

A chaque valeur donnée de λ , correspond une courbe, et une seule. En faisant varier λ , nous obtenons des courbes (C_{λ_1}) , (C_{λ_2}) , (C_{λ_3}) (fig. 3.10.3.).

Définition 3.10.1.

Nous appellerons *enveloppe* des courbes (C_λ) , une courbe (E) , si elle existe, à laquelle toute courbe (C_λ) est tangente en un ou plusieurs points. Les points de tangence sont dits *points caractéristiques*.

Désignons par (C) et (C') les courbes de la famille obtenues respectivement pour les valeurs λ et $\lambda + \Delta\lambda$ du paramètre. Les coordonnées des points communs sont les racines communes aux deux équations.

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= 0, \\ F(x, y, \lambda + \Delta\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons garder la première équation et remplacer la seconde par la suivante :

$$(3.10.2.) \quad \frac{F(x, y, \lambda + \Delta\lambda) - F(x, y, \lambda)}{\Delta\lambda} = 0$$

lorsque $\Delta\lambda$ est non nul.

Le point $M = (C) \cap (C')$ est une approximation du point de contact T quand $\Delta\lambda$ tend vers zéro.

Lorsque $\Delta\lambda$ tend vers zéro, les deux courbes se confondent. De plus, nous avons

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x, y, \lambda + \Delta\lambda) - F(x, y, \lambda)}{\Delta\lambda} = 0.$$

La limite figurant à gauche est la dérivée partielle par rapport à λ de la fonction F.

Donc, la condition (3.10.2.) devient

$$(3.10.3.) \quad F'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Les quelques remarques précédentes permettent d'énoncer un théorème dont la démonstration est donnée ci-dessous.

Théorème 3.10.1.

L'équation de l'enveloppe (E) d'une famille de courbes d'équation $F(x, y, \lambda) = 0$ s'obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$F(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad F'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Marquons sur chaque courbe (C_λ) le point caractéristique M de coordonnées

$$(3.10.3.) \quad x = f(\lambda), \quad y = g(\lambda),$$

les fonctions f et g admettant des dérivées f' et g' . Nous devons avoir

$$F[f(\lambda), g(\lambda), \lambda] = 0.$$

Remarque 3.10.1. — Considérons une famille de rayons lumineux issus d'un système optique. L'enveloppe de ces rayons est une ligne très éclairée qui s'appelle une *caustique*. La figure (3.10.4.) montre le cas d'un faisceau parallèle incident à un miroir sphérique (dans un plan diamétral). Le faisceau réfléchi admet une enveloppe (c'est une *néphroïde*).

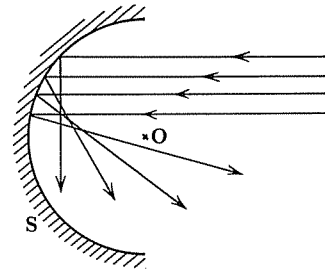


FIG. 3.10.4.

Remarque 3.10.2. — Le lieu (Σ) obtenu par élimination de λ entre les équations (3.10.1.) et (3.10.3.) comprend aussi le lieu géométrique des *points singuliers*, s'il en existe, des courbes (C). En un tel point, nous avons, en effet,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que la pente de la tangente à la courbe $F(x, y, \lambda) = 0$ est indéterminée.

Ainsi la condition (3.10.5.) est satisfaite sans qu'il y ait contact entre la courbe (C) et la courbe définie par les équations paramétriques (3.10.3.).

La figure (3.10.5.) montre d'ailleurs que les points singuliers sont des points *caractéristiques* de lieu (S) tout comme les points où une courbe (C) touche son enveloppe (E).

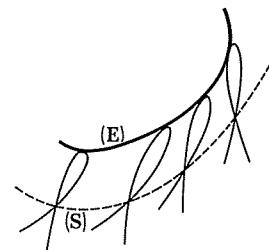


FIG. 3.10.5.

Remarque 3.10.3. — On obtient parfois la courbe enveloppe sous forme paramétrique, soit $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$. Si, quel que soit le paramètre λ , la courbe (C_λ) passe par un ou plusieurs points fixes, ces points font partie du lieu considéré à la remarque 3.10.2. En effet pour l'un quelconque d'entre eux, $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont invariables, donc $\frac{dx}{d\lambda} = 0$ et $\frac{dy}{d\lambda} = 0$ et la condition (3.10.5.) est encore vérifiée.

En dérivant par rapport à λ on obtient

$$(3.10.4.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Comme la courbe (C_λ) et l'enveloppe sont tangentes en M , ce contact s'exprime par la relation

$$(3.10.5.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} = 0.$$

En effet $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont coefficients directeurs de la normale à la courbe (C_λ) $F(x, y, \lambda) = 0$, puisque

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

exprime l'orthogonalité d'un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ avec le vecteur infinitésimal tangent (dx, dy) .

De même $\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$ sont les coefficients directeurs du vecteur tangent à l'enveloppe d'où la relation (3.10.5.) qui, avec (3.10.4.), entraîne (3.10.2.).

Exemple 3.10.3.

Enveloppe des droites d'équation

$$y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda},$$

où λ est un paramètre variable.

$$\text{Nous avons } F(x, y, \lambda) = y - \lambda x - \frac{p}{2\lambda} = 0.$$

Calculons la dérivée partielle par rapport à λ

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = -x + \frac{p}{2\lambda^2} = 0,$$

d'où

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Exercice 3.10.1. — Trouver l'enveloppe de la droite $x \cos \theta + y \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta$.

Exercice 3.10.2. — Exprimer en fonction de t les coordonnées du point caractéristique de la droite

$$t^3(x - a) + 3tx - 2y = 0.$$

Former l'équation cartésienne de l'enveloppe.

Exercice 3.10.3. — Chercher l'enveloppe des droites AB d'un repère orthonormé, telles que

$$OA \cdot OB = K^2$$

si A est l'intersection de la droite avec Ox et B l'intersection avec Oy .

En portant dans l'équation de la famille de droites, nous'obtenons

$$y = \pm 2 \sqrt{\frac{px}{2}},$$

où $y^2 = 2 px.$

L'enveloppe est une parabole.

Exemple 3.10.4.

Soit un projectile lancé avec une vitesse v_0 sous un angle α .

En négligeant la résistance de l'air, la trajectoire est une parabole (fig. 3.10.6.). Lorsque l'angle de tir varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ces paraboles changent de position. Quelle est l'enveloppe de ces paraboles (*paraboles de tir*) ?

L'équation de la trajectoire d'un tel projectile (cf. remarque 0.2.2., tome IV) est

$$y + \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à α est

$$\frac{gx^2}{v_0^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{x}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

Elle s'annule pour $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$

En portant dans l'équation générale des paraboles de tir, nous éliminons l'angle α et nous obtenons l'enveloppe cherchée

$$y = -\frac{gx^2}{2 v_0^2} + \frac{v_0^2}{2 g}.$$

C'est une parabole (fig. 3.10.6.).

Nous venons de voir des problèmes où la famille de courbes dépend d'un paramètre.

Or, aux paragraphes 3.3. à 3.6., nous avons vu des familles de courbes dépendant de deux paramètres

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

dans laquelle a et b sont des fonctions d'un paramètre λ .

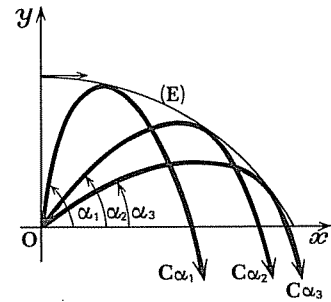


FIG. 3.10.6.

Exercice 3.10.4. — Déterminer les caustiques (remarque 3.10.1.) obtenues par réflexion d'un faisceau parallèle dans

- a) un miroir sphérique,
- b) un miroir parabolique (faisceau incident parallèle à l'axe).

Exercice 3.10.5. — Déterminer l'enveloppe de la tige MP dans le dispositif de la figure 3.4.5.

Exemple 3.10.5.

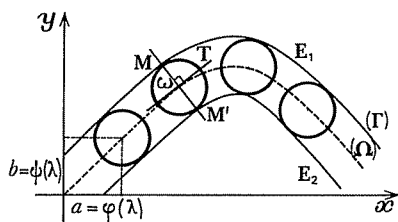


FIG. 3.10.7.

Remarque 3.10.4. — Les courbes (C_λ) sont parfois connues sous forme paramétrique :

$$x = u(t, \lambda), \quad y = v(t, \lambda).$$

On montre (exercice) que l'enveloppe s'obtient en adjoignant à ces équations la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 3.10.6. — Démontrer le résultat de la remarque (3.10.4.).

Exercice 3.10.7. — Déterminer l'enveloppe des ellipses (E_λ) d'équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= a(\cos \lambda + \cos \varphi), \\ y &= b(\sin \lambda + \sin \varphi), \end{aligned}$$

(a et b constants).

Considérons les cercles (C) (fig. 3.10.7.), de rayon R , dont les centres ω de coordonnées a et b ont pour représentations paramétriques

$$a = \varphi(\lambda), \quad b = \psi(\lambda).$$

Ils ont pour équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Nous obtiendrons l'enveloppe en éliminant λ entre cette équation et l'équation dérivée

$$\varphi'(\lambda)(x - a) + \psi'(\lambda)(y - b) = 0.$$

Cette équation dérivée est celle d'une droite qui passe constamment par le centre ω du cercle (C) correspondant et qui est normale au lieu de ω en chacun de ses points (fig. 3.10.5.).

Les deux branches de l'enveloppe s'obtiennent en portant de part et d'autre de ω , les longueurs constantes $\omega M = \omega M' = R$ sur la normale en ω à la courbe Ω lieu de ce point. Ces courbes sont appelées *courbes parallèles* à (Ω) .

On aurait pu également considérer des cercles de rayon variable $R = \chi(\lambda)$. On aurait de la même façon obtenu une enveloppe se composant de deux branches.

Nous allons examiner de façon plus générale les *enveloppes à deux paramètres*.

Soit donc les courbes d'équation générale

$$(3.10.6.) \quad F(x, y, a, b) = 0$$

lorsque les deux paramètres a et b sont liés par une relation

$$(3.10.7.) \quad G(a, b) = 0.$$

On suppose que a et b sont fonctions d'un paramètre λ tel que

$$G[\varphi(\lambda), \psi(\lambda)] = 0.$$

On obtient l'enveloppe en éliminant λ entre les équations

$$F[x, y, \varphi(\lambda), \psi(\lambda)] = 0,$$

$$F'_a \varphi'(\lambda) + F'_b \psi'(\lambda) = 0.$$

Mais d'après l'équation (3.10.7.) on a aussi

$$G'_a \varphi'(\lambda) + G'_b \psi'(\lambda) = 0.$$

Il revient alors au même d'éliminer a et b entre les relations (3.10.6.), (3.10.7.) et la relation

$$(3.10.8) \quad \frac{F'_a}{G'_a} = \frac{F'_b}{G'_b}.$$

On peut aussi se trouver confronté au problème inverse suivant, à savoir, chercher la relation (3.10.7.) qui doit exister entre a et b pour que l'enveloppe ait une *forme donnée à l'avance*, soit

$$(3.10.9) \quad H(x, y) = 0.$$

Pour trouver cette relation entre a et b , on calcule $\frac{dx}{dy}$ dans les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy = 0.$$

En égalant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$, soit

$$(3.10.10) \quad \frac{H'_x}{H'_y} = \frac{F'_x}{F'_y},$$

et en éliminant x et y entre (3.10.6.), (3.10.9.) et (3.10.10.), on obtient la relation cherchée du type (3.10.7.) entre a et b .

Exemple 3.10.6.

Un exemple très important se rencontre dans la *commande numérique* d'une fraiseuse. On suppose que la fraise travaille dans un plan horizontal (P) pour tailler un profil de forme donnée (Γ). Les diverses positions de la fraise déterminent dans (P) une famille de cercles ($C_{a,b}$) de centres $\omega(a, b)$, et de même rayon R . Le problème consiste à trouver la trajectoire (Ω) du centre ω connaissant l'enveloppe (Γ) des cercles (fig. 3.10.7.). D'après l'exemple (3.10.3.), on obtient ω en portant une longueur R sur la normale en M à (Γ). Une fois trouvée la trajectoire (Γ), on programme l'avancement de la fraise par pas suivant les techniques propres à la *commande numérique*.

La méthode n'est possible que si le rayon de courbure à (Γ) reste supérieur à R , ce qui nous amène au paragraphe suivant.

Remarque 3.10.5. — Prenons le cas d'une famille de droites (D) d'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

lorsque les coordonnées tangentielles u et v sont liées par une relation

$$(3.10.11.) \quad f(u, v) = 0.$$

L'équation cartésienne $F(x, y) = 0$ de cette enveloppe s'obtient en éliminant u et v entre les deux relations précédentes et

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v}.$$

L'équation (3.10.11.) est l'équation tangentielle de la courbe enveloppe.

Exercice 3.10.8. — Soit une échelle de longueur l placée contre un mur vertical. Si l'on fait glisser le pied de l'échelle sur le plan horizontal, elle prend dans l'espace différentes positions dont nous cherchons l'enveloppe.

L'échelle matérialise les droites d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = l^2.$$

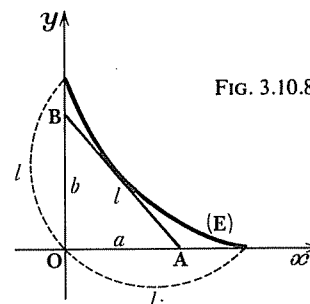


FIG. 3.10.8.

Exercice 3.10.9. — On dispose d'une fraise de rayon 2 cm pour creuser dans une plaque un profil semi elliptique. Le demi grand axe de l'ellipse mesure 5 cm, le demi petit axe 3 cm. Déterminer une trajectoire pour le centre ω de la fraise.

3.11. COURBURE ET DÉVELOPPÉE DES COURBES PLANES

Nous allons présenter *diverses expressions du rayon de courbure* utilisables facilement dès que l'on connaît en coordonnées rectangulaires une représentation paramétrique ou polaire de la courbe étudiée.

Soit M et M' deux points infiniment voisins sur une courbe plane donnée (C) . Les tangentes en M et M' , orientées dans le même sens de parcours sur la courbe, font entre elles un angle ε appelé *angle de contingence* (fig. 3.11.1.).

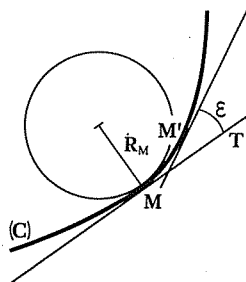


FIG. 3.11.1.

Définition 3.11.1.

On appelle *courbure moyenne* de l'arc MM' le rapport

$$\frac{\varepsilon}{\text{arc } MM'}$$

et *courbure* de la courbe (C) au point M la limite de ce rapport, si elle existe quand M' tend vers M . On appelle *rayon de courbure* l'inverse de la courbure.

L'interprétation de cette définition est facile si l'on considère un *cercle* de rayon R . En effet pour un cercle de rayon R on a

$$\text{arc } MM' = R\varepsilon.$$

Par suite,

$$\frac{\varepsilon}{\text{arc } MM'} = \frac{1}{R}.$$

Si la courbe est un cercle, la courbure moyenne est égale à $\frac{1}{R}$ quels que soient les points M et M' .

Si la courbe n'est pas un cercle, on peut confondre l'arc correspondant de la courbe (C) avec un arc de cercle de rayon R_M qui est le rayon de courbure cherché de la courbe (C) au point considéré (fig. 3.11.1.).

Vectoriellement soit t le vecteur unitaire tangent à la courbe (C) au point M . Nous avons vu (remarque 1.8.3.) un résultat général, à savoir, que si une courbe (C) est représentée par la fonction vectorielle $r(s)$ où s est la *longueur* de l'arc de courbe (C) prise à partir d'une origine M_0 , le vecteur *unitaire tangent* à (C) est

$$(3.11.1.) \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \left\| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right\|^{-1}$$

Le vecteur $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}$ est un vecteur porté par la *normale* en M à la courbe (C), de vecteur unitaire $\mathbf{n}$, puisque $\mathbf{t}^2 = 1$ entraîne $\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$.

Nous allons voir que le module de ce vecteur est égal à la *courbure* de la courbe (C) en M, soit

$$(3.11.2.) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R(s)}.$$

En effet associons au point M l'extrémité m du vecteur $\mathbf{Om}$ d'origine O équipollent au vecteur unitaire $\mathbf{t}$ de la demi-tangente MT (fig. 3.11.2.).

Le lieu géométrique du point m est un cercle de centre O. Le vecteur $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ est la limite du vecteur $\frac{\mathbf{mm}'}{\Delta s}$. Son module est égal au rapport $\frac{d\alpha}{ds}$ où $d\alpha$ est la mesure de l'arc mm' qui n'est autre que l'angle de contingence ε .

Ainsi si l'on connaît la courbe par la fonction vectorielle $\mathbf{r}(s)$, où s est l'*abscisse curviligne* à partir d'un point M_0 de la courbe choisi comme référence, la *courbure en un point M d'abscisse curviligne s* est

$$(3.11.3.) \quad \frac{1}{R(s)} = \left\| \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \right\| = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}}.$$

Cette formule restera valable dans l'espace (cf. chapitre 5).

Exemple 3.11.1.

Nous avons vu (remarque 1.8.3.) que la représentation d'un cercle de rayon R peut s'écrire

$$\mathbf{r}(s) = R \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} + R \sin \frac{s}{R} \mathbf{j},$$

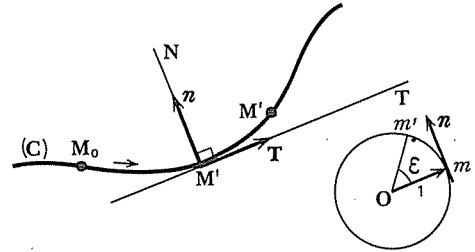


FIG. 3.11.2.

Remarque 3.11.1. — Une courbe n'est pas, en général, paramétrée par la variable s , abscisse curviligne. Cependant les calculs ci-contre seront utiles et permettront le calcul de R quel que soit le paramètre t .

d'où
$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} - \frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}.$$

Par suite,

$$\|\mathbf{r}''(s)\| = \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} = -\cos \frac{s}{R} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}.$$

Cependant cette formule n'est simple à utiliser que si l'on a trouvé la fonction vectorielle $\mathbf{r}(s)$ représentant la courbe (C).

On se propose de calculer le rayon de courbure en un point d'une courbe (C) définie dans un repère orthonormé par les équations paramétriques : $x = f(t)$, $y = g(t)$.

Si nous désignons par α l'angle défini à $k\pi$ près que fait avec Ox la tangente en M, et par s la longueur de l'arc $\widehat{M_0M}$ sur la courbe (C) (fig. 3.11.3.), il en résulte que le rayon de courbure, inverse de la courbure, est

$$(3.11.4.) \quad R = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|.$$

Or d'après le paragraphe 4.4., tome I,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Par suite,
$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} |dt|, \quad \alpha = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y'}{x'},$$

soit

$$d\alpha = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} dt.$$

Il en résulte l'expression suivante pour le rayon de courbure :

$$(3.11.5.) \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

Dans le cas particulier où la courbe (C) est définie par une équation explicite

$$y = F(x)$$

la formule (3.11.4.) se réduit à la forme

$$(3.11.6.) \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

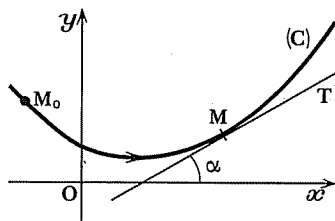


FIG. 3.11.3.

Exercice 3.11.1. — Montrer que la courbure d'une ligne droite est identiquement nulle.

Montrer que la courbure d'un cercle de rayon a est égale à $\frac{1}{a}$.

Exercice 3.11.2. — Déterminer le rayon de courbure aux sommets d'une ellipse d'équations

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

On trouve $R_1 = \frac{b^2}{a}$ aux sommets A et A',

$$R_2 = \frac{a^2}{b} \quad \text{aux sommets B et B'}.$$

En traçant les *cercles de courbure* en chaque sommet, on obtient une bonne approximation du tracé de l'ellipse (faire le dessin pour $a = 5$, $b = 3$).

Enfin si la courbe est définie par une équation polaire

$$\rho = \varphi(\theta)$$

on a $x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$

Il en résulte en prenant pour paramètre l'angle θ que

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2, \quad \text{avec} \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\theta},$$

$$x'y'' - y'x'' = \rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho'', \quad \text{avec} \quad \rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2},$$

soit, pour le rayon de courbure

$$(3.11.7.) \quad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''|}.$$

Centre de courbure

On appelle *centre de courbure* de la courbe (C) au point M, le point ω où la normale en M (x, y) touche son enveloppe (fig. 3.11.4.).

Supposons la courbe (C) définie paramétriquement, la normale a pour équation

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0.$$

Pour avoir le point ω , nous devons, d'après la théorie des enveloppes, adjoindre à cette équation l'équation dérivée par rapport à t , que l'on peut écrire

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' = x'^2 + y'^2.$$

En résolvant par rapport à $(X - x)$ et $(Y - y)$, nous obtenons pour les coordonnées X et Y du centre de courbure ω les expressions

$$(3.11.8.) \quad X - x = y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''},$$

$$(3.11.9.) \quad Y - y = x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

La distance du point M au centre de courbure ω est égale au rayon de courbure. Le calcul de

$$\|M\omega\|^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 = R^2$$

à partir des formules (3.11.8.) et (3.11.9.) redonne le résultat.

Exercice 3.11.3. — Montrer qu'en désignant par ω le centre de courbure au point M de la conique

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad (p > 0)$$

et par N le point où la normale en M coupe l'axe Ox, les segments $M\omega = R$, $MN = h$ comptés positivement le long de la même direction sur la normale vérifient la relation $R = \frac{h^3}{p^2}$.

Exercice 3.11.4. — Soit M le point d'abscisse x sur l'hyperbole équilatère $xy = k^2$, calculer les coordonnées X et Y du centre de courbure ω correspondant.

Montrer que si la normale en M coupe l'hyperbole en un autre point N, et si P désigne le point de cette normale tel que l'angle MOP = $\frac{\pi}{2}$ on a

$$\overline{M\omega} = -\overline{MP} = -\frac{1}{2}\overline{MN}.$$

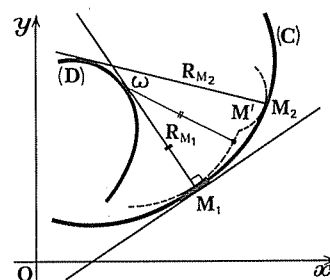


FIG. 3.11.4.

Exercice 3.11.5. — Coordonnées du centre de courbure (ω) de la chaînette

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

Développées d'une courbe plane

Exercice 3.11.6. — Former l'équation cartésienne de la développée de la parabole $y^2 = 2px$. Étudier l'intersection de la parabole avec sa développée. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes.

Exercice 3.11.7. — Même exercice pour l'arche de cycloïde :

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi), \end{cases}$$

avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Remarque 3.11.2. — Si (Ω) est la développée d'une courbe (Γ_0) , (Γ_0) est une *développante* de la courbe (Ω) . Toutes les courbes (Γ) parallèles à (Γ_0) sont aussi des développantes de (Ω) . Les développantes de cercles se rencontrent dans le profil des dents d'engrenages.

Définition

On appelle *développée* d'une courbe plane, la *courbe enveloppe de ses normales*, ou le lieu géométrique de ses centres de courbure (fig. 3.11.4.).

Si la courbe (C) a pour équations paramétriques

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

sa développée (D) a pour équations, avec le même paramètre, les équations qui s'écrivent d'après les relations (3.11.8.) et (3.11.9.)

$$X = f(t) - g'(t) \frac{f''(t) + g'^2(t)}{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)} = F(t),$$

$$Y = g(t) + f'(t) \frac{f''(t) + g'^2(t)}{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)} = G(t).$$

3.12. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

3.12.1. — Soit un prisme dont la section droite est le triangle OAB (fig. 3.12.1.). Le prisme est constitué par une matière transparente, d'indice de réfraction $n = 1,5$. Un rayon incident au prisme est porté par la droite (D) d'équation $x = d$, où d est un paramètre réglable compris entre 0 et 4. Le rayon arrivé en I sur la face AB se réfracte suivant la loi de Descartes $\sin i = n \sin r$.

1° Déterminer une condition sur d pour que le rayon réfracté sorte en J par la face OA.

2° Déterminer alors l'abscisse X du point K où le rayon émergeant JK rencontre l'écran d'équation $y = -3$.

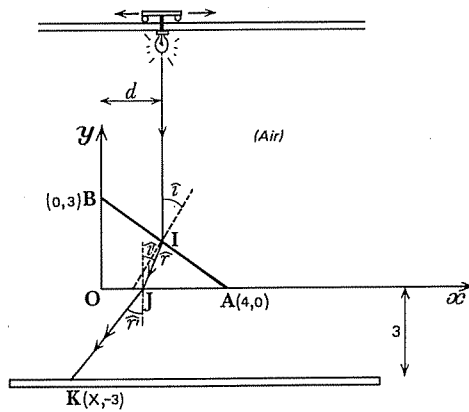


FIG. 3.12.1.

3.12.2. — Dédurre de la propriété (a) de l'inversion $\mathcal{I}_{O,\mu}$ (paragraphe 3.3.) que la distance des inverses M' et N' de deux points M et N est

$$\|M'N'\| = |\mu| \cdot \frac{\|MN\|}{\|OM\| \cdot \|ON\|}.$$

Montrer alors la condition de *Ptolémée* pour qu'un quadrilatère ABCD (de diagonales AC et BD) soit inscriptible dans un cercle :

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + CD \cdot AB.$$

3.12.3. — 1° Démontrer que la puissance d'un point M d'une ellipse par rapport au cercle principal est proportionnelle au carré de sa distance au grand axe.

2° Montrer que la longueur de la tangente menée du point M au cercle secondaire est proportionnelle à sa distance au petit axe.

3° En déduire une construction d'une ellipse, connaissant deux points de la courbe et soit le cercle principal, soit le cercle secondaire.

3.12.4. — Démontrer qu'une ellipse et une hyperbole de mêmes foyers se coupent à angle droit.

3.12.5. — Écrire l'équation de la normale au point M (t) de l'ellipse d'équations paramétriques

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t.$$

3.12.6. — Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales orthogonales à une parabole.

3.12.7. — Construire une épicycloïde (cf. exercice 3.8.4.) dans le cas où $R = 4$, $r = 1$. Les équations sont alors

$$\begin{aligned} x &= 5 \cos \theta - \cos 5\theta, \\ y &= 5 \sin \theta - \sin 5\theta. \end{aligned}$$

3.12.8. — Étudier la courbe paramétrée définie par les équations

$$a) \quad x = \frac{t+2}{t^2-1}, \quad y = \frac{t-5}{(t-3)(t-1)},$$

$$b) \quad x = \frac{t}{\text{Log } t}, \quad y = \frac{t^2}{4 \text{ Log } t}.$$



Nombres et fonctions complexes.

4.0. INTRODUCTION

De même que les vecteurs, les nombres complexes constituent un *outil* pour l'étude de la géométrie plane. Cependant, les nombres complexes présentent des différences importantes par rapport aux vecteurs. Ainsi, ils pourront se multiplier et se *diviser* très commodément et, bien évidemment, s'additionner comme nous le verrons.

Alors nous pourrons effectuer les mêmes calculs élémentaires qu'avec les nombres réels, résoudre des équations dont l'inconnue sera un nombre complexe, etc.

Nous en déduirons des méthodes très efficaces pour traiter de nombreux problèmes physiques et géométriques. Nous utiliserons tout au long de ce chapitre le plan ($\mathcal{P}$) muni d'un repère orthonormé (O, u, v) (*fig. 4.1.1.*) et non plus (O, i, j) comme dans les chapitres précédents à cause du symbole imaginaire pur. A l'occasion de ce changement, les étudiants s'entraîneront à ne pas être tributaires d'une notation donnée.

Remarque 4.0.1. — L'idée des nombres complexes remonte au début du XVI^e siècle. On la rencontre déjà dans les travaux de *J. Cardan* (1501-1576) pour la résolution d'équations impossibles du type $x^2 + 1 = 0$. Ce sont les « nombres impossibles » du type $\sqrt{-1}$, appelés aussi nombres imaginaires, ou encore nombres complexes.

4.1. DÉFINITION DES NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes se définissent à partir des nombres réels comme en témoigne la définition suivante, dont nous allons montrer l'aspect géométrique.

Remarque 4.1.0. — Il y a plusieurs façons de repérer un point M dans le plan (fig. 4.1.1.) : le « code » abscisse a et ordonnée b , le « code » module r et argument θ , etc. Le nombre complexe z est en fait la donnée des différents moyens de repérer le point M , le point de départ étant le couple (a, b) de la définition 4.1.1.

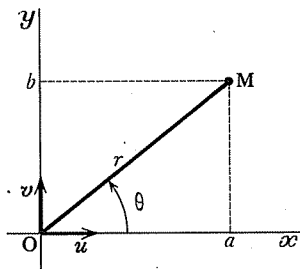


FIG. 4.1.1.

Définition 4.1.1.

Nous appelons **nombre complexe**, noté z , un couple ordonné de deux nombres réels a et b quelconques.

Nous écrivons $z = (a, b)$.

Exemple 4.1.1.

$$z = (1, 2), z' = \left(-1, \frac{4}{5}\right) \text{ et } z'' = (\sqrt{3}, \sqrt{5})$$

sont des nombres complexes.

Nous voyons immédiatement que les nombres complexes servent à repérer les points du plan ($\mathcal{P}$), voir remarque 4.1.0.

Le nombre $z = (a, b)$ représente les coordonnées a et b d'un point M du plan tel que

$$(4.1.1.) \quad \mathbf{OM} = au + bv$$

et réciproquement (fig. 4.1.1.). Pour cette raison, le plan ($\mathcal{P}$) est souvent appelé **plan complexe**. Nous dirons que le point M est l'**image** du nombre complexe z et que z est l'**affiche** du point M . Ce dernier terme désigne simplement le couple abscisse-ordonnée (a, b) du point M .

Cette interprétation géométrique permet de voir que l'égalité de deux nombres complexes $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ est équivalente aux égalités des nombres réels $a = a'$ et $b = b'$.

Module et argument

Connaître le nombre complexe $z = (a, b)$, c'est connaître son image M ou encore le vecteur $\mathbf{OM} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}$. Cependant le point M peut aussi être repéré dans le plan ($\mathcal{P}$) par les deux grandeurs suivantes :

$$r = \|\mathbf{OM}\| \text{ appelé module,}$$

$$\theta = (\mathbf{u}, \mathbf{OM}) \text{ appelé argument}$$

du vecteur $\mathbf{OM}$, défini à 2π près. Nous dirons que r et θ sont le module et l'argument du nombre complexe z d'image M .

Remarque 4.1.1. — Le module $r = \|\mathbf{OM}\|$ d'un nombre complexe z d'image M , est un nombre positif. Les coordonnées polaires du point M sont constituées par le rayon vecteur $\rho = \pm r$ et par l'argument θ à 2π près.

Remarque 4.1.2. — Le module des nombres complexes suit les mêmes propriétés que la valeur absolue des nombres réels. En particulier

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\ |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nous noterons $|z|$ le module du nombre complexe z et $\arg(z)$ son argument, soit

$$(4.1.2.) \quad \begin{cases} |z| = r, \\ \arg(z) = \theta. \end{cases}$$

Il est facile de calculer les coordonnées a et b à partir du module r et de l'argument θ , grâce aux relations

$$(4.1.3.) \quad \begin{cases} a = r \cos \theta, \\ b = r \sin \theta, \\ r \geq 0 \end{cases}$$

et réciproquement grâce aux relations

$$(4.1.4.) \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \cos \theta = \frac{a}{r}, \\ \sin \theta = \frac{b}{r}. \end{cases}$$

L'angle θ peut être déterminé à l'aide de tables trigonométriques, ou bien à l'aide d'une machine possédant la fonction Arc tg (voir la remarque 4.1.3. et l'organigramme 4.1.2.).

Exemple 4.1.2.

Le nombre complexe $z = (1, 1)$ a pour module $r = \sqrt{2}$ et pour argument $\theta = \frac{\pi}{4}$. $z' = (-1, 1)$ a pour module $r' = \sqrt{2}$ et pour argument $\theta' = \frac{3\pi}{4}$ (fig. 4.1.3.).

La connaissance de a et b équivaut à celle de r et θ , aussi nous désignerons parfois le nombre complexe $z = (a, b)$ par $[r, \theta]$ entre crochets.

Exemple 4.1.3.

Dans l'exemple (4.1.2.), le nombre complexe $z = (1, 1)$ peut être désigné par $\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$, le nombre complexe $z' = (-1, 1)$ par $\left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Remarque 4.1.3. — Des relations (4.1.4.) se déduisent l'égalité $\text{tg } \theta = \frac{b}{a}$ et un angle $\theta_0 = \text{Arc tg } \frac{b}{a}$ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cet angle est bien l'argument si $a > 0$ (le lecteur dessinera les différents cas de figure). Sinon, il faut ajouter ou retrancher π . On obtiendra ainsi l'argument θ entre $-\pi$ et π (méthode programmable).

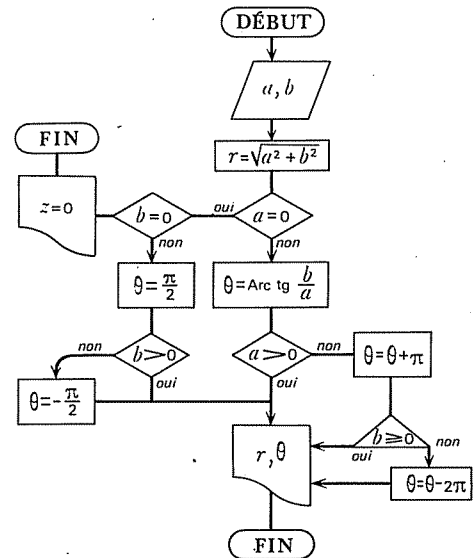


FIG. 4.1.2.

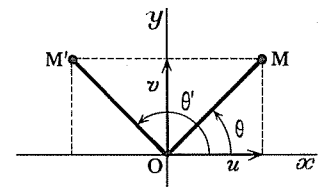


FIG. 4.1.3.

Exercice 4.1.1. — Déterminer le module et l'argument des nombres complexes écrits sous forme cartésienne

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (1, \sqrt{3}), (3, 4).$$

Exercice 4.1.2. — Même exercice que précédemment pour

$$(1 + \cos a, \sin a), (\cos a, \sin a + 1), \quad a \text{ réel.}$$

Exercice 4.1.3. — Déterminer la forme cartésienne (a, b) pour les nombres complexes suivants donnés par leur forme polaire $[r, \theta]$:

$$[1, 0], [2, \pi], \left[1, \frac{\pi}{2}\right], \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Remarque 4.1.4. — Il existe de nombreuses présentations possibles des nombres complexes (à partir des matrices, des polynômes, etc.).

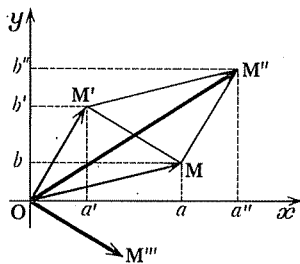


FIG. 4.2.1.

Exercice 4.2.1. — Calculer les sommes suivantes :

$$(1, 3) + (2, -1);$$

$$(1,412, 2,141) + (3,588, 0,859);$$

$$(2, 0) + (-1, \sqrt{3}) + (-1, -\sqrt{3}).$$

Remarque 4.2.1. — La forme polaire (module et argument) est peu favorable pour effectuer des sommes de nombres complexes. On montre cependant la relation suivante qui peut servir dans certains cas :

$$(4.2.7.) \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Cela résulte de l'inégalité (1.3.12)

$$\|OM''\| \leq \|OM\| + \|OM'\|.$$

L'inégalité (4.2.7.) rappelle celle que nous connaissons pour les nombres réels avec les valeurs absolues $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(a, b) est la forme *cartésienne* du nombre complexe, $[r, \theta]$ sa forme *polaire*. Nous utiliserons ces deux formes par la suite, selon le type du problème envisagé.

Nous allons présenter ci-dessous les *opérations élémentaires* relatives aux nombres complexes.

4.2. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Addition et soustraction

Considérons deux nombres complexes $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$, d'images M et M' dans le plan $(\mathcal{P})$.

Définition 4.2.1.

La *somme* $z + z'$ est le nombre complexe z'' dont l'image M'' est déterminée par l'égalité

$$(4.2.1.) \quad OM'' = OM + OM',$$

soit

$$(4.2.2.) \quad (a'', b'') = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

L'image M'' s'obtient par la somme vectorielle (4.2.1.) (voir la figure 4.2.1.). Cette opération possède d'ailleurs les mêmes propriétés que la somme vectorielle (voir paragraphe 0.6.).

$(0, 0)$ est le nombre complexe nul; tout nombre complexe $z = (a, b)$ admet comme opposé $(-a, -b)$ que nous noterons $-z$.

La *différence* de deux nombres complexes z et z' d'images M et M' s'obtient en effectuant la différence vectorielle

$$(4.2.3.) \quad OM''' = OM - OM' \quad (\text{fig. 4.2.1.})$$

soit

$$(4.2.4.) \quad (a''', b''') = (a, b) - (a', b') = (a - a', b - b').$$

Comme les vecteurs du plan, les nombres complexes peuvent être *multipliés par une constante réelle* k .

Nous écrivons alors si $z = (a, b)$,

$$(4.2.5.) \quad k \cdot z = (k \cdot a, k \cdot b).$$

Cette opération possède les mêmes propriétés vis-à-vis de l'addition que l'opération vectorielle correspondante (paragraphe 0.6. et tome III, paragraphe 0.1.).

Ainsi l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est un espace vectoriel réel (cf. tome III). L'opération (4.2.5.) permet d'écrire tout nombre complexe $z = (a, b)$ sous la forme

$$(4.2.6.) \quad z = a(1, 0) + b(0, 1)$$

forme qui sera très importante par la suite.

4.3. MULTIPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES

Contrairement au cas de l'addition, nous partirons ici des formes polaires $[r, \theta]$ pour $z = (a, b)$, $[r', \theta']$ pour $z' = (a', b')$. Remarquons que le point $M(a, b)$ est l'image du point $A(1, 0)$ par la *similitude* de centre O , de rapport r , d'angle θ (voir figure 4.3.1.).

Cette similitude $\sigma(O, r, \theta)$ transforme le point M' en un point M'' tel que

$$(4.3.1.) \quad \|OM''\| = r \|OM'\| = r \cdot r',$$

$$(4.3.2.) \quad (Ox, OM'') = (Ox, OM') + (OM', OM'') = \theta + \theta'.$$

Définition 4.3.1.

Nous appelons **produit** de z par z' le nombre complexe z'' dont l'image M'' est déduite de M' par la similitude de centre O qui transforme $A(1, 0)$ en M , soit

$$(4.3.3.) \quad r'' = rr', \theta'' = \theta + \theta'.$$

Autrement dit, le produit de deux nombres complexes a pour module le **produit des modules** et pour argument la **somme des arguments**.

Exemple 4.3.1.

$$\text{Soit } z = \left[2, \frac{\pi}{3}\right] \text{ et } z' = \left[3, \frac{\pi}{4}\right].$$

Exercice 4.2.2. — Calculer le résultat de la combinaison linéaire suivante, déterminer sa forme polaire :

$$2 \cdot (1, 2) - 3(1, +1) + \sqrt{3}(2, -2).$$

Exercice 4.2.3. — Soit z un nombre complexe de forme polaire $[r, \theta]$. Trouver la forme polaire de $k \cdot z$ où k est réel.

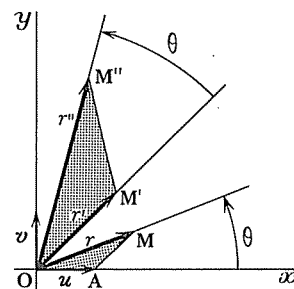


FIG. 4.3.1.

Exercice 4.3.1. — Calculer les produits $z \cdot z'$ pour les nombres complexes donnés sous forme polaire :

$$a) \quad z = \left[1, \frac{\pi}{6}\right] \text{ et } z' = \left[1, \frac{\pi}{4}\right];$$

$$b) \quad z = \left[1, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } z' = \left[1, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Exercice 4.3.2. — Montrer que si $z = (r, \theta)$ est un complexe non nul, il existe un nombre complexe $z' = (r', \theta')$ tel que $z \cdot z' = (1, 0)$. [cf. paragraphe 4.4.]

Nous trouvons $z'' = \left[6, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemple 4.3.2.

Soit $z = [r, \theta]$ et $z' = [1, 0]$ ou $(1, 0)$.

D'après (4.3.3.), nous trouvons $z \cdot z' = [r \times 1, \theta + 0] = z$. Ce nombre complexe $z' = (1, 0)$ laisse inchangé tout nombre complexe $z = [r, \theta]$; en particulier

$$(4.3.4.) \quad (1, 0) \times (1, 0) = (1, 0).$$

Le nombre $(1, 0)$ est appelé usuellement élément neutre de la multiplication.

Exemple 4.3.3.

Considérons le nombre complexe noté i (voir remarque 4.3.1.) tel que $i = (0, 1)$ ou $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, d'image B (fig. 4.3.2.).

Il est facile de calculer le carré i^2 .

C'est le nombre complexe de module $1 \times 1 = 1$, d'argument $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, c'est-à-dire le nombre complexe $[1, \pi]$ ou $(0, 1)$ d'image A', soit

$$(4.3.5.) \quad (0, 1) \times (0, 1) = - (1, 0).$$

Les relations (4.3.3.) rendent évidentes la **commutativité** de cette multiplication, soit $z \cdot z' = z' \cdot z$, ainsi que la propriété suivante appelée **associativité du produit** :

$$(4.3.6.) \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

La relation (4.3.6.) est valable quels que soient les nombres complexes z_1, z_2, z_3 .

La propriété suivante, appelée **distributivité**, est moins évidente que (4.3.6.). Elle résulte de nos connaissances sur les transformations ponctuelles (chapitre 2).

Nous avons

$$(4.3.7.) \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Remarque 4.3.1. — Le nombre complexe $(0, 1)$ étudié dans l'exemple 4.3.3. est souvent noté i . Les électriciens le notent plutôt j car la lettre i désigne l'intensité du courant électrique.

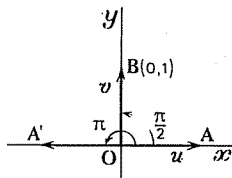


FIG. 4.3.2.

Exercice 4.3.3. — Soit z_1, z_2, z_3 de formes polaires

$$\left[2, \frac{\pi}{6}\right], \left[3, -\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Figurer leurs images M_1, M_2, M_3 ainsi que les images M_4 de $z_1 \cdot z_2$, M_5 de $z_2 \cdot z_3$, M_6 de $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$. Cela illustre la propriété d'associativité du produit (4.3.6.).

quels que soient les nombres complexes z_1, z_2, z_3 . La figure 4.3.3. illustre cette égalité.

La forme $a + bi$

Écrivons la relation (4.2.6.) pour deux nombres complexes $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$

$$(4.3.8.) \quad \begin{cases} z = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1), \\ z' = a' \cdot (1, 0) + b' \cdot (0, 1). \end{cases}$$

Le nombre complexe $(0, 1)$, noté i dans l'exemple (4.3.3.), vérifie

$$(4.3.9.) \quad i^2 = - (1, 0).$$

Le nombre complexe $(1, 0)$, d'ordonnée nulle, se comporte tout à fait comme son abscisse 1 (cf. exemple 4.3.2. et remarque 4.3.2.).

Aussi nous simplifions l'écriture des relations (4.3.8.) en remplaçant $(1, 0)$ par le réel 1 et $(0, 1)$ par le symbole i , d'où l'écriture

$$(4.3.10.) \quad \begin{aligned} z &= a + bi, \\ z' &= a' + b'i. \end{aligned}$$

La somme $z + z'$ s'écrit facilement

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

La relation (4.3.9.) s'écrit plus simplement

$$(4.3.11.) \quad i^2 = -1 \quad \text{ou} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Le produit $z \cdot z' = (a + bi) \cdot (a' + b'i)$ s'effectue comme le produit de deux binômes $(a + bx) \cdot (a' + b'x)$ grâce à la distributivité (relation 4.3.7.) soit $zz' = aa' + (ab' + ba')i + bb'i^2$

et d'après (4.3.11.),

$$(4.3.12.) \quad z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$$

Si $b = b' = 0$, alors les nombres complexes $z = a$ et $z' = a'$ se réduisent à des nombres *réels* et $zz' = aa'$.

Si $a = a' = 0$, alors les nombres complexes $z = bi$ et $z' = b'i$ sont dits *imaginaires purs*. Cependant, leur produit est réel car

$$zz' = bb'i^2 = -bb'.$$

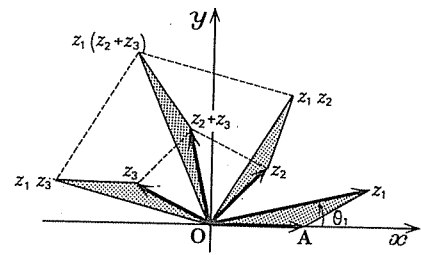


FIG. 4.3.3.

Remarque 4.3.2. — Soit $z = (a, 0)$ et $z' = (a', 0)$ deux nombres complexes d'ordonnée nulle, d'abscisses positives pour simplifier. Leur somme est $z + z' = (a + a', 0)$. Leur produit est $z \cdot z' = (a \cdot a', 0)$

car les formes polaires de z et z' sont $[a, 0]$ et $[a', 0]$. Ainsi la somme et le produit sont aussi d'ordonnée nulle. Nous constatons que $(a, 0)$ et $(a', 0)$ se comportent comme leurs abscisses a et a' . C'est pourquoi ces nombres complexes sont dits *réels*.

Remarque 4.3.3. — Il est facile de vérifier que le produit de $(k, 0)$ par $z = (a, b)$ n'est autre que (ka, kb) , c'est-à-dire $k \cdot z$ défini en (4.2.5.).

Exercice 4.3.3. — Calculer les produits

- a) $(1 + i)(2 + i)$, b) $(3 + i)(5 - 2i)$,
c) $(1 + i)^2$, d) $(1 + i)(2 + i)(3 + i)$
e) $(b + ai)(a + bi)$, f) $(2 + i)^2 - (2 - i)^3$.

Exercice 4.3.4. — Vérifier la règle 4.3.7. en utilisant la forme $a + bi$ pour z_1, z_2, z_3 .

Exercice 4.3.5. — Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $(z - a)(z - b)$ soit réel. a et b désignent les affixes de points donnés A et B.

Cela suggère la définition suivante :

Définition 4.3.2.

Étant donné un nombre complexe $z = a + bi$, le nombre a s'appelle *partie réelle*, le nombre b s'appelle *partie imaginaire* du nombre complexe z . Nous écrirons souvent

$$(4.3.13.) \quad a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Terminons ce paragraphe sur le produit des nombres complexes en adaptant la *méthode de Horner* (tome I, paragraphe 0.6.) au cas où la variable est complexe pour le calcul de la valeur d'un polynôme.

Exemple 4.3.4.

Soit le polynôme à coefficients réels

$$(4.3.14.) \quad P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

avec $z = x + iy$.

Comme dans le cas réel, nous calculons les termes successifs $P_0, P_1, \dots, P_n$ définis par

$$(4.3.15.) \quad P_k = z \cdot P_{k-1} + a_{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \text{et} \quad P_0 = a_n.$$

Si l'ordinateur utilisé n'effectue pas directement le calcul des nombres complexes, nous séparons partie réelle et partie imaginaire des nombres P_k . Nous posons $P_k = Q_k + iR_k$. La relation (4.3.15.) se scinde alors en deux relations programmables

$$(4.3.16.) \quad \begin{cases} Q_k = xQ_{k-1} + yR_{k-1} + a_{n-k}, \\ R_k = xR_{k-1} + yQ_{k-1}, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n,$$

avec $Q_0 = a_n$ et $R_0 = 0$.

La figure (4.3.4.) présente l'organigramme de ce calcul (mémoires auxiliaires Q_1, R_1).

Nous introduisons maintenant le quotient des nombres complexes et les techniques de calcul qui s'y rapportent.

Exercice 4.3.7. — Écrire un programme pour le calcul d'un produit de plusieurs nombres complexes non nuls (cas où l'ordinateur n'effectue pas directement les opérations sur les nombres complexes).

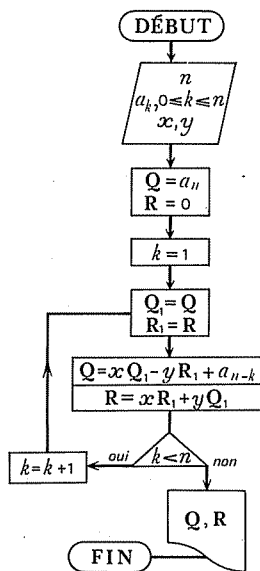


FIG. 4.3.4.

4.4. QUOTIENT. COMPLEXES CONJUGUÉS

Soit deux nombres complexes z et z' de formes polaires $[r, \theta]$ et $[r', \theta']$ avec $r' \neq 0$. Le quotient $\frac{z}{z'}$ est par définition le nombre complexe de forme polaire $\left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$ constitué par le quotient des modules et par la différence des arguments.

Exemple 4.4.1.

Soit $z = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$ et $z' = \left[3, \frac{\pi}{6}\right]$. Alors $\frac{z}{z'} = \left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{12}\right]$.

Supposons les nombres z et z' donnés sous forme cartésienne $a + ib$ et $a' + ib'$. Le quotient s'écrit

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'}.$$

Il est possible de rendre le dénominateur réel en multipliant en haut et en bas par sa *quantité conjuguée* $a' - ib'$ (voir remarque 4.4.1.). Le dénominateur devient $a'^2 - i^2 b'^2 = a'^2 + b'^2 = r'^2$ d'après (4.1.4.).

Exemple 4.4.2.

$$\frac{1 + i}{2 + i} = \frac{1 + i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{3 + i}{2^2 + 1^2} = \frac{3}{5} + \frac{i}{5}.$$

Définition 4.4.1.

Étant donné un nombre complexe $z = a + ib$ d'image M , nous appelons *conjugué* de z le nombre complexe, noté $\bar{z}$, dont l'image M' est symétrique de M par rapport à Ox (fig. 4.4.1.) soit

$$(4.4.1.) \quad \bar{z} = a - ib.$$

Remarquons que le produit de z par $\bar{z}$ est une quantité connue :

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = r^2 \text{ d'après (4.1.4.).}$$

Autrement dit

$$(4.4.2.) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Remarque 4.4.1. — Le lecteur connaît bien la notion de *quantité conjuguée* relative aux radicaux. Par exemple

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \text{etc.}$$

$2 - \sqrt{2}$ est la quantité conjuguée de $2 + \sqrt{2}$.

Exercice 4.4.1. — Effectuer les quotients $\frac{z}{z'}$ avec

$$a) z = 3 + i, \quad z' = 5 - 2i,$$

$$b) z = m + i, \quad z' = 1 - mi.$$

Exercice 4.4.2. — Exprimer les quantités réelles $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ de la définition 4.3.2. en fonction de z et de $\bar{z}$.

Exercice 4.4.3. — Soit m l'image du point d'affixe z et M celle du point d'affixe Z , avec $Z = \frac{z + 1}{z - 1}$. Si m décrit la droite d'équation $y = 1 - x$, quel est le lieu de M ?

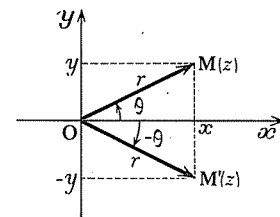


FIG. 4.4.1.

Exercice 4.4.4. — Soit un circuit comportant des résistances R , des inductances L et des capacités C , parcouru par un courant alternatif de pulsation ω . Leurs impédances complexes sont définies respectivement par R , $jL\omega$ et $\frac{1}{jC\omega}$. Les lois de l'électricité permettent d'affirmer que les impédances s'ajoutent pour des éléments en série, tandis que les inverses s'ajoutent pour des éléments en parallèle. Déterminer l'impédance des circuits de la figure 4.4.2.

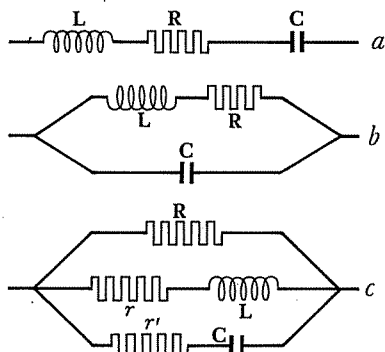


FIG. 4.4.2.

Exercice 4.4.5. — Peut-on trouver une condition sur z pour que le nombre $\frac{z-i}{z+i}$ soit imaginaire pur?

Exercice 4.4.6. — Démontrer les propriétés (4.4.3.) (4.4.4.), (4.4.5.) et (4.4.6.).

Exercice 4.4.7. — Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les images des nombres complexes 1 , z et $1 + z^2$ soient alignées.

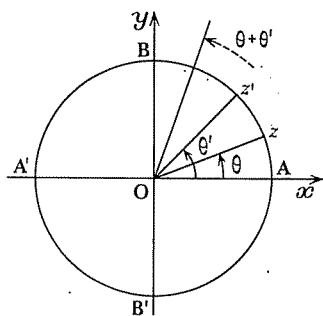


FIG. 4.5.1.

Il est facile de montrer, à titre d'exercice, les propriétés suivantes

$$(4.4.3.) \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'},$$

$$(4.4.4.) \quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}},$$

$$(4.4.5.) \quad \overline{(\overline{z})} = z$$

$$(4.4.6.) \quad z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Nous verrons l'importance de ces propriétés aux paragraphes suivants (paragraphes 4.5. et 4.6.).

Nous avons ainsi présenté l'*outil* constitué par les nombres complexes et leur ensemble, noté $\mathbb{C}$. Les opérations sur $\mathbb{R}$ ne sont qu'un cas particulier des opérations complexes. Nous allons étudier quelques applications très utiles des nombres complexes, notamment pour la géométrie plane et la trigonométrie.

4.5. APPLICATIONS A LA TRIGONOMÉTRIE

Le rapport entre les nombres complexes et la trigonométrie apparaît déjà au paragraphe 4.1. dans les relations (4.1.3.) et (4.1.4.) qui permettent le passage de la forme *cartésienne*, désormais $a + bi$, à la forme *polaire* constituée par le module r et l'argument θ .

Grâce à (4.1.3.) nous pouvons écrire

$$z = a + bi = r \cos \theta + ir \sin \theta,$$

soit

$$(4.5.1.) \quad z = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Considérons le cas particulier où le module r est égal à 1. Alors l'image M de z est située sur le *cercle trigonométrique* (fig. 4.5.1.) et $z = \cos \theta + i \sin \theta$.

Soit M' un autre point du cercle, d'affixe $z' = \cos \theta' + i \sin \theta'$.

Nous savons que le produit $z \cdot z'$ a pour module $1 \times 1 = 1$ et pour argument $\theta + \theta'$, d'où l'égalité

$$(4.5.2.) \quad (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta').$$

En effectuant le produit figurant au premier membre, nous voyons apparaître les **formules d'addition** bien connues :

$$(4.5.3.) \quad \begin{cases} \cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \\ \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta. \end{cases}$$

Si $\theta = \theta'$, la formule (4.5.2.) devient

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

Plus généralement, en élevant z à la puissance n , nous déduisons l'importante **formule de de Moivre**

$$(4.5.4.) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

très utile pour exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ (remarque 4.5.1.).

La notation exponentielle

Considérons la fonction complexe E de la variable réelle θ , définie par

$$E(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta.$$

D'après (4.5.2.), cette fonction vérifie

$$E(\theta + \theta') = E(\theta) \cdot E(\theta').$$

Par ailleurs, il est immédiat que $E(0) = 1$. Or, ces deux propriétés caractérisent justement la **fonction exponentielle** réelle e^0 , ou plus généralement $e^{\lambda\theta}$, où λ est une constante.

Ne pourrait-on pas écrire $E(\theta)$ sous la forme $e^{\lambda\theta}$, grâce à un bon choix de λ ?

Le **calcul formel** suivant répond à cette question. La dérivée de $e^{\lambda\theta}$ est égale à $\lambda e^{\lambda\theta}$. La dérivée de $E(\theta)$ est égale à

$$-\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = iE(\theta)$$

(voir remarque 4.5.2.).

La ressemblance entre $E(\theta)$ et $e^{\lambda\theta}$ est totale en choisissant $\lambda = i$. Nous poserons donc

$$(4.5.5.) \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

Un nombre complexe quelconque s'écrira donc (cf. 4.5.1.)

$$(4.5.6.) \quad z = re^{i\theta}$$

Exercice 4.5.1. — Calculer

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi).$$

En déduire $\cos(\theta + \varphi + \psi)$ et $\sin(\theta + \varphi + \psi)$.

Remarque 4.5.1. — $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ s'exprime aussi à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos^n \theta + C_n^1 \cos^{n-1} \theta i \sin \theta + \dots + C_n^p \cos^{n-p} \theta (i)^p \sin^p \theta + \dots + (i)^n \sin^n \theta.$$

Exercice 4.5.2. — Calculer $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice 4.5.3. — Calculer l'expression

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{3}{5}}.$$

Il pourra être utile de poser

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = (\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{3}{5}}.$$

Quelle conséquence en résulte-t-il pour la formule de de Moivre dans le cas d'exposants fractionnaires?

Remarque 4.5.2. — Soit la fonction complexe d'une variable réelle $t \mapsto z(t) = a(t) + i \cdot b(t)$.

Comme pour les fonctions vectorielles (paragraphe 1.8.) nous pouvons définir la dérivée par

$$z'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}.$$

On trouve $z'(t) = a'(t) + i \cdot b'(t)$, les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ étant dérivables.

Exercice 4.5.4. — Calculer les nombres complexes suivants :

$$a) e^{i\frac{\pi}{2}} \quad b) e^{i\pi} \quad c) e^{+i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 4.5.5. — Calculer $\frac{z_1}{z_2}$, avec $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}. \text{ En déduire } \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$

Remarque 4.5.3. — Certains nombres complexes Z , d'expression algébrique simple, s'écrivent difficilement sous forme exponentielle (lorsque l'argument ne s'exprime pas comme une fraction de π). Pour calculer les racines carrées $z = x + iy$ d'un tel nombre $Z = a + ib$, nous écrirons

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

et nous résoudrons le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b, \end{cases}$$

qui conduit à une équation bicarrée en x ou en y .

Exercice 4.5.6. — Déterminer les racines carrées de i , $1 - i$, $5 - 12i$.

Remarque 4.5.4. — Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont de la forme $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k = 0, 1, \dots, n-1$. Dans le cas particulier où $n = 3$, les trois racines sont 1 , $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. En notant $\alpha = e^{\frac{4i\pi}{3}}$, il est facile de montrer que

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \alpha^2 \text{ et } 1 + \alpha + \alpha^2 = 0.$$

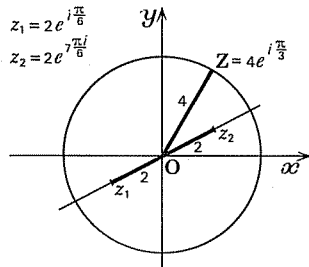


FIG. 4.5.2.

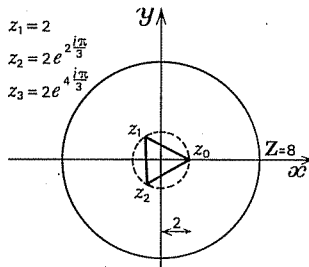


FIG. 4.5.3.

ce qui met en évidence le module r et l'argument θ , de même que la forme polaire $[r, \theta]$.

