

ment de cette manière, il y aura discussion ⁽¹⁾ ; tandis que, si l'on ajoute les conditions posées dans le cas présent, c'est-à-dire que, suivant l'analyse, la droite ΔB est le double de la droite BZ , et que la droite BZ est plus grande que la droite $Z\Theta$, il n'y aura pas de discussion, et le problème se présentera comme suit : Étant données deux droites $B\Delta$, BZ dont la droite $B\Delta$ est le double de la droite BZ , ainsi qu'un point Θ sur la droite BZ , couper la droite ΔB en un point X de manière que la droite XZ soit à la droite $Z\Theta$ comme le carré de la droite ΔB est au carré de la droite ΔX . Nous donnerons d'ailleurs l'analyse et la synthèse de chacun de ces cas à la fin de la proposition ⁽²⁾.

Archimède avait promis de démontrer « à la fin » ce que nous venons de dire, mais on n'a retrouvé dans aucune copie la chose qu'il avait promise ⁽³⁾. C'est ainsi que nous avons découvert que Dionysodore, parvenu aux mêmes choses, et ne pouvant s'appuyer sur le lemme omis, a eu recours, pour le problème entier, à une manière différente que nous décrirons dans la suite. D'autre part, Dioclès, ayant cru aussi qu'Archimède avait promis mais n'avait pas tenu sa promesse, s'est efforcé d'y suppléer dans un livre qu'il a écrit *Sur les Miroirs Ardents*, et nous décrirons également son essai dans la suite ; car cet essai n'a aucun rapport avec les choses omises, et, de même que chez Dionysodore, le problème est établi au moyen d'une démonstration différente. Mais nous avons cependant rencontré dans un vieux livre, — car nous n'avons pas manqué de faire des recherches dans beaucoup de livres, — des théorèmes qui ne présentent pas mal d'obscurités en raison de fautes, sont altérés de diverses manières, mais comportent cependant l'objet de nos recherches, conservent partiellement le dialecte dorien, cher à Archimède, et sont écrits avec les dénominations habituelles aux sciences dans l'Antiquité. La parabole y était appelée section de cône rectangle et l'hyperbole la

1. $\delta\iota\omicron\pi\tau\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$, séparation, distinction, c'est-à-dire discussion des cas de possibilité d'un problème.

2. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 103, ll. 9-11.

3. Archimède n'a peut-être pas négligé de donner l'analyse et la synthèse qu'il annonce à la fin de la proposition. Elles peuvent avoir fait l'objet d'une note différée qui se serait égarée entre les mains de l'un de ses amis et savants correspondants d'Alexandrie. Il n'est donc pas exclu de retrouver cette note dans un manuscrit non encore exhumé ou dans un palimpseste non encore délavé, de même qu'on a retrouvé si tardivement le traité de *La Méthode mécanique* d'Archimède.

section du cône obtusangle ⁽¹⁾, en sorte qu'en raison de ces faits, on a cru que ces théorèmes n'étaient autres que ceux qu'Archimède avait promis d'écrire « à la fin » ⁽²⁾. C'est pourquoi, après nous être appliqués avec soin, avoir trouvé que son verbe, tel qu'il était écrit, était difficile en raison, comme nous l'avons dit, du grand nombre de fautes, et en avoir dépouillé les conceptions petit à petit, nous l'avons écrit dans un langage plus usuel et plus clair dans la mesure de nos capacités. Le premier théorème sera traité d'une manière générale, afin de montrer clairement ce qu'Archimède dit au sujet des déterminations ⁽³⁾, et cela sera appliqué ensuite aux choses qui sont analysées dans le problème ⁽⁴⁾.

Soient donc données une droite AB, une autre droite AΓ et une aire Δ, et qu'il soit proposé de prendre, sur la droite AB, un point E tel que l'aire Δ soit au carré de la droite EB comme la droite AE est à la droite AΓ.

Que ce soit chose faite ; posons la droite AΓ à angles droits sur la droite AB et prolongeons la droite de jonction ΓE au point Z. Menons, par le point Γ, la droite ΓH parallèle à la droite AB et, par le point B, parallèlement à la droite AΓ, la droite ZBH qui rencontre chacune des droites ΓE, ΓH. Complétons le parallélogramme HΘ ; menons, par le point E, la droite KEΛ parallèle à l'une et à l'autre des droites ΓΘ, HZ, et que le rectangle compris sous les droites ΓH, HM soit équivalent à l'aire Δ. Dès lors, l'aire Δ étant au carré de la droite EB comme la droite AE est à la droite AΓ, la droite ΓH

1. Les termes parabole et hyperbole n'ont été introduits que postérieurement à Archimède par Apollonius de Perge, dans son traité *Des Coniques*.