En changeant θ en $-\theta$, l'égalité (4.5.5.) devient

$$(4.5.7.) \quad \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}.$$

Des deux relations (4.5.5.) et (4.5.7.) on peut tirer les **formules d'Euler**

$$(4.5.8.) \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

La formule de de Moivre (4.5.4.) prend la forme très banale

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Cependant nous l'utilisons ci-dessous pour extraire les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de $Z = Re^{i\theta}$

Nous cherchons un nombre complexe $z = re^{i\theta}$, tel que $z^n = Z$, soit

$$r^n \cdot e^{in\theta} = R \cdot e^{i\theta}.$$

Égalons les modules : $r^n = R$, d'où $r = \sqrt[n]{R}$.

Égalons les arguments sachant qu'ils sont définis à $2k\pi$ près.

$$n\theta = \Theta + 2k\pi,$$

soit

$$\theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Nous obtenons ainsi n arguments possibles selon que $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

D'où le résultat final

$$(4.5.9.) \quad r = \sqrt[n]{R}, \theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

En particulier $Z = Re^{i\theta}$ possède deux racines carrées opposées (fig. 4.5.2.), trois racines cubiques (fig. 4.5.3.), quatre racines quatrièmes (fig. 4.5.4.), etc.

Exemple 4.5.1.

$Z = -1$ et $n = 2$. Le nombre Z s'écrit $e^{i\pi}$. Les racines carrées z ont pour module $\sqrt[2]{1} = 1$ et pour arguments $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}$, avec $k = 0$ ou $k = 1$.

Soit $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Ce sont simplement les nombres complexes i et $-i$.

Soit plus généralement un nombre réel **négligé** $Z = \Delta$. Son module est $R = |\Delta| = -\Delta$, son argument est $\Theta = \pi$. Les deux racines carrées sont $i\sqrt[2]{|\Delta|}$ et $-i\sqrt[2]{|\Delta|}$.

Exemple 4.5.2.

Soit $Z = -4$ et $n = 4$. Sous forme polaire, $Z = 4e^{i\pi}$.

Les quatre racines z_0, z_1, z_2, z_3 ont pour module $\sqrt[4]{2}$ et pour arguments $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (fig. 4.5.4.).

Soit $z_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$. Nous écrivons de même, les valeurs de z_1, z_2 et z_3 (exercice).

Exemple 4.5.3.

Soit $Z = 1 + i$ et $n = 3$. Sous forme polaire, $Z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Les trois racines z_0, z_1 et z_2 ont pour module $\sqrt[3]{2}$ et pour arguments $\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$.

Soit $z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$, etc.

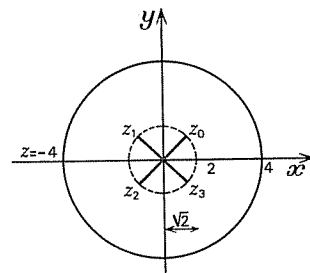


FIG. 4.5.4.

Exercice 4.5.7. — Déterminer les racines cubiques de i et $1 + i$.

Exercice 4.5.8. — Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

Exercice 4.5.9. — Déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes suivants :

- a) $z = -32$ et $n = 5$,
- b) $z = -1 + \sqrt{3}i$ et $n = 6$,
- c) $z = -27i$ et $n = 3$.

Remarque 4.6.1. — Nous rencontrerons des équations du type

$$az^2 + bz + c = 0$$

au tome IV, pour la résolution d'équations différentielles du type

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Les racines complexes jouent alors un rôle très important.

4.6. RACINES COMPLEXES D'UN POLYNÔME

Il s'agit essentiellement de polynômes à **coefficients réels**. La variable sera notée z .

Nous traitons d'abord le cas du trinôme

$$(4.6.1.) \quad P(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0.$$

Ce trinôme n'a pas de racines réelles quand le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif. Cette circonstance est fréquente lors de la résolution d'équations différentielles (voir remarque 4.6.1. et le chapitre 2 du tome IV de la présente collection).

Le polynôme (4.6.1.) s'écrit

$$(4.6.2.) \quad P(z) = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

L'équation $P(z) = 0$ s'écrit

$$(4.6.3.) \quad \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Exercice 4.6.1. — Montrer que le module des racines complexes (4.6.3.) est égal à $\frac{c}{a}$.

Exercice 4.6.2. — Résoudre les équations suivantes :

$$z^2 + 4z + 5 = 0.$$

$$z^2 + 2mz + 2m + 3 = 0.$$

Exercice 4.6.3. — Résoudre les équations bicarrées

$$x^4 - x^2 - 2 = 0,$$

$$x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Le lecteur connaît bien l'expression des racines quand le discriminant Δ est positif ou nul. S'il est négatif, il faut utiliser les racines du nombre négatif Δ (voir exemple 4.5.1.) d'où les deux racines

$$(4.6.4.) \quad \begin{cases} z' = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \\ z'' = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \end{cases} \quad |\Delta| = -\Delta = 4ac - b^2.$$

Exemple 4.6.1.

$$5z^2 + 11z + 25 = 0, \quad \Delta = 121 - 125 = -4.$$

Les deux racines sont

$$z' = \frac{-11 + 2i}{5} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-11 - 2i}{5}.$$

Exemple 4.6.2.

$$z^2 + z + 1 = 0, \quad \Delta = -3.$$

Les deux racines seront notées

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{soit } e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{soit } e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

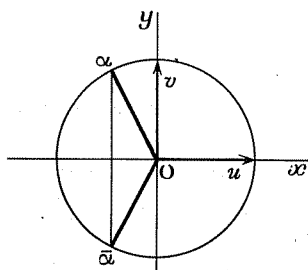


FIG. 4.6.1.

(fig. 4.6.1.), voir remarque (4.5.4.).

Nous remarquons que les racines sont des nombres complexes **conjugués**. C'est le cas pour tous les polynômes à coefficients réels comme l'indique le théorème (4.6.1.) ci-dessous.

Théorème 4.6.1.

Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels

$$(4.6.5.) \quad P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

a) Il admet n racines (une racine double compte pour deux, etc.) dans le plan complexe, situées dans un disque

$$(4.6.6.) \quad |z| \leq M,$$

où M est fonction des coefficients du polynôme (voir fig. 4.6.2.).

b) Si le polynôme P admet une racine complexe $z_0 = a + ib$, le **conjugué** $\bar{z}_0 = a - ib$ est également racine de P .

La démonstration de (b) est facile et fait l'objet de l'exercice (4.6.4.). Celle de (a) peut être trouvée dans [3].

Exemple 4.6.1.

Soit le polynôme

$$P(z) = z^6 - 3z^5 + z^4 + 3z^3 - 6z + 4.$$

Il est obtenu en multipliant entre eux les trois trinômes

$$T_1(z) = z^2 - 2z + 2$$

de racines imaginaires $1 + i$, $1 - i$.

$$T_2(z) = z^2 + 2z + 1 \text{ de racine double } -1,$$

$$T_3(z) = z^2 - 3z + 2 \text{ de racines réelles } 1 \text{ et } 2.$$

La figure (4.6.3.) montre les six racines dans le plan complexe, à l'intérieur du disque de rayon $M = 7$.

Si le degré du polynôme dépasse deux ou trois (exercice 4.6.6.) il n'y a pas de formule connue pour calculer les racines : il faut alors appliquer des **méthodes numériques** dérivées de celles que nous avons étudiées pour les racines réelles (voir tome I, chapitre 1).

Nous présentons ici quelques aperçus très succincts sur la méthode de Newton.

Exercice 4.6.4. — Démontrer la partie (b) du théorème 4.6.1.

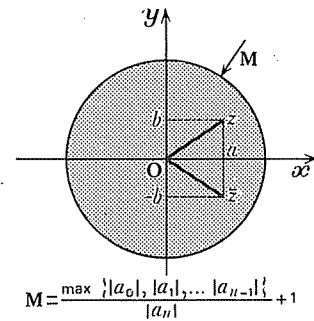


FIG. 4.6.2.

Remarque 4.6.2. — Le polynôme P est divisible par $z - z_0$ et par $z - \bar{z}_0$ (théorème 4.6.1. b), donc par le produit $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ égal à

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2.$$

Exercice 4.6.5. — Résoudre l'équation

$$z^2 - 2r \cos \alpha z + r^2 = 0,$$

où r est un nombre réel strictement positif et α un réel de $] -\pi, \pi[$.

Préciser le module et l'argument des solutions.

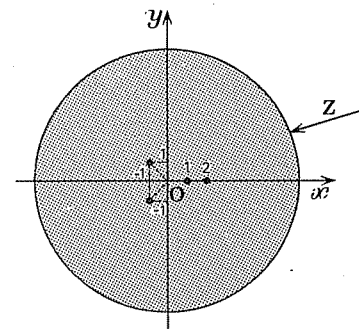


FIG. 4.6.3.

Exercice 4.6.6. — Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$. Pour la résoudre on pose $x = u + v$, soit $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$. Choisissons u et v tels que $u^3 + v^3 + q = 0$, soit $3uv + p = 0$. Déterminer u et v , ainsi que leur somme x , en discutant suivant le signe de $4p^3 + 27q^2$. C'est la **méthode de Cardan**.

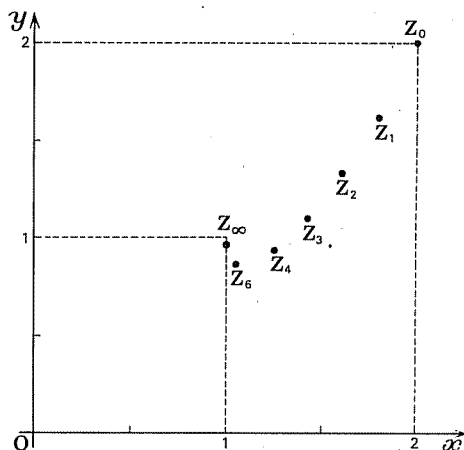


FIG. 4.6.4.

Exercice 4.6.7. — Transformer l'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

en l'équation réduite

$$y^3 + py + q = 0$$

en posant $y = x + \frac{a}{3}$. Exprimer p et q en fonction de a, b, c et d .

Exercice 4.6.8. — Tracer un organigramme de calcul des racines de l'équation du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

en la transformant comme il est indiqué dans l'exercice 4.6.5.

Méthode de Newton

Elle repose sur la même formule que dans le cas réel (tome I, paragraphe 1.11.).

En partant d'une valeur initiale z_0 dans le disque défini par (4.6.5.), nous calculons les termes successifs de la suite

$$(4.6.7.) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}.$$

Le numérateur $P(z_n)$ et le dénominateur $P'(z_n)$ se calculent par la *méthode de Horner* (exemple 4.3.4.) si le degré n est élevé. Si la suite converge, sa limite z est racine du polynôme. La figure (4.6.4.) présente la suite de points obtenus pour l'exemple (4.6.1.) avec $z_0 = i$.

Si la valeur initiale z_0 est mal choisie, la suite sort du disque et il faut recommencer avec une autre valeur. Si la suite converge, on peut arrêter le calcul dès que

$$(4.6.8) \quad \frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_n|} \leq \varepsilon,$$

où ε est un petit nombre donné à l'avance.

Dès qu'une racine complexe est trouvée, soit $z = a + ib$, avec sa conjuguée $a - ib$, on cherche les autres racines en appliquant (4.6.6.) avec une autre valeur initiale z_0 .

On peut aussi préalablement diviser P (tome I, remarque 2.9.2.) par le trinôme $T(z) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$ qui est en facteurs dans P (remarque 4.6.2.). Alors on ne risque plus de retrouver la racine précédente, et ainsi de suite.

4.7. APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE PLANE

Nous allons voir que le calcul complexe est aussi un outil pour décrire les *transformations ponctuelles* du plan.

Soit T une transformation ponctuelle du plan ($\mathcal{P}$) sur lui-même (chapitre 2). A tout point M d'affixe z correspond par T un point N d'affixe Z . Cela revient donc à une fonction $f : z \mapsto Z$ de l'ensemble $\mathbb{C}$ dans lui-même.

Nous allons observer quelques cas simples déjà vus au chapitre 2.

Translations :

Soit V le vecteur de translation, de composantes α et β . Au point $M(x, y)$ correspond le point $N(X, Y)$ tel que

$$\begin{aligned} X &= x + \alpha, \\ Y &= y + \beta, \end{aligned}$$

soit $X + iY = x + iy + \alpha + i\beta$, ou encore

$$(4.7.1.) \quad Z = z + b$$

en posant $b = \alpha + i\beta$.

Exemple 4.7.1.

$$Z = z + 3 + 2i \quad (\text{fig. 4.7.1.}).$$

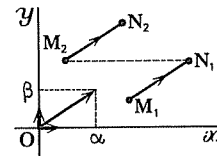


FIG. 4.7.1.

Homothéties

Soit l'homothétie de rapport k et de centre O . Le point $M(x, y)$ est envoyé en $N(X, Y)$ de façon que

$$\begin{aligned} X &= kx, \\ Y &= ky, \end{aligned}$$

soit

$$(4.7.2.) \quad Z = kz.$$

S'il s'agit d'une homothétie de centre M_0 quelconque, il est facile de trouver la relation

$$(4.7.3.) \quad Z - z_0 = k(z - z_0),$$

où z_0 est l'affixe de M_0 (fig. 4.7.2.).

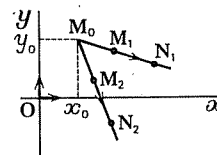


FIG. 4.7.2.

Exemple 4.7.2.

$$z_0 = 2 + 3i, \quad k = 2 \quad (\text{fig. 4.7.2.}).$$

Écrivons la relation (4.7.3.)

$$Z - (2 + 3i) = 2[z - (2 + 3i)].$$

$$\text{Soit } Z = 2z - 2 - 3i.$$

Exercice 4.7.1. — Soit la transformation du plan complexe définie par $Z = 2z - 1$. Montrer que c'est une homothétie. Quelles sont les images des droites $y = mx$, des cercles de centre O dans la transformation?

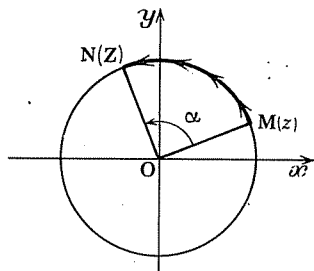


FIG. 4.7.3.

Rotations

Soit α l'angle de la rotation de centre O. Le point M (z) est envoyé en N (Z) de façon que

$$\begin{aligned} |Z| &= |z| \times 1, \\ \arg Z &= \arg z + \alpha \quad (\text{fig. 4.7.3.}). \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$(4.7.4.) \quad Z = z \cdot e^{i\alpha}$$

car $e^{i\alpha}$ a pour module 1 et pour argument α .

Exemple 4.7.3.

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ soit } e^{i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \text{ d'où la relation } Z = iz \text{ (fig. 4.7.3.).}$$

S'il s'agit d'une rotation de centre M_0 quelconque, la relation suivante s'établit facilement :

$$(4.7.5.) \quad Z - z_0 = (z - z_0) e^{i\alpha}.$$

Similitudes

La similitude $\sigma(O, k, \alpha)$ s'obtient en combinant homothétie et rotation.

D'après (4.7.2.) et (4.7.4.)

$$(4.7.6.) \quad Z = a \cdot z, \quad \text{avec } a = k e^{i\alpha}.$$

Exemple 4.7.4.

Si nous combinons la rotation $\mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{4}\right)$ avec l'homothétie $\mathcal{H}(O, \sqrt{2})$, la similitude se traduit par $Z = az$, avec $a = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$, soit $Z = (1 + i)z$.

Si la similitude a pour centre $M_0(z_0)$, la relation (4.7.6.) devient

$$\begin{aligned} Z - z_0 &= a(z - z_0), \\ \text{soit} \\ (4.7.7.) \quad Z &= az + b, \end{aligned}$$

avec $b = (1 - a)z_0$.

Exercice 4.7.2. — Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système

$$\begin{cases} 2iz_1 - z_2 = 1 - 6i, \\ z_1 + 2iz_2 = i. \end{cases}$$

Si m_1 et m_2 désignent respectivement les points d'affixes z_1 et z_2 , déterminer les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ transformant m_1 en m_2 .

Exercice 4.7.3. — 1° On effectue les transformations ponctuelles du plan (repéré par (O, u, v) ortho-normé) $\mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, puis $\sigma(u + v)$. Soit $N(Z)$ l'image de

$M(z)$. Déterminer la relation $Z = f(z)$. Montrer que N se déduit de M par une seule rotation $\mathcal{R}(C, \alpha)$ dont on cherchera le centre C et l'angle α .

2° On effectue les rotations $\mathcal{R}(A_1, \alpha_1)$, puis $\mathcal{R}(A_2, \alpha_2)$. Un point $M(z)$ devient $M_1(z_1)$, puis $N(Z)$. Trouver les relations $z_1 = f_1(z)$ et $Z = f_2(z_1)$ puis $Z' = f(z)$. Conclusion ? On appelle a_1 et a_2 les affixes des points A_1 et A_2 .

Exemple : $a_1 = 0 + 0i$, $a_2 = 1 + 0i$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.7.4. — Étudier la transformation qui, au point M d'affixe z , associe le point N d'affixe Z tel que

$$Z = (1 - i)z + 2i.$$

Exercice 4.7.5. — Soit la transformation définie par

$$Z = (1 + i)z + 1.$$

Montrer que c'est une similitude.

Montrons inversement qu'une fonction du type $Z = az + b$ représente une certaine similitude. Pour trouver son **centre** $M_0(z_0)$, il suffit de chercher le **point invariant** dans la transformation, c'est-à-dire le point qui vérifie $Z = z$. Appelons z_0 la valeur commune.

On résout donc l'équation

$$(4.7.8.) \quad z_0 = az_0 + b,$$

$$\text{d'où } z_0 = \frac{b}{1-a}, \quad a \neq 1.$$

La relation (4.7.7.) peut s'écrire (exercice)

$$(Z - z_0) = a(z - z_0).$$

Il s'agit donc bien d'une similitude $\sigma(M_0, |a|, \arg a)$.

Exemple 4.7.5.

Soit la transformation ponctuelle exprimée par la relation

$$Z = 2iz + 1.$$

Nous donnons ici deux interprétations

- a) On combine les transformations $\mathcal{H}[O, 2]$, $\mathcal{R}\left[O, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathcal{T}(u)$.
 b) On cherche le point invariant, soit

$$z_0 = 2iz_0 + 1, \quad z_0 = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}.$$

La relation $Z = 2iz + 1$ peut s'écrire

$$(Z - z_0) = 2i(z - z_0).$$

Elle décrit la **similitude** $\sigma\left(M_0, \frac{\pi}{2}, 2\right)$.

Symétries

Pour une symétrie par rapport à Ox , la fonction complexe est simplement définie par

$$(4.7.9.) \quad Z = \bar{z}.$$

Pour une symétrie par rapport à une droite (D) passant par O ,

Exercice 4.7.6. — Soit une transformation ponctuelle du plan qui, au point M d'affixe $z = x + iy$, associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$. La transformation ponctuelle est du type $z' = az + b$, où a et b sont deux nombres complexes.

- a) Déterminer les complexes a et b sachant que $A(1, 0)$ se transforme en $A'(-1, 0)$ et $B(2, 0)$ en $B'(0, 1)$.
 b) Interpréter la relation en termes de rotations, homothétie et translation.
 c) Déterminer le point invariant de la transformation, d'affixe z_0 .
 d) En posant $Z = z - z_0$ et $Z' = z' - z_0$, déterminer une relation entre Z' et Z . Interpréter.

Remarque 4.7.1. — Si $\mu = 1$, l'inversion $\mathcal{I}(O, 1)$

se traduit par $Z = \frac{1}{z}$: en effet nous avons

$$|Z| \cdot |z| = 1 \text{ et } \arg Z = \arg z \text{ (exercice).}$$

La fonction $Z = \frac{1}{z}$ représente la transformation $\mathcal{I}(O, 1) \circ \mathcal{S}_{Ox}$. Les fonctions $Z = \frac{az + b}{cz + d}$, avec a, b, c et d complexes, représentent toutes les combinées des transformations précédentes.

Exercice 4.7.7. — Soit la transformation ϕ qui, au point d'affixe z , associe le point N d'affixe Z tel que

$$Z = \frac{z + 6}{z + 2}.$$

- a) Préciser l'ensemble des points M qui n'ont pas d'image dans la transformation.
 b) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels Z est un réel négatif.
 c) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels l'argument de Z est $\frac{\pi}{2}$.
 d) Déterminer l'ensemble C_k des points M du plan pour lesquels N décrit la droite (D_k) d'équation $Y = k$. Montrer que C_k passe par un point fixe et reste tangente à une droite fixe lorsque k décrit $\mathbb{R}^*$.

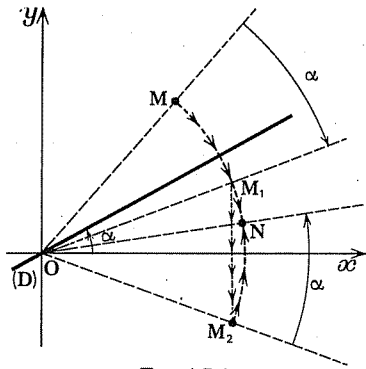


FIG. 4.7.4.

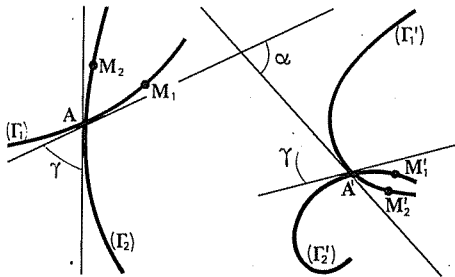


FIG. 4.7.5.

Remarque 4.7.2. — Soit une fonction complexe $Z = f(z)$ qui transforme $z = x + iy$ en $Z = P(x, y) + i \cdot Q(x, y)$. Supposons que f est dérivable, ainsi que P et Q au premier ordre. Nous observons la limite (4.7.12.) et nous notons $h = \Delta x + i \Delta y$.

a) Supposons $\Delta y = 0$. Alors (4.7.12.) devient

$$\frac{P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0) + i [Q(x_0 + \Delta x, y_0) - Q(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

qui tend vers $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0)$;

b) Supposons $\Delta x = 0$. Alors (4.7.12.) devient

$$\frac{P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) + i [Q(x_0, y_0 + \Delta y) - Q(x_0, y_0)]}{i \Delta y}$$

qui tend vers $\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0)$.

faisant un angle α avec Ox , remarquons sur la figure (4.7.4.) que

$$\mathcal{S}_{/D} = \mathcal{R}(O, \alpha) \circ \mathcal{S}_{/Ox} \circ \mathcal{R}(O, -\alpha),$$

d'où $Z = e^{i\alpha} \cdot \overline{(e^{-i\alpha} z)}$, soit finalement

$$(4.7.10.) \quad Z = \bar{z} \cdot e^{2i\alpha}.$$

Autres transformations

Citons l'**inversion** $\mathcal{I}(O, \mu)$ de centre O et de puissance μ , telle que O, M, N soient alignés et que $OM \cdot ON = \mu$ (fig. 3.4.5. et remarque 4.7.1.), et d'une façon générale les composées entre elles de toutes les transformations précédentes.

Dans tous les cas la transformation se traduit par une fonction complexe

$$(4.7.11.) \quad Z = f(z).$$

Inversement nous pouvons étudier la transformation ponctuelle associée à une fonction f donnée de l'ensemble $\mathbb{C}$ dans lui-même. Nous supposons que la fonction complexe f est suffisamment régulière : plus précisément nous la supposons **dérivable**, c'est-à-dire qu'il existe pour tout z_0 la limite

$$(4.7.12.) \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{C},$$

cette limite est notée $f'(z_0)$. C'est un certain nombre complexe $\rho \cdot e^{i\alpha}$.

Nous pouvons alors écrire l'approximation

$$(4.7.13.) \quad \Delta Z \approx \rho e^{i\alpha} \cdot \Delta z.$$

La transformation est assimilable, **au voisinage de** $M_0(z_0)$, à une **similitude** de rapport ρ et d'angle α .

Nous savons (paragraphe 2.1.) qu'une similitude conserve les **angles** d'une figure. Aussi deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) se coupant suivant un angle γ ont pour images deux courbes se coupant suivant le **même angle** γ (fig. 4.7.5.). Cela résulte de la relation (4.7.13.) et des propriétés des tangentes. On dit pour cela que (4.7.11.) représente une **transformation conforme**.

Les fonctions dérivables f sont dites *analytiques* et possèdent de nombreuses propriétés dont l'étude sort du cadre de cet ouvrage.

Exemple 4.7.6.

Soit $Z = f(z) = e^z$. Remarquons que $Z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Le point $M(x, y)$ devient le point N de module e^x et d'argument y .

Il est facile de calculer la dérivée de e^z qui est égale à e^z (exercice).

Nous abordons maintenant l'une des principales *applications physiques* du calcul complexe.

4.8. LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

Les calculs trigonométriques sont toujours assez compliqués. Les nombres complexes permettent souvent de simplifier ces calculs comme on l'a déjà vu au paragraphe 4.5. Nous traitons ici de la superposition de plusieurs mouvements sinusoïdaux de même fréquence, mais d'amplitudes et de phases différentes, du type

$$(4.8.1.) \quad y(t) = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Exemple 4.8.1.

Considérons le dispositif de la figure (4.8.1.) constitué par une roue animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω . La tige verticale mue par l'ergot tournant effectue un mouvement sinusoïdal de pulsation ω . Si la figure représente le dispositif à l'instant $t = 0$, nous posons $\varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_0})$.

A l'instant t , M_0 vient en M et

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \omega t + \varphi,$$

d'où

$$(4.8.2.) \quad \overline{OP} = y(t) = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Exemple 4.8.2.

Soit deux dispositifs en série du type précédent, de même vitesse

Nous obtenons deux expressions de la dérivée $f'(z_0)$, et nous constatons que les fonctions P et Q sont liées par deux relations

$$(4.7.14.) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ce sont les équations de *Cauchy-Riemann*.

Remarque 4.8.1. — *Augustin Fresnel* (1788-1827) est le fondateur de l'optique moderne. Il a introduit l'hypothèse ondulatoire dans l'étude de la diffraction de la lumière et des interférences lumineuses, notamment pour l'étude des cristaux.

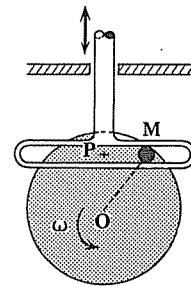


FIG. 4.8.1.

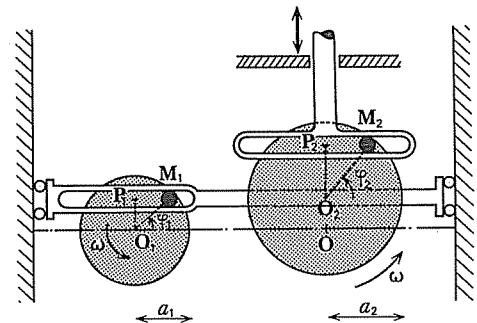


FIG. 4.8.2.

Remarque 4.8.1.

$$\overline{OP_2} = \overline{OO_2} + \overline{OP_2P_2}$$

comme $\overline{OO_2} = \overline{O_1P_1}$, nous avons

$$\overline{OP_2} = y_1(t) + y_2(t).$$

angulaire ω (fig. 4.8.2.). Les roues ont pour rayons a_1 et a_2 , les angles de phase sont φ_1 et φ_2 , soit

$$y_1(t) = \overline{O_1P_1} = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$y_2(t) = \overline{O_2P_2} = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Le mouvement résultant est décrit par

$$y(t) = \overline{OP_2} = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Nous montrerons plus loin que $y(t)$ est égal à un mouvement sinusoïdal unique de même pulsation ω

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi),$$

où a et φ sont à déterminer.

Exemple 4.8.3.

Soit un circuit R, L en série (fig. 4.8.3.) parcouru par un courant $i(t) = I \sin \omega t$. Nous considérons donc que l'intensité a une phase nulle

La tension u aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions u_1 de la résistance, u_2 de la bobine,

$$(4.8.2.) \quad u = u_1 + u_2.$$

Or nous savons que

$$u_1 = Ri = RI \sin \omega t,$$

$$u_2 = L \frac{di}{dt} = L \omega I \cos \omega t = L \omega I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Remplaçons u_1 et u_2 par leurs valeurs dans (4.8.2.)

$$(4.8.3.) \quad u = RI \sin \omega t + L \omega I \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

C'est une somme de deux signaux sinusoïdaux du type

$$(4.8.4.) \quad a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

avec

$$a_1 = RI, \quad \varphi_1 = 0, \quad a_2 = L\omega I, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dans tous les cas, nous associons à chaque fonction sinusoïdale $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ un **vecteur tournant** **OM** d'origine O, de vitesse

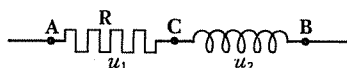


FIG. 4.8.3.

Exercice 4.8.1. — Effectuer la construction de Fresnel pour l'exemple 4.8.3.

Exercice 4.8.2. — Déterminer graphiquement (papier millimétrique et rapporteur) l'amplitude et la phase (par rapport à $\sin t$) de la somme

$$2 \sin t + \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right) + \cos t.$$

angulaire ω , d'argument φ à l'instant $t = 0$. L'affixe $z(t)$ du point M est alors

$$z(t) = a e^{j(\omega t + \varphi)},$$

où j désigne l'imaginaire pur de module 1.

$y(t)$ n'est autre que $\text{Im } z(t)$ à l'instant $t = 0$,

$$(4.8.5) \quad z(0) = a e^{j\varphi}.$$

Considérons la superposition $y_1 + y_2$ de **deux** mouvements sinusoïdaux avec les notations de (4.8.4.). Représentons (*fig.* 4.8.4.) les deux vecteurs tournants $\mathbf{OM}_1$ et $\mathbf{OM}_2$, ainsi que leur somme vectorielle $\mathbf{OM}$ qui tourne à la même vitesse angulaire ω . Nous savons (paragraphe 1.3.) que la projection de $\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_1 + \mathbf{OM}_2$ est la somme des projections, donc l'ordonnée y de M est égale à $y_1 + y_2$ (on peut aussi dire que l'affixe z du point M est égale à la somme des affixes z_1 et z_2 de M_1 et M_2 , et prendre les parties imaginaires). Avec un **double décimètre**, nous mesurons l'amplitude résultante $a = \mathbf{OM}$.

Avec un **rapporteur** nous mesurons la phase résultante $\varphi = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OM})$, (*fig.* 4.8.5.).

La construction de Fresnel est encore valable dans le cas de trois fonctions sinusoïdales (exemple 4.8.4.), et plus généralement pour un nombre quelconque n du type $a \sin(\omega t + \varphi)$.

Exemple 4.8.4.

Le courant alternatif triphasé consiste en trois courants circulant dans trois conducteurs (*fig.* 4.8.7). Ces courants i_1 , i_2 et i_3 proviennent de trois générateurs G_1 , G_2 et G_3 délivrant des tensions sinusoïdales de même pulsation ω :

$$\begin{aligned} e_1 &= E \cdot \sin \omega t, \\ e_2 &= E \cdot \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \\ e_3 &= E \cdot \sin \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que les trois tensions ont la même amplitude E et qu'elles sont déphasées de $\pm \frac{2\pi}{3}$.

Leur somme est nulle car les vecteurs tournants peuvent être disposés comme les côtés d'un triangle équilatéral (*fig.* 4.8.8.).

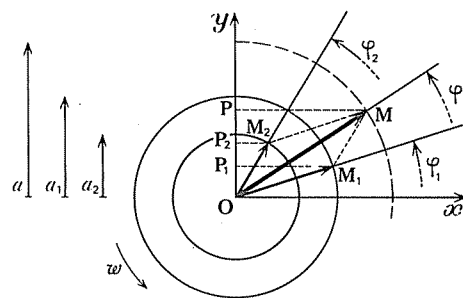


FIG. 4.8.4.

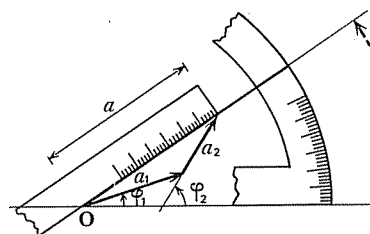
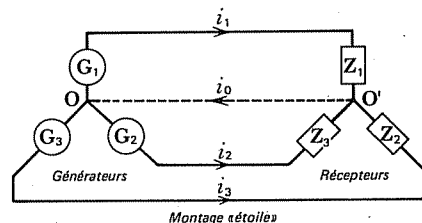
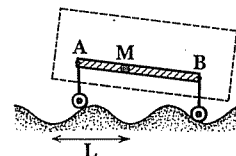


FIG. 4.8.5.

Exercice 4.8.3. — Considérons le véhicule (*fig.* 4.8.6.) sans ressorts ni amortisseurs, roulant sur un profil sinusoïdal de période L . Soit M un point du châssis AB, situé à une distance x de A, et D la distance AB. Calculer en fonction de L , D et x l'amplitude a du mouvement vertical effectué par le point M. Étudier les différents cas possibles.

Montage étoilée
FIG. 4.8.7.

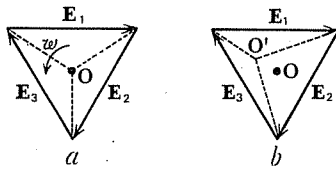


FIG. 4.8.8.

Si les impédances Z_1, Z_2, Z_3 sont égales, la somme des courants est également nulle.

Le fil OO' n'est traversé par aucun courant et on l'appelle **fil neutre**. Posons

$$u_1 = v_1 - v_2,$$

$$u_2 = v_2 - v_3,$$

$$u_3 = v_3 - v_1,$$

ce sont les tensions entre les trois fils deux à deux.

Si les impédances des récepteurs ne sont pas égales, le système est déséquilibré (fig. 4.8.8. b). On utilise alors un neutre fictif (point O) en plus du neutre réel (point O'). Les tensions sont évaluées par rapport à O et à O'. C'est le point de départ des constructions de Fresnel effectuées pour ces systèmes.

Méthode numérique

L'ordinateur effectue facilement les calculs trigonométriques les plus fastidieux.

Commençons par un cas particulier qui nous servira pour résoudre le cas général.

Exemple 4.8.5.

Soit la somme de fonctions

$$(4.8.6.) \quad y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

que nous voulons transformer en $a \sin(\omega t + \varphi)$, soit

$$(4.8.7.) \quad y(t) = (a \sin \varphi) \cos \omega t + (a \cos \varphi) \sin \omega t.$$

En comparant (4.8.6.) et (4.8.7.) nous déduisons

$$(4.8.8.) \quad A = a \sin \varphi, \quad B = a \cos \varphi,$$

d'où l'amplitude a et la phase φ :

$$(4.8.9.) \quad a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \text{Arc tg } \frac{A}{B} + k\pi.$$

L'organigramme (4.8.9) ci-contre présente le calcul précis de la phase φ suivant les cas de figure.

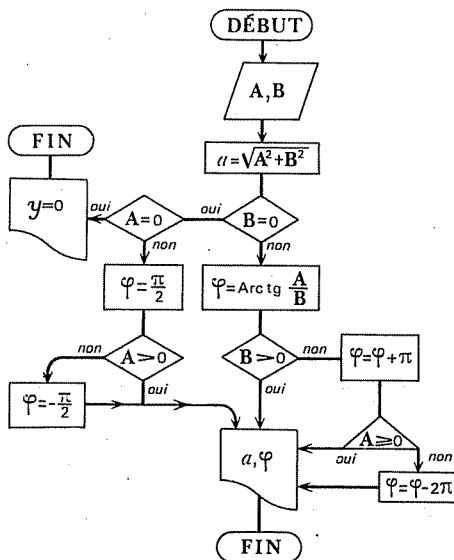


FIG. 4.8.9.

Considérons maintenant le cas général de n fonctions sinusoïdales

$$(4.8.10.) \quad y_k(t) = a_k \sin(\omega t + \varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n;$$

chacune d'entre elles peut prendre la forme (4.8.6.). La somme s'écrit

$$(4.8.11.) \quad \sum_1^n y_k(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

avec

$$(4.8.12.) \quad A = \sum_1^n a_k \sin \varphi_k, \quad B = \sum_1^n a_k \cos \varphi_k.$$

Il n'y a plus qu'à appliquer la méthode de l'exemple (4.8.5.), comme le montre l'organigramme (4.8.10).

Le lecteur aura avantage à mettre au point le programme qui rend les mêmes services que la construction de Fresnel.

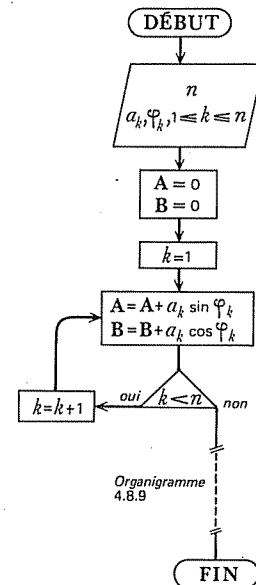


FIG. 4.8.10.

Ce chapitre achève l'étude de la géométrie plane. Nous allons aborder maintenant l'étude détaillée des *figures de l'espace* à la suite des notions fournies par les chapitres 0, 1 et 2.

Exercice 4.8.4. — Déterminer numériquement l'amplitude et la phase de

$$x(t) = \sum_{k=1}^n k \cdot \sin\left(2\pi t + \frac{2\pi}{k}\right).$$

4.9. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

4.9.1. — Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres suivants :

$$\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}, \quad \frac{(2+i)^3 + (1-i)^2}{1+i+(2i-1)^2}.$$

4.9.2. — Calculer le module et l'argument de

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

4.9.3. — Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$(1 + \cos a + i \sin a), \quad [\cos a + i (\sin a + 1)],$$

$$\frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b},$$

où a et b sont des paramètres.

4.9.4. — Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$Z = \frac{(x+iy)^2}{x+iy+i}.$$

Quel est le lieu des points M d'affixe $z = x + iy$, tels que Z soit imaginaire pur ? Même question pour Z réel.

4.9.5. — Calculer z tel que $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient même module.

4.9.6. — Soit A et B les points d'affixe a et b . Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k \quad (\text{avec } k > 0)$$

est un cercle si $k \neq 1$ et la médiatrice de AB si $k = 1$.

4.9.7. — Soit l'équation

$$(E) \quad iz^3 + (2i-1)z^2 + (i+4)z + 3(2i-1) = 0.$$

- a) Montrer que (E) admet une racine réelle z_0 , que l'on calculera.
b) En déduire les autres solutions de (E).

4.9.8. — Chercher les solutions complexes des équations

$$z^2 + 4z + 16 = 0, \\ z^8 + 4z^4 + 16 = 0.$$

4.9.9. — Résoudre l'équation

$$(1+z)^5 = (1-z)^5.$$

On pourra exprimer z à l'aide du nombre $e^{\frac{2i\pi}{5}}$

4.9.10. — Établir l'identité suivante :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2), \quad z \text{ et } z' \text{ dans } \mathbb{C},$$

et en donner une interprétation géométrique.

4.9.11. — Quelles relations doivent exister entre les nombres complexes dont les images sont

- a) trois points alignés,
b) les sommets d'un triangle équilatéral?

4.9.12. — Soit trois points M_1, M_2 et M_3 d'affixes z_1, z_2 et z_3 . Montrer que l'aire du triangle est égale à

$$\frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_3 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - z_2 \cdot \bar{z}_3) \right|.$$

Exemple : $z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = -i$.

5.0. INTRODUCTION

Ce chapitre entreprend l'étude des formes diverses des lignes et des surfaces rencontrées dans la réalité.

Ces objets se représentent en projection sur un plan et les méthodes modernes permettent maintenant de réaliser les figures à l'aide de l'ordinateur muni d'une table traçante.

Bien entendu l'utilisateur ne peut mettre en œuvre ces techniques avec profit que si l'on sait relier la *forme* et les propriétés des figures au calcul analytique lié à leur *mise en équation* dans un repère donné.

L'équation des lignes et des surfaces est le point de départ, pour la détermination des plans tangents, des lignes intersections de deux surfaces, des surfaces engendrées par une ligne variable, etc.

5.1. LE PLAN ET LA LIGNE DROITE DANS L'ESPACE

Ce sont deux notions indissociables. Un plan est connu par la direction de sa normale (et un point). Une droite est l'intersection de deux plans.

Remarque 5.1.1. — Il est facile de voir qu'une équation du type

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

représente un plan de vecteur normal $\mathbf{n} = (A, B, C)$ si $(A, B, C) \neq \mathbf{0}$. En effet, si $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point fixe de l'espace vérifiant (5.1.1.), nous pouvons écrire

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ceci signifie que le vecteur $\mathbf{n} = (A, B, C)$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$. Ainsi M décrit le plan passant par M_0 , orthogonal à $\mathbf{n}$.

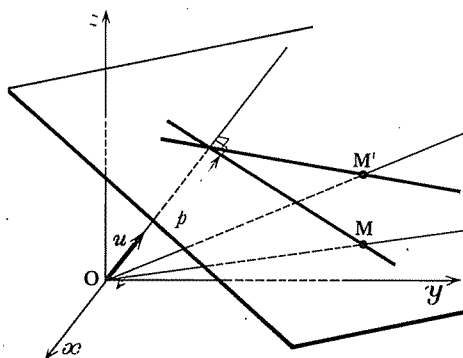


FIG. 5.1.1.

Remarque 5.1.2. — Désignons par $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$ les coordonnées des points où le plan (P) coupe les axes Ox , Oy et Oz (fig. 5.1.2.).

Nous avons

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

L'équation (5.1.1.) prend la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Nous avons vu au paragraphe 1.7. que, l'espace étant rapporté à un repère orthonormé, un plan (P) est représenté par une équation du premier degré.

$$(5.1.1.) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

et réciproquement.

A , B et C sont les *coefficients directeurs de la direction normale au plan*. Nous savons (relations 1.7.2.) que les cosinus directeurs de cette direction normale au plan sont

$$(5.1.2.) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{cases}$$

La distance de l'origine des coordonnées au plan (P) considéré est

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Donc, pour que $M(x, y, z)$ appartienne à un plan (P), il faut, et il suffit, que le produit scalaire du vecteur $\mathbf{OM}$ et du vecteur unitaire $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ ait pour valeur p , distance de l'origine des coordonnées au plan (P) (fig. 5.1.1.), c'est-à-dire

$$(5.1.3.) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0.$$

Formes remarquables de l'équation (5.1.1.)

Si l'un des coefficients A , B , C est nul, le plan est parallèle à l'axe de coordonnées correspondant.

Par exemple, si $C = 0$, le plan

$$Ax + By + D = 0$$

est parallèle à l'axe Oz .

Si D est nul, le plan passe par l'origine.

Équation d'un plan défini par certaines conditions**Exemple 5.1.1.**

Former l'équation d'un plan mené par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ perpendiculairement à une direction donnée de coefficients directeurs $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

L'équation est de la forme

$$\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z + q = 0,$$

q est une inconnue que l'on détermine en écrivant que le plan passe par le point M_0 .

Nous avons ainsi

$$q = -\alpha_0 x_0 - \beta_0 y_0 - \gamma_0 z_0.$$

L'équation cherchée s'écrit

$$(5.1.4) \quad \alpha_0 (x - x_0) + \beta_0 (y - y_0) + \gamma_0 (z - z_0) = 0.$$

Exemple 5.1.2.

Équation du plan mené par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ parallèlement à deux directions distinctes données (Δ) et (Δ') de vecteurs directeurs $u(\alpha, \beta, \gamma)$ et $u'(\alpha', \beta', \gamma')$.

La normale à ce plan est dirigée par le vecteur $n = u \wedge u'$, d'où les coefficients directeurs de la normale

$$l = \beta\gamma' - \gamma\beta',$$

$$m = \gamma\alpha' - \alpha\gamma',$$

$$n = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

L'équation du plan cherché est

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0,$$

soit
$$M_0 M \cdot n = (M_0 M, u, u') = 0,$$

que l'on a coutume d'écrire en utilisant les déterminants (chapitre 1, tome III) :

$$(5.1.5) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

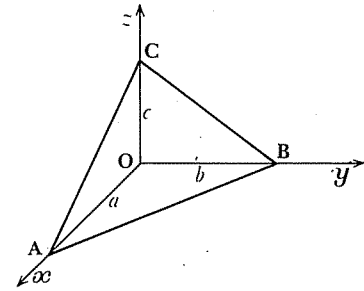


FIG. 5.1.2.

Exercice 5.1.1. — Soit le plan (P) d'équation

$$2x - 3y + 5z = 10.$$

a) Écrire l'équation du plan parallèle à (P) et passant par $(0, 0, 0)$.

b) Peut-on écrire l'équation du plan perpendiculaire à (P) et passant par $(0, 0, 0)$?

Exercice 5.1.2. — Écrire l'équation du plan (P) passant par $M_0(3, 0, 1)$, parallèle au vecteur

$$V = (1, -1, 1)$$

et perpendiculaire au plan (Q) d'équation

$$x - y + 2z - 1 = 0.$$

Remarque 5.1.3. — Pour déterminer l'équation du plan de l'exemple (5.1.2.), nous pouvons aussi écrire

$$M_0 M = \lambda u + \mu v.$$

Nous obtenons alors les équations paramétriques du plan

$$x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha', \quad y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta',$$

$$z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma',$$

valables dans un repère quelconque.

L'équation (5.1.5.), valable dans le cas d'un repère quelconque, signifie aussi que les vecteurs $M_0 M$, u , u' sont linéairement dépendants (tome III, chapitre 1).

Remarque 5.1.4. — Pour que le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

passé par les trois points M_1, M_2 et M_3 , il faut, et il suffit, que

$$A x_1 + B y_1 + C z_1 + D = 0,$$

$$A x_2 + B y_2 + C z_2 + D = 0,$$

$$A x_3 + B y_3 + C z_3 + D = 0.$$

Si l'on élimine A, B, C et D entre les quatre équations homogènes ainsi formées, le plan passant par M_1, M_2 et M_3 peut être défini par l'équation (cf. chapitre 1, tome III)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 5.1.3. — Écrire l'équation du plan (P) passant par les points $P(-2, 1, 3)$, $Q(2, -1, 0)$ et $S(0, -3, 2)$. Déterminer

a) la distance du point O au plan (P),

b) les intersections de (P) avec les axes de coordonnées,

c) les intersections de (P) avec les faces du trièdre $Oxyz$.

Remarque 5.1.5. — Cherchons les coefficients directeurs de l'intersection (D) dans le cas d'un repère quelconque. Transportons les plans (P) et (P') à l'origine des coordonnées parallèlement à eux-mêmes.

Leurs équations deviennent

$$Ax + By + Cz = 0;$$

$$A'x + B'y + C'z = 0.$$

Ce système est équivalent au système (5.1.8.) (chapitre 1, tome III) écrit sous cette forme en convenant que si un dénominateur est nul, le numérateur l'est aussi.

Ainsi les coefficients directeurs de la droite d'intersection sont les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

Exemple 5.1.3.

Équation du plan passant par trois points donnés de l'espace.

Soit $M_i(x_i, y_i, z_i)$, avec $i = 1, 2, 3$ les trois points considérés.

Le vecteur $\mathbf{n} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3$ est un vecteur normal au plan passant par M_1, M_2 et M_3 .

L'équation cherchée se déduit en écrivant

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M} = 0,$$

soit

$$(5.1.6.) \quad l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0,$$

si l, m et n désignent les composantes de $\mathbf{n}$, (cf. remarque 5.1.4.).

Intersection de deux plans

Si deux plans se rencontrent (chapitre 0), leur intersection est une droite (Δ) que nous allons représenter de diverses façons.

Soit deux plans (P) et (P') d'équations respectives

$$(5.1.7.) \quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Si les coefficients directeurs A, B, C et A', B', C' sont proportionnels ($A, B, C = \lambda(A', B', C')$), les deux plans ont même direction de normale, ils sont parallèles.

Ils sont confondus si, de plus

$$D = \lambda D',$$

soit

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \lambda = \frac{D}{D'}.$$

Sinon notons $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$ les vecteurs normaux à (P) et à (P'), de composantes (A, B, C) et (A', B', C') . La droite d'intersection (D) est dirigée par le vecteur $\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'$.

En particulier, la parallèle (D_0) à (D) menée par l'origine a pour équations

$$(5.1.8.) \quad \frac{x}{BC' - CB'} = \frac{y}{CA' - AC'} = \frac{z}{AB' - BA'}.$$

Si l'on suppose $AB' - BA' \neq 0$, la droite (D) n'est pas parallèle au

plan xOy . Il est facile de déterminer un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de (D) en fixant z_0 , et en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 = D - Cz_0, \\ A'x_0 + B'y_0 = D' - C'z_0. \end{cases}$$

Les équations de (D) sont alors

$$(5.1.9.) \quad \frac{x - x_0}{BC' - CB'} = \frac{y - y_0}{CA' - AC'} = \frac{z - z_0}{AB' - BA'}$$

Si au contraire $AB' - BA' = 0$, la droite (D) est parallèle au plan xOy , et la droite (D₀), contenue dans ce plan, a pour équation

$$y = \frac{CA' - AC'}{BC' - CB'} \cdot x = mx.$$

La droite (D) a pour altitude

$$z = \frac{BD' - DB'}{CB' - BC'} = h.$$

Elle est donc définie par deux équations

$$(5.1.10.) \quad \begin{cases} y = mx + k, \\ z = h, \end{cases} \quad (\text{exercice 5.1.5.}).$$

Exemple 5.1.4.

Deux toitures identiques (fig. 5.1.3.) se croisent à angle droit. Déterminons les droites d'intersection des deux toitures en choisissant un repère orthonormé au sol (axes parallèles aux arêtes). Les plans (P₁) et (Q₁) ont pour équations

$$\begin{aligned} (P_1) \quad z &= H + h - y, & \text{normal à } \mathbf{n}_1(0, 1, 1), \\ (Q_1) \quad z &= H + h - x, & \text{normal à } \mathbf{v}_1(1, 0, 1). \end{aligned}$$

La droite SI_1 est dirigée par le vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)$, et est inclinée de $35,15^\circ$ avec la verticale car

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Elle a pour équations

$$x = y = \frac{z - (H + h)}{-1}.$$

tirés du tableau des coefficients

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

pris avec les signes +, - et + (paragraphe 1.11., tome III) suivant la même règle que celle du produit vectoriel.

Exercice 5.1.4. — Déterminer les équations (5.1.8.) pour les deux plans

$$(P) \quad x + y + z = 3,$$

$$(P') \quad x + y - z = 1.$$

Exercice 5.1.5. — Calculer le nombre k du système (5.1.10.) représentant la droite d'intersection de deux plans (P) et (P') d'équations

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

quand $AB' - BA' = 0$.

Reprendre le raisonnement et représenter les droites quand $BC' - CB' = 0$ ou $CA' - AC' = 0$.

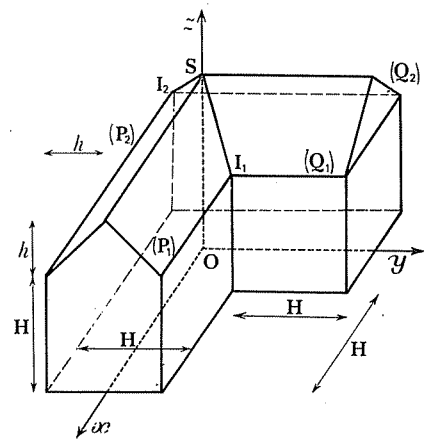


FIG. 5.1.3.

Exercice 5.1.6. — Déterminer la surface totale de la toiture de la figure 5.1.3.

Exercice 5.1.7. — Écrire l'équation du plan mené par la droite d'intersection des plans dont les équations sont

$$x + y - z + 2 = 0, \quad x - y + z - 2 = 0$$

et par le point A (2, -1, 1).

Remarque 5.1.6. — Si les plans (P) et (P') sont parallèles (soit A', B' et C' proportionnels à A, B et C), alors A + λA', B + λB' et C + λC' sont quel que soit λ proportionnels à A, B et C. Tous les plans d'équation (5.1.7.) sont parallèles à (P) et à (P') et forment un faisceau de plans parallèles.

La droite SI₂, symétrique de SI₁ par rapport à Oz, a pour équations

$$x = y = z - (H + h).$$

La toiture, fermée par des plans verticaux (P₃) et (Q₃), est constituée par quatre trapèzes et deux triangles.

Faisceau linéaire de plans

Si les plans (P) et (P') définis par les équations (5.1.7.) ont une **droite commune** (Δ), tous les plans définis par l'équation générale

(5.1.11.) $(Ax + By + Cz + D) + \lambda (A'x + B'y + C'z + D') = 0$, dans laquelle λ désigne un paramètre arbitraire, **passent par la droite** (Δ).

La famille des plans (5.1.7.) est appelée **faisceau linéaire de plans**. Comme pour les faisceaux linéaires de droites (paragraphe 3.2.), posons

$$P \equiv Ax + By + Cz + D,$$

$$P' \equiv A'x + B'y + C'z + D'.$$

L'équation (5.1.11.) s'écrit

$$P + \lambda P' = 0,$$

ou, avec deux paramètres homogènes μ et μ' (définis à une constante multiplicative près) tels que $\lambda = \frac{\mu'}{\mu}$,

$$(5.1.12.) \quad \mu P + \mu' P' = 0.$$

Exemple 5.1.5.

Équation d'un plan mené par une droite (Δ) parallèlement à l'axe Oz.

Reprenons (5.1.11.) sous la forme

$$P'' = P + \lambda P' = 0.$$

Le plan cherché (P'') étant parallèle à l'axe Oz, nous avons

$$C + \lambda C' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = -\frac{C}{C'} \quad \text{avec} \quad C' \neq 0,$$

d'où l'équation cherchée

$$(AC' - CA')x + (BC' - CB')y + (DC' - CD') = 0.$$

Exercice 5.1.8. — Soit les plans (P) et (P') d'équations

$$(P) \quad x + y + 1 = 0, \quad (P') \quad x - y + 2z = 0$$

et les plans (Q) et (Q') d'équations

$$(Q) \quad 2x + 2y + 1 = 0, \quad (Q') \quad 3x - 3y + 6z + 1 = 0.$$

Écrire l'équation du plan contenant les droites d'intersection de (P) et de (P'), ainsi que de (Q) et de (Q').

Exemple 5.1.6.

Équation d'un plan passant par (Δ) et par l'origine.

Supposons que (Δ) ne passe pas par l'origine. Nous voulons écrire

$$P''' = P + \lambda P' = 0.$$

Le plan devant passer par l'origine $(0, 0, 0)$ nous aurons

$$D + \lambda D' = 0,$$

soit
$$\lambda = -\frac{D}{D'} \quad \text{si} \quad D' \neq 0.$$

Le plan cherché a donc pour équation

$$(AD' - DA')x + (BD' - DB')y + (CD' - DC')z = 0.$$

Exemple 5.1.7.

Conditions pour que trois plans passent par une même droite.

Soit $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ et $P_3 = 0$ les équations des trois plans.

Si (P_1) et (P_2) se coupent suivant une droite (Δ) , pour que (P_3) passe par cette droite, il faut, et il suffit, que (P_3) appartienne au faisceau défini par (P_1) et (P_2) . Ceci signifie que l'on doit pouvoir trouver trois coefficients constants α_1 , α_2 et α_3 tels que

$$(5.1.13.) \quad \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0,$$

cette condition est précisée dans la remarque (5.1.7.).

Représentation paramétrique des droites de l'espace

Soit une droite (Δ) , de direction donnée et passant par un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) .

Soit α , β et γ les cosinus directeurs de (Δ) sur laquelle est choisi un sens positif de parcours (fig. 5.1.4.).

Un point M arbitraire de (Δ) est connu par la mesure algébrique λ du vecteur $M_0 M$.

Nous avons
$$M_0 M = OM - OM_0,$$

soit

$$M_0 M = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$$

et

$$M_0 M = \lambda \cdot u = \lambda \cdot [\alpha i + \beta j + \gamma k],$$

Remarque 5.1.7. — Soit l'équation

$$A_i x + B_i y + C_i z = D_i$$

du plan (P_i) , $i = 1, 2, 3$. La condition (5.1.13.) signifie que les trois vecteurs $V_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$ de $\mathbb{R}^4$ sont linéairement dépendants (voir tome III, paragraphe 0.6.).

Exercice 5.1.9. — Les trois faces du trièdre ont pour équations

$$P = Ax + By + Cz = 0,$$

$$P' = A'x + B'y + C'z = 0,$$

$$P'' = A''x + B''y + C''z = 0.$$

Former les équations des plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée et montrer que ces plans passent par une même droite (D) .

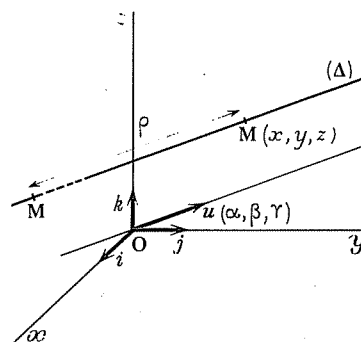


FIG. 5.1.4.

Exercice 5.1.10. — Déterminer les équations paramétriques de la droite (D) passant par le point M_0 et de vecteur directeur V :

- a) $M_0(3, 0, 1), \quad V = (1, -1, 1),$
 b) $M_0(1, 1, 2), \quad V = (-3, 2, 0),$
 c) $M_0(1, -2, 5), \quad V = (-4, -6, 8).$

Exercice 5.1.11. — Déterminer les équations paramétriques de la droite (D) passant par les points M_0 et M_1 donnés

- a) $M_0 = (2, 3, 1), \quad M_1 = (1, -2, 3),$
 b) $M_0 = (1, 2, 1), \quad M_1 = (3, 1, 1).$

Exercice 5.1.12. — Soit trois points A (1, 2, 1), B (3, 1, 1) et C (1, 0, 1) de l'espace.

Déterminer les équations des droites, supports des côtés du triangle ABC.

avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, d'où la représentation paramétrique de la droite :

$$(5.1.14.) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot \lambda, \\ y = y_0 + \beta \cdot \lambda, \\ z = z_0 + \gamma \cdot \lambda, \end{cases}$$

où λ est le paramètre.

L'élimination du paramètre donne l'équation (cf. 5.1.9.)

$$(5.1.15.) \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

α, β et γ étant les cosinus directeurs de la droite.

Lorsque les coefficients directeurs A, B et C (et non les cosinus directeurs) sont connus, les équations (5.1.14.) restent vraies en remplaçant α, β et γ par A, B et C et l'équation (5.1.15.) s'écrit

$$(5.1.16.) \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Exemple 5.1.8.

Cherchons la distance d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à un plan (P) défini par l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

[Dans l'exemple (1.7.3.), nous avons utilisé le produit vectoriel.]

Les équations de la perpendiculaire au plan (fig. 5.1.5.) sont

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \lambda,$$

avec

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Écrivons que le point M (x, y, z) appartient au plan (P)

$$A(x_0 + \alpha\lambda) + B(y_0 + \beta\lambda) + C(z_0 + \gamma\lambda) + D = 0,$$

soit

$$\lambda = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\alpha + B\beta + C\gamma},$$

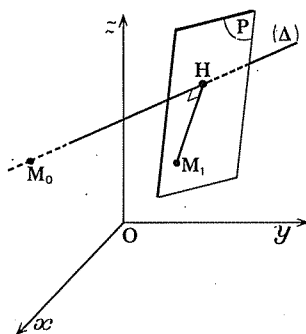


FIG. 5.1.5.

Exercice 5.1.13. — Calculer la distance de l'origine des coordonnées à la droite joignant les points P (0, λ , h) et Q (μ , 0, $-h$). Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que cette distance ait pour valeur h .

or $|A\alpha + B\beta + C\gamma| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, d'où la distance cherchée est

$$(5.1.17.) \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Exemple 5.1.9.

Cherchons la distance d'un point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ à une droite (Δ) de l'espace de cosinus directeurs α, β et γ (cf. exemple 1.7.4.). La droite a pour équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Le plan (P) mené par M_1 perpendiculairement à (Δ) a pour équation

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0.$$

Son intersection H avec (Δ) (fig. 5.1.4.) est telle que, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|\mathbf{KH}\|^2 = \|\mathbf{M}_0\mathbf{K}\|^2 - \|\mathbf{M}_0\mathbf{H}\|^2.$$

M_0H étant la distance de M_0 au plan (P), nous avons d'après la formule (5.1.17.)

$$\|\mathbf{M}_0\mathbf{H}\| = |\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1)|,$$

puisque α, β et γ vérifient $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Or $\|\mathbf{M}_0\mathbf{K}\|^2 = \mathbf{M}_0\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}_0\mathbf{K} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$, d'où la distance KH cherchée.

Exemple 5.1.10.

Soit un miroir plan coïncidant avec le plan xOy (fig. 5.1.6.).

Une source lumineuse est placée en $M_0(0, 0, 1)$. Cherchons la direction du rayon qui, après réflexion, éclaire le point $M_1(2, 2, 1)$.

Le rayon réfléchi passe par $M'_0(0, 0, -1)$, image de M_0 dans le miroir. C'est donc la droite M'_0M_1 d'équations

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{2}$$

Exercice 5.1.14. — Déterminer le point d'intersection, s'il existe, du plan (P) et de la droite (D)

a) (P) $x - y + 3z - 6 = 0$,

$$(D) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

b) (P) $x - y + 2z - 1 = 0$,

(D) déterminée par $M_0(3, 0, 1)$, de vecteur directeur $\mathbf{V} = (1, -1, 1)$.

Exercice 5.1.15. — Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites (D) et (Δ) d'équations

$$(D) \quad \begin{cases} x = 5 - 2\mu, \\ y = -2 + 3\mu, \\ z = \mu; \end{cases}$$

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2\lambda + 2, \\ z = -4\lambda - 2. \end{cases}$$

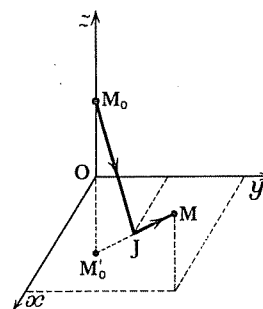


FIG. 5.1.6.

Exercice 5.1.16. — Traiter à nouveau l'exemple (5.1.10.) en plaçant le miroir selon le plan (P) d'équation $x + y - z - 1 = 0$ (faire la figure).

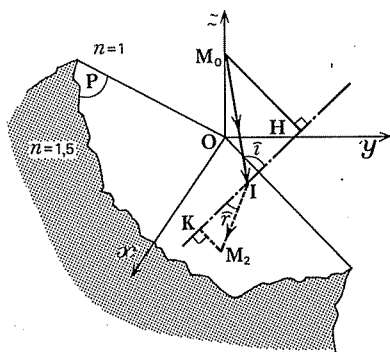


FIG. 5.1.7.

qui rencontre le miroir en J (1, 1, 0). Le rayon incident $M_0 J$ a pour équations

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Exemple 5.1.11.

Soit un **dioptre** plan (fig. 5.1.7.) coïncidant avec le plan (P) d'équation $x - y - z = 0$. Cherchons à éclairer le point M_2 (2, 1, 0). Les rayons $M_0 I$ et IM_2 sont situés dans le plan (Q) passant par $M_0 M_2$ et normal au dioptre, dont l'équation est

$$2x - y + 3(z - 1) = 0 \quad (\text{exercice}).$$

Le point I appartient à (D), intersection de (P) et (Q), d'équations

$$x = 3 + 4\lambda, \quad y = 3 + 5\lambda, \quad z = -\lambda.$$

$$\text{Nous avons} \quad \sin i = \frac{\|M_0 H\|}{\|M_0 I\|} \quad \text{et} \quad \sin r = \frac{\|KM_2\|}{\|IM_2\|},$$

si H et K sont les projections de M_0 et M_2 sur la normale en I au dioptre (P). Les numérateurs sont les distances d'un point à une droite.

Alors on exprime que $\sin i = n \sin r$, ce qui amène une équation du quatrième degré d'inconnue λ , d'où la position du point I (exercice).

5.2. LES COURBES DANS L'ESPACE

Nous avons vu paragraphe 0.7. (relation 0.7.3.) qu'une courbe (C) de l'espace peut se représenter par une fonction vectorielle.

$$(5.2.1.) \quad \mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

La **représentation paramétrique** de la courbe (C) (fig. 5.2.1.) est alors

$$(5.2.2.) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Nous savons également (cf. paragraphe 1.8.) que la tangente au point M (t_0) de la courbe d'équation (5.2.1.) (ou 5.2.2.) est dirigée par le vecteur

$$\mathbf{r}'(t_0) = f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k},$$

si $\mathbf{r}(t_0)$ est dérivable et si $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Nous nous placerons dans ce cas

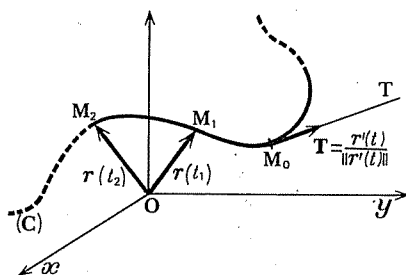


FIG. 5.2.1.

dans la suite. Un vecteur unitaire de la tangente (relation 1.8.3.) est alors

$$t = \frac{r'(t_0)}{\sqrt{r'(t_0) \cdot r'(t_0)}}.$$

L'équation de la tangente à la courbe (C) d'équations paramétriques (5.2.2.), au point M (t_0) de coordonnées

$$x_0 = f(t_0), \quad y_0 = g(t_0), \quad z_0 = h(t_0),$$

est

$$(5.2.3.) \quad \frac{X - x_0}{f'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{g'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{h'(t_0)}.$$

Au point M (t_0) d'une courbe (C) de l'espace, il existe **une infinité de droites qui sont à la courbe** (C) en ce point (fig. 5.2.2.). Leur lieu géométrique est un plan perpendiculaire en M (t_0) à la courbe (C) dont la direction normale est la direction de la tangente à la courbe (C) M (t_0). C'est le **plan normal** (N_0) à la courbe (C) en M (t_0).

Ce plan (N_0) a donc pour équation

$$(5.2.4.) \quad (X - x_0) f'(t_0) + (Y - y_0) g'(t_0) + (Z - z_0) h'(t_0) = 0.$$

Parmi toutes ces normales en M (t_0) à la courbe (C), nous allons définir ce que l'on appelle la **normale principale** en M à la courbe (C).

Plan osculateur. Normale principale. Binormale

Tous les plans passant par un point M (t) de coordonnées

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

de la courbe (C) ont pour équation générale

$$(5.2.5.) \quad u(X - x) + v(Y - y) + w(Z - z) = 0.$$

Définition 5.2.1.

On appelle **plan osculateur** à la courbe (C) au point M (t_0), la position limite, quand $\Delta t \rightarrow 0$, du plan qui contient la tangente M (t_0) T et le point M ($t_0 + \Delta t$) si celui-ci n'appartient pas à la tangente au point M (t_0) pour $|\Delta t|$ suffisamment petit (fig. 5.2.3.).

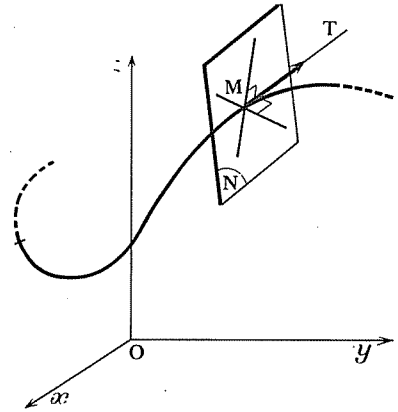


FIG. 5.2.2.

Remarque 5.2.1. — Si $r'(t_0) = 0$, le point M (t_0) est *stationnaire* pour $t = t_0$. Comme dans le cas des courbes planes, si $r(t)$ est p fois continûment dérivable au voisinage de t_0 et si

$r'(t_0) = r''(t_0) = \dots = r^{(p-1)}(t_0) \neq 0, r^{(p)}(t_0) \neq 0$, la courbe (C) admet pour tangente au point M (t_0) une droite parallèle au vecteur $r^{(p)}(t_0)$.

Exercice 5.2.1. — Déterminer la tangente à l'instant zéro des courbes paramétrées suivantes :

a) $x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi,$

$z = h\varphi$ (hélice circulaire);

b) $x = t^2, \quad y = t^3, \quad z = t^4;$

c) $x = e^{-2t}, \quad y = e^{-2t} \cos t, \quad z = e^{-2t} \sin t.$

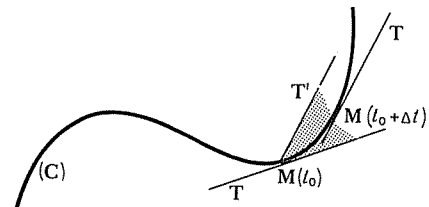


FIG. 5.2.3.

Remarque 5.2.2. — Si la courbe (C) est une droite, il n'existe pas de plan osculateur, puisque la droite est sa propre tangente en tout point. Si la courbe (C) est une courbe plane telle que $M(t)$ n'appartienne pas à la tangente en $M(t_0)$ pour $|t - t_0|$ suffisamment petit, le plan osculateur est le plan de la courbe.

Exercice 5.2.2. — Soit la courbe d'équations paramétrées

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

Montrer qu'elle admet en tout point $M(t)$ un plan osculateur, dont on déterminera l'équation.

Exercice 5.2.3. — Étudier l'existence de plan osculateur pour l'hélice circulaire

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = b\varphi.$$

Exercice 5.2.4. — Montrer que les coefficients directeurs l , m et n de la normale principale vérifient avec nos notations

$$\begin{aligned} x'l + y'm + z'n &= 0, \\ Al + Bm + Cn &= 0, \end{aligned}$$

donc peuvent être égaux à

$$l = Bz' - Cy', \quad m = Cx' - Az', \quad n = Ay' - Bx'.$$

Quelle est l'équation du **plan rectifiant** ?

Quels sont les coefficients directeurs de la binormale ?

Le plan (5.2.5.) contient la tangente au point $M(t_0)$, de coefficients directeurs $f'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$ et la droite $M(t_0)M(t_0 + \Delta t)$.

Soit Q un point du plan, de coordonnées X , Y et Z .

Écrivons que les vecteurs $M(t_0)Q$, $M(t_0)M(t_0 + \Delta t)$ et un vecteur tangent en $M(t_0)$ sont linéairement dépendants, soit

$$\begin{vmatrix} X - f(t_0) & Y - g(t_0) & Z - h(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) & h'(t_0) \\ f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) & g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) & h(t_0 + \Delta t) - h(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que la courbe (C) ait un vecteur position $r(t)$ deux fois continûment dérivable dans un voisinage de t_0 . Alors, nous pouvons écrire

$$f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \Delta t f'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t_0 + c_1 \Delta t),$$

avec $0 < c_1 < 1$, et ainsi de suite.

Par opérations élémentaires, le déterminant précédent se transforme donc en

$$\begin{vmatrix} X - f(t_0) & Y - g(t_0) & Z - h(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) & h'(t_0) \\ f''(t_0 + c_1 \Delta t) & g''(t_0 + c_2 \Delta t) & h''(t_0 + c_3 \Delta t) \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque Δt tend vers zéro, nous obtenons, en remplaçant $f(t_0)$ par x , $g(t_0)$ par y et $h(t_0)$ par z ,

$$(5.2.6) \quad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si $r'(t_0)$ n'est pas colinéaire à $r''(t_0)$, c'est l'équation du **plan osculateur** ($\mathcal{O}$).

Les coefficients directeurs du plan osculateur sont

$$(5.2.7.) \quad A = y' z'' - z' y'', \quad B = z' x'' - x' z'', \quad C = x' y'' - y' x''$$

et son équation

$$(5.2.8.) \quad A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Ce **plan osculateur** dont les coefficients directeurs sont A , B et C **contient** les vecteurs de composantes

$$x' = f'(t_0), \quad y' = g'(t_0), \quad z' = h'(t_0)$$

et $x'' = f''(t_0)$, $y'' = g''(t_0)$, $z'' = h''(t_0)$,

lesquels ne sont pas autre chose, si t désigne le temps, que **le vecteur vitesse et le vecteur accélération du mouvement du point $M(t_0)$** (cf. paragraphe 2.1.8.).

Définition 5.2.2.

La normale en $M(t)$, située dans le plan osculateur, s'appelle **normale principale** (fig. 5.2.4.).

Définition 5.2.3.

La perpendiculaire en $M(t)$ au plan osculateur est appelée **binormale** (fig. 5.2.4.).

Les trois droites, MT, MN et MB (fig. 5.2.4.) respectivement **tangente**, **normale** et **binormale** forment un **trièdre de coordonnées mobiles** qui est le trièdre de **Serret-Frenet**.

Ses faces sont le **plan normal** NMB, le **plan osculateur** TMN et le **plan rectifiant** TMB. En chaque point de (C), nous avons un tel trièdre.

Exemple 5.2.1.

Considérons l'hélice circulaire (fig. 5.2.5.) d'équations paramétriques

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht.$$

La tangente en M à cette courbe, d'après l'équation (5.2.2.) est définie par les équations

$$\frac{X - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - ht}{h}.$$

Elle fait avec Oz un angle constant.

Cherchons le **plan osculateur** à l'hélice au point M. Ses coefficients directeurs d'après les relations (5.2.3.) sont

$$A = ah \sin t, \quad B = -ah \cos t, \quad C = a^2.$$

Le **plan osculateur** a, par conséquent, pour équation

$$h \sin t (X - a \cos t) - h \cos t (Y - a \sin t) + a (Z - ht) = 0,$$

soit

$$h (X \sin t - Y \cos t) + a (Z - ht) = 0.$$

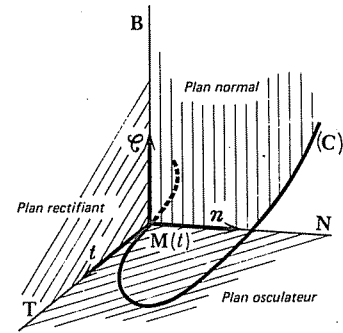


FIG. 5.2.4.

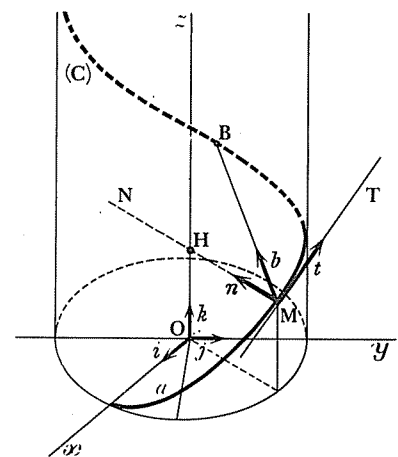


FIG. 5.2.5.

Le plan parallèle au plan xOy dont l'équation est $Z = ht$ coupe le plan osculateur suivant la droite qui porte le rayon HM du cylindre passant par M (fig. 5.2.5.).

Cette droite est la *normale principale* n puisqu'elle est normale à l'hélice et située dans le plan osculateur, définition (5.2.2.).

D'après les résultats de l'exercice (5.2.4.) ses coefficients directeurs sont

$$l = -a(a^2 + h^2) \cos t, \quad m = -a(a^2 + h^2) \sin t, \quad n = 0.$$

Elle est perpendiculaire à l'axe du cylindre de rayon a sur lequel est tracée l'hélice.

La *binormale* à l'hélice MB est normale au plan osculateur. Ses coefficients directeurs sont

$$h \sin t, \quad -h \cos t, \quad a.$$

Elle est dans le plan tangent en M au cylindre, ce plan étant le *plan rectifiant* de l'hélice au point M .

5.3. COURBURE ET TORSION DES COURBES DE L'ESPACE

Nous allons tout d'abord présenter vectoriellement les résultats précédents.

Comme pour les courbes planes, relations (3.11.1.) et (3.11.2.), si la courbe (C) est représentée par la fonction vectorielle $r(s)$, où s est l'abscisse curviligne d'un point M de (C) à partir d'une origine choisie sur (C) , le vecteur unitaire tangent à (C) est

$$(5.3.1.) \quad t = \frac{dr(s)}{ds} = \frac{\frac{dr(t)}{dt}}{\left\| \frac{dr(t)}{dt} \right\|}.$$

Le vecteur

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d^2 r(s)}{ds^2}$$

est un vecteur *parallèle à la normale principale*. Nous notons n le vecteur unitaire de même sens que $\frac{dt}{ds}$.

Remarque 5.3.1. — Le lecteur montrera à titre d'exercice et vérifiera que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{n}{R(s)} \quad \text{et} \quad \frac{db}{ds} = \frac{n}{T(s)}$$

entraîne

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{t}{R(s)} - \frac{n}{T(s)}.$$

Ces formules sont les formules de *Serret-Frenet*.
Symboliquement

$$\begin{bmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dn}{ds} \\ \frac{db}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R(s)} & 0 \\ -\frac{1}{R(s)} & 0 & -\frac{1}{T(s)} \\ 0 & \frac{1}{T(s)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}.$$

Définition 5.3.1.

On appelle *courbure* de la courbe (C) au point M la norme du vecteur $\frac{dt}{ds}$.

Nous notons

$$(5.3.2.) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{R(s)} n,$$

$R(s)$ étant le *rayon de courbure* de la courbe (C) au point M d'abscisse curviligne s .

En d'autres termes le vecteur unitaire normal dans la direction de $\frac{dt}{ds}$ est

$$(5.3.3.) \quad n = R(s) r''(s).$$

Ce vecteur n est perpendiculaire à t . Les vecteurs n et t déterminent le plan osculateur à la courbe (C) (fig. 5.2.4.).

Le vecteur

$$b = t \wedge n$$

est un vecteur parallèle à la *binormale*.

Il est *perpendiculaire* au plan *osculateur*.

Le trièdre de vecteurs unitaires t , n et b est le *trièdre de Serret-Frenet*.

Considérons le vecteur $\frac{db}{ds}$. Ce vecteur, comme le vecteur $\frac{dt}{ds}$ est *parallèle à la normale principale*. Nous allons le montrer à titre d'exercice.

Tout d'abord le vecteur $\frac{db}{ds}$ est *perpendiculaire à la tangente* à la courbe (C). En effet si l'on dérive la relation qui exprime l'orthogonalité de la tangente et de la binormale :

$$t \cdot b = 0,$$

on obtient

$$t \cdot \frac{db}{ds} = -b \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{R(s)} b \cdot n = 0,$$

puisque

$$b = t \wedge n.$$

D'autre part comme $b^2 = 1$ entraîne

$$b \cdot \frac{db}{ds} = 0,$$

le vecteur $\frac{db}{ds}$ est perpendiculaire à la binormale. Ce vecteur est donc dirigé suivant une direction parallèle à la normale principale de vecteur unitaire n .

Définition 5.3.2.

On appelle **torsion** de la courbe (C) au point M d'abscisse curviligne s la mesure algébrique du vecteur $\frac{db}{ds}$ par rapport au vecteur unitaire normal n . Le **rayon de torsion** $T(s)$ est l'inverse de la torsion.

Cette définition revient à la relation vectorielle

$$(5.3.4.)$$

Exemple 5.3.1.

Considérons à nouveau l'hélice circulaire tracée sur le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$.

Elle est représentée par la fonction vectorielle

$$r(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ht \mathbf{k}.$$

D'après la formule (1.8.6.) la longueur de l'arc d'hélice est

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r'(s) \cdot r'(s)} ds = t \sqrt{a^2 + h^2},$$

d'où la représentation vectorielle $r(s)$ de l'hélice

$$r(s) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \mathbf{i} + a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \mathbf{j} + h \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \mathbf{k}.$$

Il s'ensuit

$$r''(s) = -\frac{a}{a^2 + h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \mathbf{i} - \frac{a}{a^2 + h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \mathbf{j},$$

d'où, d'après la relation (5.3.2.),

Exercice 5.3.1. — Reprendre le calcul ci-contre pour la courbe (C), intersection de la sphère

$$(S) x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

par le cylindre

$$(C) x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Que constate-t-on?

$$\frac{1}{R(s)} = |r''(s)| = \sqrt{r''(s) \cdot r''(s)},$$

soit
$$\frac{1}{R(s)} = \frac{a}{a^2 + h^2}.$$

Il s'ensuit d'après la relation (5.3.3.)

$$n = -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} i - \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} j.$$

Le vecteur binormal b est tel que

$$b = t \wedge n = r'(s) \wedge n,$$

soit

$$b = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} i - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} j + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} k.$$

Il s'ensuit

$$b'(s) = \frac{h}{a^2 + h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} i + \frac{h}{a^2 + h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} j,$$

c'est-à-dire d'après la relation (5.3.4.)

$$\frac{1}{T} = + n(s) \cdot b'(s) = \frac{-h}{a^2 + h^2}.$$

Ainsi l'hélice circulaire a une courbure et une torsion constantes.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3 les formules établies ne sont simples à utiliser que si l'on a trouvé la fonction vectorielle $r(s)$ représentant la courbe (C) à partir de ses équations paramétriques.

Nous nous proposons maintenant de **calculer directement le rayon de courbure** et de **trouver le centre de courbure** à partir des équations paramétriques de la courbe,

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

La **courbure** (cf. paragraphe 3.11.) est la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\text{arc } MM'}$ quand M' tend vers M , ε étant l'angle de contingence (fig. 5.3.1.).

Or
$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\varepsilon}{\text{arc } MM'} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\sin \varepsilon}{\text{arc } MM'} = \frac{1}{R}$$

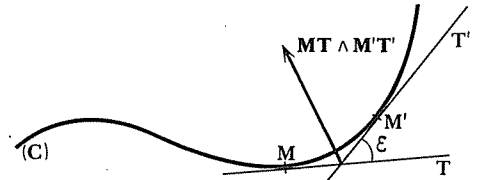


FIG. 5.3.1.

Exercice 5.3.2. — Déterminer les rayons de courbure et de torsion pour les courbes de l'exercice (5.2.1.).

et $\| \mathbf{MT} \wedge \mathbf{M'T'} \| = \| \mathbf{MT} \| \| \mathbf{MT'} \| \sin \varepsilon.$

Or l'arc MM' a pour équivalent

$$ds = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt.$$

Les vecteurs $\mathbf{MT}$ et $\mathbf{MT'}$ ayant pour composantes f', g', h' et $f' + \Delta f', g' + \Delta g', h' + \Delta h'$, on trouve

$$(5.3.5.) \quad R = \frac{[f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Remarque 5.3.2. — On montre que les rayons R et T sont donnés par

$$R = \frac{\| \mathbf{r}'(t) \|^3}{\| \mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) \|},$$

$$T = \frac{\| \mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) \|}{\| \Omega'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t) \|}.$$

avec

$$A = (g' h'' - h' g''), \quad B = (h' f'' - f' h''), \quad C = (f' g'' - g' f'').$$

Nous chercherons le centre de courbure quand nous aurons étudié l'enveloppe d'une famille de surfaces au paragraphe 5.7.

Exemple 5.3.2.

Reprenons l'hélice circulaire de l'exemple (5.3.1.) d'équations paramétriques

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht.$$

L'application de la relation (5.3.5.) redonne le résultat de l'exemple (5.3.1.) soit

$$R = \frac{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2(a^2 + h^2)}} = \frac{a^2 + h^2}{a}.$$

Nous verrons les propriétés du centre de courbure au paragraphe 5.6.

5.4. LES SURFACES

Une relation entre trois variables indépendantes représente une surface, (chapitre 3, tome I). D'une façon générale l'équation d'une surface (S) s'écrit

$$(5.4.1.) \quad F(x, y, z) = 0.$$

Exemple 5.4.1.

Équation d'une sphère de rayon R centrée à l'origine des coordonnées

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Équation d'un cylindre de rayon R dont l'axe est l'axe Oz dans un repère orthonormé $Oxyz$

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Un plan est une surface d'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Au paragraphe (3.3.) du tome I nous avons vu que la différentielle de la fonction F s'écrit

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

Elle est nulle d'après (5.4.1.).

Cela exprime que le vecteur de composantes

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$$

est **perpendiculaire** à la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface et passant par M (fig. 5.4.1.).

Ainsi l'équation du plan tangent en un point $M(x, y, z)$ à la surface (S) d'équation (5.4.1.) s'écrit

$$(5.4.2.) \quad (X - x) F'_x + (Y - y) F'_y + (Z - z) F'_z = 0$$

aussi longtemps que F'_x , F'_y et F'_z ne sont pas toutes trois nulles au point M qui est appelé *point ordinaire* de la surface (S) .

Les coefficients directeurs du plan tangent à la surface (ou de sa normale) d'équation (5.4.1.) en un point M quelconque sont F'_x , F'_y et F'_z .

Si la surface est définie par une équation explicite de la forme

$$(5.4.3.) \quad z = \varphi(x, y),$$

l'équation du plan tangent s'écrit

$$(5.4.4.) \quad Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

en posant

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Remarque 5.4.1. — Une surface (S) , comme une courbe, peut être **paramétrée**, mais les coordonnées x , y et z d'un point M de (S) dépendent de **deux** paramètres λ et μ , soit

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v). \end{cases}$$

Par exemple la **sphère** de centre O et de rayon 1 est représentée par

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \sin \theta \cos \varphi, \\ z = \sin \varphi, \end{cases}$$

en éliminant les deux paramètres, on obtient une relation du type (5.4.1.).

Le **plan tangent** en $M(u, v)$ est engendré par les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial v}$ (exercice).

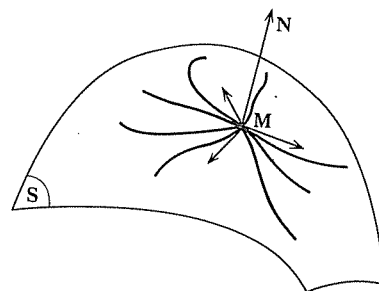


FIG. 5.4.1.

Exercice 5.4.1. — Déterminer les plans tangents à l'ellipsoïde (E) d'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

a) au point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ de (E) ,

b) passant par la droite (Δ) d'équations

$$x + y = 2, \quad z = 0,$$

c) parallèles au plan (P) d'équation

$$x + y + z = 0.$$

Figurer ces plans tangents en perspective.

Remarque 5.4.2. — L'équation (5.4.3.) revient à paramétrer la surface par les grandeurs x et y (cf. remarque 5.4.1.).

Soit

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = \varphi(x, y). \end{cases}$$

Exercice 5.4.2. — Soit une surface paramétrée (cf. remarque 5.4.1.)

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v). \end{cases}$$

Montrer que le plan tangent en $M(x, y, z)$ est défini par

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial u}(M) & \frac{\partial g}{\partial u}(M) & \frac{\partial h}{\partial u}(M) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(M) & \frac{\partial g}{\partial v}(M) & \frac{\partial h}{\partial v}(M) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 5.4.3. — On suppose que la fonction φ est maximale au voisinage d'un couple (x, y) . Montrer que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0.$$

La formule de Taylor s'écrit à l'ordre 2 (cf. tome I, chapitre 3).

$$\begin{aligned} \varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) \\ = ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \dots \end{aligned}$$

Justifier plus généralement les résultats du théorème (5.4.1.).

Les coefficients directeurs du plan tangent sont alors p, q et -1 .

La normale en M à la surface (5.4.1.) a pour équations, suivant le mode de représentation adopté (5.4.1. ou 5.4.3.).

$$(5.4.5.) \quad \begin{aligned} \frac{X-x}{F'_x} &= \frac{Y-y}{F'_y} = \frac{Z-z}{F'_z}, \\ \frac{X-x}{p} &= \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}. \end{aligned}$$

Points stationnaires. Lignes de niveau

Considérons une surface représentée par

$$(5.4.6.) \quad z = \varphi(x, y).$$

La surface peut présenter des sommets et des creux où l'altitude z est maximale ou minimale. Il est facile de montrer (exercice 5.4.3.) que les **dérivées** partielles $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont **nulles** en ces points. Nous supposons que φ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2.

Définition 5.4.1.

Tout point $M(x, y, z)$ tel que

$$(5.4.7.) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$$

est appelé **point stationnaire** pour la surface d'équation (5.4.6.).

Cependant, un point stationnaire n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum. L'étude des dérivées secondes

$$r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

est nécessaire pour élucider ce point, grâce à la formule de Taylor (exercice 5.4.3.).

On obtient les résultats suivants :

Théorème 5.4.1.

Soit M un point stationnaire pour la surface (S) d'équation (5.4.6). Nous avons les cas suivants :

$rt - s^2$	+		-	0
r	-	+	col pas d'extrémum	cas douteux
	maximum	minimum		

La figure (5.4.2.) montre les trois cas possibles, avec les **lignes de niveau** correspondantes.

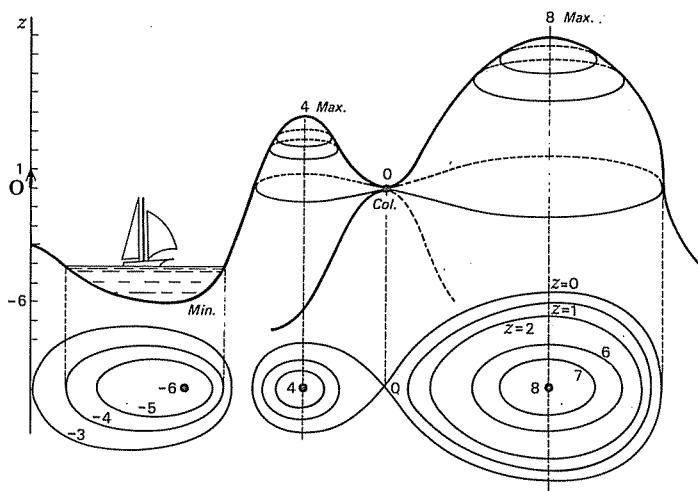


FIG. 5.4.2.

Définition 5.4.2.

Pour toute constante h , on appelle **ligne de niveau h** de la surface (S) la courbe tracée sur (S) , lieu des points M (s'il en existe) tels que

$$z = \varphi(x, y) = h.$$

Exercice 5.4.4. — Déterminer les points stationnaires des surfaces

a) $z = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2$,

b) $z = xy$.

Exercice 5.4.5. — Déterminer les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente (leurs projections sur xOz) de la surface (S) d'équation $z = xy$.

Exercice 5.4.6. — Soit une surface (S) d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Écrire un programme de traçage des lignes de niveau.

Exercice 5.4.7. — Soit deux surfaces (S_1) et (S_2) d'équations

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Écrire un programme de traçage de la ligne

$$(L) = (S_1) \cap (S_2).$$

Les points de la ligne seront recherchés sur les plans d'équation $z = h$ pour diverses valeurs de h comprises entre z_0 et z_1 .

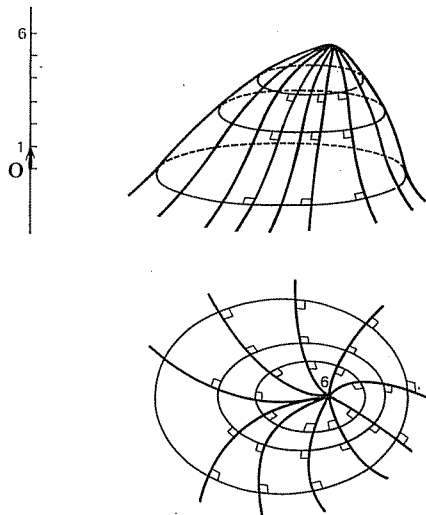


FIG. 5.4.3.

Les lignes de niveau forment une famille de courbes à un paramètre, solutions de *l'équation différentielle* (tome IV, chapitre 1).

$$(5.4.8.) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + y' \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$$

On représente ces lignes en projection sur le plan d'équation $z = 0$ (figures 5.4.2. et 5.4.3.). Les lignes tracées sur (S) orthogonalement aux précédentes sont les *lignes de plus grande pente* (fig. 5.4.3.). Leur équation différentielle se déduit simplement de (5.4.8.) (trajectoires orthogonales)

$$(5.4.9.) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = y' \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y).$$

Si la surface est représentée par une équation du type

$$F(x, y, z) = 0$$

les lignes de niveau et de plus grande pente s'obtiennent de façon similaire.

Nous allons maintenant voir à titre d'exemples quelques surfaces classiques.

Les surfaces cylindriques

Définition 5.4.3.

Une *surface cylindrique* est une surface engendrée par une droite qui demeure parallèle à une direction fixe et qui est assujettie à une condition géométrique simple : s'appuyer sur une courbe (C) donnée par exemple (fig. 5.4.4.).

La droite demeure parallèle à une direction de coefficients directeurs α , β et γ .

Les équations sont donc

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

soit $\beta z - \gamma y = \lambda, \quad \beta x - \alpha y = \mu.$

La condition géométrique imposée s'exprime par une relation du type

$$G(\lambda, \mu) = 0.$$

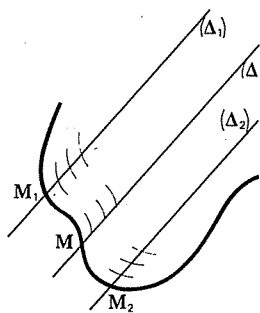


FIG. 5.4.4.

L'équation générale des surfaces cherchées s'écrit sous forme générale

$$(5.4.10.) \quad G(\beta z - \gamma y, \beta x - \alpha y) = 0.$$

On peut raisonner de façon plus générale encore. Si

$$P = 0 \quad \text{et} \quad P' = 0$$

sont les équations de deux plans passant par l'origine et si ces plans se coupent, la droite d'intersection (Δ) a pour équation $P = \lambda$, $P' = \mu$. Cette droite se déplace parallèlement à elle-même en vérifiant une condition, $G(\lambda, \mu) = 0$, pour engendrer une surface cylindrique.

Ainsi une autre forme générale d'une surface cylindrique est

$$(5.4.11.) \quad G(Ax + By + Cz, A'x + B'y + C'z) = 0.$$

Exemple 5.4.2.

Soit deux plans parallèles aux plans zOy et zOx , (fig. 5.4.5.) donc d'équation $x = \lambda$, $y = \mu$.

L'équation $G(x, y) = 0$ représente dans l'espace la surface cylindrique de génératrices parallèles à Oz et qui a pour base dans le plan xOy la courbe (C) d'équations

$$z = 0, \quad G(x, y) = 0.$$

Ainsi l'équation du cylindre d'axe Oz ayant pour base le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

L'équation de la surface cylindrique d'axe Oz ayant pour base l'ellipse centrée à l'origine O de demi grand axe a et de demi petit axe b s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Exemple 5.4.3.

Équation du cylindre ayant pour base le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ et une génératrice de coefficients directeurs α, β, γ (fig. 5.4.6.).

La génératrice a pour équation

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma}.$$

Exercice 5.4.8. — Écrire l'équation du plan tangent à la surface cylindrique d'équation (5.4.10.).

Même question pour la surface cylindrique d'équation (5.4.11.).

Coefficients directeurs de la droite génératrice de la surface (5.4.11.).

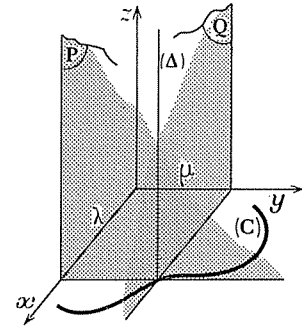


FIG. 5.4.5.

Exercice 5.4.9. — Déterminer l'équation du cylindre ayant pour base la parabole $(\mathcal{P})$ d'équations $y = x^2$, $z = 0$, et parallèle à $u(1, 0, 1)$.

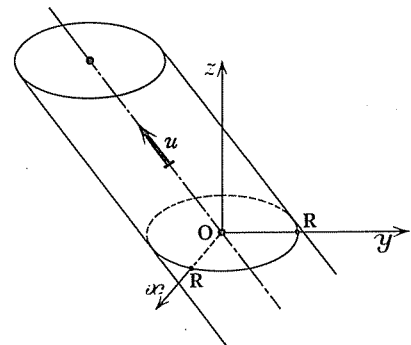


FIG. 5.4.6.

Sa trace sur la plan xOy ($Z = 0$) a pour équations

$$X = x - \frac{\alpha z}{\gamma}, \quad Y = y - \frac{\beta z}{\gamma}.$$

Or $X^2 + Y^2 = R^2$, d'où l'équation du cylindre

$$(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 = R^2 \gamma^2.$$

Exemple 5.4.4.

Équation du cylindre de génératrice parallèle à u (α, β, γ), circonscrit à la sphère (S) (fig. 5.4.7.)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

La droite (D)

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma} = \rho,$$

coupe la sphère en deux points tels que

$$(x + \alpha\rho)^2 + (y + \beta\rho)^2 + (z + \gamma\rho)^2 = R^2.$$

Les points d'intersection sont racines de l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \rho^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) \rho + x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Or la droite doit couper la sphère en deux points confondus. L'équation en ρ précédente doit avoir une racine double, d'où l'équation du cylindre

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 0.$$

Les surfaces coniques

Définition 5.4.4.

Une **surface conique** est une surface engendrée par une droite qui varie en passant par un **point fixe** et est assujettie à une **condition géométrique simple** : s'appuyer sur une courbe donnée (C) par exemple (fig. 5.4.8.). Le point fixe O est le **sommet** de la surface conique.

Si l'on prend ce sommet pour origine, une génératrice quelconque de la surface conique (n'appartenant pas au plan yOz) a pour équations

$$y = \lambda x, \quad z = \mu x.$$

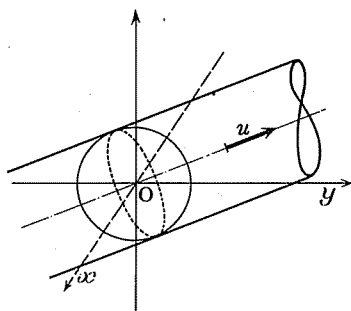


FIG. 5.4.7.

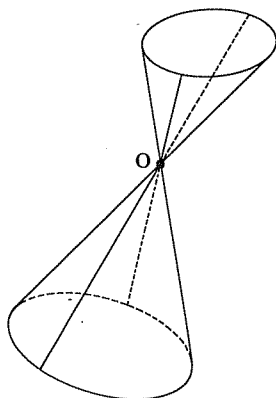


FIG. 5.4.8.

La condition imposée est

$$G(\lambda, \mu) = 0.$$

L'équation générale des coniques ayant pour sommet l'origine des coordonnées est

$$(5.4.12.) \quad F(x, y, z) = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \quad (x \neq 0).$$

La fonction F est homogène et d'ordre zéro en x et en y .

Plus généralement, soit ψ une fonction de trois variables homogène d'ordre m . L'équation $\psi(x, y, z) = 0$ représente un cône. En effet, quel que soit t , nous avons

$$\psi(tx, ty, tz) = t^m \psi(x, y, z).$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ et l'on obtient ($x \neq 0$)

$$x^m \psi\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0.$$

Exemple 5.4.5.

Équation du cône de sommet (a, b, c) ayant pour base dans le plan xOy le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ (fig. 5.4.9.).

Soit S le sommet et $M(x, y, z)$ un point arbitraire du cône. Si l'on désigne par X, Y et Z les coordonnées courantes, la droite SM a pour équations

$$\frac{X - a}{x - a} = \frac{Y - b}{y - b} = \frac{Z - c}{z - c}.$$

La trace de cette droite sur le plan xOy , ($Z = 0$) a pour coordonnées

$$X = a - c \frac{x - a}{z - c} = \frac{az - cx}{z - c},$$

$$Y = b - c \frac{y - b}{z - c} = \frac{bz - cy}{z - c}.$$

En écrivant que $X^2 + Y^2 = R^2$ nous avons l'équation du cône considéré

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = R^2 (z - c)^2.$$

Exercice 5.4.10. — Écrire l'équation du plan tangent à la surface conique (5.4.12.). Vérifier que ce plan ne dépend que de λ et de μ et passe par l'origine des coordonnées.

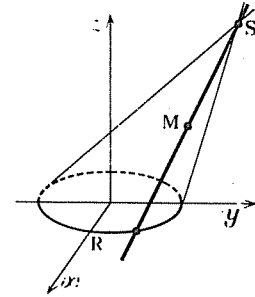


FIG. 5.4.9.

Exercice 5.4.11. — Déterminer l'équation du cône de sommet $O(0, 0, 0)$ circonscrit à la sphère de rayon 1 d'équation

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

Exercice 5.4.12. — Déterminer l'équation du cône de sommet O s'appuyant sur la courbe (Γ) , intersection de la sphère

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et du cylindre

$$(C) \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Exercice 5.4.13. — Déterminer l'ombre sur le plan xOy de l'ellipsoïde $(\mathcal{E})$ d'équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y - 4)^2}{4} + (z - 2)^2 = 1$$

éclairé par une source lumineuse placée en $L(5, 5, 5)$.

Si l'on remarque que $az - cz$ et $bz - cy$ peuvent s'écrire respectivement

$$a(z - c) - c(x - a) \quad \text{et} \quad b(z - c) - c(y - b),$$

nous voyons que cette équation est homogène par rapport à $x - a$, $y - b$ et $z - c$.

5.5. LES SURFACES DE RÉVOLUTION

Définition 5.5.1.

On appelle **surface de révolution** toute surface engendrée par une ligne (C) de l'espace appelée **génératrice**, tournant autour d'une droite (Δ), appelée **axe de rotation**.

Nous avons déjà vu des surfaces de révolution et, comme application du calcul intégral, nous avons calculé les volumes des solides de révolution ainsi que leurs surfaces latérales aux paragraphes 4.5. et 4.6. du tome I.

Pour la représentation analytique d'une surface de révolution (R), nous la considérerons comme le lieu géométrique de ses **parallèles**, c'est-à-dire des trajectoires que décrivent les différents points de la génératrice dans la révolution de celle-ci autour de l'axe de rotation.

L'axe de rotation (Δ) a pour équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Un parallèle quelconque (Γ) de la surface (R) (fig. 5.5.1.) est l'intersection d'une sphère (S)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda$$

et d'un plan (P_μ) ayant pour coefficients directeurs ceux de l'axe (Δ) auquel (P) est perpendiculaire, soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu.$$

Les deux paramètres λ et μ varient de telle sorte que le parallèle (Γ) qui est un cercle centré sur l'axe de rotation (Δ) s'appuie constamment sur la génératrice (C). Ceci s'exprime par une relation entre λ et μ qui d'une manière générale s'écrit

$$G(\lambda, \mu) = 0.$$

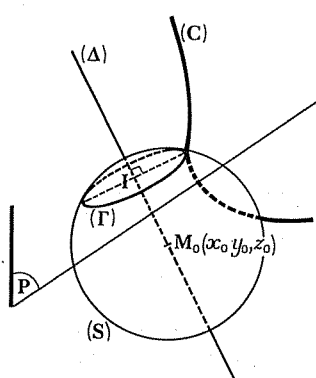


FIG. 5.5.1.

La surface de révolution (R) cherchée admet une équation de la forme

$$G(S, P) = 0,$$

soit

$$(5.5.1.) \quad G[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \alpha x + \beta y + \gamma z] = 0.$$

Mais comme on a le choix des axes, on a coutume de choisir l'axe de révolution comme l'un des axes Ox , Oy ou Oz .

Surfaces de révolution d'axe Oz

Au lieu de définir les parallèles de telles surfaces au moyen de sphères centrées à l'origine, on peut considérer chacun d'eux comme l'intersection d'un plan (P_λ) d'équation $z = \lambda$ (perpendiculaire à Oz) et d'un cylindre (C_μ) $x^2 + y^2 = \mu$ d'axe Oz . (On peut, pour le cas général d'un axe quelconque, faire le même raisonnement à partir du cylindre dont l'équation a été trouvée à l'exemple 5.4.4.)

La forme générale de l'équation est alors

$$(5.5.2.) \quad G(z, x^2 + y^2) = 0.$$

C'est la formule (5.5.1.), avec

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1.$$

La **méridienne principale** d'une telle surface est la courbe (K), intersection de la surface avec un plan passant par l'axe de révolution, appelé **plan méridien**.

Si la surface est définie par l'équation (5.5.2.), la méridienne (K) est dans le plan yOz , (fig. 5.5.2.). Elle a pour équation

$$G(z, y^2) = 0$$

(on fait $x = 0$ dans l'équation (5.5.2.) de la surface). Elle est bien entendu symétrique par rapport à Oz . Cette méridienne principale est une génératrice particulière, (C) étant une génératrice quelconque (fig. 5.5.2.) de la surface engendrée par (K) ou par (C).

Une surface engendrée par la révolution autour de Oz d'une courbe (Γ) d'équations

$$x = 0, \quad F(z, y) = 0$$

(dans le plan yOz) a pour équation

$$F(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$

Exercice 5.5.1. — Décrire la surface de révolution d'équation

$$G(S, P) = S - P^2 = 0$$

(notations ci-contre).

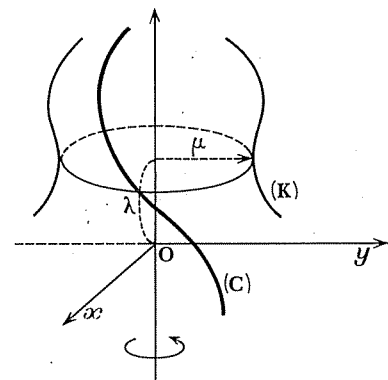


FIG. 5.5.2.

Exercice 5.5.2. — Soit la droite (D) d'équations

$$y = 1, \quad x + z = 0.$$

Déterminer la surface de révolution d'axe Oz engendrée par la droite (D).

Exemples 5.5.1.

— *La droite* $x = 0, \quad y = R$

tournant autour de Oz engendre *le cylindre*

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

— *L'ellipse* $x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a > b,$

tournant autour de Oz engendre *l'ellipsoïde de révolution aplati*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

— *L'ellipse* $x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0 \quad a > b$

tournant autour de Oz engendre *l'ellipsoïde de révolution allongé.*

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Exercice 5.5.3. — La parabole d'équations

$$x = 0, \quad z = y^2$$

engendre un paraboloidé d'axe Oz.

On pose une boule de rayon 1 dans ce paraboloidé.

Déterminer le *cercle de contact* des deux surfaces.

Faire le dessin.

— *La parabole* $x = 0, \quad y^2 - 2pz = 0$

tournant autour de Oz engendre le *paraboloidé*

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0.$$

Plans tangents et normales à une surface de révolution d'axe Oz

C'est en quelque sorte un exemple. En effet soit (S) la surface de révolution d'axe Oz et d'équation générale (5.5.2).

Si l'on pose $u = x^2 + y^2$ les coefficients directeurs de la normale en M sont $2x G'_u, 2y G'_u$ et G'_z .

Le plan tangent a pour équation

$$2x(X - x)G'_u + 2y(Y - y)G'_u + (Z - z)G'_z = 0.$$

Il est perpendiculaire au plan méridien

$$yX - xY = 0.$$

La normale en M est définie par les équations

$$\frac{X - x}{2xG'_u} = \frac{Y - y}{2yG'_u} = \frac{Z - z}{G'_z}.$$

5.6. SPHÈRES, CYLINDRES, CÔNES, QUADRIQUES

La sphère

Les propriétés de la sphère se déduisent aisément de celles du **cercle** (paragraphe 3.3.).

L'équation de la sphère de centre $C(a, b, c)$ et de rayon R est

$$(5.6.1.) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

ou encore

$$(5.6.2.) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sont les extrémités d'un diamètre, l'équation est (cf. 3.3.5.)

$$(5.6.3.) \quad (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0.$$

Le théorème (3.3.2.) se généralise facilement sous la forme suivante :

Théorème 5.6.1.

L'ensemble des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes A et B a une valeur donnée $k \neq 1$ est la sphère de diamètre IJ, tel que les points I et J divisent le segment AB dans le rapport k.

Exemple 5.6.1.

Considérons deux charges électriques q et q' de signes opposés (fig. 5.6.1.) placées aux points A et A'. Le potentiel du champ (paragraphe 6) est

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right).$$

Il est nul en tout point M tel que

$$(5.6.4.) \quad \frac{r}{r'} = -\frac{q'}{q} = \text{Cte},$$

ce qui définit une sphère d'après le théorème (5.6.1.). Inversement soit une sphère métallique. Une charge q placée à proximité de la sphère

Remarque 5.6.1. — Dans l'équation (5.6.2.)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

apparaissent quatre paramètres a, b, c et d . La sphère est définie en général par quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 , dont on connaît les coordonnées. L'équation de la sphère (exercice) s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 5.6.1. — Une sphère (S) réfléchissante, de centre O (0, 0, 0), de rayon 1, est éclairée par une lampe placée en L (2, 2, 2).

Déterminer le rayon incident tel que le rayon réfléchi éclairé T (2, 1, 1).

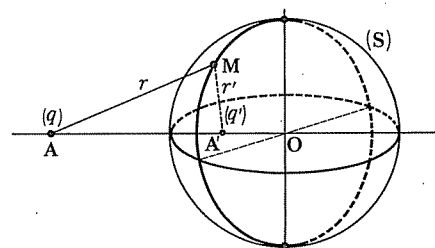


FIG. 5.6.1.

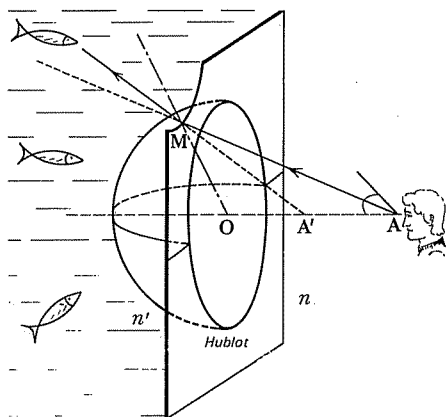


FIG. 5.6.2.

Exercice 5.6.2. — Déterminer l'équation d'un rayon incident issu de A et celle du rayon réfracté (fig. 5.6.2.).

Montrer que celui-ci passe par A'.

Exercice 5.6.3. — Soit A et B deux points fixes. Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que

$$\|MA\|^2 + \|MB\|^2 = k,$$

où k est un réel positif. On posera $a = \|AB\|$.

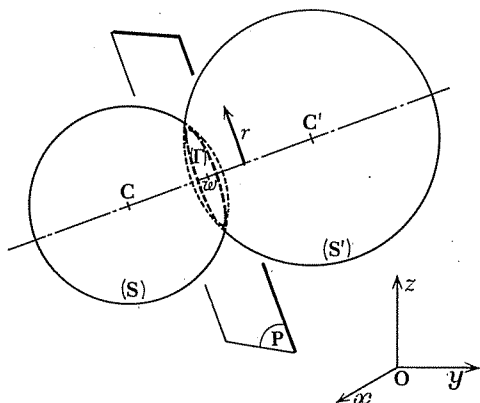


FIG. 5.6.3.

qui induit sur celle-ci une répartition de charge σ . La théorie des *images électriques* permet de calculer σ à partir du champ créé par q et q' (image électrique de q). La charge q' est définie par

$$q' = -q \frac{R}{D} \quad \text{et} \quad d = \frac{R^2}{D}.$$

Exemple 5.6.2.

Soit un dioptre sphérique (fig. 5.6.2.) et deux points A et A' « divisés » par la sphère (S) dans le rapport $k = \frac{n}{n'}$. On démontre que tout rayon issu de A se réfracte en M selon un rayon passant par A' qui est l'*image virtuelle* de A, parce que le chemin optique $n \cdot AM - n' \cdot A'M$ est nul, donc constant pour tout M de (S). Les points A et A' réalisent le *stigmatisme rigoureux* pour le dioptre sphérique.

Plan tangent à une sphère

L'équation (5.4.2.) s'écrit

$$(5.6.5) \quad xX + yY + zZ - R^2 = 0.$$

Le lecteur établira à titre d'exercice l'équation des plans tangents de direction donnée, ou passant par une droite (Δ) donnée.

Intersection de deux sphères

Soit deux sphères (S) et (S') données par leurs équations sous la forme (5.6.2.)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0.$$

En faisant la différence membre à membre nous obtenons l'équation d'un plan (P)

$$(5.6.6) \quad 2(a - a')x + 2(b - b')y + 2(c - c')z + d - d' = 0.$$

C'est le *plan radical* des deux sphères qui est orthogonal à la ligne CC' des centres (fig. 5.6.3.), et qui découpe sur (S) et (S') un cercle (Γ) de centre ω , de rayon r . Ce cercle est l'intersection de (S) et de (S').

Cylindres et cônes de révolution

Nous avons vu au paragraphe (5.4.) comment établir l'équation cartésienne des surfaces coniques et cylindriques. Ces méthodes s'appliquent aux cylindres et cônes de révolution. Nous observons plutôt ici les **intersections** de ces surfaces entre elles, et leurs sections par des plans.

La figure (5.6.4.) présente la section d'un cylindre (C) par un plan (P). Nous figurons les deux sphères (S) et (S') inscrites dans (C) tangentes à (P) en deux points F et F'. Soit M un point de l'intersection (C) ∩ (P), et la génératrice (D) passant par M, tangente à (S) et à (S') en deux points T et T'.

Nous avons

$$(5.6.7.) \quad \|MF\| = \|MT\|$$

car les tangentes issues de M à la sphère (S) ont toutes même longueur. De même $\|MF'\| = \|MT'\|$, et

$$(5.6.8.) \quad \|MF\| + \|MF'\| = \|MT\| + \|MT'\|.$$

Cette somme est constante : c'est la distance $\omega\omega'$ des deux centres. D'où le théorème :

Théorème 5.6.2.

Les sections planes d'un cylindre de révolution sont des ellipses.

Soit α l'angle que fait le plan (P) avec la verticale, (Δ) la droite (P) ∩ (Q), H le projeté de M sur (Δ).

Nous avons $\|MT\| = \|MH\| \cdot \cos \varphi$, d'où (5.6.7.)

$$\frac{\|MF\|}{\|MH\|} = \cos \alpha.$$

Ainsi l'ellipse a pour excentricité $e = \cos \alpha$.

La relation (5.6.8.) est encore valable pour un cône ($\mathcal{C}$) de demi-angle au sommet θ , si le plan (P) est tel que $\alpha > \theta$ (fig. 5.6.5.). La somme $\|MT\| + \|MT'\|$ est constante, égale à la longueur de la génératrice du tronc de cône découpé sur le cône par (S) et par (S'). L'intersection ($\mathcal{C}$) ∩ (P) est donc une ellipse.

Si $\alpha < \theta$ (exercice) nous avons

$$(5.6.9.) \quad \|MF\| - \|MF'\| = \|MT\| - \|MT'\| = \text{Cte}$$

et la section est une **hyperbole**.

Exercice 5.6.4. — Déterminer le centre ω et le rayon r du cercle (Γ) = (S) ∩ (S') défini ci-contre (fig. 5.6.3.).

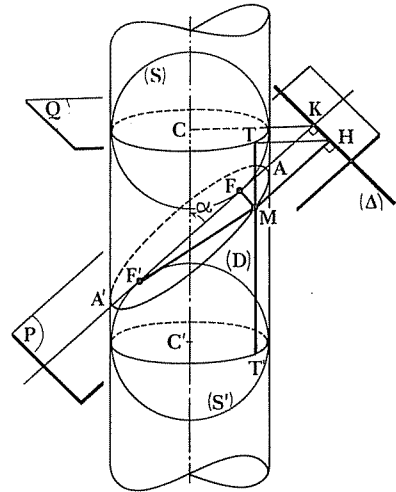


FIG. 5.6.4.

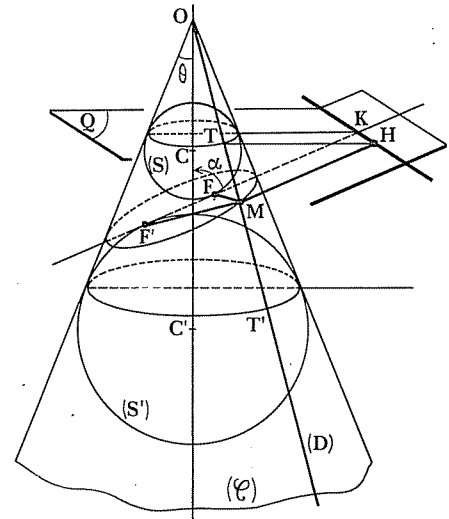


FIG. 5.6.5.

Exercice 5.6.5. — Exécuter les figures correspondant aux cas de l'hyperbole et de la parabole sur le modèle de la figure (5.6.5.).

Si $\alpha = \theta$ (exercice) la section est une *parabole*.

Ces résultats sont rassemblés dans le théorème suivant :

Théorème 5.6.3.

Soit un cône de demi-angle au sommet θ coupé par un plan (P) ne passant pas par O, faisant un angle α avec la verticale.

La section conique est

- une ellipse si $\alpha > \theta$,
- une hyperbole si $\alpha < \theta$,
- une parabole si $\alpha = \theta$.

L'excentricité est $e = \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$.

Remarque 5.6.6. — On montre que l'image d'une conique (γ) par une *perspective* (parallèle ou centrale, cf. paragraphe 2.) est en général une autre conique (γ'). Cela est évident pour la perspective centrale si l'on connaît (γ) comme section plane d'un cône de révolution.

Exercice 5.6.6. — Soit deux cylindres ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) de même rayon b , d'axes concourants en un point O. La sphère (S) de centre O et de rayon b est inscrite dans ($\mathcal{C}$) suivant un cercle (γ), dans ($\mathcal{C}'$) suivant un cercle (γ'). Soit (P) et (P') les plans de ces cercles. Montrer que tout point de ($\mathcal{C}$) $\cap$ ($\mathcal{C}'$) appartient à l'un des bissecteurs (Q) et (Q') de (P) et de (P'). En déduire que l'intersection ($\mathcal{C}$) $\cap$ ($\mathcal{C}'$) se compose de deux ellipses (E) de demi-axes a et b , (E') de demi-axes a' et b , avec

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Calculer a et a' en fonction de l'angle θ que font les axes de ($\mathcal{C}$) et de ($\mathcal{C}'$).

Exercice 5.6.7. — Montrer que toute section plane d'une quadrique est une conique.

Remarque 5.6.7. — L'équation (5.6.10.) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B'' & B' & C'' \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Les *intersections* de sphères, de cônes et de cylindres deux à deux sont beaucoup plus compliquées en général. Ce sont des courbes paramétrées du quatrième degré, non planes en général, dont on peut tracer les projections sur la table traçante de l'ordinateur (quartiques).

On obtient ainsi une *épure* des figures considérées (cf. Annexe). Le tracé des intersections de solides en projection sur deux plans orthogonaux est l'un des objets de la *géométrie descriptive* créée par Gaspard Monge (1746-1818).

Les quadriques

Nous avons vu au chapitre 3 les coniques; on appelle quadriques les surfaces représentées par l'équation générale

$$(5.6.10.) f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Les surfaces des exemples (5.5.1.) sont des quadriques particulières.

Comme pour les coniques (paragraphe 3.7.) et par application des changements de coordonnées rectangulaires dans l'espace (cf. paragraphe 2.4.), une translation d'axes,

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'$$

(dans le cas des quadriques à centre unique), transforme l'équation (5.6.10) en une équation ne contenant plus de termes du 1^{er} degré soit

$$(5.6.11.) \quad A x'^2 + A' y'^2 + A'' z'^2 + 2 B y' z' + 2 B' z' x' + 2 B'' x' y' + H = 0.$$

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre ω s'obtiennent (cf. coniques paragraphe 3.7.) en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

Une rotation d'axe convenable peut faire disparaître les *termes rectangles* et conduit en général à l'équation sous forme réduite classique

$$(5.6.12.) \quad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = \delta \quad (\text{remarque 5.6.7}).$$

Pour cela nous écrivons les termes de second degré de la relation (5.6.11.) sous la forme

$$(x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Le nouveau repère (ω, XYZ) est défini par les vecteurs propres de la matrice (3×3) ci-dessus. Les valeurs propres α, β, γ se retrouvent dans (5.6.12.); α, β, γ et δ sont définis à un facteur près.