2. Eutocius attribue donc témérairement à Archimède le long théorème qui va suivre ; car la critique moderne n'a pas ratifié son opinion, ou, du moins, l'a considérée comme fort douteuse. En effet, le dialecte dorien utilisé par Archimède dans toutes ses œuvres, écrit et parlé en Sicile, patrie d'Archimède, peut avoir été le véhicule de la pensée géométrique d'un de ses contemporains ou d'un de ses successeurs pendant la période de plus d'un demi-siècle qui sépare d'Apollonius, à partir de qui les dénominations archaïques de section de cône droit rectangle et de section de cône droit obtusangle furent remplacées respectivement par les noms de parabole et d'hyperbole. D'autre part, le problème en question présente des longueurs inusitées chez Archimède et des développements de relations géométriques qu'il abandonne généralement à la sagacité des savants amis et correspondants auxquels il s'adresse.

3. περί τῶν διορισμῶν, au sujet des déterminations ou discussions des cas de possibilité.

4. C'est-à-dire dans la proposition IV sur le partage de la Sphère dans un rapport donné.

à la droite HZ comme la droite EA est à la droite AΓ et le carré de la droite ΓH au rectangle compris sous les droites ΓH, HZ comme la droite ΓH est à la droite HZ, il s'ensuit que l'aire Δ est au carré de la droite EB, c'est-à-dire au carré de la droite KZ, comme le carré de la droite ΓH est au rectangle compris sous les droites ΓH, HZ et que, par permutation, le rectangle compris sous les droites ΓH, HZ est au carré de la droite KZ comme le carré de la droite ΓH est à l'aire Δ, c'est-à-dire au rectangle compris sous les droites ΓH, HM. Mais la droite ΓH est à la droite HM comme le carré de la droite ΓH est au rectangle compris sous les droites ΓH, HM ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΓH, HZ est aussi au carré de la droite ZK comme la droite ΓH est à la droite HM. Mais la droite HZ étant prise pour hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓH, HZ est au rectangle compris sous les droites MH, HZ comme la droite ΓH est à la droite HM. Donc de même le rectangle compris sous les droites ΓH, HZ est au rectangle compris sous les droites MH, HZ, comme le rectangle compris sous les droites ΓH, HZ est au carré de la droite ZK ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites MH, HZ équivaut au carré de la droite ZK. Dès lors, si l'on décrit autour de la droite ZH comme axe, et par le point H, une parabole telle que son paramètre soit la droite HM, elle passera par le point K ⁽¹⁾ et sera donnée de position, parce que la droite HM est donnée de grandeur ⁽²⁾ en tant que comprenant l'aire donnée Δ avec la droite donnée HΓ. En conséquence, le point K est lié à une parabole donnée de position. Décrivons-la de la manière dite, et soit telle que HK ⁽³⁾. Derechef,

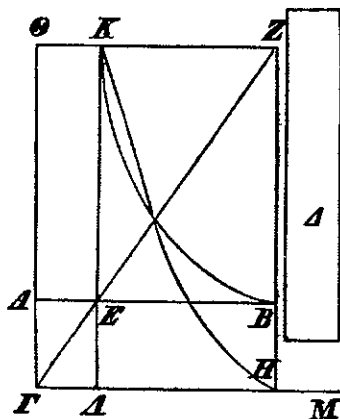


Fig. 45

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. II (Voir trad. précitée, p. 21).

2. EUCLIDE, *Les Données*, prop. 57.

3. On doit avoir $\frac{\Delta}{EB^2} = \frac{AE}{A\Gamma}$. Posons $\Gamma H \times HM = \Delta$. On a $\frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{AE}{A\Gamma}$, et l'on;

peut écrire : $\frac{\Gamma H^2}{\Gamma H \times HZ} = \frac{\Gamma H}{HZ}$, d'où, d'après la première relation

$$\frac{\Delta}{EB^2} = \frac{\Delta}{KZ^2} = \frac{\Gamma H^2}{\Gamma H \times HZ}, \text{ d'où : } \frac{\Gamma H \times HZ}{KZ^2} = \frac{\Gamma H^2}{\Delta} = \frac{\Gamma H^2}{\Gamma H \times HM}. \text{ Or, } \frac{\Gamma H}{HM} = \frac{\Gamma H^2}{\Gamma H \times HM}$$