Donnons ici un exemple de quadrique suite au paragraphe 4.9. du tome I.

Exemple 5.6.3. Ellipsoïde d'inertie

Nous savons que le moment d'inertie d'un corps solide homogène par rapport à l'axe (Δ) de cosinus directeurs α, β et γ passant par le centre de coordonnées est

$$(5.6.13.) \quad I_{\Delta} = \int d^2 dm,$$

où d est la distance d'un point matériel P quelconque du corps à la droite (Δ) . D'après l'exemple (1.7.3.)

Exercice 5.6.8. — Déterminer le centre ω de la quadrique d'équation

$$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 + 6yz + 6zx - 8xy + 6x + 6y + 6z + 4 = 0.$$

Remarque 5.6.8. — Donnons brièvement une liste de quadriques suivant les *signes* des coefficients α, β, λ et δ de la relation (5.6.12.) :

• $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$: l'équation (5.6.12.) s'écrit

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

c'est un **ellipsoïde** (exercice 5.6.10. a);

• $\alpha, \beta, \delta > 0, \gamma < 0$: l'équation (5.6.12.) s'écrit

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

c'est un **hyperboloïde à une nappe** (exercice 5.6.10. b);

• $\alpha, \beta > 0, \gamma, \delta < 0$,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1,$$

c'est un **hyperboloïde à deux nappes** (exercice 5.6.10. c);

• $\delta = 0, \alpha \times \beta \times \gamma < 0$, par exemple,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{Z^2}{c^2},$$

c'est un **cône** (exercice 5.6.10. d).

• $\gamma = 0$.

Cylindres d'axe $\overrightarrow{\omega Z}$, dont la base est une conique (exercice 5.6.10. e). Cependant l'équation (5.6.10) ne conduit pas toujours à la forme (5.6.12.). Il y a d'autres formes possibles que nous ne détaillerons pas. Citons la forme

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z$$

qui caractérise les **paraboloïdes** (elliptiques si $p \times q > 0$, exercice 5.6.10. f, hyperboliques si $p \times q < 0$, exercice 5.6.10. g).

Exercice 5.6.9. — Déterminer l'équation réduite (5.6.12.) pour la quadrique de l'exercice (5.6.8.).

Exercice 5.6.10. — Dessiner les quadriques d'équations

a) $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1,$

b) $x^2 + y^2 - z^2 = +1,$

c) $x^2 + y^2 - z^2 = -1,$

d) $x^2 + \frac{y^2}{4} = z^2,$

e) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1,$

f) $z = x^2 + \frac{y^2}{4},$

g) $z = x^2 - \frac{y^2}{4}.$

Exercice 5.6.11. — Le point M d'angle polaire θ décrit le cercle (γ) de centre C (0, 0, h) et de rayon R (fig. 5.6.6.).

Le point M' d'angle polaire $\theta + \alpha$ (α fixé, $0 \leq \alpha \leq \pi$) décrit le cercle (γ') de centre C' (0, 0, -h) et de rayon R. Déterminer

a) les équations de la droite MM' pour tout θ ;

b) l'équation de la surface ($\mathcal{H}$) engendrée par cette droite quand θ varie.

Comment cette surface s'appelle-t-elle?

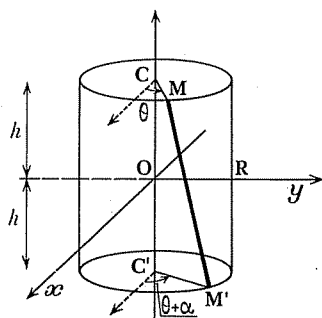


FIG. 5.6.6.

$$(5.6.14.) \quad d^2 = \alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 (x^2 + z^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy.$$

On appelle par convention habituelle

$$A = I_{Ox} = \int (y^2 + z^2) dm, \quad B = I_{Oy} = \int (x^2 + z^2) dm,$$

$$C = I_{Oz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

et les produits d'inertie

$$D = \int yz dm, \quad E = \int zx dm, \quad F = \int xy dm.$$

D'après la relation (5.6.14.), on a pour (5.6.13.)

$$(5.6.15.) \quad I_{(\Delta)} = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2D \alpha\beta - 2E \gamma\alpha - 2F \alpha\beta.$$

Si l'on prend sur l'axe (Δ) deux points P et P' tels que

$$\|OP\| = \|OP'\| = \frac{1}{\sqrt{I_{(\Delta)}}}.$$

On a $OP = \|OP\| u$, si u est le vecteur de (Δ) de cosinus directeurs α, β et γ .

Désignons par x, y et z les coordonnées de P

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_{(\Delta)}}}, \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{I_{(\Delta)}}}, \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_{(\Delta)}}}.$$

Par suite, l'équation (5.6.15.) s'écrit

$$(5.6.16.) \quad 1 = A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2D yz - 2E zx - 2F xy.$$

Ainsi P et P' engendrent une quadrique que l'on appelle *ellipsoïde d'inertie* du solide (S) par rapport au point O.

Exemple 5.6.4. Contraintes au sein d'un solide

En chaque point O d'un solide existent des efforts intérieurs qui assurent sa cohésion.

Imaginons un plan passant par O, partageant le solide en deux.

Tout élément de surface (paragraphe 6.) dS , contenant O , est soumis à une force élémentaire dF et le vecteur

$$f = \frac{dF}{dS}$$

est appelé **contrainte** au point O pour la direction de plan considérée. Il s'écrit

$$(5.6.17.) \quad f = n + t,$$

où n et t sont les contraintes normale et tangentielle à la facette dS (fig. 5.6.7.).

Soit un repère orthonormé $Oxyz$ et un **cube** élémentaire construit sur ce dernier (fig. 5.6.8. a).

Nous appelons f_1 , f_2 et f_3 les contraintes relatives aux faces yOz , xOz et xOy qui se décomposent ainsi :

$$(5.6.18.) \quad \begin{aligned} f_1 &= \sigma_x \cdot i + \tau_{xy} \cdot j + \tau_{xz} \cdot k, \\ f_2 &= \tau_{yx} \cdot i + \sigma_y \cdot j + \tau_{yz} \cdot k, \\ f_3 &= \tau_{zx} \cdot i + \tau_{zy} \cdot j + \sigma_z \cdot k. \end{aligned}$$

Pour observer la contrainte f s'exerçant sur un **plan** (P) *quelconque*, désignons par v un vecteur unitaire normal à (P), de cosinus directeurs α , β et γ . (P) découpe un **tétraèdre** OABC sur le trièdre (fig. 5.6.8. b).

En exprimant l'équilibre du tétraèdre dans le solide nous obtenons (exercice 5.6.11.) les composantes f_x , f_y et f_z de la contrainte f sous la forme

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Calculons la contrainte normale $n = n \cdot v$, sachant que $n = f \cdot v$ et que la matrice T_σ est symétrique (exercice 5.6.11.).

$$(5.6.19.) \quad n = \sigma_x \cdot \alpha^2 + \sigma_y \cdot \beta^2 + \sigma_z \cdot \gamma^2 + 2\alpha\beta \cdot \tau_{xy} + 2\alpha\gamma \cdot \tau_{xz} + 2\beta\gamma \cdot \tau_{yz} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Divisons les deux membres de (5.6.19) par n . Nous avons

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

et le-point $M\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)$, tel que $OM = \frac{v}{\sqrt{n}}$,

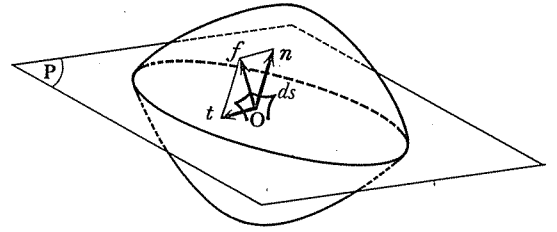


FIG. 5.6.7.

Exercice 5.6.12. — En exprimant l'équilibre du cube (fig. 5.6.8. a) montrer que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

C'est-à-dire que la matrice

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

appelée **tenseur des contraintes** (cf. paragraphe 6.) est **symétrique**.

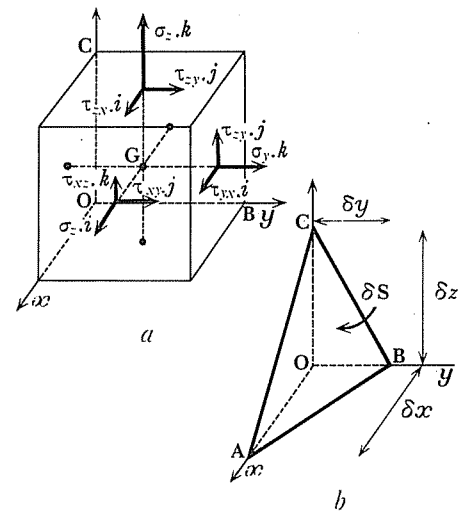


FIG. 5.6.8.

Remarque 5.6.9. — Le nouveau repère OXYZ est tel que les contraintes tangentielles au point O sont nulles sur les directions des plans XOY, XOZ et YOZ.

Remarque 5.6.10. — Comme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, les relations (5.6.20.) entraînent

$$\frac{f_x^2}{N_1^2} + \frac{f_y^2}{N_2^2} + \frac{f_z^2}{N_3^2} = 1.$$

Ainsi l'extrémité du vecteur contrainte f décrit un *ellipsoïde* (ellipsoïde de Lamé).

Remarque 5.6.11. — Le point M (n, t) est à l'intersection des trois cercles (C_1), (C_2) et (C_3). Il est situé dans la zone hachurée (fig. 5.6.9).

Exercice 5.6.13.

a) Montrer que (C_1), (C_2) et (C_3) sont concourants (en calculant un déterminant par exemple).

b) Calculer la puissance d'un point de (Γ_i) par rapport à (C_i), $i = 1, 2, 3$. En conclure que le point M (n, t) appartient à la zone hachurée (fig. 5.6.9).

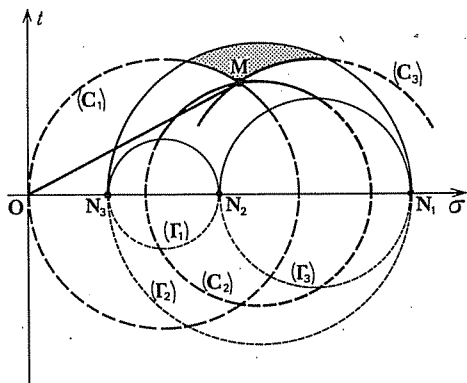


FIG. 5.6.9.

décrit donc une *quadrique* d'équation $\varphi(x, y, z) = 1$.

Si nous diagonalisons la matrice symétrique T_σ (tome III, exemple 3.5.1.), l'équation (5.6.19.) prend la forme nouvelle

$$\tilde{N}_1 \cdot X^2 + N_2 \cdot Y^2 + N_3 \cdot Z^2 = 1.$$

Dans le nouveau repère (axes principaux des contraintes) nous avons

$$(5.6.20.) \quad \begin{cases} f_x = \alpha \cdot N_1, \\ f_y = \beta \cdot N_2, \\ f_z = \gamma \cdot N_3. \end{cases}$$

Pour se faire une idée des grandeurs $n = \|n\|$ et $t = \|t\|$, traçons un repère d'axes Ot et On et cherchons le lieu du point M (n, t) quand la direction du plan (P) varie. Nous partons des relations

$$f^2 = \|f\|^2 = n^2 + t^2 = N_1^2 \cdot \alpha^2 + N_2^2 \cdot \beta^2 + N_3^2 \cdot \gamma^2,$$

$$n = N_1 \cdot \alpha^2 + N_2 \cdot \beta^2 + N_3 \cdot \gamma^2$$

et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$

• Soit α fixé. — En éliminant β et γ nous trouvons

$$n^2 + t^2 - n(N_2 + N_3) + N_2 N_3 + \alpha^2(N_3 - N_1)(N_1 - N_2) = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle (C_1) centré sur On , de centre indépendant de α . Pour $\alpha = 0$, nous avons un cercle (Γ_1) d'équation

$$(5.6.21.) \quad n^2 + t^2 - n(N_2 + N_3) + N_2 N_3 = 0.$$

• Soit β fixé. — En éliminant α et γ nous trouvons

$$n^2 + t^2 - n(N_3 + N_1) + N_1 N_3 + \beta^2(N_1 - N_2)(N_2 - N_3) = 0,$$

équation d'un cercle (C_2) qui, pour $\beta = 0$, se réduit à (Γ_2)

$$(5.6.22.) \quad n^2 + t^2 - n(N_3 + N_1) + N_1 N_3 = 0.$$

• Soit γ fixé. — Nous avons de même un cercle (C_3)

$$n^2 + t^2 - n(N_1 + N_2) + N_1 N_2 + \gamma^2(N_2 - N_3)(N_3 - N_1) = 0$$

qui, pour $\gamma = 0$, se réduit à (Γ_3)

$$(5.6.23.) \quad n^2 + t^2 - n(N_1 + N_2) + N_1 N_2 = 0.$$

Nous figurons (fig. 5.6.9.) les cercles (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3) en supposant $N_1 > N_2 > N_3$. Ce sont les *cercles de Mohr*. Le point M (n, t), intersection des trois cercles concourants (C_1), (C_2) et (C_3), appartient à la

zone hachurée (exercice 5.6.12.). Ces cercles sont très utiles pour décrire l'état des contraintes au point O suivant la direction de plan considérée.

Les angles φ_1 , φ_2 et φ_3 que fait le vecteur normal $\mathbf{n}$ avec les plans principaux sont donnés par la construction de la figure (5.6.10.).

Notons que l'état des *déformations* peut aussi être décrit par ce type de représentation plane. Les liens entre contraintes et déformations sont l'objet de la *résistance des matériaux*.

5.7. SURFACES ENVELOPPES. SURFACES DÉVELOPPABLES. CENTRE DE COURBURE D'UNE COURBE DE L'ESPACE

Comme pour les courbes planes au paragraphe (3.10.), considérons une *famille de surfaces* (S_λ) définies par l'équation générale

$$F(x, y, z, \lambda) = 0$$

dans laquelle λ désigne un paramètre arbitraire.

Les surfaces (S) et (S') obtenues pour les valeurs λ et $\lambda + \Delta\lambda$ du paramètre se coupent suivant une courbe (C). Lorsque $\Delta\lambda$ tend vers zéro, la courbe (C) a pour limite une courbe (Γ) dite *courbe caractéristique* de la surface (S).

Comme pour les points caractéristiques dans le cas plan (paragraphe 3.10.) on démontre de la même façon que la courbe caractéristique est définie par l'équation

$$(5.7.1.) \quad F(x, y, z, \lambda) = 0$$

et l'équation dérivée par rapport à λ ,

$$(5.7.2.) \quad F'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0.$$

On peut énoncer un théorème analogue au théorème (3.10.1.).

Théorème 5.7.1.

Si les surfaces (S) admettent une enveloppe, celle-ci fait partie du lieu géométrique obtenu par élimination de λ entre les équations (5.7.1.) et (5.7.2.).

Exercice 5.6.14. — Montrer que les angles φ_1 , φ_2 et φ_3 que fait $\mathbf{n}$ avec les plans principaux de contrainte sont donnés par la figure (5.6.10.).

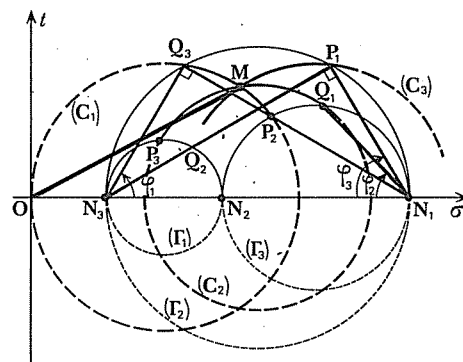


FIG. 5.6.10.

Remarque 5.7.1. — Soit un solide en mouvement. Sa surface qui varie dans l'espace définit une famille de surfaces d'équation

$$F(x, y, z, t) = 0$$

où t désigne le temps.

Exercice 5.7.1. — Soit un ellipsoïde (E_0) d'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$$

On le fait tourner autour de la droite (D) d'équations $x = 0$, $y = z$, avec une vitesse angulaire ω . Soit (E_t) la surface vue à l'instant t . Déterminer l'équation de la famille (E_t) et amorcer le calcul de la surface enveloppe.

Exercice 5.7.2. — Soit une plaque ($\mathcal{P}_0$) suspendue en trois points A, B et C par des câbles maintenus verticaux. A l'instant 0, la plaque se confond avec le plan xOy , les points A, B et C ont pour coordonnées $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, -1, 0)$. Un dispositif provoque des montées et descentes des points A, B et C dont les altitudes dépendent du temps selon les fonctions

$$\begin{aligned} a(t) &= \sin t, \\ b(t) &= 2 \sin t, \\ c(t) &= \sin^2 t. \end{aligned}$$

Écrire les équations de la surface enveloppe ($\mathcal{E}$) du plan de la plaque mobile ($\mathcal{P}_t$).

Étudier cette surface ($\mathcal{E}$).

Remarque 5.7.2. — Supposons que la famille de surfaces (S_λ) soit donnée sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = f(u, v, \lambda), \\ y = g(u, v, \lambda), \\ z = h(u, v, \lambda). \end{cases}$$

L'enveloppe s'obtient en adjoignant à ce système la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{exercice}).$$

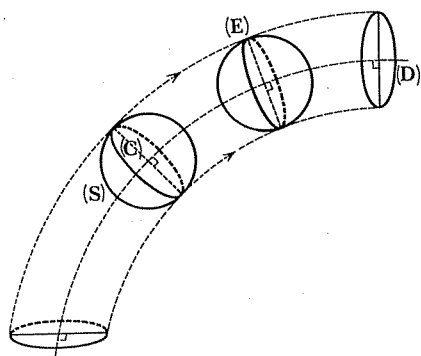


FIG. 5.7.1.

Soit en effet

$$(5.7.3.) \quad x = f(\lambda, t), \quad y = g(\lambda, t), \quad z = h(\lambda, t),$$

les équations paramétriques de la courbe caractéristique (Γ) qui correspond à la valeur λ du paramètre, t précisant la position d'un point arbitraire le long de (Γ).

On peut considérer ces équations (5.7.3.) comme définissant une surface (E) à deux paramètres.

Les différentielles totales dx , dy et dz des fonctions 5.7.3. vérifient

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz + F'_\lambda d\lambda = 0.$$

D'après (5.7.2.), on obtient

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

C'est l'équation du plan tangent en M à la surface donnée (S) d'équation (5.7.1.). Il est identique au plan tangent à la surface enveloppe (E) pourvu que les trois dérivées partielles F'_x , F'_y et F'_z ne soient pas toutes les trois nulles au point M considéré.

Comme pour le cas plan, exemple (3.10.3.), considérons des sphères.

Exemple 5.7.1.

Soit la famille de sphères (S) de rayon R constant, dont le centre de coordonnées a , b et c est fonction d'un paramètre λ . Autrement dit, le centre décrit une courbe (D) de l'espace.

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda), \quad c = c(\lambda).$$

L'équation des sphères (S) s'écrit

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

On lui adjoint l'équation dérivée par rapport à λ ,

$$(x - a) a' + (y - b) b' + (z - c) c' = 0.$$

C'est un plan qui passe constamment par le centre d'une sphère (S). La **courbe caractéristique** est le grand cercle, section d'une sphère (S) par le plan normal à la courbe (D), lieu géométrique de son centre, (fig. 5.7.1.).

L'enveloppe (E) obtenue, appelée **surface canal**, est engendrée par le cercle (C) de rayon constant R dont le plan reste normal au lieu géométrique (D) du centre du cercle (fig. 5.7.1.).

Exemple 5.7.2.**Le tore**

Dans l'exemple (4.5.2.) du tome I nous avons déjà parlé du tore. C'est la surface engendrée par un cercle qui tourne autour d'un axe situé dans son plan.

Considérons ici le problème sous l'angle de l'enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit un cercle fixe donc une application de l'exemple précédent. Cette *enveloppe* est un *tore*.

Supposons que le centre d'une sphère (S) de rayon r d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$$

décrive un cercle d'équation

$$z = 0, \quad a^2 + b^2 = R^2 = \text{Cte},$$

soit

$$a = R \cos \varphi, \quad b = R \sin \varphi.$$

A l'équation de la sphère

$$(x - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 + z^2 = r^2,$$

qui s'écrit

$$(5.7.4.) \quad x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2 R x \cos \varphi + 2 R y \sin \varphi,$$

on adjoint l'équation dérivée par rapport à φ , soit

$$(5.7.5.) \quad y \cos \varphi - x \sin \varphi = 0.$$

C'est un plan passant par l'axe des z .

En éliminant φ entre les équations (5.7.4.) et (5.7.5.), on obtient l'équation du tore, surface algébrique du quatrième degré

$$(5.7.6.) \quad (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4 R^2 (x^2 + y^2).$$

Surfaces développables**Définition 5.7.1.**

On appelle *surface développable*, toute surface enveloppe d'un plan P dépendant d'un paramètre variable.

Soit l'équation du plan (P)

$$(5.7.7.) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

Exercice 5.7.3. — Déterminer l'équation de la surface canal engendrée par une boule de rayon 1 dont le centre décrit l'hélice circulaire d'équations

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 4 t.$$

Exercice 5.7.4. — Déterminer l'équation de la surface canal engendrée par une boule de rayon 1 lancée à l'origine selon le vecteur vitesse $v(0, 1, 1)$. La pesanteur s'exerce parallèlement à Oz ($g = 10$).

dans laquelle A, B, C et D sont des fonctions d'un paramètre λ . L'équation dérivée s'écrit

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

et représente un plan. La *courbe caractéristique* est donc toujours une ligne droite (Δ).

La surface enveloppe (E) est, par conséquent, une *surface engendrée par une droite* que l'on appelle *surface réglée* (cf. 5.8.).

Nous nous limiterons comme application au problème de la recherche du centre de courbure d'une courbe de l'espace.

Centre de courbure

Considérons une courbe (C) de l'espace (fig. 5.7.2.). Le plan ($\mathcal{N}_t$) normal à (C) au point M (t) a pour équation.

$$(5.7.8.) \quad (X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0.$$

La courbe (C) étant donnée par sa représentation paramétrique $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, la relation (5.7.8.) représente une famille de plans de paramètre t .

La *droite caractéristique* (Δ_t) du plan ($\mathcal{N}_t$) est appelée *droite polaire*. On la définit par l'équation (5.7.8.) et l'équation dérivée

$$(5.7.9.) \quad (X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Cette droite polaire a donc pour coefficients directeurs,

$$A = y'z'' - z'y'', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x''.$$

Elle est donc perpendiculaire au plan osculateur ($\mathcal{O}_t$) à la courbe (C) en M (cf. relations 5.2.3.) et parallèle à la binormale.

Définition 5.7.2.

On appelle, *centre de courbure* de (C) au point M le point ω_t où la *droite polaire* (Δ_t) perce le plan osculateur ($\mathcal{O}_t$).

Ses coordonnées vérifient l'équation (5.7.8.) l'équation (5.7.9.) et l'équation

$$(5.7.10.) \quad A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

du plan osculateur.

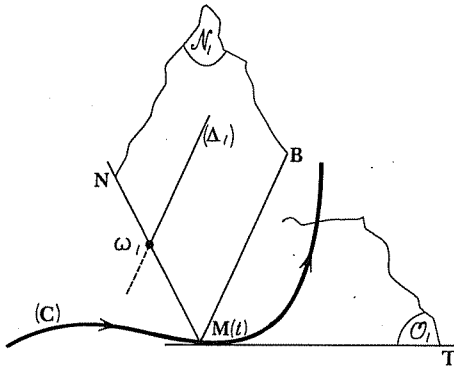


FIG. 5.7.2.

Exercice 5.7.5. — La figure (5.7.2.) représente le profil du tore (T) sur le plan yOz et celui d'un plan (P) contenant Ox , tangent au tore en deux points U et U'.

a) Déterminer l'équation de ce plan et celle de l'intersection $(T) \cap (P) = (\Gamma)$.

b) Déterminer l'équation de (Γ) dans un repère orthonormé $\{I, J, K\}$ tel que I et J appartiennent à (P). En déduire que (Γ) est formé par deux cercles (cercles de Villarceau).

Tracer la projection horizontale de (T) et (Γ) sur xOy .

Ces trois équations forment un système linéaire en

$$X - x, \quad Y - y, \quad Z - z.$$

Si l , m et n sont les coefficients directeurs de la normale principale, (exercice), on trouve, $A^2 + B^2 + C^2$ étant le déterminant du système, que les coordonnées X , Y et Z du centre de courbure sont

$$(5.7.11.) \quad \begin{aligned} X - x &= l \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ Y - y &= m \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ Z - z &= n \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned}$$

avec $l = Bz' - Cy'$, $m = Cx' - Az'$, $n = Ay' - Bx'$.

Exemple 5.7.3.

Reprenons l'hélice circulaire (H)

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht.$$

Nous avons déjà donné l'expression du rayon de courbure, exemple 5.3.2. et constaté que le rayon de courbure était constant.

L'application des formules (5.7.11.) permettant de trouver les coordonnées du centre de courbure.

$$\begin{aligned} X - x &= -\frac{a^2 + h^2}{a} \cos t, \\ Y - y &= -\frac{a^2 + h^2}{a} \sin t, \\ Z - z &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$X = -\frac{h^2}{a} \cos t, \quad Y = -\frac{h^2}{a} \sin t, \quad Z = ht.$$

Le lieu décrit par le centre de courbure ω est donc une nouvelle hélice (H') (fig. 5.7.3.). C'est une hélice de même axe, de même pas, tracée sur un cylindre de rayon $\frac{h^2}{a}$.

Exercice 5.7.6. — Déterminer les coefficients directeurs de (Δ_{2n}) pour la courbe d'équations

$$\begin{aligned} x(t) &= t \cos t, \\ y(t) &= t \sin t, \\ z(t) &= t \quad (\text{tracée sur un cône}). \end{aligned}$$

Exercice 5.7.7. — Déterminer le lieu du centre de courbure pour la courbe (C), intersection de la sphère

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

et du cylindre

$$(C) \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

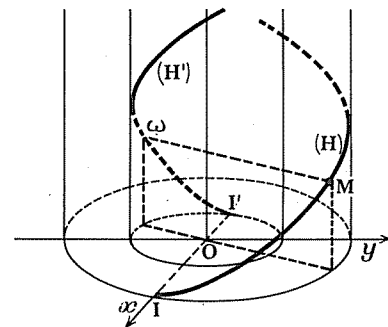


FIG. 5.7.2.

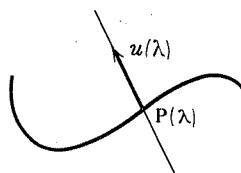


FIG. 5.8.1.

Exercice 5.8.1. — Par tout point $P(0, 0, \lambda)$ sur Oz ($-1 \leq \lambda \leq 1$), on mène les deux tangentes horizontales à la sphère

$$(S) \quad (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Déterminer la surface réglée qu'elles engendrent (conoïde).

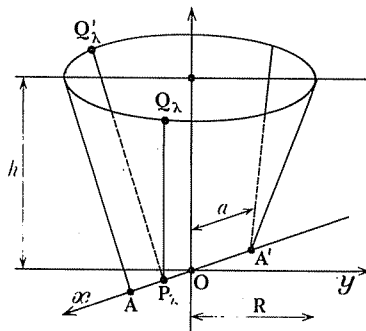


FIG. 5.8.2.

Exercice 5.8.2. — Une trémie est engendrée de la façon suivante :

par chaque point $M_\lambda(\lambda a, 0, 0)$, $1 \leq \lambda \leq 1$, du segment AA' (fig. 5.8.2.) on mène le plan (P_λ) d'équation

$$z = \frac{h}{\lambda(R-a)}(x - \lambda a), \quad -1 \leq \lambda \leq 1.$$

Ce plan coupe le cercle (C) d'équations

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = h,$$

en deux points Q_λ et Q'_λ .

Les segments $M_\lambda Q_\lambda$ et $M_\lambda Q'_\lambda$, $-1 \leq \lambda \leq 1$, engendrent la surface considérée.

Déterminer son équation et les sections planes par des plans $z = \text{Cte}$.

Exercice 5.8.3. — Revoir l'exercice (5.6.10.).

5.8. SURFACES RÉGLÉES

Ce sont des surfaces engendrées par une **droite** dépendant d'un paramètre λ . On les rencontre fréquemment en architecture. En général la droite variable (D_λ) s'appuie sur une courbe (C) en un point $P(\lambda)$ et est dirigée par un vecteur variable $u(\lambda)$ (fig. 5.8.1.).

D'où pour un point M quelconque

$$\vec{OM} = \vec{OP}(\lambda) + \mu \cdot \vec{u}(\lambda).$$

Exemple 5.8.1.

Soit (Δ) la droite d'équations

$$z = 0, \quad y = 1 \quad (\text{fig. 5.8.3.}).$$

On joint tout point $P(\lambda, 1, 0)$ de (Δ) au point $Q(0, 0, \lambda)$ de Oz . La droite PQ est dirigée par

$$\vec{u}(\lambda) = \vec{PQ} = (-\lambda, -1, \lambda).$$

Alors $\vec{OM} = \vec{OP} + \mu \vec{u}(\lambda)$, soit

$$\begin{cases} x = \lambda - \lambda\mu, \\ y = 1 - \mu, \\ z = \lambda\mu. \end{cases}$$

L'élimination de λ et μ donne

$$(x + z)y = x,$$

c'est l'équation d'une quadrique à déterminer (exercice).

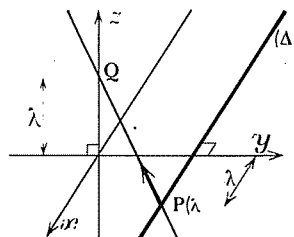


FIG. 5.8.3.

Nous terminons ce volume par l'étude des champs scalaires et vectoriels, qui utilise les figures de l'espace que nous venons d'observer.

5.9. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

5.9.1. — Écrire l'équation des plans parallèles aux vecteurs V_1 et V_2 donnés et passant par le point M_0 .

- a) $V_1 = (0, 0, 1)$, $V_2 = (0, 1, 0)$, $M_0 = (0, 0, 0)$;
 b) $V_1 = (2, -3, -4)$, $V_2 = (1, 3, 2)$, $M_0 = (-1, 0, 1)$;
 c) $V_1 = (-3, 1, 4)$, $V_2 = (2, -1, 5)$, $M_0 = (-2, -3, 1)$.

Déterminer ensuite les intersections avec les axes de ces différents plans.

5.9.2. — Écrire l'équation des plans passant par trois points M_1 , M_2 et M_3 .

- a) $M_1 = (0, 0, 0)$, $M_2 = (2, 2, 2)$, $M_3 = (1, 2, 3)$;
 b) $M_1 = (0, a, 2)$, $M_2 = (2a, 1, -1)$, $M_3 = (3a, -1, a)$;
 c) $M_1 = (0, 0, 1)$, $M_2 = (0, 2, 0)$, $M_3 = (3, 0, 0)$.

5.9.3. — Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel a , l'intersection des trois plans d'équations

- (P) $ax - 2y + z = 1$,
 (Q) $x - 2ay + z = -2$,
 (R) $x - 2y + az = 1$.

5.9.4. — Soit trois plans (P_1) , (P_2) et (P_3) passant chacun par trois points donnés.

- (P_1) passe par $A_1(60, 0, 0)$, $B_1(0, 60, 0)$, $C_1(0, 0, 30)$,
 (P_2) passe par $A_2(80, 0, 0)$, $B_2(0, 40, 0)$, $C_2(0, 0, 80)$,
 (P_3) passe par $A_3(30, 0, 0)$, $B_3(0, 60, 0)$, $C_3(0, 0, 60)$.

- a) Dessiner la figure formée par ces plans dans le « trièdre positif ».
 b) Déterminer les intersections.
 c) Calculer le volume du polyèdre formé par (P_1) , (P_2) et (P_3) et les trois plans de coordonnées (voir tome III, fig. 6.4.4.).

5.9.5. — Deux particules de rayon 1 effectuent des mouvements rectilignes uniformes de vitesse v sur les droites (D) et (Δ) :

$$(D) \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2},$$

$$(\Delta) \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2} \quad (\text{fig. 5.9.5}).$$

À l'instant zéro les centres sont en M_0 et N_0 , sur xOz et yOz . Déterminer l'instant t_c de la collision des deux particules et les nouvelles droites (D') et (Δ') suivies par celles-ci après le choc.

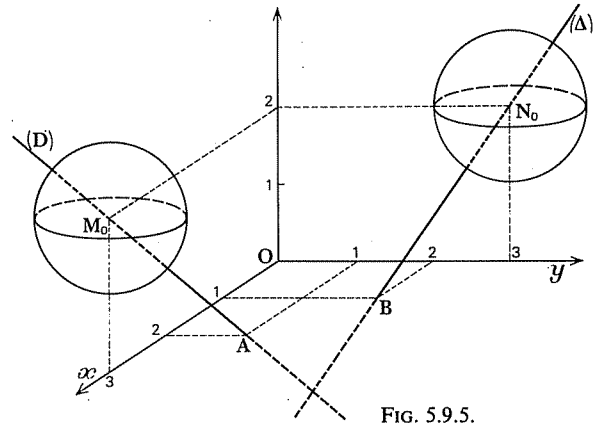


FIG. 5.9.5.

5.9.6. — Un « trapèze » est constitué par une tige de longueur $2l$ suspendue en ses extrémités par deux fils de longueur L (fig. 5.9.6). On fait tourner la tige d'un angle θ de façon que le centre reste sur Oz . Déterminer la hauteur $h(\theta) = \overline{OC}$ du centre et les directions des deux fils.

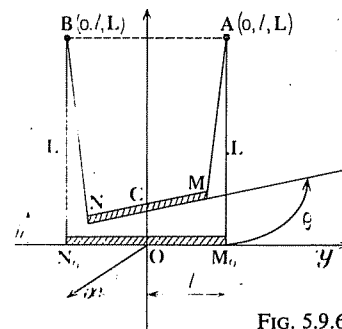


FIG. 5.9.6.

5.9.7. — On pose une carpelette circulaire de rayon r à cheval sur un cylindre horizontal de rayon R . Trouver une condition pour que le contact soit total ($r \leq R\sqrt{2}$). (fig. 5.9.7.).

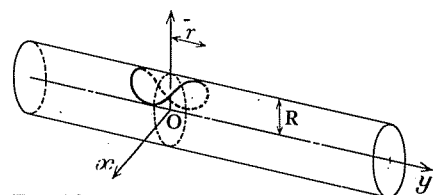


FIG. 5.9.7.

Déterminer les équations paramétriques du contour (C) de la carpe.

Chercher l'équation du cylindre de base (C) dont l'axe vertical passe par le centre de la carpe.

5.9.8. — On appelle *géodésique* d'une surface (S) toute ligne (C) tracée sur (S) le long de laquelle le plan osculateur ($\mathcal{O}$) est orthogonal au plan tangent ($\mathcal{T}$) à la surface au même point. (fig. 5.9.8.).

On démontre que si M et N sont deux points de (C), cette courbe est le plus court chemin de M vers N sur la surface (S).

Déterminer sur le cône (S) d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ la géodésique (C) passant par M (1, 0, 1) et N (0, 2, 2).

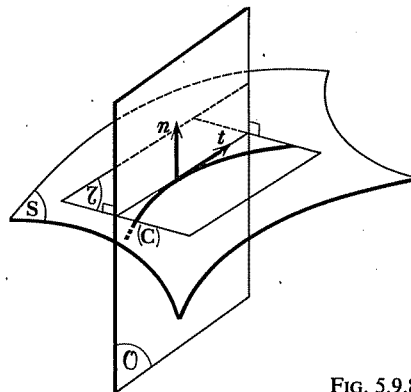


FIG. 5.9.8.

chapitre 6

Champs vectoriels Intégrales d'un champ

Dans tout ce chapitre, nous nous placerons dans un repère ortho-normé direct.

6.1. CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS VECTORIELS

Champs scalaires

Définition 6.1.1.

Un *champ scalaire* est une fonction f qui, à tout *point* M d'une partie de l'espace, fait correspondre un nombre réel $f(M)$.

Ainsi, la température à un instant donné, en tout point de la surface (S) de la Terre, définit un champ scalaire sur (S).

Dans la plupart des applications, le domaine de définition ($\mathcal{D}$) d'une fonction scalaire f est une courbe, une surface ou une région donnée de l'espace.

Exercice 6.1.1. — Étant donné un champ scalaire défini par

$$f(M) = 4yz^3 + 3xyz - z^2 + 2,$$

déterminer la valeur de ce champ aux points

$$M(1, 1, -2) \text{ et } N(0, 0, 1).$$

Exercice 6.1.2. — Soit un champ scalaire défini par

$$f(M) = x^2 + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2},$$

si x , y et z désignent les coordonnées de M dans un repère cartésien.

Déterminer l'expression de $f(M)$ en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

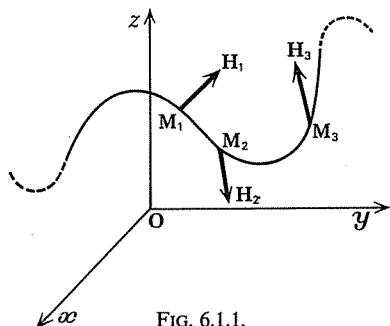


FIG. 6.1.1.

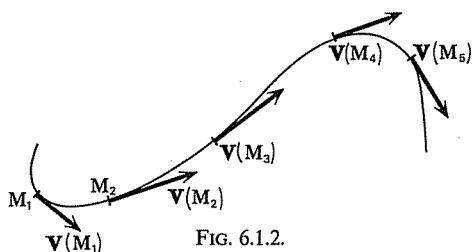


FIG. 6.1.2.

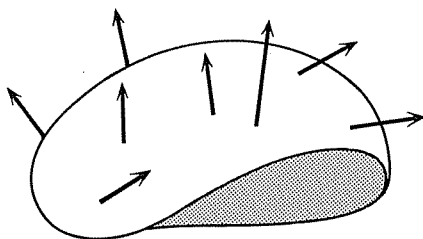


FIG. 6.1.3.

Lorsque nous introduisons un système de coordonnées x , y et z , la grandeur scalaire $f(M)$ peut s'écrire $f(x, y, z)$ à l'aide des coordonnées. Cette notion de **fonction de point** a l'avantage de montrer le rôle purement auxiliaire joué par les coordonnées. Par exemple, la densité en un point matériel d'un milieu continu ne dépend que du point considéré.

Exemple 6.1.1.

La distance $f(M)$ d'un point quelconque M à un point fixe M_0 de l'espace est un champ scalaire dont le domaine de définition ($\mathcal{D}$) est tout l'espace.

En utilisant les coordonnées cartésiennes, si x_0 , y_0 et z_0 sont les coordonnées de M_0 , nous avons la relation bien connue

$$f(M) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

où x , y et z désignent les coordonnées de M .

En changeant de système de coordonnées, les coordonnées de M et de M_0 changent en général, mais $f(M)$ conserve la même valeur pour un étalon de longueur donnée.

Champs vectoriels

Définition 6.1.2.

Si à chaque point M d'une certaine partie ($\mathcal{D}$) de l'espace (par exemple les points d'une courbe ou d'une surface) nous associons un vecteur $\mathbf{V}(M) = \overrightarrow{MH}$, nous avons défini un **champ vectoriel** sur le domaine ($\mathcal{D}$) (voir fig. 6.1.1.).

Ainsi nous connaissons le champ des **vecteurs tangents** à une courbe de l'espace (fig. 6.1.2.), le champ des vecteurs normaux à une surface (S) donnée (fig. 6.1.3.).

Dans un repère cartésien, nous pouvons écrire

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k},$$

mais il ne faut pas oublier que le champ $\mathbf{V}$ ne dépend que des **points** du domaine.

Les équations

$$P = f(x, y, z), \quad Q = g(x, y, z), \quad R = h(x, y, z)$$

qui donnent les composantes du **vecteur champ MH** en fonction des coordonnées x , y et z du point M sont les **équations du champ**.

Citons quelques cas importants :

– un **champ de vitesse** où le vecteur **MH** peut être le vecteur vitesse à un instant donné d'une particule d'un fluide en mouvement, occupant à cet instant la position M ;

– un **champ de forces** où le vecteur **MH** représente une force à laquelle se trouve soumise une masse ponctuelle mobile donnée lorsque cette masse ponctuelle vient en M . Un champ de forces peut aussi être déduit de **champs électriques**, ou **magnétiques**.

Exemple 6.1.2.

Champ de vitesses

Considérons à un instant quelconque les vecteurs vitesses $\mathbf{V}(M)$ d'un corps tournant autour d'un axe. Ils constituent un **champ vectoriel de la rotation** (fig. 6.1.4.).

Dans un repère orthonormé, nous avons vu à l'exemple (1.4.1) que

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(x, y, z) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}.$$

Si le choix du système de coordonnées est tel que le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ (vecteur instantané de rotation) soit dirigé suivant l'axe Oz de module ω , nous avons d'après la formule (1.6.4.) donnant les composantes scalaires du produit vectoriel de deux vecteurs

$$\mathbf{V}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Exemple 6.1.3.

Champ de forces

Considérons une particule A de masse M fixée en un point P_0 et une particule B de masse m placée en un point quelconque P de l'espace, attirée par le point A .

D'après la loi de Newton sur la gravitation, il existe une force gravitationnelle $\mathbf{F}$ dirigée de P vers P_0 dont le module est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ où r désigne la distance $P_0 P$, soit

$$(1) \quad \|\mathbf{F}\| = \frac{c}{r^2}, \quad \text{où } c = GMm.$$

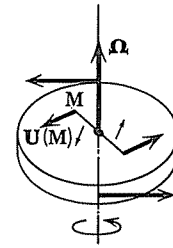


FIG. 6.1.4.

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$ est la constante de gravitation. Ainsi F définit un champ vectoriel dans l'espace.

Si nous introduisons des coordonnées cartésiennes

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Introduisons le vecteur

$$(2) \quad \mathbf{r} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}.$$

Nous avons $\|\mathbf{r}\| = r$ et $-\frac{\mathbf{r}}{r}$ est un vecteur unitaire dirigé suivant F . Le signe moins indique que F est dirigé de P vers P_0 (fig. 6.1.5.). Avec les relations (2) et (1) nous obtenons

$$\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| \left(\frac{\mathbf{r}}{-r} \right) = -c \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

soit

$$\mathbf{F} = -c \frac{x - x_0}{r^3} \mathbf{i} - c \frac{y - y_0}{r^3} \mathbf{j} - c \frac{z - z_0}{r^3} \mathbf{k},$$

$-c \frac{x - x_0}{r^3}$, $-c \frac{y - y_0}{r^3}$ et $-c \frac{z - z_0}{r^3}$ sont les composantes du vecteur champ F .

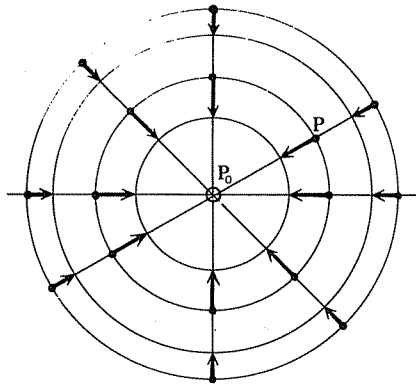


FIG. 6.1.5.

Exemple 6.1.4.

Une charge électrique q placée en A produit un champ électrique défini en tout point M par

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \mathbf{u},$$

où r est la distance $\|\mathbf{AM}\|$, $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire porté par $\mathbf{AM}$, dirigé de A vers M (fig. 6.1.6.).

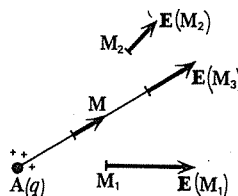


FIG. 6.1.6.

Soit un **dipôle** électrostatique constitué par les charges $+q$ et $-q$ placées en $A\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ et $B\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$. Le champ E se décompose en tout point M du plan selon une composante radiale E_r et une composante tangentielle E_θ (fig. 6.1.7.). Nous l'exprimons tout d'abord par

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{u}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{u}_2}{r_2^2} \right),$$

où u_1 et u_2 sont les vecteurs unitaires portés par AM et BM , avec

$$r_1 = \|AM\| \quad \text{et} \quad r_2 = \|BM\|.$$

Un calcul effectué plus loin conduira à

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3},$$

avec $r = \|OM\|$.

Ce calcul utilisera la notion de *potentiel*.

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude d'un cas particulier de *champ vectoriel*.

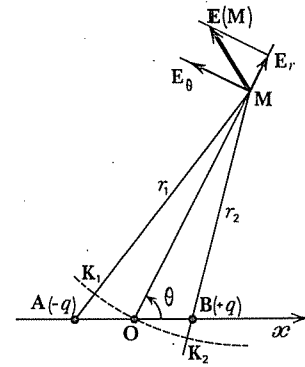


FIG. 6.1.7.

6.2. CHAMP DES MOMENTS DE VECTEURS GLISSANTS

Considérons, par exemple, un système ($\mathcal{S}$) de forces $F_1, F_2, \dots, F_n$ agissant sur un solide donné (fig. 6.2.1.). On peut caractériser ce système de forces par la résultante $R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ et par le *moment résultant* (exemple 1.4.4.)

$$\mathcal{M}_O(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_O(F_1) + \mathcal{M}_O(F_2) + \dots + \mathcal{M}_O(F_n),$$

avec $\mathcal{M}_O(F_i) = OM_i \wedge F_i, \quad 1 \leq i \leq n.$

Notons X, Y et Z les composantes de R , et L, M et N celles de $\mathcal{M}_O(\mathcal{S})$ par rapport à un repère orthonormé.

Le point O par rapport auquel on calcule le moment est quelconque : ainsi le moment résultant $\mathcal{M}_O(\mathcal{S})$ définit un *champ vectoriel*.

Soit O' un autre point de l'espace et $\mathcal{M}_{O'}(\mathcal{S})$ le moment résultant en ce point. Nous pouvons calculer la différence

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{O'}(\mathcal{S}) - \mathcal{M}_O(\mathcal{S}) &= \sum_{i=1}^n (O'M_i - OM_i) \wedge F_i \\ &= O'O \wedge \sum_{i=1}^n F_i = O'O \wedge R, \end{aligned}$$

d'où la formule importante

$$(6.2.1.) \quad \mathcal{M}_{O'}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_O(\mathcal{S}) + O'O \wedge R,$$

qui relie entre eux les vecteurs du champ calculés en des points différents.

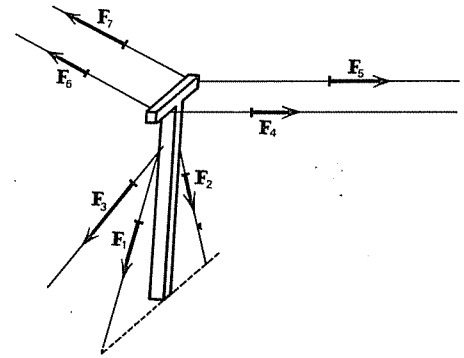


FIG. 6.2.1.

Exercice 6.2.1. — Calculer le moment par rapport à O (origine des axes) du système ($\mathcal{S}$) de deux forces $F_1(1, 0, 1)$ et $F_2(1, 1, 0)$ appliquées en des points $A_1(1, 2, 1)$ et $A_2(2, 1, 1)$.

Exercice 6.2.2. — Calculer le moment du système ($\mathcal{S}$) de l'exercice (6.2.1.) par rapport au point $O'(1, -1, 2)$.

Remarque 6.2.1. — Effectuons le produit scalaire des deux membres de (6.2.1.) par le vecteur $\vec{OO'}$; nous obtenons

$$\mathcal{M}_{O'} \cdot \vec{OO'} = \mathcal{M}_O \cdot \vec{OO'},$$

c'est-à-dire que les moments par rapport à deux points O et O' ont *même projection* sur la droite OO' . C'est une propriété caractéristique des champs de moments d'un système de vecteurs glissants.

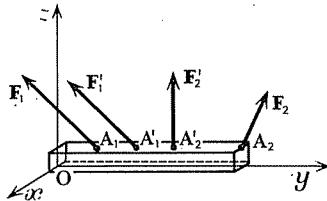


FIG. 6.2.2.

Exercice 6.2.3. — Soit la force $\vec{F}_1''(0, 2, 4)$ appliquée au point $A_1''(0, \frac{l}{3}, 0)$ de la poutre (exemple 6.2.1.) et $\vec{F}_2''(0, -6, 4)$ appliquée en un point $A_2''(0, y, 0)$. Déterminer y pour que le système ($\mathcal{S}'''$) ait même moment résultant que le système ($\mathcal{S}$).

Effectuons le produit scalaire des deux membres de la relation (6.2.1.) par la résultante $\vec{R}$. Nous obtenons

$$(6.2.2.) \quad \mathcal{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \mathcal{M}_O \cdot \vec{R},$$

ou encore

$$L'X + M'Y + N'Z = LX + MY + NZ.$$

Cette quantité est indépendante du point O considéré : c'est l'*invariant scalaire* du système de forces ($\mathcal{S}$).

Exemple 6.2.1.

Considérons le système ($\mathcal{S}$) des deux forces

$$\vec{F}_1(0, -5, 5) \quad \text{et} \quad \vec{F}_2(0, 1, 3)$$

appliquées aux points

$$A_1\left(0, \frac{l}{5}, 0\right) \quad \text{et} \quad A_2(0, l, 0)$$

d'une poutre de longueur l , encastrée dans le plan xOz (fig. 6.2.2.).

Nous avons

$$\vec{R} = (0, -4, 8) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_O(\mathcal{S}) = (4l, 0, 0).$$

Soit alors le système ($\mathcal{S}'$) des forces

$$\vec{F}_1'(0, -4, 4) \quad \text{et} \quad \vec{F}_2'(0, 0, 4)$$

appliquées aux points

$$A_1'\left(0, \frac{2l}{5}, 0\right) \quad \text{et} \quad A_2'\left(0, \frac{3l}{5}, 0\right).$$

Nous avons

$$\vec{R}' = (0, -4, 8) = \vec{R} \quad \mathcal{M}_O(\mathcal{S}') = (4l, 0, 0) = \mathcal{M}_O(\mathcal{S}).$$

Les systèmes ($\mathcal{S}$) et ($\mathcal{S}'$) ont même résultante $\vec{R}$ et même moment résultant en O .

D'après (6.2.1.), ils ont même moment résultant en tout point O' de l'espace.

Définition 6.2.1.

On appelle *torseur* l'ensemble de tous les systèmes ($\mathcal{S}'$) ayant même résultante et mêmes moments qu'un système donné ($\mathcal{S}$) de vecteurs glissants.

Cette notion peut être utile pour l'étude d'un système ($\mathcal{S}$) *compliqué*. Il est naturel de rechercher le système ($\mathcal{S}'$) le plus simple parmi tous ceux qui ont même résultante et mêmes moments qu'un système donné ($\mathcal{S}$) de vecteurs glissants.

Les systèmes les plus simples comportent un ou deux vecteurs glissants (*couple* par exemple).

Exemple 6.2.2.

Soit un système ($\mathcal{S}$) de vecteurs glissants $F_1, F_2, \dots, F_n$, de résultante R et de moments $\mathcal{M}_O(\mathcal{S})$. Cherchons tous les points P tels que les vecteurs $\mathcal{M}_P(\mathcal{S})$ du champ de moments soient colinéaires à la résultante R .

Soit P et P' deux tels points. D'après (6.2.2.),

$$R \cdot \mathcal{M}_P(\mathcal{S}) = R \cdot \mathcal{M}_{P'}(\mathcal{S}),$$

donc les deux moments, colinéaires à R , sont égaux. D'après (6.2.1.), nous avons

$$(6.2.3.) \quad \mathcal{M}_O(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_P(\mathcal{S}) + OP \wedge R = \mathcal{M}_{P'} + OP' \wedge R,$$

soit

$$OP \wedge R = OP' \wedge R,$$

ou

$$(6.2.4.) \quad PP' \wedge R = 0.$$

Les points P et P' sont situés sur une même droite (D) parallèle à la résultante R , appelée *axe central* du système ($\mathcal{S}$).

Cherchons P tel que OP soit orthogonal à (D) .

Effectuons le produit vectoriel de (6.2.3.) par R

$$R \wedge \mathcal{M}_O(\mathcal{S}) = R \wedge (OP \wedge R) = R^2 \cdot OP - (R \cdot OP) \cdot R,$$

d'où

$$(6.2.5.) \quad OP = \frac{R \wedge \mathcal{M}_O(\mathcal{S})}{\|R\|^2}.$$

Nous reprenons l'étude des champs scalaires et vectoriels quelconques.

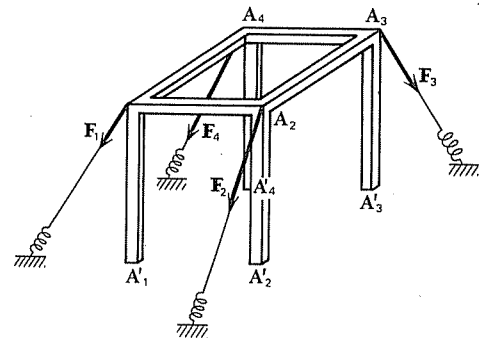


FIG. 6.2.3.

Exercice 6.2.4. — Un assemblage cubique de poutres (fig. 6.2.3.) fixé au sol est soumis aux forces $F_1(-1, -1, -1)$, $F_2(1, 0, -1)$, $F_3(-1, 1, -1)$ et $F_4(-2, -2, -3)$ appliquées aux points A_1, A_2, A_3 et A_4 sous l'action de câbles tendus. Déterminer la résultante R et le moment résultant par rapport au sommet A_1 .

Exercice 6.2.5. — Soit un axe (Δ) ne passant pas par O , dont le vecteur unitaire $u(\alpha, \beta, \gamma)$ admet un moment $\mathcal{M}_O(u)$ de composantes λ, μ et ν . Montrer que le *moment* résultant du système de forces ($\mathcal{S}$) par rapport à l'axe (Δ) est (paragraphe 1.4.)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{(\Delta)}(\mathcal{S}) &= u \cdot \mathcal{M}_O(\mathcal{S}) + R \cdot \mathcal{M}_O(u) \\ &= \alpha L + \beta M + \gamma N + \lambda X + \mu Y + \nu Z. \end{aligned}$$

Exercice 6.2.6. — Déterminer le moment par rapport à l'arête $A'_1 A'_2$ (fig. 6.2.3.) du système de forces F_1, F_2, F_3 et F_4 (exercices 6.2.4. et 6.2.5.).

Exercice 6.2.7. — Déterminer l'axe central du système des forces F_1, F_2, F_3 et F_4 de l'exercice (6.2.4.).

Exercice 6.2.8. — Montrer qu'aux points (P) de l'axe central (D) le moment $\mathcal{M}_P(\mathcal{S})$ est de longueur minimale.

6.3. GRADIENT D'UN CHAMP SCALAIRE

Considérons un champ scalaire différentiable défini dans un domaine ($\mathcal{D}$) de l'espace, soit $f(M) = f(x, y, z)$.

Nous savons que la dérivée partielle première de f par rapport à x représente le taux de variation de f dans la direction Ox , etc. On peut ne pas vouloir se limiter à ces trois directions privilégiées et chercher le taux de variation de f dans une direction quelconque.

Pour définir cette dérivation, choisissons dans l'espace un point M et une direction en M représentée par le vecteur unitaire u (fig. 6.3.1).

Si (D) désigne la droite issue de M dans la direction de u et si N est un point de (D) situé à une distance s de M , alors

$$(6.3.1) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_u (M) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(N) - f(M)}{s}$$

est appelé *la dérivée de f en M dans la direction de u* . Si (a, b, c) désignent les composantes de u , (6.3.1.) s'écrit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_u (M) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + as, y + bs, z + cs) - f(x, y, z)}{ds}.$$

Cherchons à exprimer cette dérivée à l'aide des dérivées partielles de f .

Si M est représenté par le vecteur position a (fig. 6.3.1.), la droite (D) peut être représentée sous la forme vectorielle (cf. ch. 3)

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} r(s) &= x(s)i + y(s)j + z(s)k, \\ r(s) &= a + s u. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\frac{\partial f}{\partial s}$ est la dérivée de la fonction $f[x(s), y(s), z(s)]$ par rapport à l'abscisse curviligne s sur (D). Nous obtenons

$$(6.3.3) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_u (M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_M \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_M \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_M \frac{dz}{ds}.$$

Exercice 6.3.1. — Déterminer la dérivée dans la direction de $u(1, 1, 1)$ du champ scalaire

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

au point $M(1, 0, 0)$.

D'après la dérivation de la relation (6.3.2.), nous avons (cf. théorème 1.8.1.)

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j + \frac{dz}{ds}k = u.$$

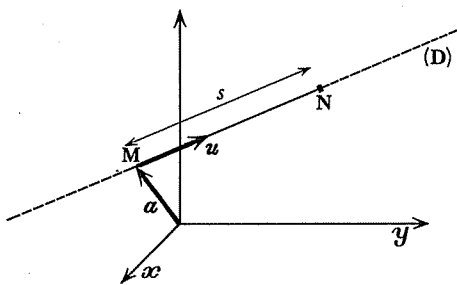


FIG. 6.3.1.

Si nous introduisons le vecteur

$$(6.3.4.) \quad (\text{grad } f)_M = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M \mathbf{k},$$

la relation (6.3.4.) peut s'écrire comme un produit scalaire :

$$(6.3.5.) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_u (M) = \mathbf{u} \cdot (\text{grad } f)_M.$$

En particulier, si le vecteur $\mathbf{u}$ a la *direction de l'axe des x*, soit $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, nous en déduisons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_i = \mathbf{i} \cdot \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dans ces égalités et les suivantes, la lettre M est sous-entendue.

D'après (6.3.5.) et la définition du produit scalaire de deux vecteurs, nous avons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_u = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\text{grad } f\| \cos \gamma = \|\text{grad } f\| \cos \gamma,$$

où γ est l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\text{grad } f$.

Nous remarquons que $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_u$ est *maximal* quand

$$\cos \gamma = 1 \quad \text{soit} \quad \gamma = 0,$$

c'est-à-dire quand le vecteur $\mathbf{u}$ est *colinéaire* à $\text{grad } f$.

Théorème 6.3.1.

Si $f(M) = f(x, y, z)$ est un champ scalaire ayant des dérivées partielles premières continues, alors le vecteur $\text{grad } f$ défini par

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

existe. D'après (6.3.5.), le vecteur $\text{grad } f$, s'il n'est pas nul indique la direction de plus rapide croissance de f autour du point M de l'espace.

Remarque 6.3.1. — La différentielle totale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

se présente comme un produit scalaire

$$\text{grad } f \cdot d\mathbf{M}.$$

Exercice 6.3.2. — Soit f un champ scalaire différentiable. Montrer que le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

est indépendant de la base orthonormale choisie. Cet exercice montre que $\text{grad } f$ ne dépend que du champ.

Exercice 6.3.3. — Trouver le gradient $\text{grad } f$ quand

a) $f(x, y) = x^2 - y^2,$

b) $f(x, y, z) = xyz,$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

d) $f(x, y) = \text{Log}(x^2 + y^2),$

e) $f(x, y, z) = yz + zx + xy,$

f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$

Exercice 6.3.4. — Soit $\mathbf{x}$ un vecteur donné. Montrer que

$$\text{grad } \|\mathbf{x}\| = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Surfaces de niveau

Considérons un champ scalaire $f(x, y, z)$ différentiable. Supposons que pour chaque constante h , l'équation

$$(6.3.7.) \quad f(x, y, z) = h$$

représente une surface (S_h) dans l'espace.

Nous obtenons ainsi une famille de surfaces (S_h) que l'on appelle **surfaces de niveau** du champ de scalaires $f(x, y, z)$.

Par un point donné de l'espace, il passe une, et une seule, surface (S_h) qui correspond à une valeur de h .

Une courbe (Γ) quelconque de l'espace peut se représenter sous la forme

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k.$$

Si la courbe (Γ) est tracée sur une surface de niveau (6.3.7.), les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ doivent vérifier

$$f[x(t), y(t), z(t)] = h.$$

En différenciant par rapport à t , nous obtenons

$$(6.3.8.) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = (\text{grad } f) \cdot \frac{dr}{dt} = 0.$$

Le vecteur
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$$

est tangent à (Γ) . Si l'on considère toutes les courbes de (S_h) passant par le point M de la surface S (fig. 6.3.2.), leurs tangentes en M restent en général, si M est régulier, dans un plan dont le seul point commun avec la surface est le point M . Ce plan est appelé le **plan tangent** à (S_h) au point M (fig. 6.3.2.).

Ce plan est défini par la **normale** à la surface (S_h) en M . D'après la relation (6.3.8.) et le théorème (5.2.1.) nous avons donc le théorème (6.3.2.).

Théorème 6.3.2.

Si f est une fonction scalaire telle que par un point M de l'espace, il passe une surface de niveau (S_h) de f et, si

$$\text{grad } f \neq 0$$

Exercice 6.3.8. — Soit

$$f(x, y, z) = x^2 z + \frac{y}{x},$$

$$g(x, y, z) = 2z^2 y - xy^2.$$

Calculer $\nabla(f + g)$ et $\nabla(fg)$ en $M(1, 1, 1)$.

Exercice 6.3.9. — Soit un champ scalaire U défini en coordonnées bipolaires r_1, r_2 par

$$U(M) = f(r_1, r_2)$$

avec

$$r_1 = \|A_1 M\|, \quad r_2 = \|A_2 M\|.$$

On pose $u_1 = \frac{A_1 M}{r_1}$ et $u_2 = \frac{A_2 M}{r_2}$.

Calculer $\text{grad } u$.

Exercice 6.3.10. — Montrer que les rayons vecteurs d'un point M d'une ellipse (E) de foyers A et B déterminent des angles égaux avec la tangente en M à (E) .

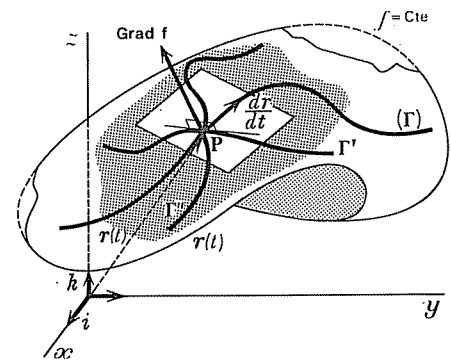


FIG. 6.3.2.

en M , alors $\text{grad } f$ est un vecteur *perpendicularaire* à (S_h) en M ; c'est un vecteur normal au plan tangent à (S_h) en M .

Exercice 6.3.11. — Montrer que les courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = \text{Log}(x^2 + y^2)$$

sont des cercles concentriques centrés à l'origine.

Montrer que $\text{grad } f$ est un vecteur dont la direction est normale aux cercles.

Il en résulte immédiatement que le plan tangent à une surface d'équation

$$f(x, y, z) = C$$

en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$(6.3.9) \quad (X - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_M + (Y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_M + (Z - z_0) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_M = 0.$$

Exemple 6.3.2.

Trouver le vecteur unitaire normal à une surface de niveau donnée en un point donné.

Soit le cône de révolution $z^2 = 4(x^2 + y^2)$. Ce cône est la surface de niveau $f(x, y, z) = 0$ de la fonction

$$f(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2.$$

Par suite,

$$\text{grad } f = 8x \mathbf{i} + 8y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}.$$

Au point $M(1, 0, 2)$ de la surface

$$\text{grad } f = 8 \mathbf{i} - 4 \mathbf{k}.$$

Le vecteur unitaire normal à la surface d'après le théorème (6.3.2.) est

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{k}.$$

Exemple 6.3.3.

Champ gravitationnel, équation de Laplace.

Nous avons vu dans l'exemple (5.1.3.) que la force d'attraction entre deux particules est

$$\mathbf{F} = -c \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad c > 0,$$

soit
$$\mathbf{F} = -c \left(\frac{x - x_0}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y - y_0}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z - z_0}{r^3} \mathbf{k} \right),$$

avec $r = \| \mathbf{r} \| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

qui est la distance entre les deux particules considérées

$$\mathbf{P}(x, y, z) \text{ et } \mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0).$$

Or
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{x - x_0}{r^3}.$$

De même
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{y - y_0}{r^3} \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{z - z_0}{r^3}.$$

Par suite, nous obtenons

$$\mathbf{F} = \text{grad} \frac{c}{r}.$$

Nous dirons que la fonction

$$f(x, y, z) = \frac{c}{r}$$

est le *potentiel* du champ gravitationnel.

On a également en différentiant une deuxième fois,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(z - z_0)^2}{r^5}.$$

Ainsi le potentiel

$$f(x, y, z) = \frac{c}{r}$$

satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

C'est l'*équation de Laplace* sur laquelle nous reviendrons au tome V.

Remarque 6.3.13. — Le laplacien avec l'opérateur différentiel

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

s'écrit

$$\nabla^2 f = \Delta f.$$

Exercice 6.3.14. — Montrer que

$$\nabla^2 (fg) = g \nabla^2 f + 2 \nabla f \nabla g + f \nabla^2 g.$$

Composantes du vecteur gradient dans les systèmes de coordonnées classiques

Exercice 6.3.15. — Soit (ρ, θ, z) un système de coordonnées cylindriques et f une fonction scalaire. Montrer que

$$\text{grad } f = \frac{\partial F}{\partial \rho} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k},$$

avec $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ et $\mathbf{u}_1 = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta}$.

$$F(\rho, \theta, z) = f(x, y, z).$$

Remarquons que nous notons f la fonction de point M . Par contre, si f est une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z)$, elle conduit à une fonction $F(\rho, \theta, z)$ dans un système de coordonnées cylindriques. Dans la pratique, nous la noterons toujours f par *abus de langage*, quel que soit le système de coordonnées choisi. La formule précédente devient

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Même si l'on raisonne avec les opérateurs vectoriels tels que le vecteur gradient, c'est-à-dire indépendamment d'un système de référence, les nécessités du calcul conduisent toujours à l'utilisation finale d'un système de référence, ce qui rend indispensable la connaissance des composantes.

En coordonnées cartésiennes, nous avons vu que

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

En coordonnées cylindriques (cf. paragraphe 2.2.), la fonction f apparaît comme une fonction des coordonnées ρ, θ et z et le vecteur $\text{grad } f$ se définit par ses composantes cylindriques suivant $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{k}$. Il s'écrit

$$(6.3.10.) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

En coordonnées sphériques (cf. paragraphe 2.2.), la fonction f est une fonction de r, θ et φ . En utilisant les composantes suivant $\mathbf{w}, \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{w}_1$, $\text{grad } f$ s'écrit

$$(6.3.11.) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{w} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{w}_1.$$

6.4. DIVERGENCE D'UN CHAMP VECTORIEL

Soit un champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$, notation qui signifie qu'à un point M correspond le vecteur $\mathbf{V}(M)$ indépendamment d'un système d'axes. Si $u(M), v(M)$ et $w(M)$ sont les composantes scalaires de ce champ $\mathbf{V}(M)$ dans un référentiel cartésien, par exemple, on définit

$$(6.4.1.) \quad (\text{div } \mathbf{V})(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M) + \frac{\partial v}{\partial y}(M) + \frac{\partial w}{\partial z}(M).$$

C'est la *divergence* du champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$. Dans la suite, nous sous-entendrons souvent M .

Exercice 6.4.1. — Déterminer la divergence du champ vectoriel défini par

- a) $u(M) = xz, v(M) = xy^2, w(M) = z^3 y,$
 b) $u(M) = e^{xy}, v(M) = \sin(xyz), w(M) = \cos(zx).$

Remarquons que si

$$\mathbf{V} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$$

$$(6.4.2.) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}).$$

Notons que $\nabla \cdot \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{V}$ est un **champ scalaire associé à un champ vectoriel**.

Ce champ scalaire a une signification physique importante.

Exemple 6.4.1.

Soit une particule fluide qui, à l'instant t , occupe un volume $d\tau$, possède une masse spécifique ρ et se trouve en un point M , de coordonnées cartésiennes x, y et z .

A un instant ultérieur $t + dt$, la même particule occupe un volume $d\tau'$, possède une masse spécifique ρ' et se trouve en un point M' de coordonnées x', y' et z' .

Sa masse n'ayant pas varié, nous avons

$$\rho d\tau = \rho' d\tau'.$$

Nous voulons évaluer ρ' et $d\tau'$ en fonction de ρ et de $d\tau$, du temps et de la vitesse $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ de la particule dont les composantes sont appelées u, v et w .

Le point $M(x, y, z)$ se déplace en $M'(x', y', z')$ de façon que

$$x' = x + u dt, \quad y' = y + v dt, \quad z' = z + w dt.$$

Or u, v et w sont des fonctions de x, y, z et t . Comme t et dt sont considérés comme fixés, les seules variables sont finalement x, y et z .

Nous avons (cf. tome I, paragraphe 3.8. et 3.13.) de plus

$$(6.4.3.) \quad \frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{dx' dy' dz'}{dx dy dz} = \frac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)}$$

(remarque 6.4), où

$$\frac{D(x' y' z')}{D(x y z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix},$$

est le déterminant fonctionnel ou **jacobien**.

Exercice 6.4.2. — Montrer que

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \mathbf{k}.$$

Remarque 6.4.1. — Dans l'exemple ci-contre nous avons **à chaque instant** t , un champ de vitesses $\mathbf{V}(M, t)$ au sein du fluide. C'est un exemple de champ variable.

Remarque 6.4.2. — La relation (6.4.3.) symbolise un passage à la limite quand l'élément de volume ($\mathcal{V}$) tend vers zéro, pour

$$\frac{\iiint_{(\mathcal{V}')} dx' dy' dz'}{\iiint_{(\mathcal{V})} dx dy dz}.$$

Avec les relations (6.4.2.), le rapport (6.4.3.) s'écrit

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt & \frac{\partial u}{\partial y} dt & \frac{\partial u}{\partial z} dt \\ \frac{\partial v}{\partial x} dt & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt & \frac{\partial v}{\partial z} dt \\ \frac{\partial w}{\partial x} dt & \frac{\partial w}{\partial y} dt & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant (chapitre 1, tome III) en se bornant au premier ordre en dt on obtient,

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt,$$

ce qui s'écrit vectoriellement

$$d\tau' = (1 + \operatorname{div} \mathbf{V} dt) d\tau,$$

où

$$\frac{d\tau' - d\tau}{d\tau} = \frac{d(d\tau)}{d\tau} = (\operatorname{div} \mathbf{V}) dt.$$

Cette quantité représente l'accroissement relatif de volume de la particule P, c'est-à-dire la dilatation cubique unitaire du fluide au point et entre les instants considérés. La quantité scalaire

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{V}$$

représente la *vitesse de dilatation cubique unitaire* du fluide au point M à l'instant t .

Propriété fondamentale de la divergence

La divergence est un *opérateur vectoriel* qui peut être défini indépendamment de tout système de coordonnées. En effet, la formule (6.4.2.)

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

peut s'entendre pour tout repère.

La divergence est un *champ scalaire*, les valeurs de $\operatorname{div} \mathbf{V}$ ne dépendent que des points de l'espace. Ces valeurs sont indépendantes du choix du système de coordonnées.

Par exemple, si

$$x^* = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + b_1,$$

$$y^* = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + b_2,$$

$$z^* = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + b_3,$$

Remarque 6.4.3. — Rappelons (tome III, paragraphe 2.12.) que l'application $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ peut être représentée au voisinage de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au moyen de la matrice jacobienne

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

sous la forme *linéarisée*

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

La *divergence* est alors définie comme la trace de la matrice jacobienne

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{Tr} \mathbf{J}.$$

et l'invariance de la trace par changement de repère entraîne celle de la divergence.

et si u^* , v^* et w^* sont les composantes du vecteur $\mathbf{V}$ dans le nouveau repère de vecteurs unitaires $\mathbf{i}^*$, $\mathbf{j}^*$ et $\mathbf{k}^*$ on montre que

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*}.$$

Définition 6.4.2.

Si $f(x, y, z)$ est une fonction scalaire deux fois continûment différentiable, alors

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

et le champ scalaire

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

est appelé **laplacien** de f , et noté Δf .

Si l'on utilise l'opérateur différentiel ∇ , nous avons (cf. remarque 6.3.)

$$(6.4.4.) \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) \quad \nabla^2 f = \Delta f.$$

On montre alors facilement que si f est une fonction scalaire

$$\operatorname{div} (f\mathbf{V}) = \nabla \cdot (f\mathbf{V}) = f \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla f,$$

soit

$$(6.4.5.) \quad \operatorname{div} (f\mathbf{V}) = f \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} f.$$

De même si ρ est un champ scalaire et F une fonction numérique

$$(6.4.6.) \quad \operatorname{grad} F(\rho) \equiv \frac{dF}{d\rho} \operatorname{grad} \rho.$$

Expression de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques

Le lecteur pourra démontrer les résultats ci-après présentés à partir des résultats du chapitre 2.

En coordonnées cylindriques, le vecteur $\mathbf{V}$ est représenté par ses composantes V_ρ , V_θ et V_z qui sont des fonctions de ρ , θ et z . Par utili-

Exercice 6.4.3. — Montrer l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*}.$$

Exercice 6.4.4. — Calculer Δf avec

$$f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4,$$

au point $M(1, 1, 1)$.

Exercice 6.4.5. — Montrer que si $\varphi(M)$ est une fonction scalaire

$$\operatorname{grad} \varphi^n = n \varphi^{n-1} \operatorname{grad} \varphi.$$

Exercice 6.4.6. — Déterminer la divergence du champ électrique du dipôle (exemple 6.1.4.).

sation des formules de correspondance des coordonnées et des composantes, on obtient

$$(6.4.7.) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial V_\theta}{\theta \sin \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

En coordonnées sphériques, le vecteur $\mathbf{V}$ est représenté par ses composantes V_r , V_θ et V_φ qui sont des fonctions de r , θ et φ . On obtient ainsi

$$(6.4.8.) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{2 V_r}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{V_\varphi \operatorname{tg} \varphi}{r}.$$

6.5. ROTATIONNEL D'UN CHAMP VECTORIEL

Considérons un champ vectoriel $\mathbf{V}$ (M) dans un repère cartésien et posons

$$\mathbf{V}(M) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}.$$

Définition 6.5.1.

Le champ vectoriel noté

$$(6.5.1.) \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \wedge \mathbf{V}$$

est appelé le *rotationnel* du champ vectoriel $\mathbf{V}$ (M).

Exercice 6.5.1. — Trouver le vecteur $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ quand

a) $\mathbf{V} = y \mathbf{i} - x \mathbf{j}$,

b) $\mathbf{V} = z^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$,

c) $\mathbf{V} = xz \mathbf{i} - yz \mathbf{j}$.

Exercice 6.5.2. — Soit les vecteurs

$$\mathbf{U} = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

et

$$\mathbf{V} = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}.$$

Calculer

a) $\operatorname{rot}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})$,

b) $\operatorname{div}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})$.

La présentation de ce champ associé au champ vectoriel $\mathbf{V}$ (M) à l'aide de l'opérateur vectoriel différentiel

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

permet de trouver ses composantes à partir de la relation (6.5.1.) (cf. tome III, chapitre 1)

$$(6.5.2.) \quad \nabla \wedge \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

soit

$$(6.5.3.) \quad \text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Sur un exemple, nous allons voir la signification du rotationnel qui joue un rôle important dans de nombreuses applications.

Notons que le rotationnel est indépendant du repère considéré (exercice 6.5.3.).

Exemple 6.5.1.

Reprenons l'exemple (1.4.1.).

La rotation d'un corps solide rigide B autour d'un axe (Δ) fixé de l'espace peut se représenter par l'intermédiaire d'un vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ de grandeur ω dirigé suivant l'axe de rotation.

Le champ de vitesse de la rotation peut se représenter sous la forme

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r},$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur repérant la position d'un point mobile du corps B dans sa rotation autour de l'axe (Δ) .

Si l'on choisit un repère cartésien dont l'axe z est porté par (Δ) (fig. 6.5.1.), nous avons $\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{k}$, d'où la vitesse en un point (x, y) du corps solide.

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

D'après la relation (6.5.3.) on a alors

$$\text{rot } \mathbf{V} = 2\omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\Omega},$$

$\boldsymbol{\Omega}$ est le **vecteur tourbillon**.

Ainsi dans le cas de la rotation d'un corps solide autour d'un axe, le rotationnel du champ de vitesse a la direction de l'axe de rotation et son module est égal à deux fois la vitesse angulaire de rotation ω .

Identités usuelles

Nous présentons ci-après quelques identités fondamentales qui se vérifient aisément en passant aux composantes ou en utilisant l'opérateur différentiel ∇ .

Exercice 6.5.3. — Soit un vecteur $\mathbf{a}$ fixé, et le champ vectoriel

$$\mathbf{F}_a(\mathbf{M}) = \mathbf{V}(\mathbf{M}) \wedge \mathbf{a}.$$

Montrer que

$$\text{div } \mathbf{F}_a = \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}$$

(cela entraîne l'invariance du rotationnel en fonction du repère, sachant celle de la divergence).

Exercice 6.5.4. — Montrer que

$$\text{rot } (\mathbf{V}) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \wedge \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \wedge \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \wedge \mathbf{k}.$$

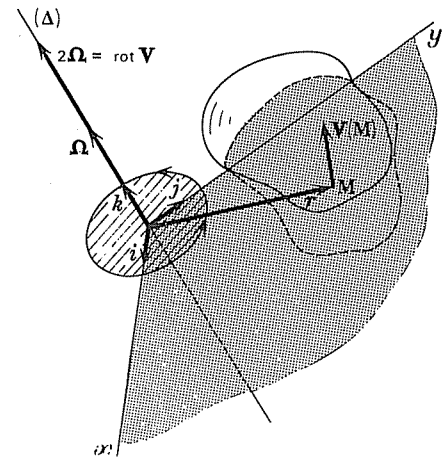


FIG. 6.5.1.

Exercice 6.5.5. — Si $\mathbf{U}(\mathbf{M})$ et $\mathbf{V}(\mathbf{M})$ sont deux champs vectoriels donnés et f une fonction scalaire $f(\mathbf{M})$, montrer que,

$$a) \text{rot } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{rot } \mathbf{u} + \text{rot } \mathbf{v},$$

$$b) \text{rot } (f \mathbf{u}) = \text{grad } f \wedge \mathbf{u} + f \text{rot } \mathbf{u},$$

$$c) \text{div } (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v}.$$

On utilisera l'opérateur différentiel ∇ .

Exercice 6.5.6.

a) Déterminer les constantes a , b et c pour que le vecteur

$$\mathbf{V} = (a + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$$

vérifie $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$.

b) Montrer qu'alors $\mathbf{V}$ peut s'exprimer comme le gradient d'une fonction scalaire.

Exercice 6.5.7. — Montrer que

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) &= \text{rot rot } \mathbf{V} \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V} \\ &= \text{grad} (\text{div } \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}, \end{aligned}$$

$$b) \quad \nabla \cdot (\nabla \varphi_1 \wedge \nabla \varphi_2) = 0.$$

Remarque 6.5.1. — Si $\mathbf{V}$ est un champ vectoriel tel que $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$, alors nous pouvons trouver un champ scalaire f tel que $\mathbf{V} = \text{grad } f$ ou $\mathbf{V} = -\text{grad } f$. On dit alors que le champ de vecteurs $\mathbf{V}$ dérive d'un potentiel. Dans certains domaines, on utilise l'égalité $\mathbf{V} = \text{grad } f$ et dans d'autres $\mathbf{V} = -\text{grad } f$.

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, soit

$$(6.5.4) \quad \begin{aligned} \text{rot} (\text{grad } f) &\equiv \mathbf{0} \\ \nabla \wedge (\nabla f) &\equiv \mathbf{0}. \end{aligned}$$

La divergence d'un rotationnel est également nulle

$$(6.5.5) \quad \begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{V} &\equiv 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{V}) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Composantes du vecteur rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques

C'est encore une application du chapitre 2.

En coordonnées cylindriques, le champ $\mathbf{V}$ étant représenté par ses composantes V_ρ , V_θ et V_z , dans les directions $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{k}$, nous obtenons

$$(6.5.6) \quad \text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_1 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} + \frac{V_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{k}.$$

En coordonnées sphériques, le champ $\mathbf{V}$ étant représenté par ses composantes V_r , V_θ et V_φ dans les directions $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{w}_1$, nous obtenons

$$(6.5.7) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} &= \left(\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{r \partial \varphi} + \frac{V_\theta \tan \varphi}{r} \right) \mathbf{w} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \mathbf{u}_1 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{w}_1. \end{aligned}$$

6.6. INTÉGRALES CURVILIGNES

Ces intégrales sont très importantes pour l'étude de nombreux problèmes pratiques.

Nous allons voir qu'une intégrale curviligne est une généralisation de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Dans l'intégrale définie, nous intégrons le long de l'axe des x , et la fonction f est supposée définie pour toute valeur de x comprise entre a et b .

Pour une intégrale curviligne, nous intégrerons le long d'une courbe du plan ou de l'espace. La fonction à intégrer est une fonction définie en tous les points de cette courbe (et peut-être en d'autres points).

Nous considérons une courbe (C) de l'espace sur laquelle nous choisissons un sens de parcours. Soit A un point initial sur la courbe (C) ainsi orientée et B un point final, points qui peuvent coïncider si la courbe (C) est une courbe fermée (fig. 6.6.1.).

Considérons la représentation paramétrique classique de la courbe (C) , paramétrée par son abscisse curviligne s ,

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \quad \text{avec } a \leq s \leq b,$$

a et b représentent les abscisses curvilignes de A et de B , choisies à partir d'une origine.

Nous supposons que $\mathbf{r}(s)$ est continue et a des dérivées premières continues. Ainsi, en chaque point de (C) , il y a une tangente unique à la courbe pour $a \leq s \leq b$. Un tel arc $\widehat{AB}$ est dit continu entre A et B .

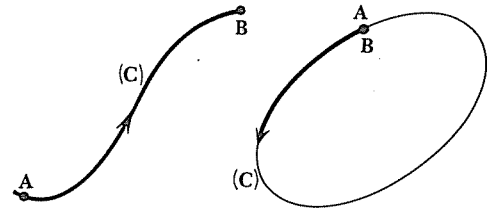


FIG. 6.6.1.

Cas d'une fonction scalaire

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire, définie et continue dans une région du plan contenant l'arc $\widehat{AB}$ de la courbe (C) . A la place de

$$f[x(s), y(s), z(s)],$$

nous écrirons simplement $f(P)$, où P est un point de (C) de coordonnées $x(s), y(s), z(s)$.

Nous divisons (C) en n arcs partiels (fig. 6.6.2.), limités par les points $P_0 (= A), P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n (= B)$. Les valeurs correspondantes de l'abscisse curviligne s en ces points sont

$$s_0 (= a) < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n (= b).$$

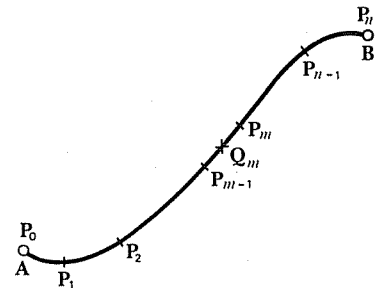


FIG. 6.6.2.

Sur chaque *arc partiel*, nous choisissons un point Q quelconque, soit Q_1 entre P_0 et P_1 , Q_m entre P_{m-1} et P_m . On considère la somme

$$J_n = \sum_{m=1}^n f(Q_m) \Delta s_m,$$

où

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}.$$

Si l'on considère les sommes partielles pour $n = 2, 3, \dots$, Δs_m tendant vers zéro quand n tend vers l'infini, nous obtenons une suite de nombres réels $J_2, J_3, \dots$ qui admet une limite indépendante du choix des points Q_m .

La somme

$$(6.6.1.) \quad J_n = f(Q_1) \Delta s_1 + f(Q_2) \Delta s_2 + \dots + f(Q_n) \Delta s_n$$

admet une limite qui est appelée l'intégrale curviligne *de la fonction f* le long de l'arc AB que l'on note

$$(6.6.2.) \quad \int_{(C)} f(P) ds \quad \text{ou} \quad \int_{(C)} f(x, y, z) ds.$$

Remarque 6.6.1. — La continuité des fonctions f, x, y et z permet d'établir la limite ci-contre. Le problème se ramène à celui d'une intégrale simple.

Remarque 6.6.2. — L'intégrale curviligne le long d'une courbe *fermée* (C) se note souvent

$$\oint_C f$$

pour indiquer le sens de parcours positif conforme à l'orientation du plan.

La courbe (C) est appelée *chemin d'intégration*.

A partir de la définition, nous retrouvons les propriétés habituelles de l'intégrale (cf. tome I, chapitre 2), à savoir

$$(6.6.3.) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \int_{(C)} k f ds = k \int_{(C)} f ds \quad (k \text{ constant}), \\ b) \int_{(C)} (f + g) ds = \int_{(C)} f ds + \int_{(C)} g ds, \\ c) \int_{(C)} f ds = \int_{(C_1)} f ds + \int_{(C_2)} f ds + \int_{(C_3)} f ds. \end{array} \right.$$

Dans la relation (6.6.3. c), le chemin (C) est divisé en trois arcs (C_1) , (C_2) et (C_3) ayant chacun le même sens de parcours que (C) , (fig. 6.6.3.).

Dans la relation (6.6.3. b), le sens de parcours de (C) est le même dans les trois intégrales. Si le sens de parcours de (C) est inversé, la valeur de l'intégrale est multipliée par -1 .

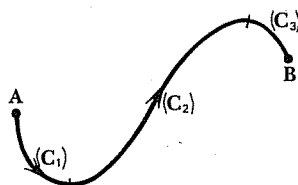


FIG. 6.6.3.

Cas d'une fonction vectorielle. Circulation d'un champ vectoriel

Soit P (M), Q (M) et R (M) les composantes du **champ** F qui, dans un repère orthonormé de vecteurs unitaires i, j, k , s'écrit

$$F = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k.$$

Ainsi

$$P dx + Q dy + R dz = \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

s étant l'abscisse curviligne d'une courbe (C) sur laquelle les fonctions P, Q et R sont définies et continues.

Or le vecteur tangent unitaire à (C) est

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k.$$

Par suite,
$$P dx + Q dy + R dz = \left(F \cdot \frac{dr}{ds} \right) ds$$

et
$$\int_{(C)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(C)} \left(F \cdot \frac{dr}{ds} \right) ds$$

que nous conviendrons d'écrire

$$(6.6.4) \quad \Gamma = \int_{(C)} (F \cdot t) ds = \int_{(C)} F \cdot dr,$$

où t est le vecteur unitaire tangent en un point M de (C) et ds l'élément d'arc contenant ce point (fig. 6.6.4).

Γ est appelée **la circulation du champ** F le long de (C) .

Exemple 6.6.1.

Travail d'un vecteur (ou d'une force).

Considérons une particule sur laquelle agit une force variable F . Cette particule est supposée se déplacer le long d'une courbe (C) donnée de l'espace.

On appelle **travail** de la force F le long du chemin (C) l'intégrale curviligne

$$\mathcal{C} = \int_{(C)} F \cdot dr = \int_{(C)} P dx + Q dy + R dz,$$

l'intégrale étant prise dans le sens du déplacement.

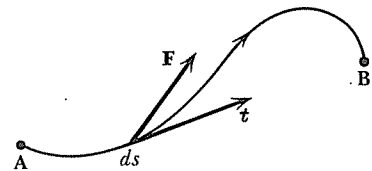


FIG. 6.6.4.

Remarque 6.6.3. — L'intégrale curviligne est linéaire par rapport au champ F .

$$\begin{aligned} \int_{(C)} (F_1 + F_2) \cdot dr &= \int_{(C)} F_1 \cdot dr + \int_{(C)} F_2 \cdot dr \\ \int_{(C)} (\lambda F) \cdot dr &= \lambda \int_{(C)} F \cdot dr, \text{ avec } \lambda \text{ réel.} \end{aligned}$$

D'autre part, si le chemin (C) est formé de deux chemins (C_1) et (C_2) parcourus dans le même sens, nous avons

$$\int_{(C)} F \cdot dr = \int_{(C_1)} F \cdot dr + \int_{(C_2)} F \cdot dr.$$

Nous avons déjà vu l'expression du travail élémentaire

$$d\mathcal{C} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dans la définition du produit scalaire (paragraphe 1.3.).

Si nous introduisons le temps t comme variable d'intégration, alors

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v} dt,$$

où $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse. L'intégrale (6.6.4.) devient alors

$$(6.6.5.) \quad \mathcal{C} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt,$$

où t_0 et t_1 sont les valeurs initiales et finales du temps t entre lesquelles s'effectue le mouvement.

D'après la seconde loi de Newton (cf. tome IV, chapitre 0)

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

où m est la masse de la particule. En portant ce résultat dans la relation (5.6.5.), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right) dt = \frac{m}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \Big|_{t_0}^{t_1}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que le travail est égal à la *variation de l'énergie cinétique* de la particule au cours de son mouvement.

Nous venons en fait de calculer dans cet exemple une intégrale curviligne.

Calcul des intégrales curvilignes

Pour calculer une intégrale curviligne, nous allons nous ramener au calcul d'une intégrale définie ordinaire. Ceci peut se faire simplement à partir de la représentation du chemin d'intégration (C).

— Le chemin d'intégration (C) est représenté par la fonction vectorielle $\mathbf{r}(s)$ où s est l'abscisse curviligne sur (C)

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

Exercice 6.6.1. — Un point M est mobile sur une ellipse (E) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ce point M est l'extrémité d'un ressort de raideur k accroché en O, dont la longueur normale est b . Calculer le travail de la force de rappel quand le point M descend de B (0, b) vers A (a , 0) le long de l'ellipse.

Par suite, si $a \leq s \leq b$, nous écrivons,

$$(6.6.7.) \quad \int_{(C)} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

et l'intégrale du second membre est une intégrale définie classique

$$\int_a^b F(s) ds, \text{ avec } F(s) = f[x(s), y(s), z(s)].$$

— Le chemin d'intégration (C) est donné sous forme paramétrique par la fonction vectorielle

$$(6.6.8.) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \text{ avec } t_0 \leq t \leq t_1.$$

La fonction vectorielle et sa dérivée première étant continues, nous remplaçons l'intégrale

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds \quad \text{par} \quad \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt.$$

Ainsi, le chemin d'intégration (C) étant représenté par la relation vectorielle (6.6.8.), nous pouvons écrire

$$(6.6.9.) \quad \int_{(C)} f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt,$$

avec (cf. paragraphe 1.8.)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

Exemple 6.6.2.

Calculons $J = \int_{(C)} xy^3 ds,$

où (C) est un segment sur la droite $y = 2x$ du plan Oxy pris du point $A(-1, -2)$ au point $B(1, 2)$.

Écrivons l'équation de la droite sous forme paramétrique (cf. chapitre 5),

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad \text{avec} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Exercice 6.6.2. — Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} x^2 y^2 ds,$$

où (C) est la droite AB, avec $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$.

Exercice 6.6.3. — Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

où (C) est la droite OA, avec $A(1, 1, 1)$.

Nous avons $\frac{dr}{dt} = i + 2j$ et $\frac{ds}{dt} = \sqrt{r' \cdot r'} = \sqrt{5}$.

Sur (C) on a $xy^3 = t(2t)^3 = 8t^4$.

Par suite, nous avons

$$J = \int_{(C)} xy^3 ds = 8\sqrt{5} \int_{-1}^{+1} t^4 dt = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

— S'il s'agit de l'intégrale d'un champ vectoriel F , il faut calculer l'intégrale (6.6.4.)

$$J = \int_{(C)} F \cdot dr = \int_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

où P , Q et R sont les composantes du champ F dans un repère orthonormé.

Le plus souvent il y a avantage à utiliser une représentation paramétrique de l'arc $\widehat{AB}$ du chemin d'intégration (C) considéré, soit

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k.$$

Si t varie de t_1 à t_2 quand P varie sur (C) de A à B on a

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left(F(t) \cdot \frac{dr}{dt} \right) dt,$$

soit

$$(6.6.10.) J = \int_{t_0}^{t_1} \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt.$$

Remarque 6.6.4. — Nous avons supposé pour établir (6.6.10.) que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ admettaient des dérivées continues. Si cette propriété n'est pas vérifiée sur (C) et si (C) peut être décomposé en deux arcs (C_1) et (C_2) sur lesquels F admet une dérivée continue, nous poserons par définition

$$\int_{(C)} F \cdot dr = \int_{(C_1)} F \cdot dr + \int_{(C_2)} F \cdot dr.$$

Exercice 6.6.4. — Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} (x + y) dx + (x - y) dy$$

si

a) (C) est l'arc de cercle défini par $x = \cos \theta$,

$$y = \sin \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

parcouru dans le sens direct;

b) (C) est le segment de droite qui va de $A(1, 0)$ à $B(0, 1)$.

C'est une intégrale définie du type $J = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$.

Exemple 6.6.3.

Soit à calculer l'intégrale curviligne

$$J = \int_{ADB} x^2 dy + y^2 dx$$

le chemin d'intégration $\widehat{ADB}$ (fig. 6.6.5.) étant formé de l'arc $\widehat{AD}$ qui joint les points $A(\sqrt{2}, 0)$ et $D(1, 1)$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$, et de l'arc $\widehat{DB}$ qui joint le point $D(1, 1)$ au point $B(-1, 0)$ sur la parabole $2y^2 = x + 1$.

Nous avons

$$J = \int_{\widehat{ADB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AD}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\widehat{DB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = J_{\widehat{AD}} + J_{\widehat{DB}}.$$

Calculons $J_{\widehat{AD}}$.

La représentation paramétrique de l'arc $\widehat{AD}$ est

$$x = \sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4},$$

soit
$$J_{\widehat{AD}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2} (\cos^3 t - \sin^3 t) dt = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Calcul de $J_{\widehat{DB}}$.

On peut conserver y comme variable d'intégration. Nous avons

$$x = 2y^2 - 1, \quad \text{d'où} \quad dx = 4y dy, \quad 1 \leq y \leq 0.$$

Par suite,

$$J_{\widehat{DB}} = \int_1^0 [(2y^2 - 1)^2 + 4y^3] dy = -\frac{22}{15}.$$

Par suite, l'intégrale cherchée

$$J_{\widehat{ADB}} = \frac{28 - 20\sqrt{2}}{15} = -0,018...$$

On remarque tout de suite que dans certains cas il est facile de se ramener à une intégrale simple comme pour le calcul de $J_{\widehat{DB}}$ sans avoir à passer par une représentation paramétrique.

Nous allons le voir aussi sur un autre exemple.

Exemple 6.6.4.

Calculer l'intégrale curviligne

$$J = \int_{(C)} [x^2 y dx + (x - z) dy + xyz dz].$$

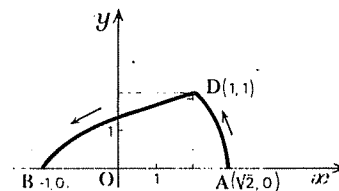


FIG. 6.6.5.

Exercice 6.6.5. — Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} (3x^2 + 6y) dx - 14yz dy + 20xz^2 dz$$

lorsque

a) (C) est l'arc OA de la courbe d'équations paramétriques

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad \text{avec} \quad A = (1, 1, 1);$$

b) (C) est le chemin OA obtenu en joignant O à B (1, 0, 0), B à C (1, 1, 0) et C à A;

c) (C) est la droite OA.

Exercice 6.6.6. — Trouver le travail total fourni lors du déplacement d'une particule dans un champ de forces

$$\mathbf{F} = 3xy \mathbf{i} - 5z \mathbf{j} + 10x \mathbf{k}$$

le long de la courbe d'équations paramétriques

$$x = t^2 + 1, \quad y = 2t^2, \quad z = t^3$$

lorsque t varie de 1 à 2.

Exercice 6.6.7. — Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} \frac{(y+z) dx + (z+x) dy + dz}{x^2 + y^2}$$

lorsque (C) est

a) le segment de droite qui va de A (1, 1, 1) à B (2, 2, 2),

b) l'hélice circulaire d'équations paramétriques

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \theta$$

lorsque θ varie de 0 à 2π .

Exercice 6.6.8. — A un point M du plan, associons le vecteur $\mathbf{V}(M)$ passant par l'origine O, dirigé vers O et de longueur constante égale à h . Calculer la circulation de ce champ le long de l'ellipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

parcourue dans le sens direct.

Exercice 6.6.9. — Calculer la circulation le long du cercle (C) de centre O et de rayon 2 du champ

$$\mathbf{V} = (y - 2x)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j}.$$

Exercice 6.6.10. — Calculer la circulation du champ

$$\mathbf{V} = (yz + 2x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$$

si (C) est

a) la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ parcourue dans le sens positif de A (0, 1, 1) à B (1, 0, 1);

b) le long du segment AB.

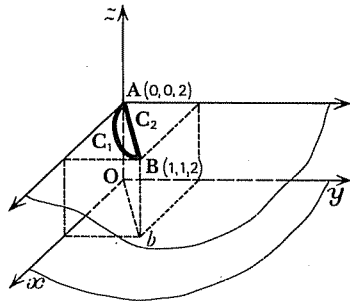


FIG. 6.6.6.

a) (C_1) est l'arc de parabole $y = x^2$ dans le plan $z = 2$ compris entre les points A (0, 0, 2) et B (1, 1, 2) (fig. 6.6.5).

Comme $y = x^2$ le long de (C_1), nous avons

$$dy = 2x dx \quad \text{et} \quad dz = 0.$$

Par suite,

$$J = \int_0^1 x^4 dx + (x - 2) 2x dx = \int_0^1 (x^4 + 2x^2 - 4x) dx,$$

soit

$$J = -\frac{17}{15}.$$

b) (C_2) est le segment de droite $y = x$ dans le plan $z = 2$ compris entre les points A et B précédents (fig. 6.6.6.). Il vient puisque

$$dy = dx \quad \text{et} \quad dz = 0,$$

$$J = \int_0^1 (x^3 + x - 2) dx = -\frac{5}{4}.$$

Ainsi d'après ce résultat *la valeur de l'intégrale curviligne dépend non seulement des bornes choisies sur le chemin d'intégration, mais également, en général de la forme géométrique du chemin d'intégration joignant les bornes choisies.*

Un problème important consiste à chercher sous quelles *conditions* la valeur de l'intégrale curviligne est *indépendante du chemin d'intégration* joignant deux points A et B.

6.7. CHAMP DE FORCE DÉRIVANT D'UN POTENTIEL

Supposons qu'il existe une *fonction scalaire* $V(M)$ telle que

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V = -\nabla V.$$

Nous avons, M_1 et M_2 étant deux points sur une courbe (C)

$$\int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} -\nabla V \cdot d\mathbf{r}.$$

Or d'après la remarque (6.7.1.), nous avons

$$dV = \nabla V \cdot dr,$$

soit

$$(6.7.1.) \quad \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{M_1}^{M_2} dV = V(M_1) - V(M_2).$$

Théorème 6.7.1.

Si le champ vectoriel $\mathbf{F}$ est tel que $\mathbf{F} = - \text{grad } V$, où $V(M)$ est un champ scalaire continûment différentiable, le travail total effectué en déplaçant un point matériel le long d'une courbe (C) d'un point M_1 à un point M_2 de (C) est

$$\mathcal{C} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(M_1) - V(M_2).$$

Le travail, soit l'intégrale curviligne, est alors **indépendant de la courbe** (C) qui relie les points M_1 à M_2 .

On dit dans ce cas que le **champ de force dérive d'un potentiel**.

Théorème 6.7.2.

Un champ de force dérive d'un potentiel si, et seulement si, il existe une fonction scalaire $V(M)$ continûment différentiable telle que $\mathbf{F} = - \text{grad } V$ ou, ce qui est équivalent, si, et seulement si,

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ identiquement.}$$

Ce résultat est évident, puisque le rotationnel d'un gradient est identiquement nul (cf. relation 6.5.4.).

A partir du théorème (6.7.1.), on peut énoncer le théorème fondamental suivant :

Théorème 6.7.3.

Si un **champ de force dérive d'un potentiel**, l'intégrale curviligne est **nulle** le long de toute **courbe fermée** sans intersection (courbe fermée simple), ce que l'on note

$$(6.7.2.) \quad \oint_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Remarque 6.7.1. — La fonction scalaire $V(M)$ telle que $\mathbf{F} = - \nabla V$ s'appelle l'**énergie potentielle**, ou encore le **potentiel scalaire** ou simplement le **potentiel** du point matériel dans le champ de force $\mathbf{F}$. L'équation (6.7.1.) peut s'écrire :

Le travail effectués de M_1 à M_2 le long de (C) est égal à l'énergie potentielle en M_1 moins l'énergie potentielle en M_2 , soit

$$\mathcal{C} = V_1 - V_2,$$

où

$$V_1 = V(M_1) \quad \text{et} \quad V_2 = V(M_2).$$

Dans certains domaines la fonction V considérée comme **potentiel vérifie**

$$\mathbf{F} = + \text{grad } V = + \nabla V.$$

Remarque 6.7.2. — Le champ électrique $\mathbf{E}$ dérive d'un potentiel V . Si $\mathbf{E}$ est créé par une charge ponctuelle q placée en O nous avons

$$\mathbf{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}}{r^2}$$

$$\text{avec } r = \|\mathbf{OM}\| \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{OM}}{r}.$$

Le potentiel (exercice) est donné par

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{Cte.}$$

On prend la constante nulle de façon que V soit nul à l'infini.

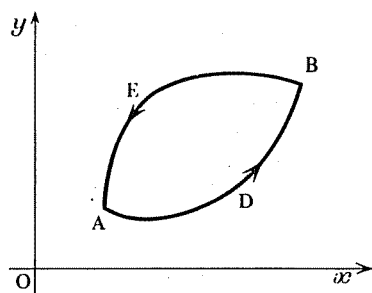


FIG. 6.7.1.

Réciproquement si l'on a la relation (6.7.2.), le champ de force $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel.

En d'autres termes cela signifie que le travail total effectué en déplaçant un point matériel sur un circuit fermé est nul.

En effet d'après le théorème (6.7.1.), la valeur de l'intégrale est indépendante de la courbe (C) reliant A au point B. Ainsi (fig. 6.7.1.)

$$\int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AFB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{BEA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Par suite, il vient

$$\int_{ADBEA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BEA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Les applications sont très importantes.

Intégration des différentielles totales

Une forme différentielle

$$(6.7.3.) \quad \omega = P dx + Q dy + R dz,$$

où P , Q et R sont des fonctions scalaires définies dans une région (D) de l'espace, n'est pas nécessairement la **différentielle exacte** (ou totale) d'une fonction scalaire $V(x, y, z)$ en tout point $M(x, y, z)$ de (D).

En effet, soit $V(x, y, z)$ une fonction scalaire d'une différentielle totale

$$(6.7.4.) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Si l'on compare les relations (6.7.3.) et (6.7.4.) l'expression

$$P dx + Q dy + R dz$$

est la différentielle d'une fonction $V(x, y, z)$ si, et seulement si,

$$(6.7.5.) \quad P = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial z}$$

en tout point M de (D).

Remarque 6.7.3. — Le lecteur rencontrera de nombreuses formes différentielles en *thermodynamique*, quand les variables sont la pression, le volume ou la température. Certaines de ces formes sont exactes et leur intégrale curviligne ne dépend que des extrémités du chemin, autrement dit de l'état initial et de l'état final.

En langage vectoriel, la forme différentielle (6.7.3.) est **exacte** dans (D) si, et seulement si, la fonction vectorielle

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

est le **gradient** de la fonction scalaire $V(x, y, z)$ dans (D), soit

$$\mathbf{F} = \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Il s'ensuit d'après le théorème (6.7.1.) :

Théorème 6.7.4.

Si $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ et $R(x, y, z)$ sont continues dans une région (D) de l'espace, alors l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} P dx + Q dy + R dz$$

est **indépendante** du chemin d'intégration reliant A et B dans (D) si, et seulement si, la forme différentielle

$$P dx + Q dy + R dz$$

est une différentielle exacte dans (D).

En effet, si $P dx + Q dy + R dz$ est une différentielle exacte dV et $\widehat{AB}$ un arc du chemin d'intégration limité par deux points A et B

$$I = \int_A^B (P dx + Q dy + R dz) = \int_A^B \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'après les relations (6.7.5.).

Si (C) est donné sous forme paramétrique

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k},$$

avec $t = t_0$ correspondant à A et $t = t_1$ correspondant à B, alors

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV}{dt} dt = V[x(t), y(t), z(t)]_{t=t_0}^{t=t_1}$$

soit

$$I = V(B) - V(A).$$

La valeur de l'intégrale ne dépend que des points A et B et non du chemin d'intégration suivi entre A et B.

Remarque 6.7.4. — La condition d'intégrabilité s'écrit donc

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

si $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$.

Exercice 6.7.1. — Montrer que la forme différentielle

$$\omega = (2x \cos y + z \sin y) dx + (xz \cos y - x^2 \sin y) dy + x \sin y dz$$

est une forme exacte.

Exercice 6.7.2. — Attraction newtonienne.

Soit M un point matériel de masse m , subissant une force d'attraction de la part d'un point O, inversement proportionnelle au carré de la distance OM.

Montrer que le champ de vecteurs

$$\mathbf{V}(M) = -\frac{m\mu}{r^2} \mathbf{u}$$

ainsi défini ($\mu > 0$, $\mathbf{u}$ vecteur unitaire dirigé dans le sens de $\overrightarrow{OM}$) dérive d'un potentiel. Calculer le travail du champ le long d'un chemin quelconque, allant de A à B.

Théorème 6.7.5.

La forme différentielle $P dx + Q dy + R dz$ est exacte dans une région (D) de l'espace où P, Q et R sont définies et continûment différentiables si, et seulement si,

$$(6.7.6.) \quad \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}.$$

C'est la condition d'intégrabilité.

La condition (6.7.6.) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne

$$(6.7.7.) \quad \int_{(C)} P dx + Q dy + R dz$$

soit indépendante du chemin d'intégration dans la région (D) considérée de l'espace d'après le théorème (6.7.4.).

En effet, si l'intégrale curviligne (6.7.7.) est indépendante du chemin d'intégration, d'après le théorème (6.7.1.),

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k} = \text{grad } V.$$

D'après la relation (6.5.4.), on sait que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot } (\text{grad } V) \equiv \mathbf{0}.$$

Exercice 6.7.3. — Calculer la circulation du champ de l'exemple (6.8.1.) entre les points

$$A(1, 1, 1) \text{ et } C(2, 2, 4).$$

Exercice 6.7.4. — Déterminer la fonction f pour que le champ $\mathbf{F}$ de composantes

$$P = e^x f(y), \quad Q = e^x \text{Log } y$$

dérive d'un potentiel. Quel est le potentiel qui tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(1, 0)$ et vers -1 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$?

Déterminer alors la circulation de ce potentiel le long de l'arc de courbe $y = e^x$ qui va du point $A(0, 1)$ au point $B(1, e)$ et le long de la droite AB .

La réciproque se démontre facilement à partir du théorème de Stokes (cf. paragraphe 6.10.).

Voyons quelques exemples de ces résultats.

Exemple 6.7.1.

Trouver le travail produit par la force

$$\mathbf{F} = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

dans le déplacement d'une particule le long d'une courbe (C) d'un point $A(1, 1, 1)$ à un point $B(3, 3, 2)$.

Le travail $\mathcal{E}$ est donné par

$$\mathcal{E} = \int_{(C)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

La quantité sous le signe somme est la différentielle totale de la fonction scalaire $V(x, y, z) = xyz$, puisque les relations (6.7.5.) sont vérifiées.

Par suite, $\mathcal{C}$ ne dépend que des points A et B et nous obtenons d'après la relation (6.7.6.)

$$\mathcal{C} = V(B) - V(A) = V(3, 3, 2) - V(1, 1, 1),$$

soit $\mathcal{C} = 17$.

Exemple 6.7.2.

Intégration des différentielles totales à deux variables

Considérons une expression de la forme

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre (cf. chapitre 1, tome IV). Or $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ n'est pas nécessairement la différentielle totale

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

d'une fonction $V(x, y)$.

Une condition nécessaire est que

$$P(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Cette condition est suffisante. En effet, cherchons s'il est possible de déterminer une fonction $V(x, y)$ par les deux relations

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y).$$

En intégrant V par rapport à x la première nous avons,

$$V = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \Phi(y),$$

soit

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \Phi'(y).$$

Exercice 6.7.5. — Les expressions suivantes sont-elles des différentielles totales? Si oui, intégrer les équations différentielles correspondantes

- a) $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$;
- b) $\omega = dy + (y \operatorname{tg} x - \cos^2 x) dx$;
- c) $\omega = (e^{-y} + 3x^2 y^2) dx + (2x^3 y - xe^{-y}) dy$.

Exercice 6.7.6. — Soit la forme différentielle

$$\omega = 2xy^2 dx - y(x^2 + 1) dy.$$

- a) Montrer qu'elle n'est pas totale.
- b) Chercher une fonction $f(y)$ telle que $f(y)\omega$ soit une forme différentielle totale.
- c) Intégrer l'équation différentielle

$$2xy^2 dx - y(x^2 + 1) dy = 0.$$

Comme $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ par hypothèse,

$$Q(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \Phi'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \Phi'(y),$$

c'est-à-dire $\Phi'(y) = Q(x_0, y)$ et $\Phi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$.

En définitive, nous avons

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy.$$

La condition (6.7.6.) est la **condition d'intégrabilité** de la différentielle totale

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Remarquons que la formule (6.7.4.) revient au calcul de l'intégrale curviligne

$$\int_{AEM} P dx + Q dy$$

le long du chemin AEM allant du point fixe A (x_0, y_0) au point courant M (x, y) (fig. 6.7.2.).

Il est clair que nous obtiendrons la fonction V en remplaçant le chemin d'intégration par un arc A (C) M quelconque et, en particulier, par le chemin ADM qui conduit à l'expression

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Il y a là un procédé d'intégration de certaines équations différentielles du premier ordre (chapitre 1, tome IV).

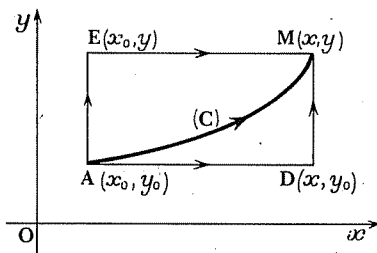


FIG. 6.7.2.

6.8. TRANSFORMATION DES INTÉGRALES DOUBLES EN INTÉGRALES CURVILIGNES

La notion d'intégrale double a été donnée au paragraphe (3.6.) du tome I et leur calcul aux paragraphes (3.7.) et (3.8.) du tome I.

Rappelons que l'intégrale double de la fonction continue f à l'intérieur du domaine $(\mathcal{D})$ du plan xOy limité par une courbe (C) est

$$I = \iint_{(\mathcal{D})} f(x, y) dx dy.$$

Nous allons voir ici une correspondance de la plus grande importance théorique et pratique entre la *notion d'intégrale double* et la *notion d'intégrale curviligne*.

C'est la formule de **Riemann** ou de **Green** (cf. remarque 6.8.1.).

Théorème de Riemann (ou de Green)

Soit $(\mathcal{D})$ une région du plan xOy intérieure à une courbe plane rectifiable (C) , et deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des deux variables x et y supposées uniformes et pourvues de dérivées partielles continues dans la région $(\mathcal{D})$ du plan, alors

$$(6.8.1.) \quad \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(C)} P dx + Q dy.$$

Pour montrer ce résultat nous allons considérer une région $(\mathcal{D})$ particulière (fig. 6.8.1.), limitée par une courbe (C) coupée en deux points M_1 et M_2 par toute parallèle à Oy d'abscisse comprise entre deux valeurs extrêmes a et b et en deux points N_1 et N_2 par toute parallèle à Ox d'ordonnée comprise entre c et d .

Appliquons à

$$I = \iint_{(\mathcal{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

la formule (3.7.2.) du tome I relative au calcul des intégrales doubles.

Nous avons

$$\frac{dI}{dx} = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y_2) - P(x, y_1),$$

où y_1 et y_2 sont les ordonnées des points M_1 et M_2 , et, par conséquent,

$$I = \int_a^b P(x, y_2) dx - \int_a^b P(x, y_1) dx.$$

Remarque 6.8.1. — La formule (6.8.1.) est la formule **Bernhard Riemann** (1826-1866) qui est l'un des mathématiciens les plus importants du XIX^e siècle. C'est dans sa *Dissertation inaugurale* présentée en 1851 à l'Université de Göttingen et consacrée aux « Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe » qu'il a présenté la formule (6.8.1.).

Cette formule est souvent attribuée au mathématicien anglais **George Green**, mais la lecture des mémoires originaux montre que la dénomination de formule de Green doit plutôt être réservée à la formule analogue de transformation d'une intégrale de surface en intégrale triple (paragraphe 6.11.).

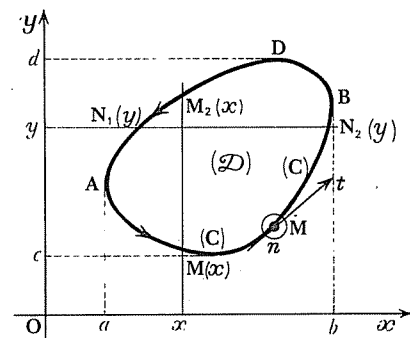


FIG. 6.8.1.

Remarque 6.8.2 — La formule (6.8.1.) peut aussi s'écrire sous forme vectorielle.

$$\iint_{\mathcal{D}} [(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] dx dy = \int_{(C)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy et $\mathbf{t}$ un vecteur tangent à la courbe (C) , s étant l'abscisse curviligne sur (C) (fig. 6.8.1.). L'intégrale curviligne c'est la *circulation* du champ vectoriel $\mathbf{F}$ le long de (C) .

Les deux intégrales ainsi formées sont les valeurs de l'intégrale curviligne $\int_{(C)} P(x, y) dx$ prises respectivement le long de l'arc $\widehat{AM_2B}$ et le long de l'arc $\widehat{AM_1B}$ (fig. 6.8.1.).

Leur différence est l'intégrale curviligne $\oint_{(C)} P(x, y) dx$ prise le long du contour (C) parcouru dans le sens négatif. Nous pouvons donc écrire avec la convention de signe habituelle (C) parcouru en sens inverse des aiguilles d'une montre (sens direct)

$$\iint_{(\mathcal{D})} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{(C)} P dx.$$

Cette formule s'étend aisément au cas d'un contour ne vérifiant pas la condition restrictive de l'existence de deux seuls points d'intersection M_1 et M_2 . Il suffit de décomposer le domaine ($\mathcal{D}$) en deux ou plusieurs parties par des segments de droites (fig. 6.8.2. a et b). Dans le cas simple de la figure (6.8.2. a), nous appliquons la formule aux **deux domaines partiels**. En ajoutant membre à membre, nous obtenons au second membre les deux intégrales sur EF et sur FE dont la somme est nulle.

On calcule de même avec les abscisses des points N_1 et N_2 sur une parallèle à Ox (fig. 6.8.1.) l'intégrale double

$$J = \iint_{(\mathcal{D})} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy,$$

d'où

$$J = \int_c^d Q(x_2, y) dy - \int_c^d Q(x_1, y) dy.$$

Ces intégrales sont les valeurs de l'intégrale curviligne $\int Q dy$ prises le long de l'arc $\widehat{CN_2B}$ et $\widehat{CN_1B}$ (fig. 6.8.1.), x_1 et x_2 étant les abscisses des points N_1 et N_2 .

Par suite, nous avons

$$\iint_{(\mathcal{D})} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{(C)} Q dy$$

avec la convention de signe habituelle.

En ajoutant les deux résultats, nous obtenons la formule (6.8.1.) de Riemann.

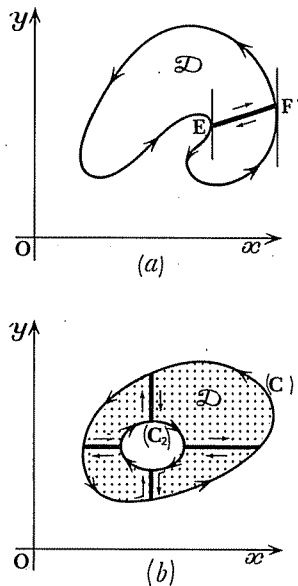


FIG. 6.8.2.

Une des premières applications permet de retrouver le résultat de l'exemple (6.8.2.).

En effet, puisque

$$\oint_{(C)} P dx + Q dy = \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

$$\int_{(C)} P dx + Q dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé tracé dans une région du plan contenant $(\mathcal{D})$ est que l'intégrale double soit nulle dans tout domaine de la région de plan considéré, soit

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Exemple 6.8.1.

Aire d'une région plane limitée par une courbe (C)

Dans la formule de Riemann (6.8.1.), posons $P = 0$ et $Q = x$ on a

$$\iint_{(\mathcal{D})} dx dy = \oint_{(C)} x dy.$$

L'intégrale double est l'aire A du plan intérieure à la courbe (C).

De même, si $P = -y$ et $g = 0$, nous avons

$$A = \iint_{(\mathcal{D})} dx dy = - \oint_{(C)} y dx.$$

Par suite,

$$(6.8.2.) \quad A = \frac{1}{2} \oint_{(C)} x dy - y dx.$$

Exemple 6.8.2.

Calcul d'une aire plane en coordonnées polaires

Soit ρ et θ les coordonnées polaires définies par

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Exercice 6.8.1. — Soit le champ V défini dans le plan par

$$P(x, y) = ax + by,$$

$$Q(x, y) = cx + dy.$$

Trouver une condition sur la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que la circulation soit nulle le long de tout chemin fermé.

Exercice 6.8.2. — Soit un champ V défini dans le plan par ses composantes radiale et orthoradiale V_r et V_θ . Déterminer une condition sur V_r et V_θ pour que la circulation le long de tout chemin fermé soit nulle.

Exercice 6.8.3. — Déterminer l'aire d'une ellipse d'équations paramétriques

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Exercice 6.8.4 — Soit la courbe d'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

En donner une représentation paramétrique (cf. exercice 3.8.2.). La représenter rapidement et déterminer la surface de la boucle.

Alors
$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta \, d\rho - \rho \sin \theta \, d\theta, \\ dy &= \sin \theta \, d\rho + \rho \cos \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

D'après la relation (6.8.2.)

$$A = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \rho^2 \, d\theta.$$

Ainsi calculons l'aire d'une cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1 - \cos \theta), \quad \text{où } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

On trouve

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

Exercice 6.8.5. — Calculer l'aire limitée par la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos \theta)$.

Exemple 6.8.3.

Transformation de l'intégrale double du laplacien d'une fonction de deux variables en une intégrale curviligne de sa dérivée normale.