l'aire $\Theta\Lambda$ étant équivalente à l'aire ΓB ⁽¹⁾, c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites AB , BH étant équivalent au rectangle compris sous les droites ΘK , $K\Lambda$, si l'on décrit, par le point B , une hyperbole dans les asymptotes $\Theta\Gamma$, ΓH , elle passera par le point K en vertu de la réciproque du huitième théorème du second livre des *Éléments des Coniques d'Apollonius* ⁽²⁾ et sera donnée de position parce que chacune des droites $\Theta\Gamma$, ΓH et le point B sont donnés de position. Décrivons-la de la manière que nous venons de dire, et qu'elle soit telle que KB . Le point K est donc lié à une hyperbole donnée de position. Or, il était lié aussi à une parabole donnée de position ; donc, le point K est donné ⁽³⁾. Et la perpendiculaire KE est menée de ce point sur la droite AB donnée de position ; donc, le point E est donné ⁽⁴⁾. Dès lors, puisque l'aire donnée Δ est au carré de la droite EB comme la droite EA est à la droite donnée $A\Gamma$, les deux solides ayant le carré de la droite EB et l'aire Δ comme bases et comme hauteurs ⁽⁵⁾ les droites EA , $A\Gamma$ ont les bases dans un rapport réciproque ⁽⁶⁾ avec les hauteurs ; donc, ces solides sont équivalents ⁽⁷⁾. En conséquence, le carré de la droite EB , multiplié par la droite EA , équivaut à l'aire donnée Δ multipliée par la droite donnée ΓA . Mais le carré de la droite BE , multiplié par la droite EA , est le plus grand de tous les solides semblables obtenus sur la droite BA si la droite BE est le double de la droite EA ainsi que cela sera démontré ⁽⁸⁾ ; par conséquent, il faut que l'aire donnée, multipliée

donc : $\frac{\Gamma H \times HZ}{\overline{KZ}^2} = \frac{\Gamma H}{HM}$. Or, on peut écrire : $\frac{\Gamma H \times HZ}{HM \times HZ} = \frac{\Gamma H}{HM}$; donc :

$$\frac{\Gamma H \times HZ}{\overline{KZ}^2} = \frac{\Gamma H \times HZ}{HM \times HZ}, \text{ d'où : } HM \times HZ = \overline{KZ}^2, \text{ d'où } KZ \text{ est l'ordonnée de la parabole de sommet } H \text{ et de paramètre } HM.$$

1. EUCLIDE, *Éléments*, liv. I, prop. 43 : Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entre eux.

2. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. 12 (et non 8) : Si d'un point d'une section (hyperbole) on mène deux droites sous des angles quelconques sur les asymptotes, et si, d'un point de la section, on mène des parallèles à ces droites, le rectangle délimité sous ces parallèles sera équivalent au rectangle délimité sous les droites auxquelles les parallèles ont été menées (Voir trad. française, p. 128).

3. EUCLIDE, *Données*, prop. 25.
4. EUCLIDE, *ibidem*, prop. 30.
5. C'est-à-dire respectivement.
6. ἀντιπεπόμενον.
7. EUCLIDE, *Éléments*, liv. XI, prop. 34.
8. On a par construction (voir note plus haut) $\frac{\Delta}{\overline{EB}^2} = \frac{AE}{A\Gamma}$, d'où :

par la droite donnée ne soit pas plus grande que le carré de la droite BE multiplié par la droite EA.

La synthèse sera donc la suivante : Soient AB la droite donnée, AΓ l'autre droite donnée, Δ l'aire donnée, et qu'il faille couper la droite AB de sorte que l'aire donnée Δ soit au carré du segment restant comme l'un des segments est à la droite donnée AΓ.

Prenons la droite AE troisième partie de la droite AB ; en conséquence, l'aire Δ, multipliée par la droite AΓ, est plus grande que le carré de la droite BE multiplié par la droite EA ou égale à ce carré ou plus petite que lui. Si elle est plus grande, la synthèse n'aura pas lieu, ainsi qu'on l'a démontré dans l'analyse. Si elle est égale, le point E résout le problème, car les solides étant équivalents, les bases sont donc en rapport réciproque avec les hauteurs, et l'aire Δ sera au carré de la droite BE comme la droite EA est à la droite AΓ.

Si l'aire Δ, multipliée par la droite AΓ, est plus petite que le carré de la droite BE multiplié par la droite EA, la synthèse sera la

suivante. Posons la droite AΓ à angles droits sur la droite AB, menons, par le point B, parallèlement à la droite AΓ, la droite BZ, et que celle-ci rencontre au point H la droite ΓE prolongée. Complétons le parallélogramme ZΘ et menons, par le point E, la droite KEA parallèle à la

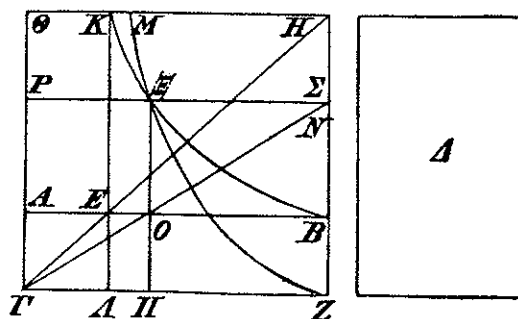


Fig. 46

droite ZH. Dès lors, puisque l'aire Δ, multipliée par la droite AΓ, est plus petite que le carré de la droite EB multiplié par la droite EA, l'aire Δ est à un carré plus petit que celui de la droite BE, c'est-à-dire plus petit que celui de la droite HK, comme la droite EA est à la droite AΓ. Que l'aire Δ soit donc au carré d'une droite HM comme la droite EA est à la droite AΓ, et que l'aire Δ soit équivalente au rectangle compris sous les droites ΓZ, ZN. Dès lors, puisque l'aire Δ, c'est-à-dire le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZN, est au carré de la droite HM comme la droite EA est à la droite AΓ ; mais que la droite ΓZ est à la droite ZH comme la droite EA est à la droite AΓ,