Soit $W(x, y)$ une fonction définie et continue ainsi que ses dérivées première et seconde dans une région $(\mathcal{D})$ du plan xy .

$$\text{Posons } P(x, y) = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x}.$$

$$\text{Nous avons } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \Delta W = \nabla^2 W$$

ΔW étant le laplacien de W .

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \oint_{(C)} P \, dx + Q \, dy &= \int_{(C)} \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \int_{(C)} \left(-\frac{\partial W}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad \mathbf{grad} \, W = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Le vecteur tangent à (C) est

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}.$$

Le vecteur normal à (C) tel que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ s'écrit

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}.$$

Par suite, $\oint_{(C)} P dx + Q dy = \oint_{(C)} (\text{grad } W \cdot \mathbf{n}) ds.$

Or d'après la formule (6.3.5) la dérivée de W dans la direction $\mathbf{n}$ est

$$(6.8.3.) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_n = \text{grad } W \cdot \mathbf{n}.$$

Par suite, avec la formule de Riemann (6.8.1.)

$$\iint_{(\mathcal{D})} \nabla^2 W dx dy = \oint_{(C)} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_n ds,$$

$\mathbf{n}$ étant le vecteur normal à (C) dirigé vers l'extérieur de (C) (fig. 6.8.3.).

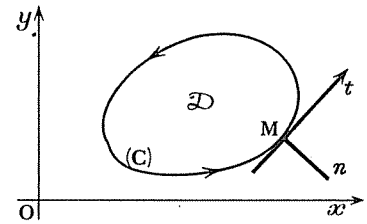


FIG. 6.8.3.

6.9. INTÉGRALES DE SURFACE

Les intégrales de surface sont aux intégrales doubles ce que les intégrales curvilignes dans le plan sont aux intégrales définies.

Examinons d'abord un cas particulier. Considérons sur la surface définie par l'équation

$$z = \varphi(x, y)$$

la portion (S) limitée par un contour (Γ) qui se projette sur le plan Oxy suivant le contour (C) (figure (6.9.1.)). Soit $R(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes x, y et z continue dans une région de l'espace contenant (S).

Définition 6.9.1.

On appelle *intégrale de surface* du champ scalaire R et l'on note

$$(6.9.1.) \quad \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy$$

l'intégrale double de la fonction

$$R_1(x, y) = R[x, y, \varphi(x, y)]$$

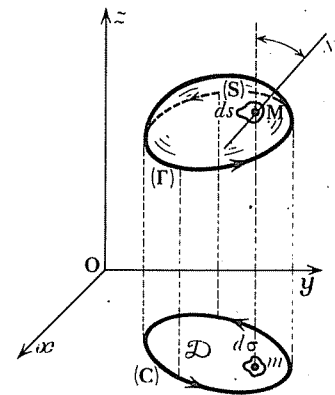


FIG. 6.9.1.

Remarque 6.9.1. — La définition (6.9.1.) n'exige pas que la cloison (S) soit coupée en un seul point par une parallèle quelconque à Oz . Elle permet, s'il y a plusieurs intersections, de se ramener dans chaque cas, à la somme algébriques d'intégrales doubles envisagées dans le plan xOy .

étendue au domaine ($\mathcal{D}$) intérieur à la courbe (C) dans le plan xOy .

Exemple 6.9.1.

On prend pour domaine (S) le triangle sphérique ABC de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dont les sommets ont pour coordonnées A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) et C (0, 0, 1) (fig. 6.9.2.).

On veut calculer

$$I = \iint_{(S)} (x + y + z) dx dy.$$

Cette intégrale est égale à l'intégrale double

$$\iint (x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}) dx dy$$

étendue au quart de cercle AOB du plan xOy .

En passant aux coordonnées polaires (cf. paragraphe 3.8., tome I), nous obtenons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta + \sqrt{1 - r^2}) r dr,$$

ce qui donne en effectuant la première intégrale à θ constant et en intégrant la fonction de θ obtenue de 0 à $\frac{\pi}{2}$,

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta + 1) d\theta = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

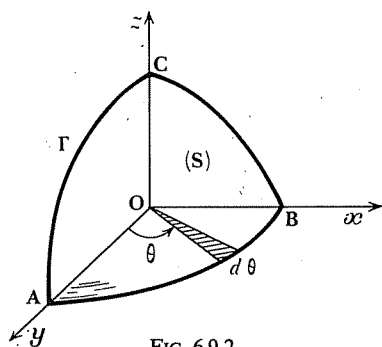


FIG. 6.9.2.

Exercice 6.9.1. — Que sont les courbes (Γ) et (C) dans la figure (6.9.2.)?

Exercice 6.9.2. — Intégrer la fonction scalaire

$$f(x, y, z) = xyz$$

sur la demi-sphère de l'exemple (6.9.1.)

$$(x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1).$$

Définition générale d'une intégrale de surface. Flux d'un champ vectoriel

La définition générale d'une intégrale de surface comporte une convention de signe d'une grande importance que nous allons préciser dans le cas de l'intégrale

$$(6.9.1.) \quad I = \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy$$

considérée dans la définition (6.9.1.).

En tout point de (S), la demi-normale MN au côté supérieur de la surface fait avec Oz un angle aigu (fig. 6.9.1.) ayant pour cosinus,

$$(6.9.2.) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

avec $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ la surface (S) étant définie par l'équation $z = \varphi(x, y)$ (cf. chapitre 5).

Si nous considérons l'élément d'aire dS sur la surface comme porté par le plan tangent en M, sa projection $d\sigma = dx dy$ sur le plan xOy s'écrit γdS . L'intégrale (6.9.1.) peut donc s'écrire

$$(6.9.3.) \quad I = \iint_{(S)} R(x, y, z) \gamma dS.$$

C'est l'intégrale de surface étendue au côté supérieur de la portion de surface (S).

Définition 6.9.2.

Plus généralement, étant donné une cloison quelconque, c'est-à-dire une portion de surface sur laquelle a été choisi un côté extérieur déterminé, l'intégrale de surface (6.9.1.)

$$I = \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy$$

étendue à cette cloison sera l'intégrale (6.9.3.)

$$I = \iint_{(S)} R(x, y, z) \gamma dS,$$

γ désignant le cosinus de l'angle aigu que fait avec Oz la demi-normale correspondant au côté extérieur choisi de la surface.

On définit de la même manière les intégrales de surface

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz \quad \text{et} \quad \iint_{(S)} Q(x, y, z) dz dx$$

étendues au côté extérieur choisi sur la surface (S).

Exercice 6.9.3. — Calculer l'intégrale sur la sphère (S)

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 1$$

du champ scalaire

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

Exercice 6.9.4. — Calculer l'intégrale sur le paraboloid (S)

$$z = x^2 + y^2, \quad z \leq 1$$

du champ scalaire $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque 6.9.2. — Le *flux* revêt une grande importance dans de nombreux problèmes physiques.

On montre que le flux du champ électrique à travers une surface fermée (S) est donné par

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q,$$

où $\sum q$ désigne la somme des charges intérieures à (S).

Par contre le flux du champ magnétique sur (S) est nul. On dit que ce flux est conservatif (cf. 6.11.).

Remarque 6.9.3. — Dans le cas d'une surface paramétrée par

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v). \end{cases}$$

On montre que

$$\iint_{(S)} dS = \iint_{(\mathcal{D})} \left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial v} \right\| du dv$$

où $(\mathcal{D})$ est l'ensemble des couples (u, v) correspondant aux points de (S).

Par exemple, la sphère unité

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cos \theta, \\ y = \cos \varphi \sin \theta, \\ z = \sin \varphi. \end{cases}$$

Nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} = \cos \varphi \cdot \mathbf{u}_1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \cdot \mathbf{u} + \cos \varphi \cdot \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \varphi} &= +\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \mathbf{k} + \cos^2 \varphi \cdot \mathbf{u} \\ &= \cos \varphi \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 4\pi.$$

Ce sont respectivement les intégrales

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) \alpha dS \quad \text{et} \quad \iint_{(S)} Q(x, y, z) \beta dS,$$

où α et β sont les cosinus des angles que fait avec Ox et Oy la demi-normale correspondant au côté extérieur choisi.

L'intégrale de surface la plus générale

$$(6.9.4.) \quad \Phi = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

est par définition la somme

$$(6.9.5.) \quad \Phi = \iint_{(S)} (\alpha P + \beta Q + \gamma R) dS,$$

où α , β et γ sont les cosinus directeurs de la normale $\mathbf{n}$ à (S) orientée du côté extérieur préalablement choisi.

Définition 6.9.3.

(Flux à travers une surface (S))

Vectoriellement la somme (6.9.4.) s'écrit

$$(6.9.6.) \quad \Phi = \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

C'est le *flux du champ vectoriel* $\mathbf{F}$ à travers la surface (S) de normale orientée $\mathbf{n}$ et d'élément d'aire dS (fig. 6.9.3.).

Cette formule est l'extension à une surface de la notion de circulation le long d'une courbe de vecteur tangent orienté $\mathbf{t}$, relation (6.6.4.).

$$\Gamma = \int_{(C)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds,$$

où ds est l'élément d'arc sur (C).

Exemple 6.9.2.

Le flux du vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ en tout point de (S) a une interprétation simple. En effet, dans ce cas,

$$\Phi = \iint_{(S)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_{(S)} dS,$$

c'est l'*aire* $\mathcal{A}$ de la portion de surface considérée. Si la surface a pour équation $z = \varphi(x, y)$, nous avons (cf. 6.9.1. et 6.9.3.)

$$\mathcal{A} = \iint_{(\mathcal{D})} \gamma \, dx \, dy = \iint_{(\mathcal{D})} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

où $(\mathcal{D})$ est le domaine obtenu par projection de (S) sur le plan xOy .

Si l'on suppose donnée une masse surfacique $\mu(P)$ définie en tout point P de (S) , la *masse* totale M portée par (S) sera (cf. chapitre 4, tome I).

$$M = \iint_{(S)} \mu \, dS = \iint_{(S)} \mu \cdot \gamma \, dx \, dy.$$

Des formules similaires conduisent au calcul du centre de gravité et du moment d'inertie de (S) .

Si (S) porte une densité de charge électrique $\sigma(P)$, la *charge* totale portée par S sera

$$Q = \iint_{(S)} \sigma \, dS = \iint_{(S)} \sigma \gamma \, dx \, dy.$$

Exercice 6.9.5. — Montrer la propriété de la remarque (6.9.3.).

Exercice 6.9.6. — Calculer l'aire de la portion de la sphère (centre O , rayon 2) intérieure au cylindre d'équation $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

6.10. FORMULE D'AMPÈRE-STOKES

Comme la formule de Riemann au paragraphe (6.8.), la formule *d'Ampère-Stokes*, dont l'importance est capitale en physique mathématique, indique la *correspondance* entre la *notion d'intégrale curviligne* dans l'espace et la *notion d'intégrale de surface*.

Soit donc l'intégrale curviligne,

$$(6.10.1.) \quad \int_{(\Gamma)} P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz$$

étendue dans l'espace à un contour fermé (Γ) parcouru dans un sens déterminé (fig. 6.10.1.).

Au *sens de parcours* choisi le long de (Γ) on associe un *côté extérieur* choisi sur (S) de telle sorte qu'un mobile parcourant (Γ) dans le sens choisi tourne dans le sens positif des rotations de l'espace autour de la demi-normale extérieure en un point quelconque de la cloison S .

Aux deux côtés de la surface correspondent deux sens possibles de parcours le long de la courbe (fig. 6.10.2. a et b).

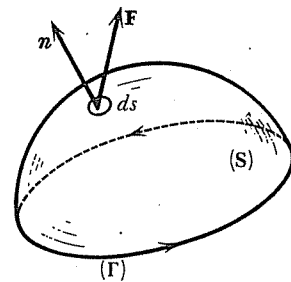


FIG. 6.10.1.

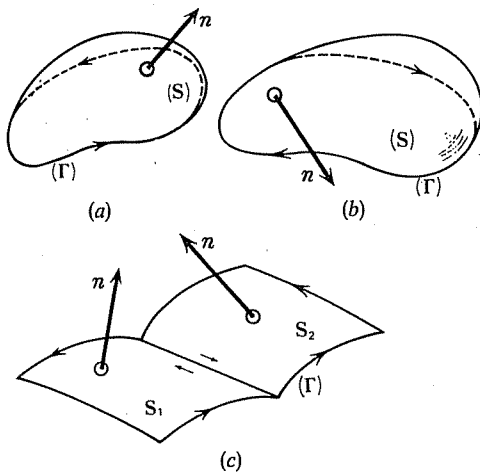


FIG. 6.10.2.

Si la surface (S) est continue par morceaux, on la partage en surfaces S_1 et S_2 en orientant sur chacune les normales correspondantes au sens de parcours sur le contour fermé (Γ) sur lequel s'appuie (S) (fig. 6.10.2. c).

La remarque (6.8.2.) qui présente sous forme vectorielle la formule de Riemann peut s'étendre à l'intégrale curviligne générale (6.10.1.), c'est-à-dire

Théorème d'Ampère-Stokes

Si (S) est une surface continue par morceaux s'appuyant sur une courbe fermée (Γ) de l'espace et si $\mathbf{F}(x, y, z)$ est un champ vectoriel possédant des dérivées premières continues dans une région de l'espace contenant (S), alors

$$(6.10.2.) \quad \iint_{(S)} [\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}] dS = \int_{(\Gamma)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds$$

$\mathbf{n}$ étant un vecteur unitaire normal à (S) et $\mathbf{t}$ un vecteur unitaire tangent à (Γ) dS un élément d'aire de (S) et ds un élément d'arc de (Γ).

Le lecteur se rapportera aux livres cités en référence, pour la démonstration.

Si $\mathbf{F}$ s'écrit à l'aide de ses composantes

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$$

dans un repère orthornormé Oxyz de vecteurs unitaires $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, nous obtenons

$$(6.10.3.) \quad \int_{(\Gamma)} P dx + Q dy + R dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

On retrouve en particulier que l'intégrale curviligne

$$\int_{(\Gamma)} P dx + Q dy + R dz$$

est nulle le long du contour fermé (Γ) si, et seulement si, $\text{rot } \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$, c'est-à-dire quand $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel V , $\mathbf{F} = \text{grad } V$ ou $-\text{grad } V$.

Exercice 6.10.1. — Calculer, en utilisant la formule de Stokes, la circulation le long du carré

$$C(x = \pm 1, y = \pm 1, z = 0)$$

du champ $\mathbf{V}$ défini par

$$P(x, y, z) = x + 2y + 5z,$$

$$Q(x, y, z) = 3x - 3y - z,$$

$$R(x, y, z) = 4x + 2z.$$

Exemple 6.10.1.

Calculer la circulation sur le cercle trigonométrique (C) du champ V défini par

$$P(x, y, z) = 2x - y, \quad Q(x, y, z) = yz^2, \quad R(x, y, z) = zy^2.$$

Un calcul facile montre que $\text{rot } V = k$, d'où

$$\oint_{(C)} V \cdot dr = \iint_{(S)} k \cdot n \, dS,$$

où (S) est une surface s'appuyant sur (C).

On trouve π si (C) est dans la plan xOy .

Exercice 6.10.2. — Calculer, en utilisant la formule de Stokes, la circulation le long du cercle trigonométrique (C) (plan xOy) du champ V dont les composantes sphériques sont

$$\begin{aligned} V_\theta &= r, \\ V_\varphi &= \sin \theta, \\ V_r &= \theta. \end{aligned}$$

6.11. FORMULE D'OSTROGRADSKY

Elle indique la correspondance entre la notion d'intégrale de surface et la notion d'intégrale triple.

Soit (S) une surface fermée simple et ($\mathcal{V}$) la région de l'espace intérieure à (S). Supposons $M \mapsto V(M)$ est un champ différentiable.

Théorème 6.11.1.

Le flux Φ du champ $V(M)$ à travers (S) est égal à l'intégrale triple de la divergence sur le domaine ($\mathcal{V}$), soit

$$(6.11.1.) \quad \Phi = \iint_{(S)} V \cdot n \, dS = \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div } V \, dv.$$

Ce théorème est très utile car une intégrale triple est parfois plus facile à calculer qu'une intégrale de surface.

Exemple 6.11.1.

Soit la surface (S) constituée par les six faces du cube

$$C(x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1).$$

Calculons le flux à travers (S) du champ V défini par

$$P(x, y, z) = 2x + y + z,$$

$$Q(x, y, z) = x + 2y + z,$$

$$R(x, y, z) = x + y + 2z.$$

Exercice 6.11.1. — Calculer le flux Φ à travers la boîte cylindrique C ($\rho \leq R, |z| \leq h$) du champ V dont les composantes cylindriques sont

$$\begin{aligned} V_\rho &= \rho\theta, \\ V_\theta &= \rho, \\ V_z &= \theta z. \end{aligned}$$

Exercice 6.11.2. — Calculer le flux Φ du champ V dont les composantes sphériques sont

$$\begin{aligned} V_\theta &= \theta, \\ V_\varphi &= \cos \varphi, \\ V_r &= r, \end{aligned}$$

à travers la boîte conique intersection du cône

$$C(z^2 = x^2 + y^2),$$

de la sphère

$$S(x^2 + y^2 + z^2 = R^2)$$

et du demi-espace $E(z \geq 0)$.

Nous avons $\operatorname{div} \mathbf{V} = 2 + 2 + 2 = 6$, soit

$$\Phi = \iiint_{(C)} 6 \, dv = 6 \times 2^3 = 48.$$

Supposons un champ vectoriel $\mathbf{V}$ dont la divergence soit nulle en tout point de la région $(\mathcal{V})$ de l'espace

$$(6.11.2.) \quad (\operatorname{div} \mathbf{V})(M) = 0 \quad \text{pour } M \in (\mathcal{V}).$$

Alors le **flux** Φ de ce champ à travers (S) est nul.

Soit Φ_1 et Φ_2 les flux du champ $\mathbf{V}$ à travers deux parties complémentaires (S_1) et (S_2) de (S) , (fig. 6.11.1.). Nous avons

$$(6.11.3.) \quad \Phi_1 + \Phi_2 = 0, \quad \text{ou} \quad \Phi_2 = -\Phi_1.$$

Cette dernière égalité signifie que le flux $-\Phi_1$ **entrant** à travers (S_1) est égal au flux Φ_2 **sortant** à travers (S_2) . On dit alors que le flux est **conservatif**.

Cette propriété a une conséquence importante.

Théorème 6.11.2.

Soit un champ $\mathbf{V}$ de divergence identiquement nulle, et une courbe fermée (γ) dans l'espace. Le flux du champ $\mathbf{V}$ à travers une surface (S) d'orifice (γ) est indépendant de la surface (S) choisie (sans trous par ailleurs!).

Si (S_1) et (S_2) sont deux telles surfaces (fig. 6.11.2.) elles délimitent une région fermée $(\mathcal{V})$ qui répond à la situation précédente, et la relation (6.11.3.) est vérifiée. Nous allons voir un exemple important de champ vectoriel à divergence nulle.

Exemple 6.11.2.

Soit le champ défini par

$$\mathbf{V}(M) = \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|^3} = \frac{\mathbf{u}}{r^2}, \quad M \neq O,$$

avec $r = \|\mathbf{OM}\|$ et $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{OM}}{r}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Remarque 6.11.1. — Le flux du champ magnétique $\mathbf{B}$ est conservatif dans tout l'espace.

Le flux du champ électrique $\mathbf{E}$ est conservatif dans la région $(\mathcal{R})$ où il n'y a pas de charges.

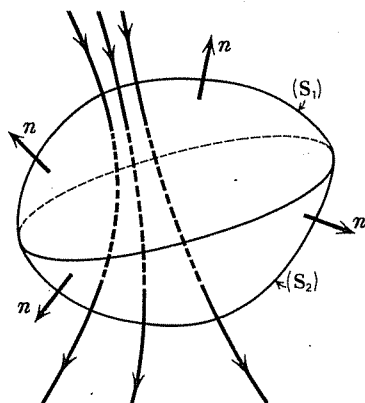


FIG. 6.11.1.

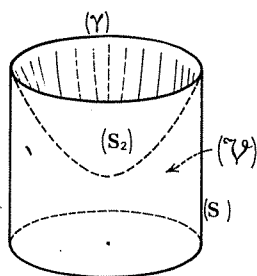


FIG. 6.11.2.

Or $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ d'où

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0.$$

Ce champ à flux conservatif est utilisé ci-dessous.

Angle solide

L'ensemble des demi-droites issues d'un point O et s'appuyant sur une courbe fermée (γ) forme une surface conique (C). Cette surface partage l'espace en deux régions (E_1) et (E_2) appelées **angles solides**.

Pour définir la mesure d'un angle solide, considérons une sphère (S) de centre O et de rayon r (fig. 6.11.3). Soit (S_1) et (S_2) les calottes sphériques intérieures à (E_1) et à (E_2), d'aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

Posons

$$(6.11.4.) \quad \Omega_1 = \frac{\mathcal{A}_1}{r^2} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \frac{\mathcal{A}_2}{r^2}.$$

Ces rapports sont indépendants du rayon R choisi.

Ce sont les **mesures des angles solides** (E_1) et (E_2).

Remarquons que

$$(6.11.5.) \quad \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$$

Ceci est l'angle solide offert par l'espace tout entier. L'unité d'angle solide est le **stéradian** : c'est la surface d'une sphère de rayon 1.

Exemple 6.11.3.

Soit un élément de surface dS situé à une distance R du point O (fig. 6.11.4) et θ l'angle que fait sa normale avec le rayon vecteur r . Il est vu sous un angle solide élémentaire

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$$

si dS' est l'aire de la calotte sphérique élémentaire résultant de la construction précédente.

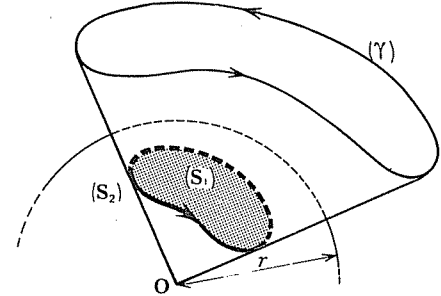


FIG. 6.11.3.

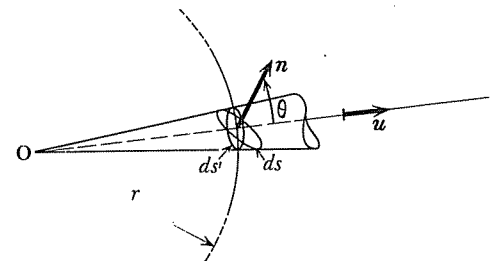


FIG. 6.11.4.

Exercice 6.11.3. — Déterminer l'angle solide sous lequel on voit du point O une circonférence (γ) dont l'axe passe par O. On appellera θ le demi-angle au sommet du cône de révolution de sommet O, s'appuyant sur (γ).

Exercice 6.11.4. — Soit un élément de surface dS de centre O, porté par le plan xOy . Déterminer l'ensemble (Σ) des points M de l'espace d'où l'on voit l'élément sous un angle solide constant.

Mais nous avons $dS' = dS |\cos \theta|$ (relation limite) d'où

$$d\Omega = dS \frac{|\cos \theta|}{r^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \frac{dS}{r^2}$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire orienté de O vers l'élément dS .

Ce calcul permet d'envisager la mesure Ω d'un angle solide comme intégrale d'angles solides élémentaires.

Théorème 6.11.3.

L'angle solide de sommet O intercepté par une courbe fermée (γ) a pour mesure

$$(6.11.6.) \quad \Omega = \int d\Omega = \iint_{(\Sigma)} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}{r^2},$$

où (Σ) est une surface quelconque d'orifice (γ).

Autrement dit, Ω est le flux du champ $\frac{\mathbf{u}}{r^2}$ à travers (Σ). Nous savons que ce flux ne dépend pas du choix de (Σ), donc Ω ne dépend que de la courbe (γ).

Les angles solides interviennent très souvent en *électromagnétisme*. Le potentiel scalaire du champ créé en O par le courant parcourant une spire (γ) s'écrit notamment

$$V = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega,$$

où I est l'intensité, Ω l'angle solide sous lequel la spire est vue du point O.

Nous verrons au tome V que l'étude des champs scalaires et vectoriels conduit souvent à des *équations aux dérivées partielles* où interviennent les opérateurs (gradient, rotationnel, divergence) qui ont fait l'objet du présent chapitre.

Géométrie descriptive

Les quelques lignes de cette annexe ne présentent qu'un aperçu des méthodes utilisées en *géométrie descriptive*. Le but est le même qu'en géométrie analytique et consiste à étudier les propriétés des figures de l'espace relatives aux distances, aux angles, etc.

Il s'agit ici d'une *méthode graphique* utilisant la représentation d'un solide par ses *projections* sur deux plans de coordonnées, dessinées sur une même feuille, comme c'est l'usage en dessin industriel.

Épure d'un point

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé (O, i, j, k) nous distinguons deux plans :

- le plan *horizontal* (H) défini par (Ox, Oy) ,
- le plan *frontal* (F) défini par (Oy, Oz) .

Pour tout point M nous notons m sa projection horizontale, m' sa projection frontale (*fig. A.1.*). Il est commode de faire tourner m' autour de Oy pour amener ce point sur (H). Il en résulte une seule figure plane (*fig. A.2.*), où les deux points m et m' forment l'*épure* du point M. La droite mm' est la *ligne de rappel* du point M. Les coordonnées x et z s'appellent l'éloignement et la cote du point M.

Remarque A.1. — Les projections horizontale et frontale d'un solide s'obtiennent de plus en plus à l'aide de l'ordinateur muni d'une table traçante. Cependant il n'est pas inutile de connaître les méthodes de la géométrie descriptive. Elles constituent un bon entraînement pour « voir » la forme du solide à partir de ses projections. Elles permettent aussi d'imaginer les calculs analytiques les plus simples dans une situation donnée, notamment pour le calcul des *intersections* de solides (choix de surfaces auxiliaires).

Tout plan (P) ou toute droite (D) parallèles au plan xOz sont de **profil** par rapport au repère (O, x, y, z) .

L'axe Oy est appelé **ligne de terre**.

Exercice A.1. — On remplace le plan frontal (F) par un autre plan (F_1) orthogonal à (H), coupant ce dernier suivant une nouvelle ligne de terre $y'_1 y_1$. Dessiner l'épure d'un point M par rapport aux deux repères, sur la même feuille.

Exercice A.2. — Même exercice que A.1. en supposant que le plan horizontal (H) est remplacé par (H_1) , le plan frontal restant fixe.

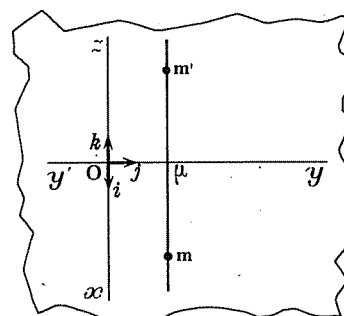
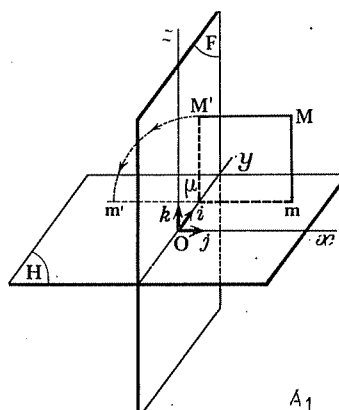


FIG. A.2.

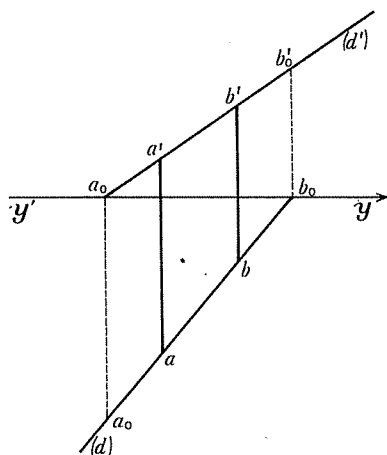


FIG. A.3.

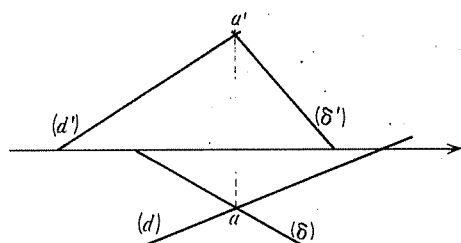


FIG. A.4.

Épure d'une droite

Supposons la droite (D) donnée par deux points

$$A(a, a') \text{ et } B(b, b').$$

La droite (d) joignant a et b est la projection horizontale de (D), et la droite (d') joignant a' et b' est sa projection verticale (fig. A.3). Les points $A_0(a_0, a'_0)$ et $B_0(b_0, b'_0)$ sont les intersections

$$(D) \cap (H) \text{ et } (D) \cap (F).$$

Ce sont les **traces** de la droite (D).

Rappelons (chapitre 0) que deux droites (D) et (Δ) de l'espace ne se coupent pas en général. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient concourantes est que leurs projections de même nom se coupent sur une même ligne de rappel aa' (fig. A.4), avec

$$a = (d) \cap (\delta) \text{ et } a' = (d') \cap (\delta').$$

Si l'une des droites est de profil, son épure n'est pas très suggestive et il est commode de changer de plan frontal (exercice A.1.) en prenant (F_1) orthogonal à (F). Il en est de même si les deux droites sont de profil.

Le plan

Il peut être défini par deux droites concourantes (D) et (Δ) dont les projections (d, d') et (δ, δ') se croisent en (a, a') comme sur la figure (A.4.). Ces droites sont utiles pour déterminer les autres points du plan comme on le montre ci-dessous.

Exemple A.1.

Déterminer m' connaissant m pour un point M d'un plan (P) donné par deux droites concourantes.

La méthode consiste à tracer une **droite** auxiliaire (l, l') du plan (P) telle que la projection horizontale (l) passe par m , la projection frontale (l') étant déterminée grâce aux points $b = (l) \cap (d)$ et $c = (l) \cap (\delta)$ que l'on rappelle en b' et c' sur (d') et (δ').

Enfin la ligne de rappel issue de m coupe (l') au point cherché m' (fig. A.5.). Cet exemple illustre une démarche typique de la géométrie descriptive, fondée sur la construction d'une **figure auxiliaire** pour déterminer les points cherchés.

Il est commode de choisir pour (D) et (Δ) les intersections du plan (P) avec les plans de référence (H) et (F). Notons que dans ce cas les projections (d') et (δ) sont confondues avec la ligne de terre (fig. A.6.). Les projections (d) et (δ') se coupent sur $y'y$ en (a, a').

On peut déterminer les **traces** (D_0) et (Δ_0) d'un plan donné par des droites concourantes quelconques (D) et (Δ).

Il suffit de déterminer le point d'éloignement nul de (d, d'), soit (b_0, b'_0), et le point d'éloignement nul de (δ, δ'), soit (c_0, c'_0). Alors la droite $b_0 c_0$ est la trace horizontale cherchée (d_0). Enfin les points (e_0, e'_0) et (f_0, f'_0) de cote nulle sur (d, d') et (δ, δ') donnent la trace frontale (δ'_0) joignant e_0 et f_0 (fig. A.6.). Les deux traces se coupent sur la ligne de terre en un point (a_0, a'_0). Cependant ce point sort parfois des limites de l'épure (fig. A.6.).

Nous allons voir une utilisation très simple des traces d'un plan.

Exemple A.2.

Soit deux plans (P) et (Q) donnés chacun par leurs traces (fig. A.7.). Ces plans se coupent en général suivant une droite (T) qui se construit à l'aide des traces (d) et (δ) de (P), (l) et (λ) de (Q).

Soit $a = (l) \cap (d)$, $b' = (\delta') \cap (\lambda')$.

Exercice A.3. — Dessiner les épures de droites

- verticale,
- de bout** (parallèle à Ox),
- horizontale,
- frontale ($\parallel (F)$),
- de profil.

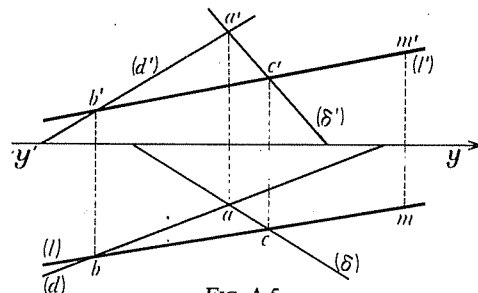


FIG. A.5.

Exercice A.4. — Soit un plan (P) donné par les points A (6, 2, 3), U (4, 5, 7) et V (2, 7, 5). Déterminer le point (m, m') du plan d'éloignement 3 et d'ordonnée 1.

Exercice A.5. — Construire dans le plan (P) de l'exercice A.4. [les droites (D) et (Δ) se coupant en (a, a')]

- la droite horizontale passant par (a, a'),
- la droite frontale passant par (a, a').

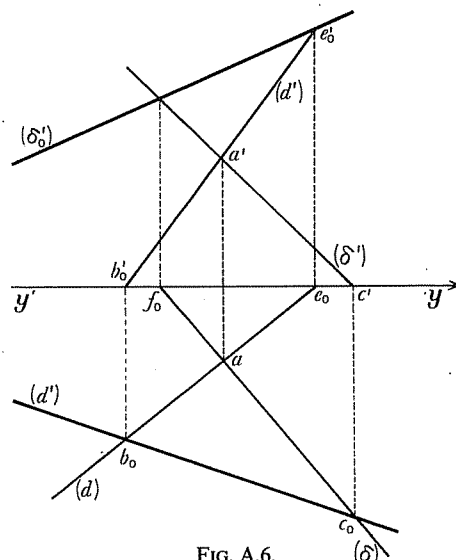


FIG. A.6.

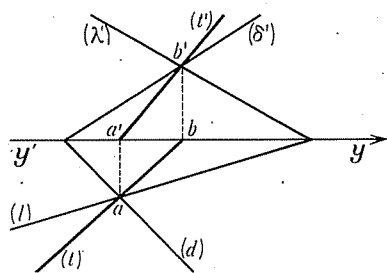


FIG. A.7.

Exercice A.6. — Déterminer les traces du plan défini dans l'exercice A.4.

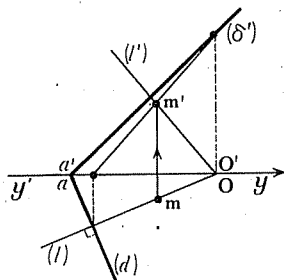


FIG. A.8.

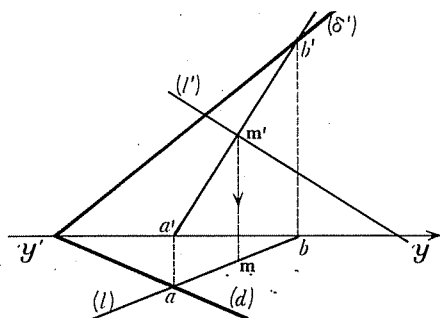


FIG. A.9.

Exercice A.7. — Soit (P) le plan de l'exercice A.4., A le point de coordonnées 1, 1, 1. Tracer l'épure de la perpendiculaire à (P) menée par A.

Les droites $(t) = ab$ et $(t') = a'b'$ sont les projections cherchées. Le problème se complique si les traces ne se coupent pas dans les limites de l'épure.

On utilise alors un plan auxiliaire horizontal par exemple, pour déterminer les points de l'intersection (t, t') .

Exemple A.3.

Soit un plan (P) donné par ses traces (d) et (δ') , et une droite (L) de projections (l) et (l') . Pour déterminer l'intersection $(P) \cap (L)$ nous nous ramenons au cas précédent, c'est-à-dire à l'intersection de deux plans.

Il suffit de construire par exemple le plan vertical (Q) passant par (L), dont la trace horizontale est (l) . Ce plan coupe (P) selon $(ab, a'b')$ et cette dernière droite coupe (l, l') au point (m, m') cherché (fig. A.8.).

Angles droits

Nous connaissons une condition pour qu'un angle droit se projette suivant un angle droit (chapitre 0). En géométrie descriptive selon les cas,

a) on effectue un changement de plan frontal (exercice A.1.) ou de plan horizontal (exercice A.2.) pour que l'une des projections de l'angle droit soit aussi un angle droit;

b) on détermine des droites ou plans auxiliaires vis-à-vis desquels l'angle droit est en situation particulière.

Cependant l'exemple suivant s'effectue directement.

Exemple A.4.

Tracer la perpendiculaire (L) issue de O à un plan (P) donné par ses traces (d) et (δ') . Remarquons que les projections (l) et (l') doivent être orthogonales aux traces (d) et (δ') , et réciproquement; d'où l'épure (fig. A.9.), avec la construction du pied (m, m') de la perpendiculaire.

Pour mesurer la distance $\|OM\|$ on effectue un **changement de plan frontal** de sorte que OM soit parallèle au nouveau plan frontal. Le lecteur tracera ces épures à titre d'exercice.

Conclusion

Nous espérons que ces éléments très succincts de géométrie descriptive inciteront le lecteur curieux à consulter les ouvrages spécialisés en géométrie descriptive. Ces méthodes s'appliquent à des solides très divers (intersections de quadriques...). Le recours à une surface auxiliaire ou à un changement de plan de référence est permanent et permet souvent de tracer les intersections cherchées point par point. (Voir Bibliographie).

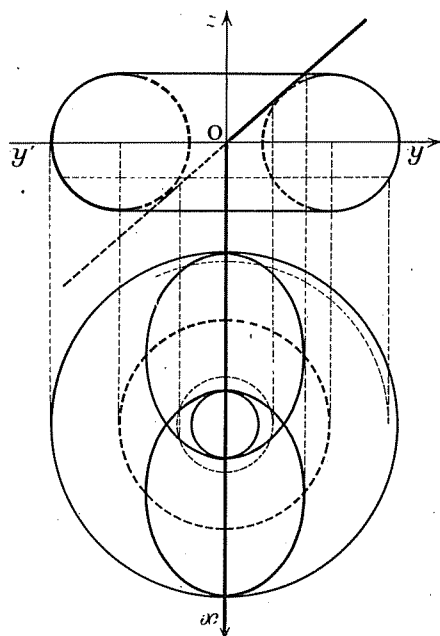


FIG. A.10.

Exercice A.8. — Soit le cône (C) de sommet O, d'axe Oz de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'épure de $(P) \cap (C)$ où (P) est le plan de l'exercice A.4.

La figure A.10 représente l'épure d'un tore coupé par un plan bitangent. L'intersection qui se projette horizontalement selon deux ellipses, est formée par deux cercles appelés cercles de Villarceau.

Solutions des exercices

chapitre 0

0.1.1.

a) En supposant $D' \cap \Delta = \emptyset$, nous arrivons à une contradiction avec l'axiome d'Euclide.

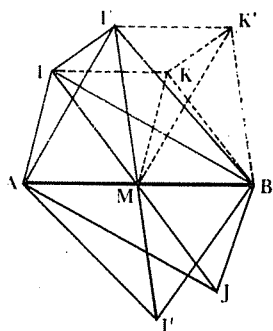
b) En supposant que les droites se rencontrent, nous aboutissons à une contradiction avec l'axiome d'Euclide.

0.1.2. — En supposant $D' \cap \Delta = \emptyset$ et en utilisant le théorème (0.1.2. b), nous montrons $D \cap \Delta = \emptyset$. Contradiction.

0.1.3. — Le lecteur mènera par I la parallèle à AB (fig. 0.13. a) et par M la parallèle à AI et utilisera l'axiome (0.1.5.).

Réciproquement, prolongeons IM et traçons par B la parallèle à MK. MKBJ est un parallélogramme donc aussi AIBJ par transitivité.

0.1.4. — Nous partons de la construction du milieu de la définition (0.1.3.) et de la remarque (0.1.5.). Soit I' un point quelconque.



Nous traçons $MK' // AI'$ et $I'K' // AB$ et nous achevons le parallélogramme $AI'BJ'$. Nous utilisons l'axiome (0.1.5.) pour montrer

a) $II'K'K$ parallélogramme car $AIKM$ et $AI'K'M$ parallélogrammes;

b) $I'K'BM$ parallélogramme car $II'K'K$ et $IKBM$ parallélogrammes;

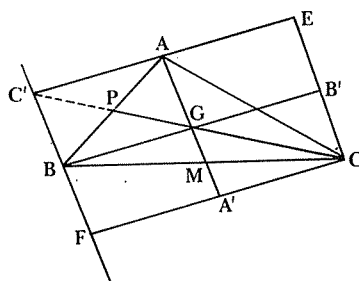
c) $MK'BJ'$ parallélogramme car $AI'BJ'$ et $AI'K'M$ parallélogrammes.

En conclusion, IM et MJ' sont parallèles à $K'B$. D'après l'axiome d'Euclide, I' , M et J' sont alignés.

La diagonale d'un parallélogramme quelconque, de deuxième diagonale AB , passe donc par M .

0.1.5. — Se donner un point I quelconque. Tracer par I la parallèle à AB et par B la parallèle à AI. Si K est leur point de rencontre, mener par K la parallèle à IB.

0.1.6. — Soit G le point de rencontre des médianes AM et BN . CG rencontre AB en P. Traçons par B et C les parallèles à AM et par A et C les parallèles à BN . Nous déterminons ainsi un parallélogramme $C'ECF$. Nous allons montrer que G est le milieu de CC' . En effet, G est milieu de BB' car $GM // B'C$ et M milieu de BC .



Idem pour AA' , A est milieu de $C'E$ (projection parallèle) N milieu de AC est aussi milieu de EA' . Donc en appliquant le premier théorème de Thalès, nous avons

$$AN // A'C' \text{ soit } AC // A'C'.$$

$ACA'C'$ est un parallélogramme de diagonales CC' et AA' . G est donc milieu de CC' . Les points C', P et G sont alignés et d'après la définition du milieu, P est milieu de AB , ce qu'il fallait démontrer.

0.1.7. — Soit P le milieu de AC . Par le premier théorème de Thalès,

$$MP // BC \text{ et } PN // AD.$$

Comme $BC // AD$ et axiome d'Euclide, $MN // AD // BC$.

0.1.8. — Soit M, N, P et Q les milieux respectifs de AB , BC , CD et AD . Par le premier théorème de Thalès, $MN // AC$ et $QP // AC$ d'où $MN // QP$. Idem pour $QM // NP$.

0.1.9. — Si $\Delta // \Delta'$, il est facile de montrer (exercice) que les milieux déterminés par toute sécante aux droites Δ et Δ' décrivent une droite D parallèle à ces dernières. Le problème est donc impossible si le milieu M de A et C n'appartient pas à D et indéterminé dans le cas contraire.

le milieu de AC , le problème se ramène à construire une sécante à Δ et à Δ' de milieu M. Pour cela, il suffit de joindre IM et de construire J tel que M soit milieu de IJ (cf. 0.1.5.). Les parallèles menées par J à Δ et Δ' déterminent les deux points cherchés.

0.1.10. — Utiliser construction du milieu de la remarque (0.1.5.) et axiome (0.1.6.).

0.1.13. — Construire par un point de (Δ) le plan (Q) parallèle à (D) . La droite cherchée est $(P) \cap (Q)$.

0.1.14. — Soit I un point de $(P) \cap (Q)$ et (R) le plan mené par (D) , passant par I . On applique le théorème (0.1.5.) et la propriété d'Euclide.

0.2.1.

a) En supposant $D \cap D' = A$ il serait possible de mener par A deux droites orthogonales à D' .

b) Soit $A = D \cap D'$. Par A , menons Δ , orthogonale à D' . Elle coupe D' en B . Par B , on peut mener $\Delta_1 \perp \Delta$. Nous avons donc $\Delta_1 // D''$.

L'axiome d'Euclide entraîne que $\Delta_1 = D'$. Donc $\Delta \perp D'$. D'après l'unicité de l'orthogonale, $\Delta = D$.

0.2.2. — Éléments de (D) .

0.2.3. — Si $(\Delta) // (D)$, en choisissant deux points sur (Δ) on détermine une droite (Δ') . Si M est un point quelconque de (Δ) , la perpendiculaire MK à (D) coupe (Δ') en M' . D'après les théorèmes de projections parallèles, K est milieu de MM' si $(\Delta) \cap (D) = I$, en choisissant un point A sur (Δ) , on détermine (Δ') qui est la droite IA' . L'axiome de la bissectrice nous permet d'affirmer qu'il existe (D') telle que (Δ) et (Δ') soient symétriques.

Si $(D) \neq (D')$, AA' aurait deux milieux.

Il existe une démonstration reposant sur le théorème de Thalès.

0.2.4. — Non.

0.2.7. — Non.

0.5.2. — Utiliser la relation de Chasles et des relations du type : $\overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$.

0.5.3. — Cela résulte de la relation $v = \lambda u$ pour les vecteurs unitaires de l'axe.

0.5.4.

a) Écrire $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ et exprimer $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{CN}$.

b) Appliquer la relation de Chasles en passant par A pour $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

0.5.5. — Si $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} &= -\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \\ &= -\frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AC}}. \end{aligned}$$

0.5.6. — Utiliser les relations donnant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré.

0.5.7. — Nous avons une relation analogue à celle de l'exemple (0.5.2.) : $\overrightarrow{JC}^2 = \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JB}$

soit
$$\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JC}} = \frac{\overrightarrow{JC}}{\overrightarrow{JB}}.$$

D'après les propriétés des proportions,

$$\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Comme

$$\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JB}} = \frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JC}} \cdot \frac{\overrightarrow{JC}}{\overrightarrow{JB}} = \left(\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JC}} \right)^2,$$

nous tirons le résultat.

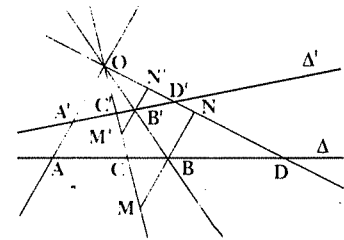
0.5.8.

a) Soit O le point de concours des droites issues de A, B, C et D . Mener par B et B' les parallèles à AO .

L'application du théorème de Thalès donne

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BM}} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BN}},$$

soit
$$-1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BM}}.$$



De même
$$\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} : \frac{\overrightarrow{DA'}}{\overrightarrow{DB'}} = \frac{\overrightarrow{BN'}}{\overrightarrow{BM'}}.$$

Comme
$$\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BM}} = \frac{\overrightarrow{BN'}}{\overrightarrow{BM'}},$$

nous avons
$$\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} : \frac{\overrightarrow{DA'}}{\overrightarrow{DB'}} = -1.$$

(Pour un faisceau parallèle, le résultat est une conséquence du théorème de Thalès.)

b) D'après a) nous avons

$$\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BM}} = \frac{\overrightarrow{BN'}}{\overrightarrow{BM'}} = -1.$$

Donc B est le milieu de MN , B' est celui de $M'N'$. Et réciproquement.

0.5.9. — On applique le théorème de Thalès.

0.7.1.
$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V} &= 4 \mathbf{OI}; \end{aligned}$$

si O désigne l'intersection des diagonales et I le milieu de AB .

0.7.2. — Se donner un repère et appliquer les résultats du tome I.

0.7.3.

$$\mathbf{U} = \alpha_1 \mathbf{OA}_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_n) \mathbf{OB}_1$$

si B_1 désigne le barycentre des points

$$A_2 (\alpha_2) \dots, A_n (\alpha_n).$$

D'où

$$\mathbf{U} = \alpha_1 \mathbf{OA}_1 - \alpha_1 \mathbf{OB}_1 = \alpha_1 \mathbf{B}_1 A_1.$$

0.7.4.

$$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BA}.$$

0.7.5. $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = 2$ donc $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -2$.

0.7.6. — Le symétrique de A par rapport au milieu de BC.

0.7.7. — En utilisant les propriétés d'associativité du barycentre, on montre que c'est le point de concours des droites joignant les milieux des côtés.

Dans un parallélogramme, c'est le point de concours des diagonales.

0.8.1. — C'est la projection parallèlement au plan dirigé par (D) et (Δ').

0.9.1.

a) $\overline{AB} = (-2, -2, 2)$.

b) Écrire $\overline{AM} = \lambda \overline{AB}$ d'où $\lambda = -1$
 $M(5, 3, -6)$.

0.10.1. — Il suffit de remarquer que les vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$ sont symétriques par rapport à la droite OH, projeté de OM sur le plan (P). Or la symétrie par rapport à une droite conserve la longueur.

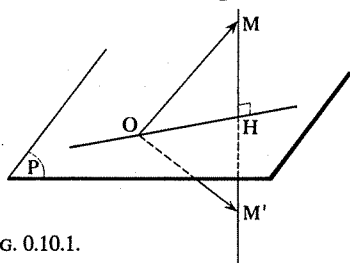
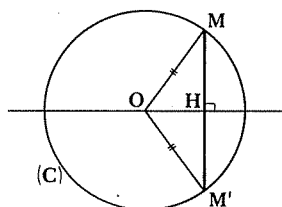


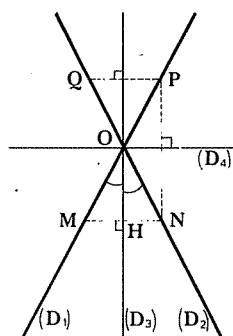
FIG. 0.10.1.

0.10.2. — Soit M un point du cercle (C), M' son symétrique par rapport au diamètre.



Nous avons $\|\overline{OM'}\| = \|\overline{OM}\|$ d'après la propriété (b) du paragraphe (1.10.). Donc M' appartient à (C).

0.10.3. — Soit M un point de (D_1), N son symétrique par rapport à (D_3), situé sur (D_2), P et Q les symétriques de N et M par rapport à (D_4), situés sur (D_1).



Nous avons

$$\|\overline{OM}\| = \|\overline{ON}\| = \|\overline{OP}\| = \|\overline{OQ}\|,$$

donc le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme (théorème 0.1.4.). La droite HH' joignant les milieux de MN et de PQ est parallèle aux côtés MQ et PN, et perpendiculaire au côté MN. Ainsi MNPQ est un rectangle et (D_3) est perpendiculaire à (D_4).

Dans le triangle OMN, le point O est le milieu de MN. Ainsi (D_1), (D_2) et (D_3) découpent des segments égaux sur la droite MN parallèle à (D_4).

Le faisceau (D_1 , D_2 , D_3 , D_4) est donc harmonique (cf. exercice 0.5.8. b).

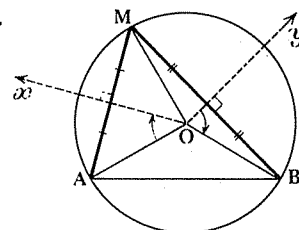
0.10.4. — Soit, (D_3) $\perp$ (D_4). La parallèle à (D_4) menée par un point H de (D_3), coupe (D_1) et (D_2) en deux points M et N (figure précédente). Le point H est le milieu de MN (cf. exercice 0.5.8. b). Aussi la droite (D_3) est médiatrice de MN, donc bissectrice de l'angle formé par (D_1) et (D_2). La droite (D_4), orthogonale à (D_3), est l'autre bissectrice de cet angle.

chapitre 1

1.1.1. — a, b, c.

1.1.2. — AD perpendiculaire commune à AM et DF, etc.

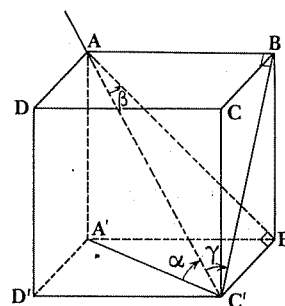
1.2.1.



$$\begin{aligned} (\overline{OA}, \overline{OB}) &= (\overline{OA}, \overline{OM}) + (\overline{OM}, \overline{OB}) \\ &= 2(\overline{OA}, \overline{Ox}) + 2(\overline{Oy}, \overline{OB}) \\ &= 2[(\overline{OA}, \overline{Ox}) + (\overline{Ox}, \overline{Oy}) \\ &\quad + (\overline{Oy}, \overline{OB}) - (\overline{Ox}, \overline{Oy})] \\ &= 2(\overline{OA}, \overline{OB}) - (\overline{Ox}, \overline{Oy}). \end{aligned}$$

Or $(\overline{MA}, \overline{MB}) = (\overline{Ox}, \overline{Oy}) + k\pi$,
d'où le résultat.

1.2.2. — $\alpha = \frac{\pi}{4}$

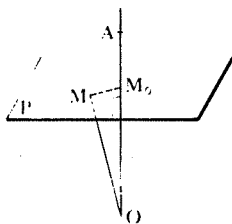


$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \gamma$$

$$\beta = \gamma \approx 35,3 \text{ degrés.}$$

1.3.1. — $\sqrt{2} - 1$.

1.3.2. — Cherchons celui M_0 situé sur OA , soit $OM_0 = x_0 \cdot OA$.

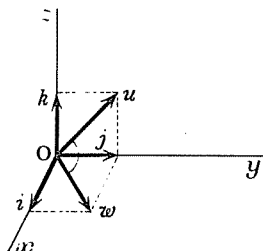


On trouve $x_0 = \frac{k}{\|OA\|^2}$. Pour tout autre point M solution on a

$$(OM - OM_0) \cdot OA = 0,$$

soit $M_0M \perp OA$. Tout point M du plan ($\mathcal{P}$) mené par M_0 orthogonalement à OA est solution, et réciproquement.

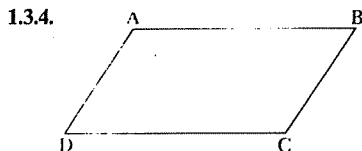
1.3.3. — Soit $w = i + j$, $u = i + k$



$$u \cdot w = 1, \quad \|u\| = \|w\| = \sqrt{2}.$$

$$\cos(u, w) = \frac{u \cdot w}{\|u\| \cdot \|w\|} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

$$(u, w) = \frac{\pi}{3}.$$



$$AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2 AB \cdot BC$$

$$BD^2 = (BC + CD)^2 = BC^2 + CD^2 + 2 BC \cdot CD.$$

Or

$$AB^2 = CD^2 \quad \text{et} \quad AB \cdot BC = -BC \cdot CD$$

puisque $AB = -CD$, d'où le résultat.

1.3.5.

a) Il suffit d'utiliser la relation de Chasles, à l'aide de A par exemple.

b) Si D est le point de concours des hauteurs issues de A et B , la relation démontrée en a) entraîne $AB \cdot CD = 0$, donc CD est la troisième hauteur.

$$1.3.6. \quad E = 3 R^2 - 3 OG^2.$$

On utilise la relation de Chasles.

1.3.7. — Soit AC et BD les diagonales, c la longueur commune aux quatre côtés.

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= (AB + BC) \cdot (BC + CD) \\ &= c^2 - c^2 + c^2 - c^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$1.3.8. \quad AB + BC + CD + DA = 0.$$

On élève les deux membres au carré scalaire, et l'on fait apparaître les milieux P et Q de AC et BD .

1.3.9. — Tracer le symétrique A' de A par rapport à (D) . Alors

$$\|AC\| + \|CB\| = \|A'C\| + \|CB\|,$$

la droite $A'B$ coupe (D) au point C cherché.

1.3.10. — D'après (1.3.10.)

$$\cos \hat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc},$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \hat{A} &= 1 - \cos^2 \hat{A} = \\ &= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}, \end{aligned}$$

on développe la différence des deux carrés au numérateur et l'on fait apparaître la quantité p .

1.3.11. — On développe les carrés scalaires.

1.3.12. — Si $a + b + c \neq 0$,

$$E = (a + b + c) MG^2 + a GA^2 + b GB^2 + c GC^2$$

si $E = \text{Cte}$, M décrit un cercle de centre G et de rayon

$$\rho = \sqrt{\frac{E - h}{a + b + c}}$$

si

$$h = a GA^2 + b GB^2 + c GC^2 < E.$$

Si $a + b + c = 0$, alors

$$a MA + b MB + c MC = U$$

et

$$E = 2 MO \cdot U + a OA^2 + b OB^2 + c OC^2$$

Si $E = \text{Cte}$, M décrit une droite perpendiculaire à U .

1.3.13. — Cas particulier : $X_0 = x \cdot A$

alors $x = \frac{c}{\|A\|^2}$. Cas général : soit deux vecteurs solutions X et X' . Nous avons

$$A \cdot (X - X') = 0,$$

donc $Y = X - X'$ est un vecteur orthogonal à A . Les vecteurs solutions sont de la forme $X_0 + Y$ avec $Y \perp A$.

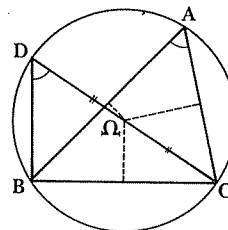
1.4.1.

$$(A \cdot B)^2 = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot \cos^2 \theta,$$

$$\|A \wedge B\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot \sin^2 \theta,$$

d'où le résultat.

1.4.2.



a) Évaluons la surface

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}.$$

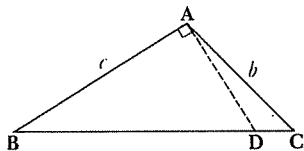
Les relations cherchées s'obtiennent en multipliant les quatre membres par $\frac{2}{abc}$.

Soit Ω le centre du cercle circonscrit (fig.) et D le point diamétralement opposé au sommet C.

Les angles inscrits $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux.

$$\sin \widehat{BDC} = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{2R}$$

car BDC est rectangle en B. Soit $\sin \hat{A} = \frac{a}{2R}$, etc.



b) Le résultat est évident si les trois angles sont aigus, car la fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ notamment. Dans le cas contraire, supposons $\hat{A}$ obtu et $\hat{B} \leq \hat{C}$ soit $b \leq c$.

Dans le triangle ABD rectangle en A nous avons $c \leq BD \leq a$.

1.4.3.

$AB \wedge AC = (AD + DB) \wedge (AD + DC)$
on développe le produit.

1.4.4.

$$a) S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}.$$

Or d'après l'exercice (1.3.10.),

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

d'où S.

b) Le cercle inscrit de centre I est tangent aux trois côtés en P, Q et R (faire le dessin). Ces points déterminent avec A, B, C et I six triangles rectangles et le bilan des surfaces donne facilement $S = p \cdot r$.

c) $a = 2R \sin A$ (exercice 1.4.2.) et

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

d'où le résultat.

1.4.5. — Nécessairement OA et F sont orthogonaux à u ; le problème n'est possible que si $F \cdot u = 0$. Alors le point O doit appartenir au plan orthogonal à u mené par A. Et inversement.

1.4.6.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{|a} &= aA \wedge F, \\ \mathcal{M}_{|a} \cdot u &= (aA \wedge F) \cdot u = (aA, F, u) \\ &= aA \cdot (F \wedge u) F, \\ &= (aH + HA) \wedge [(F_D + F_P) \wedge u] \\ &= aH \cdot (F_P \wedge u) = (aH \wedge F_P) \cdot u \\ &= d \times \text{mes. alg}(F_P). \end{aligned}$$

Mais le point a peut être remplacé par tout point O de (Δ) car

$$(\mathcal{M}_{|a} - \mathcal{M}_{|O}) \cdot u = (Oa, F, u) = 0.$$

1.4.7.

$$\begin{aligned} a) i \wedge (i \wedge j) &= i \wedge k = -j, \\ (i \wedge k) \wedge i &= -j \wedge i = k, \\ b) i \wedge (i \wedge j) &= (i \cdot j) \cdot i - i^2 \cdot j = -j, \\ (i \wedge k) \wedge i &= i^2 \cdot k - (i \cdot k) \cdot i = k. \end{aligned}$$

1.4.8. — Remarquons que A et B doivent être orthogonaux, ainsi que B et X. De plus X sera déterminé à $\lambda \cdot A$ près.

Prenons $X = B \wedge A$,

$$A \wedge X = A^2 \cdot B - (A \cdot B) A = +A^2 \cdot B.$$

La solution sera donc

$$X = \frac{B \wedge A}{\|A\|^2} + \lambda \cdot A.$$

1.4.9. — Nous avons

$$A \wedge (A \wedge B) = A \wedge (A \wedge C)$$

soit, en appliquant (1.4.5.),

$$(A \cdot B) \cdot A - A^2 \cdot B = (A \cdot C) A - A^2 \cdot C,$$

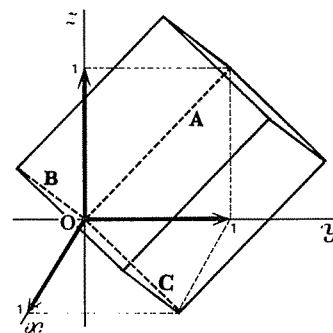
d'où $B = C$.

$A \cdot B = A \cdot C$ signifie que B et C ont même projection sur A.

$A \wedge B = A \wedge C$ entraîne notamment que A, B et C sont coplanaires.

1.5.1.

$$(A, B, C) = (j + k, i + k, i + j) = \dots = 1.$$



Les faces sont des losanges d'angles au sommet 60° ou 120° , car A, B et C sont de même norme et font entre eux des angles de 60° (calculer le cosinus par les produits scalaires).

1.5.2.

$$(i, j, u) = (i, j, i) + (i, j, j) + (i, j, k) = 0 + 0 + 1:$$

même volume que le cube unité.

1.5.3. — Calculons à part

$$\begin{aligned} (C \wedge A) \wedge (A \wedge B) &= [(C \wedge A) \cdot B] \cdot A - [(C \wedge A) \cdot A] \cdot B \\ &= (A, B, C) \cdot A \end{aligned}$$

Le produit cherché sera donc

$$(B \wedge C) \cdot [(A, B, C) \cdot A] = (A, B, C)^2.$$

1.5.4. — Il est nul car les trois vecteurs sont dans le plan orthogonal à A.

1.5.5. — On applique la formule (1.5.1.) à trois reprises.

1.5.6. — D'après (1.4.4.),

$$(A \wedge B) \wedge (C \wedge D) = [(A \wedge B) \cdot D] \cdot C - [(A \wedge B) \cdot C] \cdot D$$

et d'après (1.4.5.) le premier membre vaut

$$[A \cdot (C \wedge D)] \cdot B - B \cdot (C \wedge D) \cdot A$$

d'où le résultat.

$$1.6.1. \quad V_1 \cdot V_2 = 1 + 2 - 3 = 0,$$

$$V_1 \cdot V_3 = 5 - 4 - 1 = 0,$$

$$V_2 \cdot V_3 = 5 - 8 + 3 = 0.$$

1.6.2. — Soit $U(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} U \cdot V_1 &= -x + 2y = 0, \\ U \cdot V_2 &= -3x - y + 2z = 0. \end{aligned}$$

Soit $x = 2y$ et $z = \frac{7}{2}y$ avec y quelconque. Exemple (4.2.7.).

1.6.3.

$$U \cdot V = 2a^2 - 2a - 4 = 0.$$

Les racines sont

$$a = \frac{1 \pm 3}{2}, \text{ soit } a' = 2 \text{ et } a'' = \frac{1}{2}.$$

1.6.4.

$$F \cdot r = 2 \times 3 + 1 \times 2 + (-1 \times -5) = 13 \text{ J.}$$

1.6.5. — Les coordonnées du milieu M de BC sont $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et les composantes du vec-

teur $AM \left(-2, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, d'où

$$AM^2 = 4 + \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{21}{2}, \quad \|AM\| \approx 3.23 \text{ m.}$$

1.6.6. — L'organigramme présenté calcule successivement $\|AB\|$, $\|AC\|$ et $\|BC\|$, soit S_c avec $c = 3$, puis 2, puis 1 (numéro variable). Les coordonnées cherchées sont b_1 , b_2 et b_3 (fig. 1.6.6.).

$$1.6.7. \quad U \wedge V (2, 4, 6),$$

$$U \wedge W (4, 8, 12).$$

Ainsi U, V, W sont coplanaires.

1.6.8. — AB a pour composantes $(-1, 2, 1)$ et $AC (-3, 1, 2)$ donc $AB \wedge AC$ a pour composantes $(3, 5, -1)$ et pour module $\sqrt{35}$.

$$\text{L'aire est } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35} \approx 2,3 \text{ m}^2.$$

1.6.9. — $v \wedge w$ a pour composantes $(4, 7, 2)$ et pour module $\sqrt{69}$, d'où les deux solutions

$$\left(\frac{\pm 4}{\sqrt{69}}, \frac{\pm 7}{\sqrt{69}}, \frac{\pm 2}{\sqrt{69}} \right).$$

1.6.10.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \text{ m}^3.$$

1.6.11. — Utiliser la linéarité et l'expression analytique du produit mixte.

1.6.12.

a) $A \wedge (B \wedge X) = 0$ si $B \wedge X$ est nul ou colinéaire à A . Si $B \wedge X \neq 0$, alors cela entraîne que A est orthogonal à B . Tout vecteur X orthogonal à A convient car alors $B \wedge X$ est colinéaire à A . Si A n'est pas orthogonal à B , on réalise $B \wedge X = 0$ en choisissant X colinéaire à B .

b) Prenons

$$\begin{aligned} A &= a_1 \cdot i, \quad B = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j, \\ X &= x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A \wedge (B \wedge X) &= a_1 (b_2 x_1 - b_1 x_2) j - a_1 b_1 x_3 \cdot k. \end{aligned}$$

Le second membre est nul dans deux cas

- 1) $b_1 = 0 = x_1$ (X orthogonal à A),
- 2) $b_1 \neq 0, x_3 = 0$ et $b_2 x_1 - b_1 x_2 = 0$: (X colinéaire à B).

1.6.13. — Figure page suivante.

$$1.7.1. \quad \cos \theta = \frac{MA \cdot MB}{\|MA\| \cdot \|MB\|}.$$

Élevons au carré : nous ne distinguons plus θ et $\pi - \theta$.

$$\cos^2 \theta = \frac{[(-a-x)(a-x) + y^2]^2}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(a-x)^2 + y^2}}$$

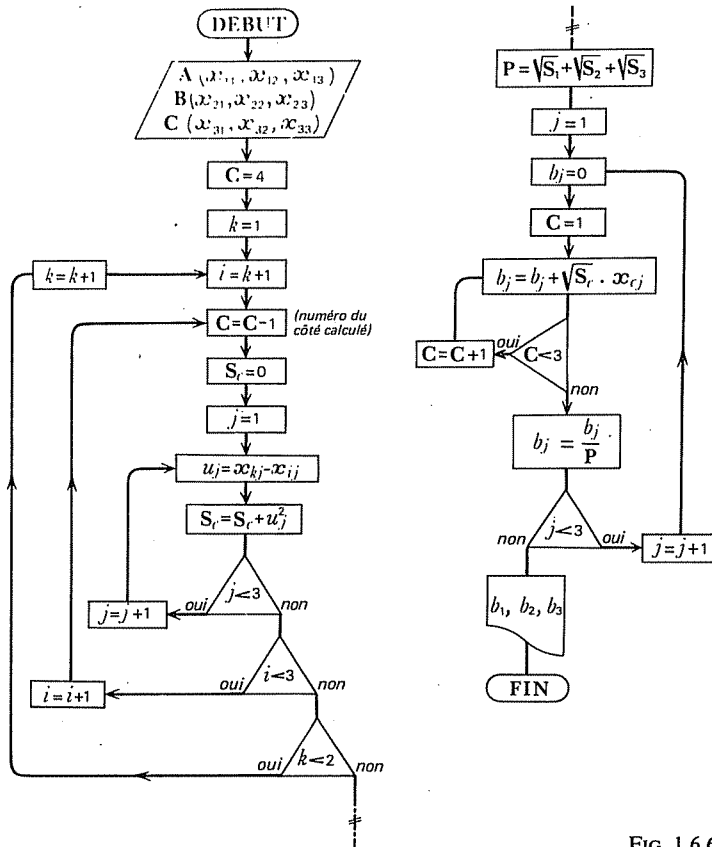


FIG. 1.6.6.

Après un certain nombre de regroupements de termes on obtient

$$x^2 + (y \pm a \cotg \theta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta}.$$

Ce sont deux cercles centrés sur Oy.

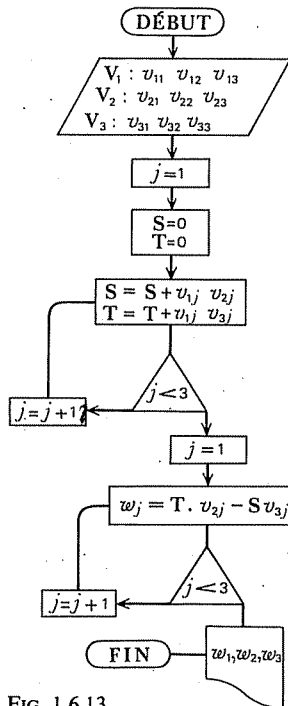


FIG. 1.6.13.

1.7.2. — $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ a pour composantes $(1, 0, -1)$ et pour module $\sqrt{2}$. De plus $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 2$.

D'où $\text{tg } V = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $V \approx 35,3$ degrés.

1.7.3. — Pour chaque sommet, S_1 et S_2 désigneront le carré scalaire des deux côtés du sommet, et P le produit scalaire des deux vecteurs partant du sommet. Les coordonnées cherchées sont notées ω_1, ω_2 et ω_3 . (Voir organigramme ci-contre).

1.7.4. — Soit A le point de coordonnées $(-1, 0, 1)$ et V le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$.

Alors $\overrightarrow{AM_2} = m \cdot V$: M_2 parcourt la droite dirigée par V , passant par A .

En appliquant (1.7.1.) on trouve $m = \sqrt{2}$.

1.7.5. $\overrightarrow{AB}(0, -1, 1) = (p, q, r)$

d'où $(a, b, c) = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1.7.6. $\overrightarrow{A'B'}(1, 0, 1) = (p', q', r')$

d'où $(a', b', c') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

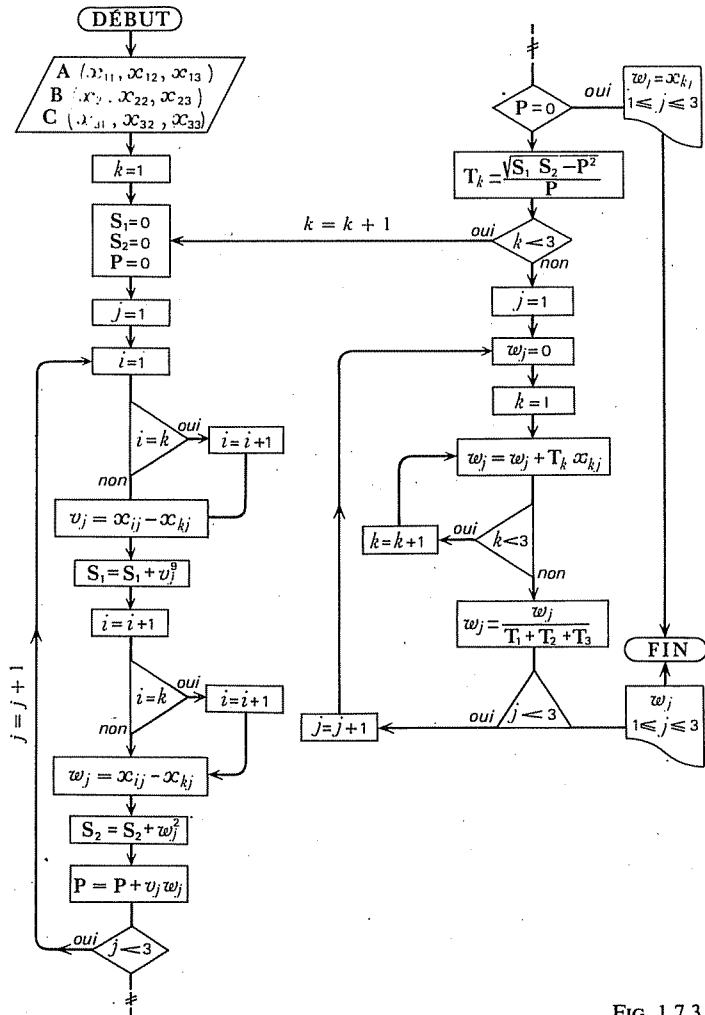


FIG. 1.7.3.

1.7.7. $\cos V = aa' + bb' + cc' = 0 + 0 + \frac{1}{2}$.

Par exemple, $V = \frac{\pi}{3}$.

1.7.8. — Il faut $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

et $\theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(permutations circulaires possibles).

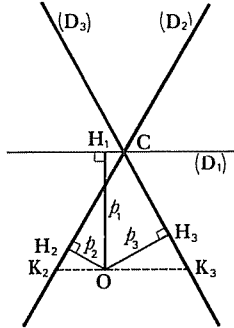
$OC^2 = OH_3^2 + CH_3^2$ (Pythagore).

Or $OH_3 = d_3$ et $CH_3 = CK_3 - K_3 H_3$

$$CK_3 = \frac{OH_1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2p_1}{\sqrt{3}},$$

$$K_3 H_3 = OH_3 \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{p_3}{\sqrt{3}}$$

d'où $OC^2 = \frac{(2p_1 - p_3)^2}{3} + p_3^2$.



De la même façon

$$OC^2 = \frac{(2p_1 - p_2)^2}{3} + p_2^2$$

D'où

$$(2p_1 - p_3)^2 + 3d_3^2 = (2p_1 - p_2)^2 + 3p_2^2$$

qui se réduit à $p_1 = p_2 + p_3$
(permutations circulaires possibles).

1.7.9. — Le vecteur unitaire normal est

$$u = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$$

soit $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

D'où l'équation $x + 2y + 2z = 3d$.

Comme le plan passe par M, il en résulte

$$9 = 3d, \text{ d'où } d = 3,$$

soit $\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} = 3$.

1.7.10. — Soit $\mathbf{n}$ le vecteur $ai + bj + ck$.

L'équation proposée s'écrit $\mathbf{n} \cdot \mathbf{OM} = d$.

Si M_0 est un point de l'ensemble, nous avons
 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_0 \mathbf{M} = 0$, ce qui représente le plan
orthogonal à $\mathbf{n}$ en M_0 .

1.7.11. — Soit $A_0 A'_0$ les points où la perpendiculaire commune rencontre (Δ) et (Δ') .

Alors $d = \|A_0 A'_0\|$.

Notons que $A_0 A'_0$ est orthogonal aux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$, donc colinéaire à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'$ soit

$$d = \frac{|A_0 A'_0 \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}')|}{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'\|} \\ = \frac{|(\mathbf{u}, A_0 A'_0, \mathbf{u}')|}{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'\|}.$$

Il reste à montrer que l'on peut remplacer A_0 et A'_0 par A et A' quelconques sur (Δ) et (Δ') , ce qui est facile (car $A_0 A'/\mathbf{u}$ et $A'_0 A'/\mathbf{u}'$).

1.7.12.

$$d = \frac{|x + y + z - 1|}{\sqrt{3}}$$

On peut calculer I_1 en coordonnées sphériques, ou utiliser un théorème de Huygens (tome I, paragraphe 4.9.).

1.8.1.

$$\mathbf{r}' = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{r}'' = -\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{k}, \quad \|\mathbf{r}''\| = 1.$$

1.8.2.

$$\mathbf{r}' = (3t^2 + 2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + 10\cos 5t \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'' = 6t \mathbf{i} - 12e^{-2t}\mathbf{j} - 50\sin 5t \mathbf{k}.$$

1.8.3. — Au point considéré

$$u'_x = -12\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad u'_y = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad u'_z = 4\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$u''_{xx} = -12\mathbf{i}, \quad u''_{yy} = \mathbf{0}, \quad u''_{zz} = -4\mathbf{j},$$

$$u''_{xy} = 6\mathbf{i}, \quad u''_{xz} = -\mathbf{k}, \quad u''_{yz} = -2\mathbf{j}.$$

1.8.4.

$$\mathbf{V}(t) = -6e^{-2t} \mathbf{i} + 12\cos 3t \mathbf{j} - 15\sin 3t \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{V}(0)\| = 6\sqrt{5}.$$

1.8.5.

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 3e^{-2t} dt^2,$$

$$l = \sqrt{3} \int_0^{10} e^{-t} dt = \sqrt{3}(1 - e^{-10}).$$

1.8.6.

$$\mathbf{V}(t) = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j} + 2ct \mathbf{k}$$

$$\gamma(t) = -a\omega^2 (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) + 2c \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{a^2 \omega^2 + 4c^2 t^2},$$

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{a^2 \omega^4 + 4c^2}.$$

chapitre 2

2.1.1. — Les points M et N se déduisent des translations verticales du point O qui décrit un cercle (C) de centre A. Les lieux de M et de N sont donc des cercles translatés du cercle (C).

2.1.2. — Les points E et F se déduisent de C et de D par deux translations verticales des points C et D qui décrivent chacun un cercle. Les lieux de E et F sont des cercles translatés des précédents.

2.1.3. — Soit ω le quatrième sommet du carré ωAOB (I). Le point N et le transformé du point M par $\mathcal{R}_{\omega, \frac{\pi}{2}}$, donc la médiatrice passe par ω . De plus, le triangle ωMN est rectangle isocèle.

2.1.4. — La composée de $\mathcal{R}_{O_1, \frac{\pi}{2}}$ par $\mathcal{R}_{O_2, \frac{\pi}{2}}$ est une rotation $\mathcal{R}_{O_3, \pi}$ c'est-à-dire une *symétrie* par rapport à O_3 : il suffit d'appeler O_3 le milieu de MM_2 .

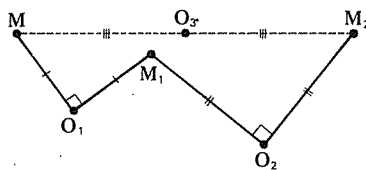


FIG. 2.1.4.

2.1.5.

$$a) O_2 M_2 = \cos \alpha_2 \cdot (O_1 M_1 - O_1 O_2) + \sin \alpha_2 \cdot (u \wedge [O_1 M_1 - O_1 O_2]).$$

On remplace $O_1 M_1$ par sa valeur, d'où

$$O_2 M_2 = \cos \alpha_3 \cdot O_1 M + \sin \alpha_3 u \wedge O_1 M - V$$

avec

$$V = \cos \alpha_2 \cdot O_1 O_2 + \sin \alpha_2 \cdot u \wedge O_1 O_2.$$

b) Nous avons

$$(1 - \cos \alpha_3) O_1 O_3 - \sin \alpha_3 (u \wedge O_1 O_3) = (1 - \cos \alpha_2) O_1 O_2 - \sin \alpha_2 (u \wedge O_1 O_2).$$

En posant $v = O_1 O_2$, $w = u \wedge v$,

$$\text{et } O_1 O_3 = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$$

nous obtenons après simplification

$$\lambda = - \frac{\sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_3}{2}},$$

$$\mu = \frac{1}{2} - \cotg \frac{\alpha_3}{2} \cdot \sin (\alpha_1 - \alpha_2).$$

$$c) OO_3 = OO_1 + O_1 O_3$$

d'où les formules cherchées en utilisant aussi

$$v = O_1 O_2 = OO_2 - OO_1$$

soit $(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \cdot w = u \wedge v$

soit $(b_1 - b_2, a_2 - a_1).$

2.1.6. — Soit un vecteur AB et son image $A'B'$. Les droites AA' et BB' se coupent en un point O. D'après le théorème de Thalès les points A' et B' se déduisent de A et de B par l'homothétie $\mathcal{H}_{O,k}$.

Soit C un point quelconque. Son image C' s'obtient aussi par $\mathcal{H}_{O,k}$ car $OC' = k \cdot OC$.

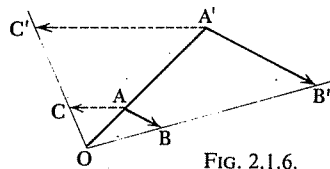
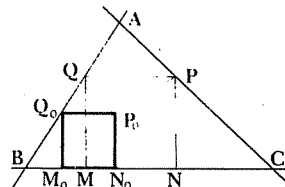


FIG. 2.1.6.

2.1.7. — Nous construisons un carré

$$M_0 N_0 P_0 Q_0$$

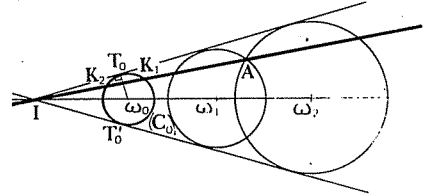
dont le côté $M_0 N_0$ est situé sur BC tandis que le point Q_0 est situé sur AB.



Toute homothétie de centre B conserve au carré ces deux propriétés. L'un des carrés

homothétiques $MNPQ$ a son sommet P sur AC et P est homothétique de P_0 par rapport à B, il suffit donc de tracer BP_0 qui coupe AC en P.

2.1.8. — Soit $I = (D) \cap (D')$, (Δ) la bissectrice qui passe dans le même quadrant que A. Tout cercle tangent à (D) et à (D') est centré sur (Δ). Traçons un tel cercle (C_0) de centre ω_0 .



Les autres cercles semblables (C) se déduisent de (C_0) par des homothéties de centre I.

La droite IA coupe (C_0) en deux points K_1 et K_2 . Les rayons $\omega_0 K_1$ et $\omega_0 K_2$ ne changent pas de direction sous l'effet des homothéties $\mathcal{H}_{I,k}$.

Nous traçons donc

$$A \omega_1 / \omega_0 K_1 \text{ et } A \omega_2 / \omega_0 K_2.$$

2.1.9. — Le point I, milieu de l'hypoténuse MN, se déduit du point M par la rotation $\mathcal{R}_{M, \frac{\pi}{4}}$ suivie (ou précédée) de l'homothétie $\mathcal{H}_{N, \frac{1}{2}}$. Le lieu de I est donc l'image de $O M_0$ par cette transformation : c'est le segment AB. Le point P se déduit du point I par l'homothétie $\mathcal{H}_{O, 2}$: c'est le segment $M_0 N_0$.

2.1.10. — Nous avons

$$a) O_1 O'_3 = k_1 \cdot O_1 O_3 \text{ et}$$

$$b) O_2 O_3 = k_2 \cdot O_2 O'_3,$$

soit

$$b') O_1 O_3 - O_1 O_2 = k_2 (O_1 O'_3 - O_1 O_2),$$

qui, joint avec a), entraîne le résultat cherché.

2.1.11. — D'après le théorème de Menelaüs,

$$\frac{PC}{PB} \cdot \frac{Q'A}{Q'C} \cdot \frac{RB}{RA} = 1,$$

cette égalité, jointe à l'hypothèse, entraîne

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'C}},$$

d'où $Q = Q'$ ce qui assure l'alignement cherché.

2.1.12.

$$a) \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = 1.$$

$$b) \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = 1.$$

Le produit membre à membre assure l'égalité cherchée.

Pour la réciproque on applique le théorème direct en remplaçant par exemple P par le point P' obtenu comme suit : BQ et CR se coupent en O et P' = (AO) ∩ (BC).

2.1.13. — Nous avons $\| \mathbf{OM}' \| = 5 \cdot \| \mathbf{OM} \|$, donc la transformation

$$x'' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y,$$

$$y'' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,$$

est une isométrie. Nous posons $\frac{4}{5} = \cos \alpha$ et $-\frac{3}{5} = \sin \alpha$, d'où $\alpha \approx 37^\circ$.

La transformation est la similitude $\sigma(0, \alpha, 5)$.

2.2.1. — L'image du plan (P) par $\mathcal{T}_v$ est un plan (P') qui coupe le plan (Q) suivant une droite (D'). Soit (D) l'image de (D') par la translation inverse $\mathcal{T}_v$. (D) et (D') sont les lieux de A et de B.

2.2.2. — On applique le résultat de l'exercice (2.2.1.) à (P) et à (Q) puis à (P) et à (R).

Il en résulte les deux droites (D) et (D') trouvées dans (2.2.1.), et deux autres droites (Δ) et (Δ') lieux de A ∈ (P) et C ∈ (Q) tels que $\mathbf{AC} = \mathbf{V}'$.

On prend $A = (D) \cap (\Delta)$, $B = \mathcal{T}_v . A$ et $C = \mathcal{T}_{v'} . A$.

2.2.3.

a) Soit H la projection de M sur (Δ). D'après l'égalité (2.1.4.) nous avons

$$\mathbf{HM}' = \cos \alpha \cdot \mathbf{HM} + \sin \alpha \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{HM}).$$

Or

$\mathbf{HM}' = \mathbf{OM}' - \mathbf{OH}$ et $\mathbf{HM} = \mathbf{OM} - \mathbf{OH}$, et $\mathbf{OH} = (\mathbf{OM} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$, d'où le résultat.

b) Cette relation permet de trouver les composantes x', y', z' de $\mathbf{OM}'$ sachant celles x, y et z du vecteur $\mathbf{OM}$, pour un repère orthonormé d'origine O.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \cos \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} \mu z - \nu y \\ \nu x - \lambda z \\ \lambda y - \mu x \end{pmatrix} + (1 - \cos \alpha) (\lambda x + \mu y + \nu z) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

d'où la matrice suivante où l'on note c, s et d les nombres $\cos \alpha, \sin \alpha$ et $1 - \cos \alpha$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c + \lambda^2 d & -\nu s + \lambda \mu d & \mu s + \lambda \nu d \\ \nu s + \lambda \mu d & c + \mu^2 d & -\lambda s + \mu \nu d \\ -\mu s + \lambda \nu d & \lambda s + \mu \nu d & c + \nu^2 d \end{bmatrix}.$$

Cette matrice R peut aussi s'obtenir en effectuant un changement de base.

Soit une base (I, J, K) telle que

$$\mathbf{K} = \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{i} + \mu \cdot \mathbf{j} + \nu \cdot \mathbf{k}.$$

Nous choisissons I dans le plan {i, j}, soit

$$\mathbf{I} = \mu \cdot \mathbf{i} - \lambda \cdot \mathbf{j} \quad (\text{non normé}).$$

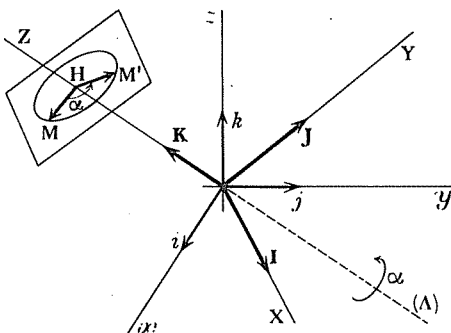


FIG. 2.2.3.

Puis

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{I} = \lambda \nu \cdot \mathbf{i} + \mu \nu \cdot \mathbf{j} - (\lambda^2 + \mu^2) \cdot \mathbf{k}.$$

Les vecteurs I et J ont même longueur (fig. 2.2.3.).

La matrice de rotation pour la base (I, J, K) est

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de rotation pour la base {i, j, k} est

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

où P est la matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mu & \lambda \nu & \lambda \\ -\lambda & \mu \nu & \mu \\ 0 & \nu^2 - 1 & \nu \end{pmatrix}.$$

En effectuant ce calcul on retrouve la matrice R trouvée plus haut.

c) Soit $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$ les matrices représentant les rotations $\mathcal{R}_{\Delta_1, \alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{\Delta_2, \alpha_2}$. La matrice $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$ représente la transformation $\mathcal{R}_{\Delta_2, \alpha_2} \cdot \mathcal{R}_{\Delta_1, \alpha_1}$ qui est une isométrie. Comme le point O est conservé, c'est une rotation $\mathcal{R}_{\Delta_3, \alpha_3}$ dont l'axe (Δ₃) passe par O.

Le vecteur unitaire $\mathbf{u}_3$ (λ_3, μ_3, ν_3) de (Δ₃) est invariant : c'est un vecteur propre correspondant à la valeur propre 1. On le trouve en résolvant le système

$$\mathbf{R}_3 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Un changement de base analogue au précédent b) permet de calculer l'angle α_3 de la rotation.

2.2.4. — Toutes les droites (Δ) du plan médiateur (P) de AA'.

2.2.5. — D'après l'exercice (2.2.4.) on considère les plans médiateurs (P) et (Q) de AA' et de BB' qui se coupent suivant une droite (Δ), axe de la rotation cherchée $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$.

La rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$ existe par hypothèse.

Les plans médiateurs ont pour équation

$$(P) \quad \sum_{i=1}^3 (a'_i - a_i) \left(x_i - \frac{a_i + a'_i}{2} \right) = 0.$$

$$(Q) \quad \sum_{i=1}^3 (b'_i - b_i) \left(x_i - \frac{b_i + b'_i}{2} \right) = 0$$

(cf. paragraphe 5.2.).

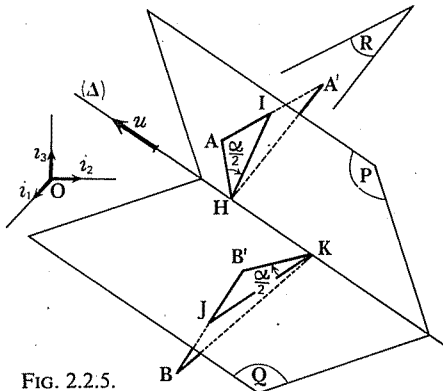


FIG. 2.2.5.

La droite (Δ) est dirigée par $\vec{U} = \vec{AA'} \wedge \vec{BB'}$. Il n'y a plus qu'à chercher un point H de (Δ) . Procédons plutôt vectoriellement. Soit (R) le plan mené par I et orthogonal à (Δ) en un point H , (S) le plan passant par J , orthogonal à (Δ) en un point K . Nous avons

$$\vec{IJ} = \vec{IH} + \vec{HK} + \vec{KJ}.$$

$\vec{IH}$ est dirigé par $\vec{V} = \vec{AA'} \wedge \vec{U}$ et s'obtient en projetant $\vec{IJ}$ sur cette direction, soit

$$\vec{IH} = \frac{(\vec{IJ} \cdot \vec{V})}{\|\vec{V}\|^2} \cdot \vec{V},$$

avec

$$\vec{IJ} = \frac{\vec{AB} + \vec{A'B'}}{2} \quad (\text{facile}).$$

Donc H est connu. Nous avons $\mathcal{R}_{H,\alpha} \cdot A = A'$ dans le plan (R) .

Finalement

$$\tan \frac{\alpha'}{2} = \frac{\|\vec{IA}\|}{\|\vec{IH}\|} = \frac{\|\vec{IA}\| \cdot \|\vec{V}\|}{(\vec{IJ} \cdot \vec{V})}.$$

Il reste à effectuer les calculs.

2.2.6.

a) Si $(D) \cap (D') = I$, l'axe de retournement est la droite (Δ) équidistante de (D) et de (D') .

b) Si $(D) \cap (D') = I$, les deux bissectrices de (D, D') constituent les axes cherchés.

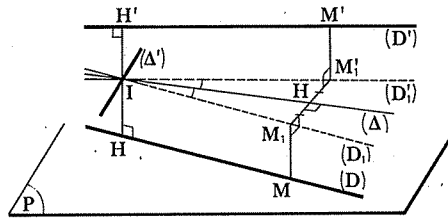


FIG. 2.2.6.

c) Si $(D) \cap (D') = \emptyset$, soit HH' la perpendiculaire commune, I le milieu de HH' , (D_1) et (D'_1) les parallèles à (D) et (D') menées par I . Les bissectrices (Δ) et (Δ') de (D_1, D'_1) constituent les axes cherchés. La figure montre la construction de l'image d'un point M .

2.2.7. — Translation $\mathcal{T}_{2v}$.

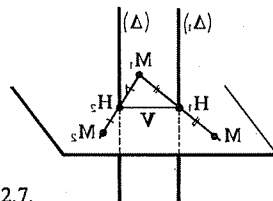


FIG. 2.2.7.

2.2.8. — Soit Δ_3 la perpendiculaire commune. Dans le plan (P) les retournements sont deux symétries d'axes concourants dont le produit est la rotation $\mathcal{R}_{1,2\theta}$. Il est facile de montrer que la transformation composée est $\mathcal{R}_{\Delta_3, 2\theta}$.

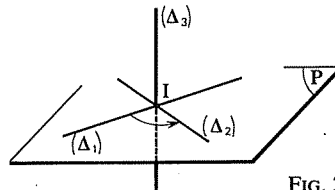


FIG. 2.2.8.

2.2.9. — Nous avons (fig. 2.2.6.)

$$\text{Ret } (\Delta_2) \circ \text{Ret } (\Delta_1)$$

$$= \text{Ret } (\Delta_2) \circ \text{Ret } (\Delta'_2) \circ \text{Ret } (\Delta'_1) \circ \text{Ret } (\Delta_1).$$

Or $\text{Ret } (\Delta_2) \circ \text{Ret } (\Delta'_2)$ est la translation $\mathcal{T}_{2, O_1 O_2}$ et $\text{Ret } (\Delta'_1) \circ \text{Ret } (\Delta_1)$ est la rotation $\mathcal{R}_{D, 2\theta}$.

2.2.10. — Si le rayon incident est parallèle à l'un des plans de coordonnées, il n'y a que deux réflexions par rapport aux deux autres plans. On observe dans leur section droite un produit de symétries d'axes rectangulaires, d'où une symétrie-point qui conserve la direction. Dans le cas général il y a trois réflexions. $I_2 I_3$ est symétrique de SI_1 par rapport à l'arête Oz car le produit

$$\mathcal{S}_{(M_2)} \circ \mathcal{S}_{(M_1)} \text{ est } \mathcal{S}_{Oz}.$$

De plus, $\mathcal{S}_{(M_3)} \circ \mathcal{S}_{(O_2)} = \mathcal{S}_{JO}$ (facile).

Donc $I_3 R$ est symétrique de SI_1 par rapport à O , et $\mathcal{S}_{JO}$ conserve la direction.

2.2.11. — L'angle de deux plans est égal à l'angle aigu de leurs normales, soit

$$\beta = (\vec{n}, \vec{n}').$$

I_n est dirigée par

$$\vec{u} = \vec{j} + \vec{k},$$

$I' n'$ par

$$\vec{u}' = -\vec{j} + (\cos \alpha \cdot \vec{k} + \sin \alpha \cdot \vec{i}).$$

Or

$$\cos(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}'\|} = -\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Soit } \cos \beta = \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Par ailleurs

$$(\vec{LI}, \vec{I' r}) = \alpha \text{ ou } \pi - \alpha.$$

2.2.12. — $\vec{SM}' = \lambda \cdot \vec{SM}$ où λ est à déterminer.

Soit

$$\begin{cases} x' - a = \lambda(x - a), \\ y' - b = \lambda(y - b), \\ z' - c = \lambda(z - c). \end{cases}$$

Comme $z' = 0$, $\lambda = -\frac{c}{z - c}$, d'où

$$\begin{cases} x' = a - c \cdot \frac{x - a}{z - c}, \\ y' = b - c \cdot \frac{y - b}{z - c}. \end{cases}$$

2.3.1. $\rho' = k \cdot \rho$, $\theta' = \theta + \alpha$.

2.3.2.

a) $\rho^2 = \rho \cos \theta$ ou $x^2 + y^2 = x$, cercle centré sur Ox.b) $x = 1$.c) Image du cercle trouvé en a) par $\mathcal{R}_{O,\varphi}$.d) Image de la droite trouvée en b) par $\mathcal{R}_{O,\varphi}$.

2.3.3. $u'_1 = -u$, $u''_1 = -u_1$.

2.3.4.

$$V_M = R[-\sin t + e^{-t}(\cos t + \sin t)]i + R[\cos t + e^{-t}(\sin t - \cos t)]j.$$

$$\gamma_M = R[-\cos t - 2\sin t \cdot e^{-t}]i + R[-\sin t + 2\cos t \cdot e^{-t}]j.$$

$$\|V_M\| = R\sqrt{1 + 2e^{-2t} - 2e^{-t}}.$$

$$\|\gamma_M\| = R\sqrt{1 + 4e^{-2t}}.$$

2.3.5. $\gamma_M = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot i + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot j.$

2.3.6.

$$OM = OC + CM;$$

$$OC = l \cos \omega_1 t \cdot i + l \sin \omega_1 t \cdot j$$

$$CM = r \cos \omega_2 t \cdot i + r \sin \omega_2 t \cdot j.$$

$$V_M = \frac{dOC}{dt} + \frac{dCM}{dt}$$

$$= (-l\omega_1 \sin \omega_1 t - r\omega_2 \sin \omega_2 t)i + (l\omega_1 \cos \omega_1 t + r\omega_2 \cos \omega_2 t)j.$$

$$\gamma_M = \frac{d^2OC}{dt^2} + \frac{d^2CM}{dt^2}$$

$$= -(l\omega_1^2 \cos \omega_1 t + r\omega_2^2 \cos \omega_2 t) \cdot i - (l\omega_1^2 \sin \omega_1 t + r\omega_2^2 \sin \omega_2 t) \cdot j$$

$$\|\gamma_M\|^2 = l^2 \omega_1^4 + r^2 \omega_2^4 + 2rl\omega_1^2 \omega_2^2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t,$$

$$\text{maximal avec une périodicité } T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

2.3.7.

$$V_M = -a\omega \sin \omega t \cdot i + b\omega \cos \omega t \cdot j.$$

$$\gamma_M = -a\omega^2 \cos \omega t \cdot i - b\omega^2 \sin \omega t \cdot j.$$

$$\text{Or } T = \frac{V_M}{\|V_M\|},$$

$$N = \frac{-(b\omega \cos \omega t \cdot i + a\omega \sin \omega t \cdot j)}{\|V_M\|},$$

d'où i et j en fonction de T et de N

$$i = \frac{(-a \sin \omega t \cdot T - b \cos \omega t \cdot N)}{\|V_M\|},$$

$$j = \frac{(b \cos \omega t \cdot T - a \sin \omega t \cdot N)}{\|V_M\|}.$$

En remplaçant dans l'expression de γ_M :

$$\gamma_M = \omega^2(a^2 - b^2) \cos \omega t \sin \omega t \cdot T + ab\omega^2 \cdot N.$$

2.3.8. — Comme pour les coordonnées polaires.

2.3.9. $z \cdot i - 2\rho \cos \theta \cdot j + \rho \sin \theta \cdot k.$

De plus

$$i = \cos \theta \cdot u - \sin \theta \cdot u_1,$$

$$j = \sin \theta \cdot u + \cos \theta \cdot u_1.$$

D'où $A = \cos \theta (z - 2\rho \sin \theta) u$

$$- (z \sin \theta + 2\rho \cos^2 \theta) u_1 + \rho \sin \theta \cdot k.$$

2.3.10. — Cône de révolution d'axe Oz , de demi-angle au sommet α tel que $\tan \alpha = k$.

2.3.11.

a) $x^2 + y^2 = 4^2$, $z = 0$ (cercle).

b) $x^2 + y^2 = 4^2$.

c) Plan xOz .

d) Droite $y = \sqrt{3} \cdot x$, $z = 1$.

2.3.12.

a) $r = 3$ (sphère).

b) $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$ (cône).

c) $r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$

d) $\theta = \frac{\pi}{4}.$

2.3.13.

a) Cône.

b) Plan parallèle à xOy .

2.3.14. — Figure.

2.3.15.
$$\begin{cases} \rho = r \cos \varphi, \\ \theta = \theta, \\ z = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

2.3.16. — Calculons

$$\omega' = \varphi' \omega_1 + \theta' \cos \varphi \cdot u_1 \quad (\text{texte}),$$

$$\omega'_1 = -\varphi' \cdot \omega - \theta' \sin \varphi \cdot u_1,$$

$$u' = \theta' \cdot u_1, \quad u'_1 = -\theta' \cdot u.$$

En partant de (2.3.9.) nous trouvons

$$\gamma_M = [r\theta'' \cos \varphi + 2r'\theta' \cos \varphi - 2r\theta' \varphi' \sin \varphi] \cdot u_1 + [r'' - r\varphi'^2 - r\theta'^2 \cos^2 \varphi] \cdot \omega + [r\varphi'' + 2r'\varphi' + r\theta'^2 \cos \varphi \sin \varphi] \omega_1.$$

2.3.17.

$$\theta(t) = \omega t, \quad \varphi(t) = \gamma t, \quad r(t) = R.$$

$$\gamma_M = (-2R\omega\gamma \sin \gamma t) u_1 - R(\gamma^2 + \omega^2 \cos^2 \gamma t) \omega + \left(\frac{R}{2} \omega^2 \sin 2\gamma t\right) \omega_1.$$

2.4.1. $(x_0, y_0) = (a_1, a_2)$, $p_1 = b_1 - a_1$,

$$q_1 = b_2 - a_2, \quad p_2 = c_1 - a_1, \quad q_2 = c_2 - a_2$$

formules (2.4.2.) et (2.4.3.).

2.4.2. $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}},$

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

et $X^2 - Y^2 = 2k$.

2.5.1.

$$X = \frac{x+y}{2}, \quad Y = \frac{x-y}{2}, \quad Z = \frac{z-1}{2}.$$

2.5.2.

$$X = \frac{x-2}{9} - 2\frac{y-3}{9} + \frac{z+1}{3},$$

$$Y = -5\frac{x-2}{9} + \frac{y-3}{9} + \frac{z+1}{3},$$

$$Z = 2\frac{x-2}{9} + 5\frac{y-3}{9} - \frac{z+1}{3}.$$

chapitre 3

2.7.1. $R^2 \omega^2 \cos^2 \gamma t + R^2 \gamma^2.$

2.7.2. — Précession d'angle $\psi(t) = \omega_1 t$, mutation d'angle $\theta(t) = \omega_2 t$. Le tableau (2.6.2.) donne

$$i_1 = \cos \omega_1 t \cdot i_0 + \sin \omega_1 t \cdot j_0,$$

$$j_1 = -\sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t \cdot i_0 + \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t \cdot j_0 + \sin \omega_2 t \cdot k_0,$$

$$k_1 = \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t \cdot i_0 - \cos \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t \cdot j_0 + \cos \omega_2 t \cdot k_0,$$

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}$$

$$= R \sin \omega_1 t \cdot i_0 - R \cos \omega_1 t \cdot j_0 + r \cdot j_1,$$

$$\mathbf{V}_M = R \omega_1 (\cos \omega_1 t \cdot i_0 + \sin \omega_1 t \cdot j_0) + r \frac{dj_1}{dt},$$

il suffit de dériver j_1 .

2.7.5. — Soit k_1 le vecteur unitaire de l'axe de rotation, u celui de la direction donnée. La condition cherchée est

$$V_P \cdot u = \|V_P\| \cdot \cos \alpha$$

où α est l'angle donné, $V_P = \omega \cdot k_1 \wedge \mathbf{OP}$ soit

$$\omega (k_1, \mathbf{OP}, u) = \omega \|k_1 \wedge \mathbf{OP}\| \cdot \cos \alpha.$$

Soit i_1, j_1 et k_1 un trièdre orthonormé par rapport auquel nous repérons les points

$$\mathbf{OP} = x_1 \cdot i_1 + y_1 \cdot j_1 + z_1 \cdot k_1$$

$$u = a \cdot i_1 + b \cdot j_1 + c \cdot k_1.$$

La condition se traduit par

$$b x_1 - a y_1 = \cos \alpha \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

ou

$$(b^2 - \cos^2 \alpha) x_1^2 - 2ab x_1 y_1 + (a^2 - \cos^2 \alpha) y_1^2 = 0,$$

équations de deux droites (D) et (D') dans le plan i_1, j_1 pourvu que $a^2 + b^2 < \cos^2 \alpha$. Les plans (P) et (P') menés par (D) et (D') parallèlement à Ω constituent le lieu cherché.

2.7.6. — Dans (2.7.11.) nous avons

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{OP}) = (\Omega \cdot \mathbf{OP}) \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot \mathbf{OP}.$$

$$\text{Or } \mathbf{OP} = \mathbf{OH} - \mathbf{PH} \text{ et } \Omega = \omega \cdot k_0.$$

D'où

$$\omega^2 (k_0 \cdot \mathbf{OH}) \cdot k_0 - \omega^2 \cdot (\mathbf{OH} - \mathbf{PH}) = \omega^2 \cdot \overline{\mathbf{PH}}.$$

2.7.7. — Partons des composantes de la remarque (2.7.5.)

$$\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \psi'^2 + \theta'^2 + \varphi'^2 + 2\varphi' \psi' \cos \theta.$$

3.1.1.

$$a) \lambda = -7,$$

$$b) \lambda = -\frac{1}{5}.$$

3.1.2.

$$a) \mu = 1, \quad b) \mu = \frac{1}{2}$$

$$c) \mu = 5, \quad d) \mu = 2.$$

3.1.3. — L'équation cherchée est de la forme

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p.$$

Avec $\theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OK})$ et $p = \|\mathbf{OK}\|$.

$$\text{Or } \|\mathbf{OL}\| = 2d$$

$$\text{et } \|\mathbf{OK}\| = \|\mathbf{OL}\| \cdot \cos(\alpha - \theta).$$

Il suffit donc de déterminer θ :

$$\theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{IR}) + \frac{\pi}{2}.$$

Par ailleurs,

$$(\mathbf{Ox}, \mathbf{Im}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{Ox}, \mathbf{OI}) + (\mathbf{Ox}, \mathbf{IR})]$$

$$\text{d'où } \theta = 2\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Alors } p = 2d \sin(\alpha - \beta).$$

$$3.1.4. \quad \lambda = -\frac{241}{160}.$$

$$3.1.5. \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} + \frac{3}{8} = 0.$$

3.1.6. — Nous exprimerons que

$$\sin i = 1,5 \sin \hat{r}.$$

Il est facile de voir que $i = \frac{\pi}{4} - \beta$, d'où

$$\sin i = \frac{(\cos \beta - \sin \beta)}{\sqrt{2}}$$

Si l'on pose $\operatorname{tg} \beta = t$, les coordonnées du point I sont

$$x_0 = \frac{d}{(1+t)} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{dt}{1+t}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \hat{r} &= \frac{\| \mathbf{AH} \|^2}{\| \mathbf{IA} \|^2} \\ &= \frac{(d + y_0 - x_0)^2}{(2d - x_0)^2 + (d - y_0)^2} = \dots \\ &= \frac{t^2}{(2t+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\frac{(1-t)^2}{1+t^2} = (1,5)^2 \cdot \frac{t^2}{(2t+1)^2 + 1}$$

que l'on résout numériquement avec

$$0 \leq t \leq 1.$$

$$3.1.7. \quad d = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3.1.8.

$$M(+\sqrt{5}, +\sqrt{5}) \quad \text{ou} \quad M(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}).$$

$$3.1.9. \quad \operatorname{tg} \hat{V} = 3.$$

3.1.10.

- a) $\lambda - 7\mu + 7 = 0$,
 b) $5\lambda\mu + 14\mu - 3\lambda - 7 = 0$,
 c) $\lambda - \mu + 4 = 0$,
 d) $\lambda - \mu + 1 = 0$.

3.1.11. — Équation de (D'_1) :

$$(2\lambda + 7)x - \lambda y = 0.$$

Équation de (Δ'_μ) :

$$(2\mu - 1)x - (\mu - 1)y = 0.$$

$$\left| \frac{\lambda}{2\lambda - 7} - \frac{\mu - 1}{2\mu - 1} \right| = 1.$$

$$3.1.12. \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{\lambda}{2} \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda. \end{cases}$$

(D)

M appartient à la droite et à la parabole si

$$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$$\text{soit } \lambda = -2 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 4}.$$

3.2.1. — Soit A' le symétrique de A par rapport à (D). Il est facile de voir que le rayon réfléchi IA est parallèle à Ox et que

$$(Oy, OA') = \frac{\pi}{6}, \quad \text{soit} \quad \beta = \frac{2\pi}{3}.$$

3.2.2. — Équation de AB

$$Y = \frac{x}{x-b} X - \frac{xb}{x-b}.$$

L'équation de AC s'obtient en remplaçant b par c .

Rectangle en A si $(b+c)^2 - 8bc > 0$.

$$3.2.3. \quad 2x - \frac{5}{2}y + 2 = 0.$$

$$3.2.4. \quad H(2, 2).$$

3.2.5. — Les tangentes en M et M' se coupent au point d'abscisse $-\frac{1}{\lambda^2}$.

Équation de MM' :

$$y = \frac{x}{\lambda^2} + \lambda^2.$$

3.2.6. — Choisissons A_1 comme origine et D_3 comme axe A_1x . Achéons le repère orthonormé A_1xy . Les équations des droites (D_2) , (D_2) et (D_3) sont alors

$$(D_1) x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 = p_1,$$

$$(D_2) x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2 = 0,$$

$$(D_3) y = 0.$$

Les trois hauteurs A_1H_1 , A_2H_2 et A_3H_3 ont pour équations respectives

$$A_1H_1 \sin \theta_1 x - \cos \theta_1 y = 0,$$

$$A_2H_2 \sin \theta_2 x - \cos \theta_2 y = p_1 \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_1},$$

$$A_3H_3 x = \frac{p_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Il est facile ensuite de montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & p_1 \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_1} \\ 1 & 0 & p_1 \frac{\sin \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aussi possible de démontrer que les deux premières hauteurs sont concourantes et que la troisième passe par le point de concours.

$$3.2.7. \quad A(0, 24), \quad B(-7, 0), \quad C(32, 0)$$

$$\text{Orthocentre} \left(0, \frac{28}{3}\right).$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{24}{7}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{3}{4} \quad \text{d'où} \quad B = 2C.$$

3.2.8. — Équation de la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$:

$$3x + y - 24 = 0;$$

de l'angle $\hat{B}$:

$$3x - 4y + 21 = 0;$$

de l'angle $\hat{C}$:

$$x + 3y - 32 = 0.$$

Leur point d'intersection a pour coordonnées (5, 9).

3.3.1.

$$a) (x+4)^2 + (y-2)^2 = 25,$$

$$b) (x-3)^2 + (y+5)^2 = 1,$$

$$c) (x+3)^2 + (y-2)^2 = 41.$$

3.3.2.

$$a) C(2, -1); \quad r = \sqrt{6},$$

$$b) \text{ cercle imaginaire,}$$

$$c) C(1, 0); \quad r = 1,$$

$$d) C(1, -3); \quad r = 1.$$

3.3.3.

a) Écrire de deux manières différentes le produit scalaire $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB}$

$$\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} = x^2 + y^2 - a^2,$$

$$MA \cdot MB = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cos \theta.$$

Porter au carré. L'égalité est alors

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 - \cos^2 \theta (x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4a^2 y^2 \cos^2 \theta = 0.$$

soit

$$\left(x^2 + y^2 - a^2 - \frac{2a}{\tan \theta} y\right) \left(x^2 + y^2 - a^2 + \frac{2a}{\tan \theta} y\right) = 0.$$

Les points M appartiennent donc soit au cercle de centre $C_1 \left(0, \frac{a}{\tan \theta}\right)$ et de rayon

$$\left|\frac{a}{\sin \theta}\right| \text{ soit au cercle de centre } C_2 \left(0, -\frac{a}{\tan \theta}\right)$$

$$\text{et de rayon } \left|\frac{a}{\sin \theta}\right|.$$

b) Cercle centré en O, de rayon $\sqrt{\frac{k^2}{2} - a^2}$.

3.3.4.

$$a) x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + 2y - 15 = 0,$$

$$b) (x+4)^2 (y+4)^2 = 100.$$

3.3.5. — Pour que l'équation puisse représenter un cercle, les coefficients de x^2 et de y^2 doivent être égaux soit

$$\lambda = \frac{c^2 - a^2}{m^2 + 1}$$

et, de plus, $c^2 - a^2$ doit être positif.

$$3.3.6. \quad x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 3y = 0.$$

3.3.7. — I et J divisent AB dans le rapport k , donc leur milieu C divise AB dans le rapport k^2 . D'où

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k^2, \text{ soit } \frac{\overline{CA}}{k^2} = \frac{\overline{CB}}{1} = \frac{\overline{AB}}{1-k^2}.$$

D'autre part,

$$\overline{CI}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{k^2 a^2}{(1-k^2)^2}$$

d'où

$$CI = \frac{ka}{|1-k^2|}.$$

Ce problème peut aussi se traiter analytiquement en choisissant les axes pour que A et B soient portés par un axe et soient symétriques par rapport à l'origine.

3.3.8. — Le point M appartient à l'intersection de deux cercles (C_1) de diamètre IC et (C_2) de diamètre I'J', donc à leur axe radical. Comme les abscisses de I, I' et J' sont respectivement $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$ et 5, l'axe radical est la perpendiculaire au point d'abscisse $\frac{5}{2}$ (utiliser le fait que ce point a même puissance par rapport aux deux cercles).

3.3.9. — Utiliser le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π et qu'un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

3.3.10. — Calculer le produit scalaire $\overline{OA} \cdot \overline{O'A}$ où A est l'un des points d'intersections des deux cercles. La relation est alors

$$2aa' + 2bb' - c - c' = 0.$$

3.3.11. — Pour que les trois projections α , β et γ d'un point M sur les trois côtés d'un triangle ABC soient alignées, il faut, et il suffit, que

$$(\beta\alpha, \beta M) = (\beta\gamma, \beta M) + k\pi.$$

α , β , M et C appartiennent au cercle de diamètre MC. Donc

$$(\beta\alpha, \beta M) = (C\alpha, CM) = (CB, CM) + l\pi$$

β , A, γ et M appartiennent au cercle de diamètre AM. Donc

$$(\beta\gamma, \beta M) = (A\gamma, AM) = (AB, AM) + m\pi.$$

Nous aboutissons à

$$(CB, CM) = (AB, AM) + (k-l+m)\pi.$$

M appartient donc au cercle circonscrit au triangle ABC.

3.3.12. — Le symétrique A' de A par rapport à OM est donné par

$\overline{OA'} = 2(\overline{OA} \cdot \overline{u}) \cdot \overline{u} - \overline{OA}$ (avec $\overline{u} = \overline{OM}$), d'où A' (2 cos 2 θ , 2 sin 2 θ). Il suffit d'exprimer que M, A' et B sont alignés, soit

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ 2 \cos 2 \theta & 2 \sin 2 \theta & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Développer et résoudre numériquement.

$$3.3.13. \quad y = mX - mR \pm R\sqrt{m^2 + 1}.$$

3.3.14. — Puisque le cercle est tangent aux deux axes, son centre est sur l'une des bissectrices, en fait sur la première puisque le cercle passe par P (2, 1).

Son équation est de la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2.$$

Les calculs entraînent $\alpha = 5$ ou $\alpha = 1$.

3.3.15. — Une tangente parallèle à Ox, d'équation $y = 4$ et une tangente d'équation $y - 2 = \frac{12}{5}(x - 3)$.

3.3.16. — Si ω est le centre du cercle, r son rayon et T le point de contact de la tangente issue de P,

$$TP^2 = \omega P^2 - r^2,$$

$$TP^2 = 17 - 10 = 7 \text{ d'où } TP = \sqrt{7}.$$

3.3.17. — Nous paramétrons le cercle par

$$x = 1 + \cos \theta, \quad y = 1 + \sin \theta.$$

Alors si θ_1 et θ_2 sont les paramètres de I et J, et si $t_1 = \tan \frac{\theta_1}{2}$, $t_2 = \tan \frac{\theta_2}{2}$, nous avons

$$(1) \quad \tan \beta = \frac{y_1}{x_1} = \dots = \frac{(1+t_1)^2}{2}.$$

$$i = (\mathbf{IO}, \mathbf{OI}) = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OI}) - (\mathbf{Ox}, \mathbf{IO}).$$

$$(2) \quad i = \theta_1 - \beta + \pi.$$

$$\mathbf{O}_2 = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OJ}) = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OI}) + (\mathbf{OI}, \mathbf{OJ})$$

$$(3) \quad \theta_1 + \pi - 2\hat{r}, \text{ d'où } \hat{r} = \frac{(\theta_2 - \theta_1 - \pi)}{2}.$$

De plus $(\mathbf{OJ}, \mathbf{JK}) = i$ et

$$(4) \quad \sin^2 i = \sin^2(\Omega J, JK) = \frac{\|\Omega J \wedge JK\|^2}{\|\Omega J\|^2 \|JK\|^2} = \frac{(\sin \theta_2 - \cos \theta_2)^2}{(3 - 2\lambda)(9 - 4\lambda)},$$

où $\lambda = \cos \theta_2 + \sin \theta_2$ et

$$(5) \quad \sin^2 i = (1, 5)^2 \sin^2 \hat{r}$$

On détermine β numériquement à partir des cinq équations trouvées.

3.3.18.

$$\mathcal{P}_C(P) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{C'}(P) = 1.$$

P appartient donc à l'axe radical des deux cercles.

3.3.19. — Soit (O) le cercle de diamètre BC et A' l'intersection de la hauteur avec ce cercle.

$$\mathcal{P}_H(O) = \overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HC}.$$

D'où l'égalité cherchée puisque $HA = HA'$.

3.3.20.

a) L'axe radical étant le lieu des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles, nous avons

$$x^2 + y^2 - 4x = x^2 + y^2 + 6x - 8y$$

$$\text{soit } y = \frac{5}{4}x.$$

$$b) y = 1.$$

$$3.4.1. \quad b^2 = a^2 - c^2 = 16.$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3.4.2. — Prolonger MF' du côté de M d'une longueur égale à $\|MF\|$.

Alors $\|F'\Phi\| = \|F'M\| + \|M\Phi\| = 2a$.

Φ appartient donc au cercle de centre F' et de rayon $2a$.

D'autre part, le cercle de centre M, passant par F, est tangent au cercle précédent.

Réciproquement, soit un cercle de centre F' et de rayon $2a$, un point fixe intérieur F et un cercle de centre M passant par F et tangent en Φ au cercle (F'). Les points

F' , M et Φ étant alignés dans cet ordre, nous avons

$$\|MF\| + \|MF'\| = \|MF\| + \|M\Phi\| = 2a.$$

Donc M appartient à une ellipse de foyers F et F' .

3.4.3.

$$a) F(1, 0); \quad F'(-1, 0); \quad \text{grand axe Ox.}$$

$$b) F(2\sqrt{2}, 0); \quad F'(-2\sqrt{2}, 0); \quad \text{grand axe Ox.}$$

$$c) F(0, \sqrt{6}); \quad F'(0, -\sqrt{6}); \quad \text{grand axe Oy.}$$

$$d) F(2\sqrt{2}, 0); \quad F'(-2\sqrt{2}, 0); \quad \text{grand axe Ox.}$$

3.4.4.

$$a = \frac{c}{e} = 8,$$

$$b^2 = 64 - 4 = 60,$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{60} = 1.$$

3.4.5. — Par hypothèse, $\frac{MF}{MH} = e$.

D'une part,

$$FK = \rho \cos \theta + MH$$

$$= \rho \cos \theta + \frac{\rho}{e}.$$

D'autre part, la distance de F à (Δ) est connue et égale à $\frac{a^2}{c} - c = \frac{a}{e}(1 - e^2)$.

D'où l'équation de l'ellipse.

3.4.6. — Il est facile de vérifier que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mais que le point A' ($-a, 0$) ne peut être obtenu à partir des équations paramétriques données.

3.4.7.

$$x = (a - b) \cos \beta,$$

$$y = (a + b) \sin \beta.$$

C'est une ellipse de grand axe Oy.

3.4.8. — Si O' est la projection orthogonale de O sur la tangente en M à l'ellipse, OO' est la médiatrice de GG' , donc $OG = OG'$.