$\overline{EB}^2 \times AE = \Delta \times A\Gamma$. Or, le solide $\overline{EB}^2 \times AE$ sera démontré plus loin être maximum pour $EB = 2 AE$.

et que le carré de la droite ΓZ est au rectangle compris sous les droites ΓZ , ZH comme la droite ΓZ est à la droite ZH , il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZN est au carré de la droite HM comme le carré de la droite ΓZ est au rectangle compris sous les droites ΓZ , ZH , et que, par permutation, le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZH est au carré de la droite HM comme le carré de la droite ΓZ est au rectangle compris sous les droites ΓZ , ZN . Mais la droite ΓZ est à la droite ZN comme le carré de la droite ΓZ est au rectangle compris sous les droites ΓZ , ZN ; et, si l'on prend la droite ZH comme hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZH est au rectangle compris sous les droites ZN , ZH comme la droite ΓZ est à la droite ZN ; par conséquent, le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZH est aussi au carré de la droite HM comme le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZH est au rectangle compris sous les droites ZN , ZH ; donc, le carré de la droite HM équivaut au rectangle compris sous les droites HZ , ZN . Dès lors, si nous décrivons par le point Z , autour de la droite ZH comme axe, une parabole telle que son paramètre soit la droite ZN , elle passera par le point M . Décrivons-la, et qu'elle soit la parabole $M\Xi Z$ ⁽¹⁾. Et puisque le rectangle $\Theta\Lambda$ équivaut au rectangle AZ ⁽²⁾ c'est-à-dire que le rectangle compris sous les droites ΘK , $K\Lambda$ équivaut au rectangle compris sous les droites AB , BZ , si nous décrivons, dans les asymptotes $\Theta\Gamma$, ΓZ , une hyperbole passant par le point B , elle passera par le point K en vertu de la réciproque du théorème VIII des *Éléments des Coniques* d'Apollonius ⁽³⁾. Décrivons-la, et qu'elle soit telle que l'hyperbole BK qui coupera la parabole au point Ξ ; menons, du point Ξ , la

1. Suivant le texte, si $\Delta \times A\Gamma < \overline{EB}^2 \times EA$, on $\frac{\Delta}{\overline{EB}^2} < \frac{EA}{A\Gamma}$; posons

$HM < HK = EB$ de telle sorte que l'on ait : $\frac{\Delta}{\overline{HM}^2} = \frac{EA}{A\Gamma}$. Soit $\Delta = \Gamma Z \times ZN$,

donc : $\frac{\Gamma Z \times ZN}{\overline{HM}^2} = \frac{EA}{A\Gamma}$. Or, $\frac{\Gamma Z}{ZH} = \frac{EA}{A\Gamma}$, et si l'on écrit $\frac{\Gamma Z}{ZH} = \frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\Gamma Z \times ZH}$ on aura :

$\frac{\Gamma Z \times ZN}{\overline{HM}^2} = \frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\Gamma Z \times ZH}$, d'où : $\frac{\Gamma Z \times ZH}{\overline{HM}^2} = \frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\Gamma Z \times ZN}$. Or, $\frac{\overline{\Gamma Z}^2}{\Gamma Z \times ZN} = \frac{\Gamma Z}{ZN} = \frac{\Gamma Z \times ZH}{ZN \times ZH}$;

donc : $\frac{\Gamma Z \times ZH}{\overline{HM}^2} = \frac{\Gamma Z \times ZH}{ZN \times ZH}$, d'où : $\overline{HM}^2 = ZN \times ZH$, équation de la parabole dont

l'axe est ZH , le sommet Z et le paramètre ZN .