Montrons que $OG = a$. La tangente (Δ) est donnée par

$$(1) \quad \frac{X \cos \varphi}{a} + \frac{Y \sin \varphi}{b} - 1 = 0$$

et dirigée par

$$u = (a \sin \varphi, -b \cos \varphi).$$

Puisque G est la projection de F sur (Δ),

$$\mathbf{FG} \cdot u = 0, \quad \text{d'où}$$

$$(2) \quad Xb \cos \varphi + aY \sin \varphi = ab.$$

En élevant (1) et (2) au carré et en les additionnant, nous trouvons

$$X^2 + Y^2 = a^2, \quad \text{soit} \quad OG = a.$$

3.4.9.

$$Y = 3X \pm \sqrt{39}.$$

3.4.10. — Les pentes des tangentes perpendiculaires entre elles doivent vérifier

$$mm' = -1.$$

De plus, elles sont solutions de l'équation

$$(x^2 - a^2)m^2 - 2xym + y^2 - b^2 = 0.$$

Nous en déduisons donc que

$$\frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2} = -1.$$

Les tangentes perpendiculaires entre elles appartiennent au cercle d'équation $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.4.11. — Équations paramétriques de la première ellipse

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = 40 + 30 \sin \varphi. \end{cases}$$

Équations paramétriques de la seconde ellipse

$$\begin{cases} x = 80 + a \cos \psi, \\ y = 30 \sin \psi. \end{cases}$$

Au point d'abscisse 40, les deux vecteurs tangents doivent faire un angle de $\pm \frac{\pi}{6}$ avec l'horizontale.

D'où l'équation

$$\frac{(120)^2}{a^2(a^2 - 1600)} = \frac{1}{3}$$

$$a^2 = 800 + 40\sqrt{427} \approx 1626.$$

3.4.12. — D'après (3.4.9.) l'équation de la normale est

$$\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} - 1 = 0.$$

D'après la direction nous avons $y = \frac{x}{2}$.

On trouve $x = 2$, $y = 1$, d'où

$$\frac{X}{2} - Y - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad Y = \frac{X}{2} - 1.$$

3.4.14. — L'équation de la normale est

$$\frac{a^2 X}{x} - \frac{b^2 Y}{y} - c^2 = 0.$$

Elle coupe Ox au point $P\left(\frac{c^2 x}{a^2}, 0\right)$.

Il suffit de calculer les distances du point P aux droites MF et MF'.

3.4.15.

a) Nous avons $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\|MP\|^2}$

ce qui conduit facilement au résultat sachant que $dx = \frac{y}{\cos^2 \alpha} d\alpha$,

b) Soit PR la bissectrice intérieure de l'angle (MF, MF'). Partageons l'angle F'MF en couples d'angles élémentaires symétriques par rapport à la bissectrice. Cela détermine un partage de FF' en couples de segments élémentaires.

D'après a) les champs dE_1 et dE'_1 , dus par exemple à $P_1 P_2$ et $P'_1 P'_2$, ont même module et sont symétriques par rapport à la bissectrice. Il en est de même pour tous les couples de petits segments. La résultante E est alors portée par la bissectrice, donc normale à l'ellipse.

3.5.1. — Voir début du paragraphe 3.4.

3.5.2.

$$(H_1) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1. \quad (H_2) : \text{ nous avons}$$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 9,$$

d'où

$$a^2 = 1, \quad b^2 = 8 \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{y^2}{8} = 1.$$

3.5.5. — Voir ellipse (paragraphe 3.4.).

$$3.5.6. \quad Y = 2X \pm \frac{2\sqrt{91}}{15}.$$

$$3.5.7. \quad Y = 3X \pm \sqrt{5}.$$

$$3.6.1. \quad y = B\left(2\frac{x^2}{A^2} - 1\right).$$

$$3.6.2. \quad \begin{aligned} a) y^2 &= 12x, \\ b) y^2 &= 8x, \\ c) (y-2)^2 &= 6(x-1), \\ d) y^2 &= -2px. \end{aligned}$$

$$3.6.3. \quad \begin{aligned} a) F(-3, 0), \\ b) F(4, 0), \\ c) F\left(0, -\frac{1}{48}\right), \\ d) (0, 6). \end{aligned}$$

$$3.6.5. \quad a) Y = X + 1,$$

$$b) Y = \frac{X}{2} + 2.$$

3.6.6. — Voir cours.

3.7.1.

a) Hyperbole, b) parabole, c) cercle.

3.7.2.

$$\begin{aligned} a) (0, 0), \quad b) (1, -2), \\ c) \text{ pas de centre}, \quad d) (-4, 0). \end{aligned}$$

3.7.3.

$$\left(-\frac{2a}{a^2-1}, \frac{1+a^2}{a^2-1}\right).$$

3.7.4.

$$2xy + 12y^2 - 14ay + 4a^2 = 0$$

(hyperbole si $a \neq 0$).

3.7.5. — L'équation du mouvement est

$$\mathbf{OM}'' + k\mathbf{OM} = 0,$$

$$\text{soit} \quad x'' + kx = y'' + ky = 0.$$

x et y sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence.

3.7.6.

a) Hyperbole, b) ellipse,

c) parabole, d) hyperbole.

3.7.7. — Ellipse, hyperbole, parabole selon que $1 - a^2 > 0$, < 0 ou $= 0$.

3.7.8.

a) On pose (après calculs)

$$X = \frac{(x-y-3\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{et} \quad Y = \frac{(x+y+3\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{X^2}{13} + \frac{Y^2}{6} = 1, \text{ ellipse d'aire}$$

$$\mathcal{A} = 6\pi\sqrt{3}.$$

3.8.1.

$$a) y = \pm \sqrt{a} x \sqrt{x},$$

$$b) \frac{b-x}{x-a} = \frac{d-y}{y-c},$$

$$c) x = a \cos\left(\frac{1}{2} \text{Arc sin } \frac{y}{b} + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$d) y^2 = a^2 x^3 \frac{a-x}{[(a-x)^2 + x^2]^2}.$$

3.8.2.

$$a) x = t^2, \quad y = t^2 + 1 \dots,$$

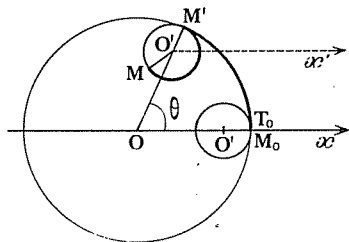
$$b) x = e^t, \quad y = \text{Log } t,$$

$$c) x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = tx.$$

$$3.8.3. \quad x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t.$$

3.8.4. — Désignons par θ l'angle (Ox, OT) .

Remarquons que $\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}$.



Pour déterminer les composantes de $\mathbf{O'M}$, il faut connaître l'angle $(\mathbf{O'x'}, \mathbf{O'M})$. Or $(\mathbf{O'x'}, \mathbf{O'M}) = (\mathbf{O'x'}, \mathbf{O'T}) + (\mathbf{O'T}, \mathbf{O'M})$. Le petit cercle ayant roulé sans glisser à l'intérieur du grand, les arcs de cercle parcourus sont égaux

$$\theta R = -r(\mathbf{O'T}, \mathbf{O'M})$$

d'où

$$(\mathbf{O'x'}, \mathbf{O'M}) = \theta - \frac{R}{r} = \theta \left(\frac{r-R}{r} \right).$$

Il est facile de trouver alors les coordonnées de M.

3.8.5.

a) $\frac{\text{Sym}}{\text{Ox}}$. $\mathcal{E} = [0, +\infty[$,

b) $\mathcal{E} = [0, 2\pi]$,

c) M $(t + 2\pi)$ se déduit de M (t) par une translation $\mathbf{T} = 2\pi \mathbf{a}$.

d) $\frac{\text{Sym}}{\text{Ox}}$. $\mathcal{E} = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$,

e) $\frac{\text{Sym}}{\text{Ox}}$. $\mathcal{E} = [0, +\infty[$.

3.8.6. $(-g'(t), f'(t))$.

3.8.7.

$$M\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = M\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

3.8.8.

$$x'(t) = t(2 \log t + 1);$$

$$y'(t) = \log t (\log t + 2).$$

3.8.9.

a) Point singulier pour $t = 1$. La tangente est parallèle au vecteur dérivée seconde, soit (6, 8).

b) Point singulier pour $t = 0$. La tangente est parallèle au vecteur dérivée troisième, soit (2, 6).

3.8.10. — Si $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, le vecteur tangent est de la forme

$$(-3 \sin 3t - 3 \sin t, 3 \cos 3t + 3 \cos t)$$

si $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, le vecteur tangent est de la forme

$$(-q \cos 3t - 3 \cos t, -9 \sin 3t - 3 \sin t).$$

3.8.11.

b) Point singulier pour $t = 0$ par exemple

$$\begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = \frac{1^2}{2!} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} \right].$$

3.8.12. — Les vecteurs dérivée première et dérivée seconde sont parallèles pour

$$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

(calcul d'un déterminant). Il y a donc deux points d'inflexion.

3.8.13. — Il y a point d'inflexion si

$$2(\log t)^3 + 3(\log t)^2 - 2 = 0.$$

3.8.14. — Pour la courbe (3.8.11. a), il existe notamment un point de rebroussement de deuxième espèce.

3.8.15.

a) La droite $x = 1$ est asymptote (obtenue lorsque $t \rightarrow \infty$).

b) La droite $y = \frac{16}{3}$ est asymptote (obtenue lorsque $t \rightarrow 2$).

c) La droite $y = -3x + \frac{2}{3}$ est asymptote (obtenue lorsque $t \rightarrow -1$).

3.9.3.

a) Période π . Symétrie par rapport à Ox.

$$\mathcal{E} = \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

b) Période $\frac{2\pi}{3}$. Symétrie par rapport à Ox.

$$\mathcal{E} = \left[0, \frac{\pi}{3} \right].$$

c) Période 4π . Symétrie par rapport à Oy.

$$\mathcal{E} = [0, 2\pi].$$

3.9.5.

a) Asymptote (pour $\theta = \frac{\pi}{4} : Y = 0$).

b) Branche spirale.

c) Cercle asymptote ($p = 1$).

d) Asymptote (l'axe polaire).

3.10.1. — Courbe d'équations paramétriques
 $x = a \sin^3 \theta, \quad y = a \cos^3 \theta.$

3.10.2. $x(x^2 + y^2) = ay^2.$

3.10.3. — Équation de AB :

$$y = -\frac{h^2}{K^2}x + h.$$

Enveloppe : $y = \frac{K^2}{4x}.$

3.10.7. — Ellipse d'équations paramétriques
 $x = 2a \cos \lambda \quad \text{et} \quad y = 2b \sin \lambda.$ De plus, toutes les courbes passent par O.

3.10.8. $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{l^3}.$

3.11.4. $X = \frac{3x}{2} + \frac{k^4}{2x^3}, \quad Y = \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2k^2}.$

3.11.5. $X = x - a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad Y = 2a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$

3.11.6. — Développée $27py^2 = 8(x-p)^3.$

chapitre 4

4.1.1.

$$(1, 0) = [1, 0], \quad (0, 1) = \left[1, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$(-1, 0) = [1, \pi], \quad (1, \sqrt{3}) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$(3, 4) = \left[5, \text{Arc tg } \frac{4}{3}\right].$$

4.1.2.

$$(1 + \cos a, \sin a)$$

$$= \left[2 \left| \cos \frac{a}{2} \right|, \frac{a}{2}\right] \quad \text{si } \cos \frac{a}{2} > 0$$

$$= \left[2 \left| \cos \frac{a}{2} \right|, \frac{a}{2} + \pi\right] \quad \text{si } \cos \frac{a}{2} < 0,$$

$$(\cos a, 1 + \sin a)$$

$$= \left[\sqrt{2} \left| \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2} \right|, \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\quad \text{si } \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2} > 0$$

$$= \left[\sqrt{2} \left| \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2} \right|, \frac{a}{2} + \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$\quad \text{si } \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2} < 0.$$

4.1.3.

$$[1, 0] = (1, 0), \quad [2, \pi] = (-2, 0),$$

$$\left[1, \frac{\pi}{2}\right] = (0, 1), \quad \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] = (1, 1).$$

4.2.1.

$$a) (3, 2), \quad b) (5, 3), \quad c) (0, 0).$$

4.2.2.

$$(-1 + 2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$$

$$= \left[\sqrt{2}(2\sqrt{3} - 1), -\frac{\pi}{4}\right].$$

4.2.3.

$$k \cdot z = [kr, \theta] \quad \text{si } k > 0$$

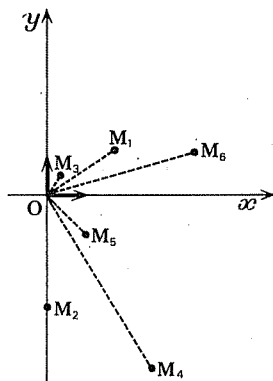
$$k \cdot z = [k|r, \theta + \pi] \quad \text{si } k < 0.$$

$$4.3.1. \quad a) zz' = \left[1, \frac{5\pi}{12}\right], \quad b) zz' = [1, \pi].$$

4.3.2.

$$r' = \frac{1}{r}, \quad \theta' = -\theta.$$

4.3.3. — Figure.



4.3.4.

$$a) 1 + 3i, \quad b) 17 - i, \quad c) 2i,$$

$$d) 10i, \quad e) (a^2 + b^2)i, \quad f) 1 + 17i.$$

4.3.6. — Hyperbole passant par A et B.

$$4.4.1. \quad a) \frac{13 + 11i}{29}, \quad b) i.$$

$$4.4.2. \quad \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

$$\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

4.4.3. — Droite

$$Y = X - 1 \quad \text{avec } Z = X + iY.$$

4.4.5. — Cercle centré en O et de rayon 1, privé du point d'affixe $-i$.4.4.7. — Droite réelle et cercle de centre A (1, 0) et de rayon 1. [On écrit la condition d'alignement $(z - \bar{z})(z\bar{z} - z - \bar{z}) = 0$.]

4.5.1. — On calcule le produit sous forme algébrique et sous forme polaire.

$$\cos(\theta + \varphi + \psi) = \cos \theta \cos \varphi \cos \psi$$

$$- \sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi$$

$$- \sin \theta \cos \varphi \sin \psi.$$

4.5.2. — Utiliser la remarque (4.5.1.)

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta,$$

$$\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1.$$

4.5.3.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \cos \left(\frac{3\theta}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{3\theta}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right).$$

La formule de de Moivre ne s'applique pas aux exposants fractionnaires.

$$4.5.4. \quad a) i, \quad b) -1, \quad c) \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4.5.5. \quad \frac{z_1}{z_2} = \left[1, \frac{\pi}{12}\right]$$

$$\text{et } \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

$$4.5.6. \quad a) \left[1, \frac{\pi}{4}\right], \quad \left[1, \frac{5\pi}{4}\right],$$

$$b) \left[\sqrt[4]{2}, \frac{7\pi}{8}\right], \quad \left[\sqrt[4]{2}, \frac{15\pi}{8}\right],$$

$$c) (3, -2), \quad (-3, 2).$$

4.5.7. — De $i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, nous déduisons trois racines

$$z_1 = \left[1, \frac{\pi}{6}\right], \quad z_2 = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$\text{et } z_3 = \left[1, \frac{3\pi}{2}\right].$$

De $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$, nous déduisons

aussi trois racines

$$z_1 = \left[\sqrt[6]{2}, \frac{\pi}{12} \right], \quad z_2 = \left[\sqrt[6]{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

et $z_3 = \left[\sqrt[6]{2}, \frac{17\pi}{12} \right]$.

4.5.8. — Remarquer que $\frac{1+ai}{1-ai}$

s'écrit sous la forme $\cos \varphi + i \sin \varphi$ en posant $a = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ et donc

$$\frac{1+xi}{1-xi} = \cos \psi + i \sin \psi$$

avec

$$x = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \text{ d'où } \psi = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Il est facile d'en déduire les trois valeurs possibles de x .

4.5.9.

a) $p = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

b) $p = \sqrt[6]{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

c) $p = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2.$

4.6.2. — Première équation : $-2 + i$ et $-2 - i$.

Deuxième équation : si $m > 3$ ou $m < -1$, les racines sont réelles et valent

$$-m + \sqrt{m^2 - 2m - 3}$$

$$\text{et } -m - \sqrt{m^2 - 2m - 3};$$

si $-1 < m < 3$, les racines sont imaginaires et valent $-m + i\sqrt{-m^2 + 2m + 3}$

$$\text{et } -m - i\sqrt{-m^2 + 2m + 3}.$$

4.6.3. — Poser $x^2 = X$ et résoudre l'équation en X .

Pour la première, les solutions sont

$$x = -\sqrt[3]{2}, \quad x = +\sqrt[3]{2}, \quad x = i, \quad x = -i.$$

Pour la seconde, les solutions sont

$$\left(1, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(1, \frac{4\pi}{3}\right), \quad \left(1, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \left(1, \frac{5\pi}{3}\right).$$

$$4.6.4. \quad \sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k.$$

$$4.6.5. \quad z = r \cos \alpha + ir |\sin \alpha| \quad \text{et} \\ z_2 = r \cos \alpha - ir |\sin \alpha|.$$

4.6.6. — Si $4p^3 + 27q^2 > 0$,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\beta},$$

$$\text{en notant } \beta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}.$$

$$\text{D'où } x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\beta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\beta}}$$

pour la racine réelle, les deux autres racines étant complexes conjuguées.

• Si $4p^3 + 27q^2 < 0$ (ce qui exige $p < 0$) u^3 et v^3 sont racines complexes conjuguées.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\beta}$$

et

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\beta}.$$

Les racines cubiques étant encore complexes conjuguées, les trois racines du polynôme sont réelles.

Pour les trouver nous pouvons poser

$$x = r \cos \alpha \quad \text{avec} \quad r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

l'équation $x^3 + px + q = 0$ devient

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

D'où, en posant $\theta = 3\alpha$,

$$x_1 = r \cos \frac{\theta}{3}, \quad x_2 = r \cos \frac{\theta + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = r \cos \frac{\theta + 4\pi}{3}.$$

• Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, le polynôme admet une racine réelle simple $2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ et une racine réelle double $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

4.6.7. — Factoriser a dans le polynôme du troisième degré qui est équivalent à

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Écrire ensuite x sous la forme $x = y + h$, soit

$$y^3 + 3hy^2 + 3h^2y + h^3 + \frac{b}{a}y^2 + 2\frac{b}{a}hy + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}y + \frac{c}{a}h + \frac{d}{a} = 0.$$

La forme réduite s'obtient lorsque

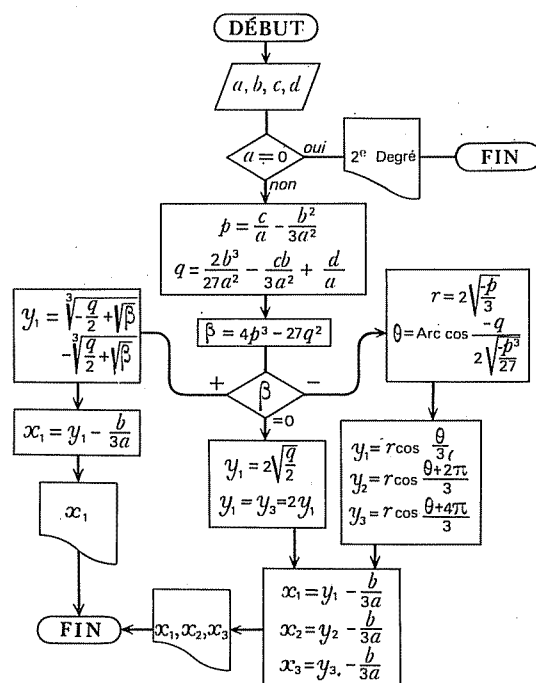
$$3h + \frac{b}{a} = 0, \quad \text{soit } h = -\frac{b}{3a}.$$

Nous avons alors

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2},$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

4.6.8.



4.7.1. — La recherche des points invariants montre qu'il en existe un seul M_0 , d'affixe 1. La transformation est donc une homothétie de centre M_0 , de rapport 2.

Les droites d'équation $y = mx$ sont transformées en les droites d'équation

$$Y = mX + m;$$

les cercles de centre O sont transformés en cercle de centre A (-1, 0) et de rayon double.

4.7.2. — Se résout comme un système de nombres réels.

$$z_1 = -4 - i \text{ et } z_2 = 1 - 2i.$$

Pour déterminer la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, si elle existe, on cherche les solutions de l'équation

$$1 - 2i - z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(-4 - i - z_0)$$

soit $z_0 = 1 + i$.

Le point d'affixe z_0 est le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme m_1 en m_2 .

4.7.3. — 1° $Z = iz + 1 + i$.

Il existe un seul point invariant C, d'affixe i . La relation précédente s'écrit

$$Z - i = i(z - i),$$

ce qui permet de voir que la transformation est une rotation de centre C, d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2° $Z = e^{i(\alpha_2 + \alpha_1)}(z - a_1) + e^{i\alpha_2}(a_1 - a_2) + a_2$.

C'est une rotation, dont le centre est point invariant et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$, c'est une translation.

4.7.4. — Chercher d'abord le point invariant qui vérifie

$$z_0 = (1 - i)z_0 + 2i,$$

soit $z_0 = 2$.

La relation exprimant la transformation géométrique s'écrit alors

$$Z - 2 = (1 - i)(z - 2).$$

C'est une similitude de centre M_0 d'affixe 2, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

4.7.5. — $\sigma\left(M_0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ où M_0 a pour affixe i .

4.7.7.

a) Le point d'affixe -2.

$$b) Z = \frac{z+6}{z+2} = \frac{(z+6)(\bar{z}+2)}{(z+2)(\bar{z}+2)}$$

$$\mathcal{I}m Z = \frac{-4 \mathcal{I}m z}{(z+2)(\bar{z}+2)}$$

$$\mathcal{R}e Z = \frac{|z|^2 + 12 + 8 \mathcal{R}e z}{(z+2)(\bar{z}+2)}$$

Pour que Z soit un réel négatif, il faut

$$\mathcal{I}m Z = 0$$

soit $\mathcal{I}m z = 0$, ce qui entraîne que z est un réel et il faut $z^2 + 8z + 12$ négatif, soit $-6 < z < -2$.

c) Il faut que $\mathcal{R}e Z = 0$, soit

$$|z|^2 + 12 + 8 \mathcal{R}e z = 0.$$

Cette relation est vérifiée lorsque

$$-2 < \mathcal{I}m z < 2$$

et $\mathcal{R}e z = -4 \pm \sqrt{4 - \mathcal{I}m^2 z}$.

d) Si N décrit la droite D_k , nous avons

$$\frac{-4 \mathcal{I}m z}{(z+2)(\bar{z}+2)} = k$$

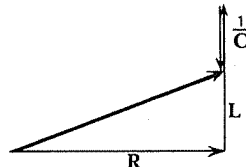
$$\text{soit } (\mathcal{R}e z + 2)^2 + \left(\mathcal{I}m z + \frac{2}{k}\right)^2 = \frac{4}{k^2}.$$

Le point M appartient au cercle C_k de centre M_0 d'affixe $2 + i\frac{2}{k}$, de rayon $\frac{2}{k}$ si $k \neq 0$.

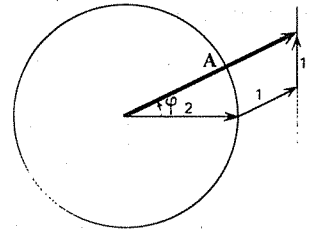
Si $k = 0$, c'est la droite réelle.

Les cercles C_k passent par le point d'affixe -2 et sont tangents à l'axe réel.

4.8.1.



4.8.2.



4.8.3. — Les tiges supportant les roues sont supposées verticales à tout moment. Soit h leur longueur.

Nous avons

$$y_A = r \sin \frac{2\pi}{L} x_A + h,$$

$$y_B = r \sin \frac{2\pi}{L} (x_A + D) + h,$$

en supposant que l'inclinaison du véhicule reste négligeable. Le déphasage de y_B est

$$\varphi_B = \frac{2\pi D}{L}.$$

De plus

$$y_M = y_A + \lambda (y_B - y_A), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

On trouve

$$\tan \varphi_M = \frac{\lambda \left(1 - \cos \frac{2\pi D}{L}\right)}{\left(1 + \lambda \sin \frac{2\pi D}{L}\right)}$$

et

$$a = r \sqrt{1 + 4\lambda \sin \frac{\pi D}{L} \left(\cos \frac{\pi D}{L} + \lambda \sin \frac{\pi D}{L}\right)}.$$

chapitre 5

5.1.1.

a) $2x - 3y + 5z = 0$.

b) Il y en a une infinité! Leurs vecteurs normaux sont parallèles à (P). Ils sont de la forme $\lambda(1, -1, -1) + \mu(3, 2, 0)$ ou, plus simplement $(3 - 2\lambda, 2 - 3\lambda, -\lambda)$ en posant $\mu = 1 - \lambda$, $\lambda \leq 1$.

D'où

$$(3 - 2\lambda)x + (2 - 3\lambda)y - \lambda z = 0.$$

5.1.2. — Le vecteur $N(1, -1, 2)$ normal à (Q) est parallèle à (P), de même que

$$V(1, -1, 1).$$

Donc $N \wedge V(1, 1, 0)$ est normal à (P).

Soit $x + y = 0$.

5.1.3.

$$a) \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

soit $5x + y + 6z - 9 = 0$.

$$b) (P) \cap Ox \left(\frac{9}{5}, 0, 0 \right) \quad (P) \cap Oy(0, 9, 0),$$

$$(P) \cap Oz \left(0, 0, \frac{3}{2} \right).$$

c) $5x + y = 9$ dans xOy , $y + 6z = 9$ dans yOz , $5x + 6z - 9 = 0$ dans xOz .

$$5.1.4. \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{2} \quad \text{et} \quad z = 0.$$

5.1.5. — Nous résolvons le système

$$Ax_0 + B(mx_0 + k) = D - Ch,$$

$$A'x_0 + B'(mx_0 + k) = D' - C'h.$$

D'où

$$k = \frac{(D - Ch)(A' + B'm) - (D' - C'h)(A + Bm)}{B(A' + B'm) - B'(A + Bm)}$$

et l'on remplace m et h par leurs valeurs.

$$5.1.6. \quad \mathcal{A} = 4h\sqrt{2}(L + h).$$

$$5.1.7. \quad 3x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

5.1.8. — L'équation cherchée prend les formes

$$P + \lambda P' = 0 \quad \text{et} \quad Q + \mu Q' = 0.$$

On trouve $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = 1$ (coefficients proportionnels, d'où $5x - y + 6z + 2 = 0$).

5.1.9. — Le plan (Q') mené par (P) $\cap$ (P') et perpendiculaire à (P'') a pour équation $P + \lambda P' = 0$. On trouve

$$\lambda = \frac{(N \cdot N'')}{(N' \cdot N'')}$$

si N, N' et N'' désignent les vecteurs normaux aux trois faces.

De même pour

$$(Q): P' + \mu P'' = 0 \quad \text{et} \quad (Q'): P'' + \nu P = 0$$

avec

$$\mu = \frac{(N' \cdot N'')}{(N'' \cdot N'')} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{(N'' \cdot N')}{(N \cdot N')}.$$

Le système des trois équations est lié car

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ \nu & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda\mu\nu = 0.$$

5.1.10.

$$a) x = 3 + \lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = 1 + \lambda.$$

5.1.11.

$$a) x = 2 - \lambda, \quad y = 3 - 5\lambda, \quad z = 1 + 2\lambda.$$

5.1.12.

$$BC: \frac{x-1}{2} = y \quad \text{et} \quad z = 1,$$

$$CA: x = 1 \quad \text{et} \quad z = 1,$$

$$AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \quad \text{et} \quad z = 1.$$

$$5.1.14. \quad a) \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4} \right).$$

$$5.1.15. \quad \left(\frac{19}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{6}{7} \right).$$

5.1.16. — La normale (A) à (P) passant par M_0 a pour équations

$$x = \lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = 1 - \lambda.$$

Le projeté H de M_0 sur (P) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$. Le symétrique M'_0 a pour

$$\text{coordonnées} \quad \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

La droite $M'_0 M_1$ rencontre (P) en

$$J \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

$$5.2.1. \quad a) x = a \quad \text{et} \quad \frac{y}{a} = \frac{z}{k}$$

$$b) y = z = 0,$$

$$c) \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = z.$$

$$5.2.2. \quad 6t^2 X - 6tY + 2Z - 2t^3 = 0.$$

5.2.3.

$$(b \sin \varphi)X - (b \cos \varphi)Y + aZ - ab\varphi = 0.$$

5.3.1. — En utilisant les coordonnées sphériques on remarque que $\cos \varphi = \sin \theta$ le long de l'intersection, soit $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ sur l'une des branches qui se représente par

$$x = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi,$$

$$y = \cos \varphi,$$

$$z = \sin \varphi, \quad \text{d'où} \quad s = \int_0^t \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

L'abscisse curviligne ne s'exprime pas simplement en fonction du paramètre (et vice

versa). D'où l'utilité des *formules directes* du type (5.3.5.).

5.4.1.

a) $X + Y + \sqrt{2} \cdot Z - 2 = 0$,

b) $X + Y \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot Z - 2 = 0$ [on part de $\lambda(X + Y - 2) + \mu Z$],

c) $X + Y + Z \pm \sqrt{6} = 0$.

5.4.2. — Point de départ :

$$d \mathbf{OM} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial v} dv.$$

5.4.3. — Voir tome III, remarque (6.1.1.).

5.4.4.

a) $(0,0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, b) $(0, 0)$.

5.4.5. — Les lignes de plus grande pente vérifient $x = yy'$ d'où (tome IV) $x^2 - y^2 = C$. Ce sont des hyperboles dont les asymptotes sont les bissectrices des axes Ox et Oy .

5.4.6.

$$\begin{aligned} & * \left(\beta \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (X - x) - \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial \mu} + \gamma \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) \\ & (Y - y) + \left(\beta \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) (Z - z) = 0. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont prises au point

$$(\lambda, \mu) = (\beta z - \gamma y, \beta x - \alpha y).$$

$$** \left(A \frac{\partial G}{\partial \lambda} + A' \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (X - x)$$

$$+ \left(B \frac{\partial G}{\partial \lambda} + B' \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (Y - y)$$

$$+ \left(C \frac{\partial G}{\partial \lambda} + C' \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (Z - z) = 0$$

$$*** (BC' - CB', CA' - AC', AB' - BA').$$

5.4.7. $y = (x - z)^2$.

5.4.8.

$$\left(-y \frac{\partial G}{\partial \lambda} - z \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (X - x) + \left(x \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right)$$

$$(Y - y) + \left(x \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (Z - z) = 0.$$

Les dérivées partielles sont prises au point

$$(\lambda, \mu) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right).$$

5.4.9.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz + zx + xy) = 0.$$

5.4.10.

$$(x^2 + y^2)^2 = 4y^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

5.5.1.

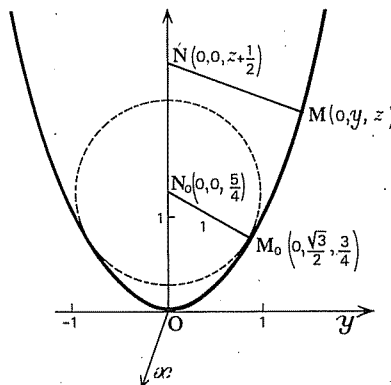
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

5.5.2. — Dans le plan $X = 0$, la normale à la parabole en un point $M(O, y, z)$ a pour équation

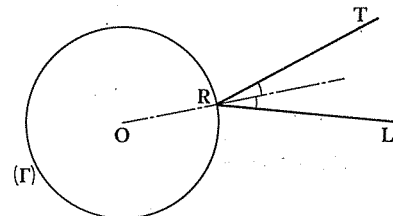
$$Z - z = -\frac{1}{2y}(Y - y).$$

Elle coupe Oz en $N(0, 0, z + \frac{1}{2})$. Nous avons $\|MN\| = 1$ au point cherché, soit après calcul, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{3}{4}$, l'altitude cherchée.

La boule est alors centrée en $N(0, 0, \frac{5}{4})$.



5.6.1. — Remarquons d'abord que le plan LRT passe par O si R est le point de réflexion; donc R appartient au plan LTO d'équation $y = z$, qui coupe la sphère sui-



vant un grand cercle (Γ) . Nous sommes ramenés à un problème plan (figure avec (Γ) vu de face). Le point R a pour coordonnées $(\sqrt{1 - 2y^2}, y, y)$ et le calcul a pour but de trouver y en exprimant que

$$(\mathbf{RT}, \mathbf{OR}) = (\mathbf{OR}, \mathbf{RL}).$$

y se trouve numériquement.

5.6.3. — Soit P le milieu de AB .

Nous avons

$$MA^2 + MB^2 = 2MP^2 + PA^2 + PB^2$$

(relation de Chasles), d'où

$$MP^2 = \frac{2k - a^2}{4} = R^2.$$

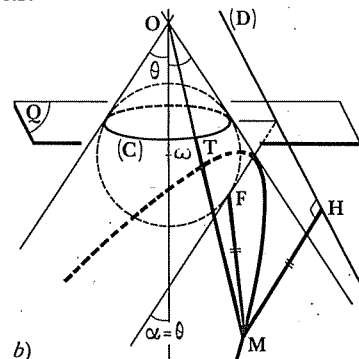
Sphère de centre P et rayon R si $k \geq \frac{a^2}{2}$.

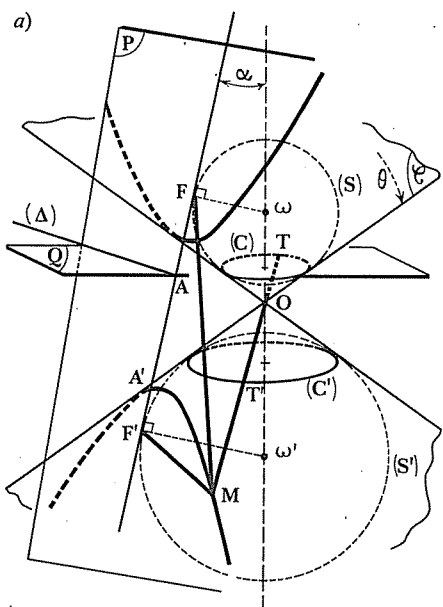
5.6.4. — On pose

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda(a - a'), \quad y = b + \lambda(b - b'), \\ z &= c + \lambda(c - c'). \end{aligned}$$

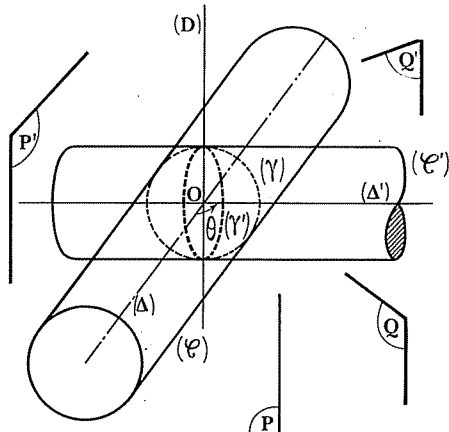
On détermine λ . Pour le rayon r , utiliser les relations métriques dans les triangles rectangles.

5.6.5.





5.6.6. — Tout point de $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}')$ est équidistant des axes (Δ) et (Δ') , ainsi que des plans (P) et (P') orthogonaux au plan (Δ, Δ') .



Les bissecteurs (Q) et (Q') coupent les cylindres selon deux ellipses (E) et (E') .

On trouve

$$a = \frac{b}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad a' = \frac{b}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

soit les excentricités

$$e = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad e' = \sin \frac{\theta}{2}$$

(ou l'inverse).

5.6.7. — Soit $\Phi(x, y, z) = 0$ l'équation de la quadrique dans le repère initial, et

$$\Phi(X, Y, Z) = 0$$

son équation dans un nouveau repère (O, XYZ) tel que le plan de section soit (O, XY) . La section a pour équation

$$\Phi(X, Y, 0) = 0$$

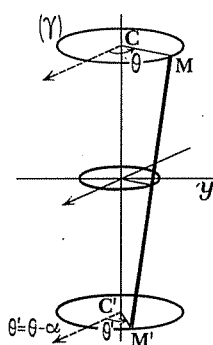
ce qui représente une conique.

5.6.8.

$$(-1, -1, -1).$$

5.6.9. — On trouve d'abord l'équation au centre

$$4x'^2 + 4y'^2 - 3z'^2 + 6y'z' + 6z'x' - 8x'y' - 5 = 0.$$

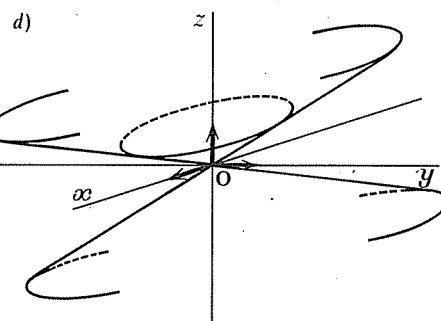
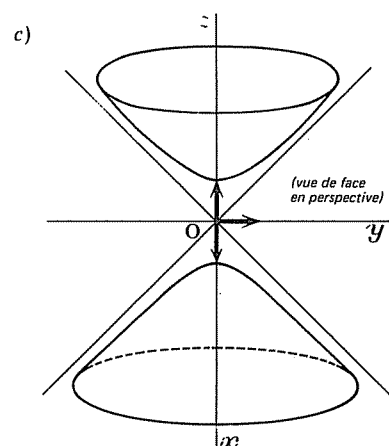
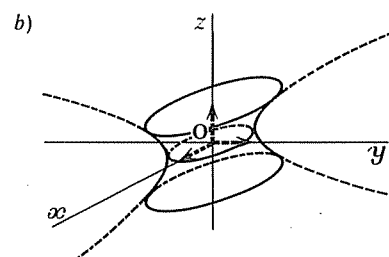
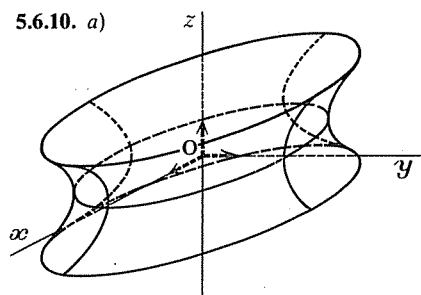


La matrice des termes de second degré a pour valeurs propres 3, 8, -6 et pour vecteurs propres $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 1, -2)$.

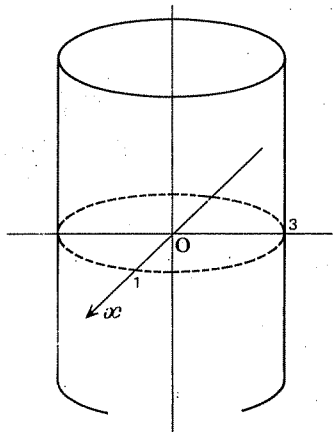
La nouvelle base comprend les vecteurs

$$\mathbf{I} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \mathbf{J} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ \mathbf{K} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right).$$

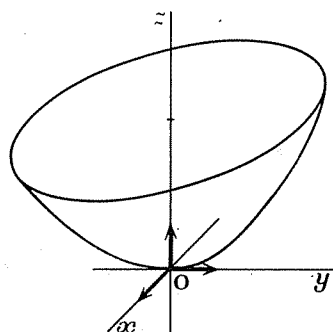
On obtient un hyperboloïde à une nappe.



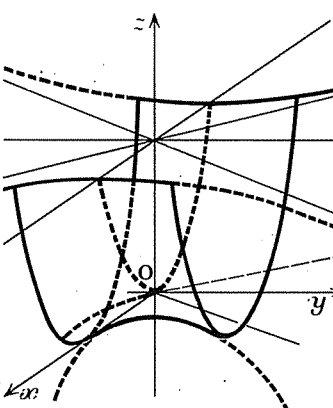
e)



f)



g)



5.6.11.

$$a) \frac{X - \cos \theta}{\cos(\theta - \alpha) - \cos \theta} = \frac{Y - \sin \theta}{\sin(\theta - \alpha) - \sin \theta} = \frac{Z - h}{-2h'}$$

$$b) \frac{X^2 + Y^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{Z^2}{h^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1,$$

hyperboloïde de révolution.

5.6.12. — Exprimons que le moment des forces élastiques $\mathcal{M}_{/G}$, rapport au centre de gravité G , est nul. La composante de ce moment sur Ox comprend $\tau_{yz} da^2$ pour les facettes $B'COA$ et $DA'BC'$ et $-\tau_{zy} da^2$ pour les facettes $A'CB'D$ et $AOBC'$, d'où à l'équilibre

$$da^2 (\tau_{yz} - \tau_{zy}) = 0, \text{ etc.}$$

5.6.13.

a) Supposons $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ (faisceau). Nous trouvons

$$\lambda_1 = \frac{N_2 - N_3}{N_2 - N_1} \text{ et } \lambda_2 = \frac{N_3 - N_1}{N_2 - N_1}.$$

On peut aussi calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & N_2 + N_3 & \alpha^2 (N_3 - N_1)(N_1 - N_2) \\ 1 & N_3 + N_1 & \beta^2 (N_1 - N_2)(N_2 - N_3) \\ 1 & N_1 + N_2 & \gamma^2 (N_2 - N_3)(N_3 - N_1) \end{vmatrix} = 0.$$

b) Pour $i = 1$ la puissance est

$$\alpha^2 (N_3 - N_1)(N_1 - N_2) < 0;$$

de même pour $i = 2$ et 3 . Donc (Γ_i) est intérieur à (C_i) , $i = 1, 2, 3$. Ainsi M est intérieur au triangle curviligne hachuré.

5.7.1. — En utilisant la relation de l'exercice (2.2.3) nous obtenons les coordonnées X , Y et Z à l'instant t du point placé initialement en (x, y, z) et vice versa. Pour abréger, notons $\omega t = \alpha$.

$$x = X \cos \alpha + (Z - Y) \sin \alpha,$$

$$y = Y \cos \alpha + X \sin \alpha,$$

$$z = Z \cos \alpha - X \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \frac{Y + Z}{2}.$$

$$z = Z \cos \alpha - X \sin \alpha$$

$$+ (1 - \cos \alpha) \frac{Y + Z}{2}.$$

D'où l'équation de (E_t) , et celle de la surface enveloppe, mais l'élimination de t est assez longue.

5.7.2. — L'équation du plan (P_t) est

$$f(x, y, z, t) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & \sin t & 1 \\ 0 & 1 & 2 \sin t & 1 \\ 0 & -1 & \sin^2 t & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} \sin t (1 - \sin t) x + \sin t (2 - \sin t) y - 2z + \sin t (2 + \sin t) &= 0 \\ = \sin^2 t (1 - x - y) + \sin t (2 + x + 2y) - 2z &= 0 \end{aligned}$$

ou, pour $t \neq 0$,

$$\frac{\sin t (1 - x - y) + 2 + x + 2y - 2z}{\sin t} = 0$$

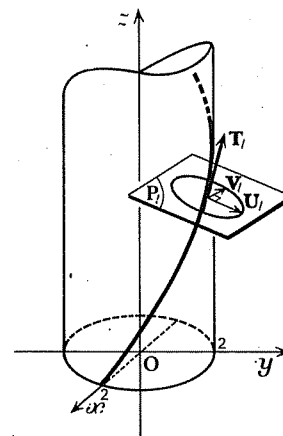
l'élimination conduit alors à

$$(x + 2y + 2)^2 = 4z(x + y - 1).$$

C'est l'équation d'une *quadrique* (hyperboloïde à une nappe).

5.7.3. — La boule mobile a pour équation

$$(X - 2 \cos t)^2 + (Y - 2 \sin t)^2 + (Z - 4t)^2 = 1.$$



Il conviendrait de dériver et d'éliminer t ; mais l'élimination n'est guère envisageable.

Cependant la courbe caractéristique (Γ_t) est le grand cercle de rayon 1, centré en M_t , situé dans le plan (P_t) orthogonal au vecteur tangent $T_t \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{5}}, \frac{\cos t}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$.

Ce plan a pour équation

$$-2 \sin t \cdot (X - x) + 2 \cos t (Y - y) + 4(Z - z) = 0.$$

Sa direction est définie par la base

$$U_t (\cos t, \sin t, 0)$$

et $V_t \left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{5}}, \frac{2 \cos t}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Un point de N de (Γ_t) se représente par

$$ON = OM_t + \cos u \cdot U_t + \sin u \cdot V_t.$$

Soit

$$\begin{cases} X = \cos t (2 + \cos u) - \frac{2}{\sqrt{5}} \sin t \sin u, \\ Y = \sin t (2 + \cos u) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \sin u, \\ Z = 4t - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin u. \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques de la surface canal.

5.7.4. — Le centre décrit la parabole d'équations $x = 0$, $z = -\frac{1}{2}gy^2 + y$. Nous procédons comme ci-dessus, d'où les équations

$$\begin{cases} X = \cos u, \\ Y = y + \sin u (1 - gy), \\ Z = -\frac{1}{2}gy^2 + y + \sin u. \end{cases}$$

5.7.5. — Le profil de (P) fait avec xOy un angle α tel que $\sin \alpha = \frac{r}{R}$.

L'équation de (P) est $\sin \alpha \cdot y - \cos \alpha \cdot z = 0$.

Nous joignons celle du tore

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

pour définir (Γ) .

Considérons les vecteurs

$I(1, 0, 0)$, $J(0, \cos \alpha, \sin \alpha)$ et $K = I \wedge J$
 $(0, -\sin \alpha, \cos \alpha)$. Pour cette nouvelle base les formules de passage sont

$$\begin{aligned} x &= X, \\ y &= Y \cos \alpha - Z \sin \alpha, \\ z &= Y \sin \alpha + Z \cos \alpha. \end{aligned}$$

En faisant $Z = 0$ on trouve pour (Γ)

$$X^2 + Y^2 \pm 2rX - (R^2 - r^2) = 0.$$

Il y a aussi deux cercles. Voir figure.

5.7.6. $(-1, -\pi, 1 + 2\pi^2)$.

5.8.1.

$$(z^2 + 3)y^2 + (1 - z^2)x^2 = 0.$$

5.8.2.

$$y^2 = R^2 z^2 \left[\frac{1}{h^2} - \left(\frac{x}{ah + z(R - a)} \right)^2 \right],$$

voir tome I, exercice (4.11.6).

Les sections horizontales sont des ellipses qui vont de la fente (pour $z = 0$) au cercle ($z = h$).

chapitre 6

6.1.1. $f(M) = -40$, $f(M) = 1$.

6.1.2. $\rho^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) - \frac{z^2}{b^2}$,

$$r^2 \left[\cos^2 \varphi \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right].$$

6.2.1. $(1, 1, -1)$.

6.2.2. $(4, -2, 4)$.

6.2.3. $y = \frac{l}{3}$.

6.2.4.

$$R(-3, -2, -6), \mathcal{M}_{A_1}(-2l, -4l, l).$$

6.2.6. $-7l$.

6.2.7. — L'axe central passe par

$$P \left(-\frac{26l}{49}, \frac{15l}{49}, \frac{8l}{49} \right).$$

6.3.1. 2.

6.3.2. — Point de départ (cf. tome III)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

6.3.3.

a) $(2x, -2y)$,

b) (yz, zx, xy) ,

c) $\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

d) $\frac{(2x, 2y)}{(x^2 + y^2)}$

- e) $(y + z, z + x, x + y)$,
f) $2(x, y, z)$.

6.3.5.

- a) 4, b) $4\sqrt{2}$, c) 4, d) 0,
e) -4, f) $-4\sqrt{2}$, h) -4, j) 0.

6.3.6. $3, 0, 8\sqrt{5}, (14)^{-\frac{3}{2}}$.

6.3.8.

$(1 - e, e, 5)$ et $(1 - 2e, e, 5 + 4e)$.

6.3.9. — Nous avons

$$\text{grad } r_1 = u_1, \quad \text{grad } r_2 = u_2,$$

$$\text{grad } U = \frac{\partial f}{\partial r_1} \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} \cdot u_2.$$

6.3.10. — Nous avons

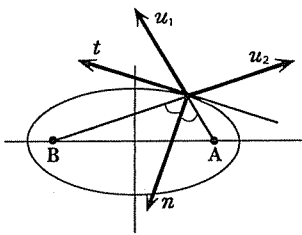
$$U(M) = r_1 + r_2 = \text{Cte}$$

le long de (E), $\text{grad } U$ est orthogonal à (E)
d'après le théorème (6.3.2.), soit

$$(u_1 + u_2) \cdot t = 0,$$

où t est le vecteur unitaire tangent à l'ellipse.

$$u_1 \cdot t = -u_2 \cdot t.$$



Soit $(u_1, t) = \pi - (u_2, t)$ (figure) d'où
 $(u_1, n) = -(u_2, n)$.

6.3.12. — Plan, paraboloïde, sphère, plan.

6.4.1.

- a) $z + 2xy + 3z^2y$,
b) $ye^{xy} + yz \cos(xyz) + x \sin(zx)$.

6.4.4.

$$2yz^2(y^2z^2 + 3x^2z^2 + 6x^2y^2).$$

6.4.6. — Nous avons

$$\text{div } E = \frac{E_p}{\rho} + \frac{\partial E_p}{\partial \rho} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$$

$$\text{or } E_p = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \rho^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 \rho^3}$$

(exemple 6.1.4.).

$$\text{D'où } \text{div } E = \frac{-2p(2 \cos \theta + \sin \theta)}{4\pi \epsilon_0 \rho^4}.$$

- 6.5.1. a) $(0, 0, -2)$, b) $(2y, 2z, 2x)$,
c) $(-y, x, 0)$.

6.5.6.

a) $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$,

b) $V = \text{grad } U$ avec

$$U = x^2 - \frac{3}{2}y^2 + z^2 - yz + 4zx + 2xy.$$

6.6.1. — Au point $M(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, la
force est

$$F = (\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} - b) \\ (a \cos \varphi \cdot i + b \sin \varphi \cdot j).$$

D'où

$$\mathcal{C} = \dots = -c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi.$$

On pose

$$u = \cos 2\varphi, \quad \text{d'où } \mathcal{C} = -(a - b) \cdot k.$$

6.6.2. $\frac{\sqrt{2}}{30}$.

6.6.3. $\sqrt{3}$.

6.6.4. — a) -1. b) 1.

6.6.5. — a) 5, b) $\frac{23}{3}$, c) $\frac{13}{3}$.

6.6.6. (303).

6.6.7. a) $2 \log 2 + \frac{1}{4}$,

b) 4π .

6.6.8. 0.

6.6.9. 8π .

6.6.10. a) 1, b) 1.

6.7.3. 15.

6.7.4. $f(y) = y(\log y - 1) + \text{Cte}$.

On trouve

$$U = e^x (y \log y - y + C) + D.$$

Les deux conditions entraînent

$$c = \frac{1}{e-1}, \quad D = \frac{-e}{e-1}.$$

6.7.5.

a) Oui, $U(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)}{2} + xy + C = \text{Cte}$,

les courbes sont des hyperboles,

b) non,

c) oui, $U(x, y) = xe^{-y} + x^3 y^2 = \text{Cte}$.

6.7.6. a) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy$.

b) On trouve $yf'(y) + 3f(y) = 0$, soit
 $f(y) = \frac{C}{y^3}$. Prenons $C = 1$.

c) D'où $U(x, y) = -\frac{x^2}{y^2} - y + \text{Cte}$.

6.8.1. — Matrice symétrique.

6.8.2. $\text{rot } V = \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} + \frac{V_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) k$

d'après la formule (6.5.6.). Le rotationnel
doit être nul.

6.8.3. πab .

6.8.4. $\frac{3}{2}a^2$.

6.8.5. $\frac{3\pi a^2}{2}$.

6.9.1. — (C) comprend un quart de cercle
bordé par deux rayons. (Γ) comprend les
trois quarts de cercle.

6.9.2. $\frac{1}{15}$.

6.9.6. 4.

6.10.1. $\text{rot } \mathbf{V} = i + j + k$.

Le flux de $\text{rot } \mathbf{V}$ est égal au flux de k , donc à la surface de (C), soit 4.

6.10.2. — D'après la formule (6.5.7.),

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{\cos \theta}{r \cos \varphi} + \text{tg } \varphi \right) \mathbf{w} - \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{u}_1 + 2 \mathbf{w}_1.$$

Sur le *disque* on a

$$\text{rot } \mathbf{V} = \frac{\cos \theta}{r} \mathbf{u} - \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{u}_1 + 2 \mathbf{k}$$

le flux est celui de $2 \mathbf{k}$, soit 2π .

6.11.1. — D'après la formule (6.4.7.),

$$\text{div } \mathbf{V} = 3 \theta.$$

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{V} \, dv = \int_{-h}^h dz \int_0^R dp \int_0^{2\pi} 3 \theta \, d\theta = 12 \pi^2 R h.$$

6.11.2. — D'après la formule (6.4.8.),

$$\text{div } \mathbf{V} = 3 + \frac{1}{r \cos \varphi} - \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\varphi \sin \varphi}{r}.$$

Sans oublier de transformer $dx \, dy \, dz$ en $r \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr$ nous trouvons

$$\Phi = \frac{3 R^3}{\sqrt{2}} + \frac{\pi R}{2} - \frac{R}{4}.$$

6.11.3.

$$\Omega = 2 \pi (1 - \cos \theta) \, \text{sr}.$$

6.11.4. — (Σ) a pour équation $r^2 = C \cdot \sin \varphi$ où C est une constante arbitraire.

Bibliographie

- [1] F. AYRES, *Géométrie projective*, Schaum.
- [2] BOLTJANSKII, *Enveloppes (initiation aux Mathématiques)*, Éditions de Moscou.
- [3] Cl. CARASSO, *Analyse Numérique*, LIDEC (diffusion Vuibert).
- [4] W.T. FISHBACK, *Projective & Euclidean Geometry*, Wiley.
- [5] J.N. FUJII, *Geometry & its methods*, Wiley.
- [6] GAUDEFROY, *La perspective dans le dessin technique*, Dunod.
- [7] M.CM HAWK, *Géométrie descriptive*, Schaum.
- [8] J.H. KINDLE, *Géométrie analytique*, Schaum.
- [9] PÁL IMRE, *Géométrie descriptive*, Bordas.
- [10] J.M. PARRAMON, *Comment dessiner en perspective*, Bordas.
- [11] L. PARRENS, *La perspective par l'image*, Eyrolles.
- [12] B. ROZOY-SÉNÉCHAL, *Géométrie*, Hermann.
- [13] M.R. SPIEGEL, *Variable complexe*, Schaum.
- [14] M.R. SPIEGEL, *Analyse vectorielle*, Schaum.
- [15] J.B. TOUCHARD, *La Courbe du Chien* (film), I.N.A. (France).
- [16] M. VOILQUIN, *Géométrie descriptive (I & II)*, Technique & Vulgarisation.
- [17] H. VUIBERT, *Les Anaglyphes géométriques*, Vuibert.

Index

Les nombres indiqués à côté de chaque titre cité dans cet index renvoient aux pages

A

- Abscisse, 24.
 - curviligne, 185.
- Affinité orthogonale, 90.
- Alignés (points), 3
- Angle, 17.
 - de deux droites, 66, 124.
 - d'Euler, 100.
 - polaire, 46.
 - solide, 307.
- Ampère - Stokcs (formule de), 303.
- Argument, 192.
- Axe
 - central (d'un système de forces), 267.
 - radical de deux cercles, 139.

B

- Barycentre, 31.
- Birapport, 27.
- Bissecteur (plan), 18.
- Bissectrice, 13, 39.

C

- Caustique, 179.
- Cercle, 130.
 - de Mohr, 137, 252.
- Chasles, 21, 25.
- Commande numérique, 183.
- Cône de révolution, 247.
- Conforme (transformation), 210.
- Coniques (courbes), 156.
- Coordonnées, 36.
 - cylindriques, 101.
 - sphériques, 102.
- Courbe paramétrée, 37, 160, 226.
- Courbure, 184.
- Cycloïde, 160.
- Cylindre, 247.

D

- Demi-droite, 8.
- Dépendance linéaire, 64.
- Désargues G., 6.
- Descartes R., 28, 36.
- Développée, développante, 188.
- Diagonale, 6.
- Dièdre, 4.
- Dioptré, 10, 226, 246.
- Dipôle, 264.
- Direction, 5.
- Directrice d'une conique, 143, 149, 153, 156.

- Distance de deux points, 24, 37.
 - d'un point à un plan ou à une droite, 42, 73, 224.
 - de deux droites, 43, 73.

- Divergence, 274.
- Division harmonique, 26.
- Droite, 2, 121, 224.

E

- Ellipse, 141.
- Enveloppe, 178.
- Epicycloïde, 162.
- Epure (point, droite, plan), 309.
- Euclide, 5.
- Euler (formule d'), 202.
- Excentricité d'une conique, 143, 150, 153, 156.

F

- Faisceau
 - linéaire de droites, 129.
 - harmonique (de droites), 28, 39.
 - des cercles, 138.
 - de plans, 222.
- Flux, 302.
- Fonction vectorielle, 74.
- Forme différentielle, 290.
- Foyer d'une conique, 143, 149, 153, 156.
- Fresnel A. (construction de), 211.

G

- Gradient, 268.

H

- Hélice, 229.
- Homothétie, 87, 207.
- Horner (méthode de), 198.
- Hyperbole, 147.
- Hypocycloïde, 162.

I

- Intégrale
 - curviligne, 280.
 - de surface, 299.
- Intersection
 - de cylindres, 248.
 - de droites, 4.
 - de plans, 4, 220.
 - de sphères, 246.

- Inversion, 90, 140, 210.
- Isométrie, 38.

L

- Laplacien, 277.
- Lignes
 - de niveau, 237.
 - de plus grande pente, 238.
- Limaçon de Pascal, 174.

M

- Médiane, 8.
- Médiateur (plan), 17.
- Médiatrice, 13.
- Menelaüs (théorème de), 89.
- Mesure algébrique, 24.
- Milieu, 6, 25.
- Module, 192.
- Moivre (de) (formule de), 201.
- Moment, 59, 265.
 - d'inertie, 73.

N

- Newton, 28.
- Nombre d'or, 27.

O

- Orientation, 50.
- Orthogonal(es) — droites, 12.
- Ostrogradsky (formule de), 305.

P

- Pantographe, 7, 88.
- Parabole, 153.
- Parallèles droites, 5.
 - droite et plan, 10.
 - plans, 4.
- Parallélogramme, 6.
- Perpendiculaire commune, 14, 44.
- Perspective, 96.
- Plan, 2, 218.
 - osculateur, 227.
 - tangent, 235.
- Point, 2.
 - d'inflexion, 168.
 - de rebroussement, 168.
- Polyèdre, 5.
- Potentiel, 273.
- Prisme, 11.

Produit

- scalaire, 51, 65.
- vectoriel, 57, 66.
- mixte, 62, 67.
- vectoriel double, 61, 68.

Projections

- parallèles, 7, 33.
- orthogonales, 12, 15.

Puissance (d'un point par rapport à un cercle), 137.

Q

Quadrique, 248.

R

Rectangle, 12.

Relation de Chasles (angles), 45.

Repère

- cartésien, 36.
- (ortho) normé, 39.

Retournement, 93.

Riemann-Green (formule de), 295.

Rotations, 47, 86, 92, 208.

Rotationnel, 278.

S

Sécantes (droite), 3.

Segment (de droite), 8.

Similitude, 89, 208.

Sphère, 245.

Surface

- cylindrique, 238.
- conique, 240.
- de révolution, 242.
- réglée, 258.
- développable, 255.
- canal, 254.
- de niveau, 271.

Symétrie 12, 209.

— produit de, 47.

— image d'un vecteur, 55.

T

Tétraèdre, 5.

Thalés (théorème de), 7, 8, 25.

Tore, 255.

Torseur, 266.

Torsion, 232.

Translation, 47, 85, 91, 207.

Trapèze, 8.

Triangle (relations métriques), 53, 58.

Trièdre, 5.

Trièdre de Serret-Freinet, 229.

V

Vecteurs, 18.

- colinéaires, 30.
- équipollents, 20.
- glissants, 20.
- somme de, 29.

IMPRIMERIE BAYEUSAINÉ
8-12, rue Royale, 14401 BAYEUX
N° dépôt légal éditeur : 4340
2^e trimestre 1981
N° dépôt légal imprimeur : 4490
Imprimé en France



9 782711 720347

ISBN 2-7117-2034-9

ISBN 0-7770-0187-X