2. EUCLIDE, *Éléments*, liv. I, prop. 43.

3. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. XII (et non pas VIII). Voir plus haut.

perpendiculaire $\text{EO}\Pi$ sur la droite AB et menons, par le point Ξ , la droite $\text{P}\Xi\Sigma$ parallèle à la droite AB . Dès lors, puisque $\text{B}\Xi\text{K}$ est une hyperbole, que les droites $\Theta\Gamma$, ΓZ en sont les asymptotes, et que les droites $\text{P}\Xi$, $\Xi\Pi$ sont menées parallèles aux droites AB , BZ , le rectangle compris sous les droites $\text{P}\Xi$, $\Xi\Pi$ équivaut au rectangle compris sous les droites AB , BZ ; en sorte que le rectangle PO équivaut au rectangle OZ ⁽¹⁾. En conséquence, si l'on mène la droite de jonction du point Γ au point Σ , elle passera par le point O ⁽²⁾. Menons-la, et qu'elle soit telle que la droite ΓOZ . Dès lors, puisque la droite OB est à la droite $\text{B}\Sigma$, c'est-à-dire la droite ΓZ à la droite $\text{Z}\Sigma$, comme la droite OA est à la droite $\text{A}\Gamma$, et que, si l'on prend la droite ZN pour hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZN est au rectangle compris sous les droites ΣZ , ZN comme la droite ΓZ est à la droite $\text{Z}\Sigma$, il s'ensuit que le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZN est aussi au rectangle compris sous les droites ΣN , ZN comme la droite OA est à la droite $\text{A}\Gamma$. Et l'aire Δ équivaut au rectangle compris sous les droites ΓZ , ZN ; tandis que le carré de la droite $\Sigma\Xi$, c'est-à-dire le carré de la droite BO équivaut au rectangle compris sous les droites ΣZ , ZN en vertu de la parabole; par conséquent, l'aire Δ est au carré de la droite BO comme la droite OA est à la droite $\text{A}\Gamma$; donc, le point O , qui résout le problème, a été pris ⁽³⁾.

Au reste, on démontrera de la manière suivante que le carré de la droite BE , multiplié par la droite EA , constitue le plus grand de tous les solides obtenus semblablement sur la droite BA si la droite BE est le double de la droite EA . En effet, soit de nouveau, comme dans l'analyse, la droite donnée $\text{A}\Gamma$ à angles droits sur la droite AB . Prolongeons la droite de jonction ΓE et qu'elle rencontre au point Z la droite menée par le point B parallèlement à la droite $\text{A}\Gamma$. Menons, par les points Γ , Z , les droites ΘZ , ΓH parallèles à la droite AB ; pro-

1. On a, par propriété de l'hyperbole : $\text{P}\Xi \times \Xi\Pi = \text{AB} \times \text{BZ}$, ou rectangle $\text{P}\Pi =$ rectangle AZ , d'où : rectangle $\text{P}\Pi -$ rectangle $\text{A}\Pi =$ rectangle $\text{AZ} -$ rectangle $\text{A}\Pi$, ou rectangle $\text{PO} =$ rectangle OZ .

2. EUCLIDE, *Éléments*, liv. I, prop. 43 réciproque.

3. Les rectangles semblables donnent : $\frac{\text{OB}}{\text{B}\Xi} = \frac{\Gamma\text{Z}}{\Sigma\text{Z}} = \frac{\text{OA}}{\text{A}\Gamma}$, et l'on peut écrire : $\frac{\Gamma\text{Z} \times \text{ZN}}{\Sigma\text{Z} \times \text{ZN}} = \frac{\Gamma\text{Z}}{\Sigma\text{Z}}$; donc : $\frac{\Gamma\text{Z} \times \text{ZN}}{\Sigma\text{Z} \times \text{ZN}} = \frac{\text{OA}}{\text{A}\Gamma}$. Or, $\Delta = \Gamma\text{Z} \times \text{ZN}$, et la parabole $\text{M}\Xi\text{Z}$, de paramètre ZN , donne : $\overline{\text{Z}\Xi}^2 = \overline{\text{OB}}^2 = \Sigma\text{Z} \times \text{ZN}$; donc : $\frac{\Delta}{\overline{\text{OB}}^2} = \frac{\text{OA}}{\text{A}\Gamma}$, d'où détermination du point O cherché.

longeons la droite ΓA jusqu'au point Θ et menons, par le point E, la droite KEA parallèle à cette droite. Faisons enfin en sorte que le rectangle compris sous les droites ΓH , HM soit au carré de la droite EB comme la droite EA est à la droite $A\Gamma$. Dès lors, le carré de la droite BE , multiplié par la droite EA , équivaut au rectangle compris sous les droites ΓH , HM multiplié par la droite $A\Gamma$, parce que

ces deux solides ont les bases dans un rapport réciproque avec les hauteurs. Je dis donc, que le rectangle compris sous les droites ΓH , HM , multiplié par la droite $A\Gamma$, est le plus grand de tous les solides obtenus d'une manière semblable sur la droite BA .

En effet, décrivons, par le point H, autour de l'axe ZH , une parabole telle que son paramètre soit la droite HM ; elle arrivera donc par le point K comme on l'a démontré dans l'analyse ⁽¹⁾, et, prolongée, elle rencontrera la droite $\Theta\Gamma$ parallèle au diamètre de la section ⁽²⁾ en vertu du théorème XXVII du premier livre des *Éléments des Coniques* d'Apollonius ⁽³⁾.

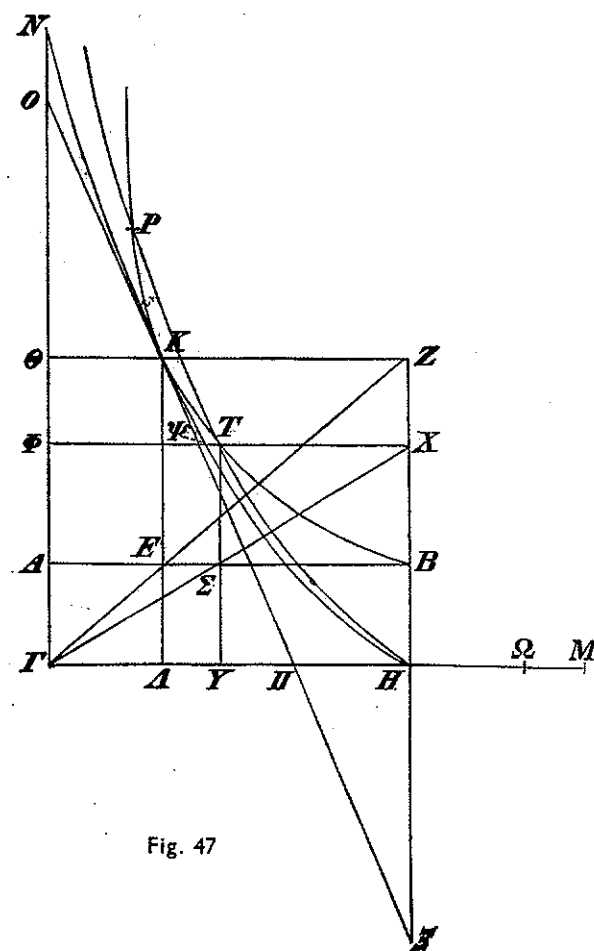


Fig. 47

lonius ⁽³⁾. Prolongeons-la ; qu'elle rencontre la droite $\Theta\Gamma$ au point N et décrivons, par ce point, une hyperbole dans les asymptotes $N\Gamma$, ΓH . Elle arrivera donc par le point K comme on l'a dit dans l'analyse.

1. Voir plus haut dans la partie analytique de la proposition.
2. C'est-à-dire parallèle au diamètre HZ de la section conique qui est ici une parabole.
3. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. XXVI de l'édition critique, au lieu de prop. XXVII de la copie utilisée par Eutocius : « Lorsque, dans la parabole ou l'hyperbole, une droite est menée parallèlement au diamètre de la section, elle rencontrera la section en un seul point (Voir trad. française précitée, p. 48).

Qu'elle vienne donc telle que l'hyperbole BK, et, la droite ZH étant prolongée, posons une droite HΞ égale à celle-ci. Menons enfin la droite de jonction EK que nous prolongeons jusqu'au point Θ. En conséquence, il est manifeste que la droite EO touche la parabole en vertu de la réciproque du théorème XXXIV du premier livre des *Éléments des Coniques* d'Apollonius ⁽¹⁾. Dès lors, la droite BE étant le double de la droite EA, — car cela a été supposé ainsi, — ce qui revient à dire que la droite ZK est le double de la droite KΘ, et le triangle OΘK étant semblable au triangle EZK, la droite EK sera aussi le double de la droite KO. Or, la droite EK est aussi le double de la droite KΠ parce que la droite EZ est aussi le double de la droite EH et que la droite ΠH est parallèle à la droite KZ. En conséquence, la droite OK est égale à la droite KΠ ; donc, la droite OKΠ, qui touche l'hyperbole et est placée entre les asymptotes, est divisée en deux parties égales en vertu de la réciproque du théorème III du second livre des *Éléments des Coniques* d'Apollonius ⁽²⁾. Or, elle touche également la parabole au même point K ; donc, la parabole touche l'hyperbole au point K. Dès lors, imaginons que l'hyperbole soit prolongée jusqu'au point P ; prenons un point Σ quelconque sur la droite AB, menons, par le point Σ, la droite TΣΥ parallèle à la droite KA, qu'elle rencontre l'hyperbole au point T et menons, par le point T, la droite ΦTX parallèle à la droite ΓH. Dès lors, puisque le parallélogramme ΦΥ équivaut au parallélogramme ΓB en vertu de l'hyperbole et de ses asymptotes ⁽³⁾, si nous retranchons de part et d'autre le parallélogramme commun ΓΣ, le parallélogramme ΦΣ devient équivalent au parallélogramme ΣH et, par suite, la droite de jonction menée du point Γ au point X passera par le point Σ ⁽⁴⁾. Qu'elle y passe et soit

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. XXXIII de l'édition critique et non pas XXXIV de la copie utilisée par Eutocius : Si l'on prend un point sur une parabole, et si de ce point on abaisse une droite de manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section (Voir trad. française précitée, p. 60).

2. APOLLONIUS, *ibidem*, liv. II, prop. III : Lorsqu'une droite est tangente à une hyperbole, elle rencontrera chacune des asymptotes, elle sera coupée en deux parties égales au point de contact, et le carré de chacun de ses segments sera équivalent au quart de la figure obtenue sur le diamètre mené par le point de contact (Voir trad. précitée, p. 120).

3. APOLLONIUS, *ibidem*, liv. II, prop. XII énoncée dans une note précédente.

4. EUCLIDE, *Éléments*, liv. I, prop. 43 réciproque.

telle que la droite $\Gamma\Sigma X$. Et puisque, en raison de la parabole ⁽¹⁾, le carré de la droite ΨX équivaut au rectangle compris sous les droites XH , HM , le carré de la droite TX est plus petit que le rectangle compris sous les droites XH , HM . Faisons donc en sorte que le rectangle compris sous les droites XH , $H\Omega$ soit équivalent au carré de la droite TX . Dès lors, puisque la droite ΓH est à la droite HX comme la droite ΣA est à la droite $A\Gamma$, mais que, si l'on prend la droite $H\Omega$ comme hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓH , $H\Omega$ est au rectangle compris sous les droites XH , $H\Omega$ et à son équivalent le carré de la droite XT , c'est-à-dire le carré de la droite $B\Sigma$, comme la droite ΓH est à la droite HX , il s'ensuit que le carré de la droite $B\Sigma$, multiplié par la droite ΣA , équivaut au rectangle compris sous les droites ΓH , $H\Omega$ multiplié par la droite ΓA . Or, le rectangle compris sous les droites ΓH , $H\Omega$, multiplié par la droite ΓA , est plus petit que le rectangle compris sous les droites ΓH , HM multiplié par la droite ΓA ; par conséquent, le carré de la droite $B\Sigma$, multiplié par la droite ΣA , est plus petit que le carré de la droite BE multiplié par la droite EA ⁽²⁾. On démontrera les choses de la même manière pour tous les points pris entre les points E , B .

Mais prenons un point ζ entre les points E , A ; je dis que le carré de la droite BE , multiplié par la droite EA est ainsi plus grand aussi que le carré de la droite $B\zeta$ multiplié par la droite ζA .

En effet, les mêmes constructions étant faites, menons, par le point ζ , la droite $\varsigma\zeta P$ parallèle à la droite KA , et quelle rencontre l'hyperbole au point P ; car elle la rencontre parce qu'elle est parallèle à l'asymptote ⁽³⁾, et que la droite $A'PB'$, menée par le point P , parallèle-

1. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. XI (Voir trad. française précitée, p. 21).

2. En résumé : Considérant la parabole NKH , d'axe ZH , de sommet H et de paramètre HM , on a : $\overline{\Psi X^2} = XH \times HM$; donc, $\overline{TX^2} < XH \times HM$, posons $XH \times H\Omega = \overline{TX^2}$ (I). Or, on a : $\frac{\Gamma H}{XH} = \frac{\Sigma A}{A\Gamma}$, et l'on peut écrire : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{XH \times H\Omega} = \frac{\Gamma H}{XH}$; donc : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{XH \times H\Omega} = \frac{\Sigma A}{A\Gamma}$, d'où la relation (I) donne : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{\overline{TX^2}} = \frac{\Sigma A}{A\Gamma}$, ou : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{\overline{B\Sigma^2}} = \frac{\Sigma A}{A\Gamma}$, d'où : $(\Gamma H \times H\Omega) \times A\Gamma = \overline{B\Sigma^2} \times \Sigma A$. Or, $(\Gamma H \times H\Omega) \times A\Gamma < (\Gamma H \times HM) \times A\Gamma$; donc : $\overline{B\Sigma^2} \times \Sigma A < (\Gamma H \times HM) \times A\Gamma$. Or, on a posé au début : $\frac{\Gamma H \times HM}{\overline{BE^2}} = \frac{EA}{A\Gamma}$, d'où : $(\Gamma H \times HM) \times A\Gamma = \overline{BE^2} \times EA$; donc : $\overline{B\Sigma^2} \times \Sigma A < \overline{BE^2} \times EA$.

3. APOLLONIUS, *ibidem*, liv. II, prop. XIII : « Si, dans la région délimitée par les asymptotes et par la section (hyperbole), on mène une parallèle à l'une des

lement à la droite AB, rencontre la droite HZ prolongée au point B'. Et puisque, d'erechef, le rectangle $\Gamma'\underline{\Sigma}$ équivaut au rectangle AH en vertu de l'hyperbole ⁽¹⁾, la droite de jonction menée du point Γ au

point B' passera par le point ζ ⁽²⁾. Qu'elle y passe, et soit la droite $\Gamma\zeta B'$. Et puisque d'erechef, le carré de la droite $A'B'$ équivaut au rectangle compris sous les droites $B'H$, HM en vertu de la parabole, le carré de la droite PB' est donc plus petit que le rectangle compris sous les droites $B'H$, HM . Faisons en sorte que le carré de la droite PB' soit équivalent au rectangle compris sous les droites $B'H$, $H\Omega$. Dès lors, puisque la droite ΓH est à la droite HB' comme la droite ζA est à la droite $A\Gamma$, mais que, si l'on prend la droite $H\Omega$ comme hauteur commune, le rectangle compris sous les droites ΓH ,

$H\Omega$ est au rectangle compris sous les droites $B'H$, $H\Omega$, c'est-à-dire au carré de la droite PB' , c'est-à-dire de la droite $B\zeta$, comme la droite ΓH est à la droite HB' , il s'ensuit que le carré de la droite $B\zeta$, multiplié par la droite ζA , équivaut au rectangle compris sous les droites ΓH , $H\Omega$ multiplié par la droite ΓA . Et le rectangle compris sous les droites ΓH , HM est plus grand que celui qui est compris sous les droites ΓH , $H\Omega$; par conséquent, le carré de la droite BE , multiplié par la droite EA , est plus grand que le carré de la droite $B\zeta$ multiplié par la droite ζA (3). On démontrera cela de la même manière pour

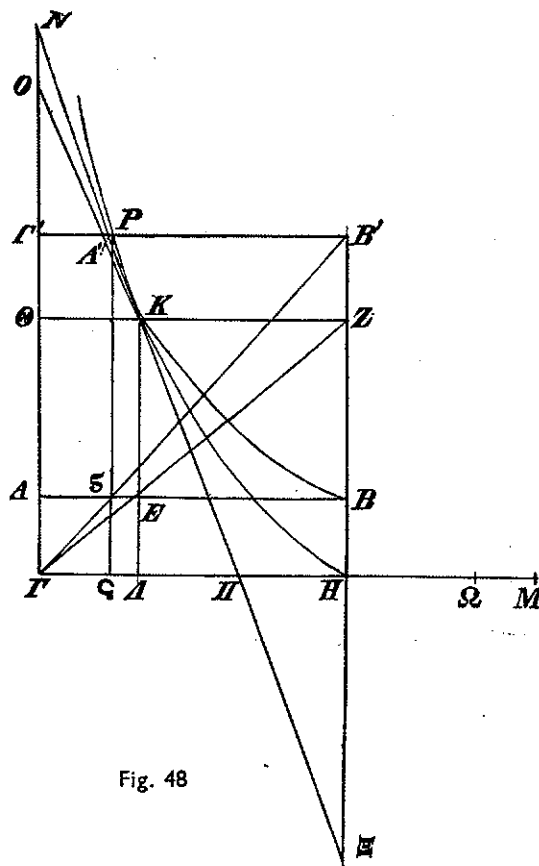


Fig. 48

asymptotes, cette parallèle rencontrera la section en un seul point (Voir trad. française précitée, p. 129).

I. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. II, prop. XII énoncée dans une note précédente.

2. EUCLIDE, *Éléments*, liv. I, prop. 43.

3. En résumé : La parabole d'axe HB, de sommet H et de paramètre HM a pour équation $A'B'^2 = B'H \times HM$; donc : $B'P^2 < B'H \times HM$. Posons

tous les points pris entre les points E, A. Or, on l'a démontré aussi pour tous les points situés entre les points E, B ; donc, si la droite BE est le double de la droite EA, le carré de la droite BE, multiplié par la droite EA, est le plus grand des solides obtenus semblablement sur la droite BA.

Il faut toutefois faire attention à ce qui découle de la figure que nous avons recueillie ⁽¹⁾ ; car, puisqu'il a été démontré que le carré de la droite BΣ, multiplié par la droite ΣA, et le carré de la droite Bζ multiplié par la droite ζA, sont plus petits que le carré de la droite BE multiplié par la droite EA, il est possible, qu'ayant l'aire donnée, multipliée par la droite donnée, plus petite que le carré de la droite BE multiplié par la droite EA, le problème initial soit résolu lorsque la droite AB est coupée en deux points. Or, cela aura lieu si on imagine une parabole décrite autour de la droite XH comme axe, de manière à avoir la droite HΩ comme paramètre ⁽²⁾ ; car une telle parabole passera absolument par le point T ⁽³⁾. Et puisqu'il est nécessaire qu'elle rencontre la droite ΓN parallèle au diamètre ⁽⁴⁾, il est évident qu'elle coupe aussi l'hyperbole en un autre point situé au-dessus du point K comme ici au point P. Et la droite menée perpendiculairement du point P sur la droite AB, comme l'est ici la droite Pς ⁽⁵⁾, coupera la droite AB au point ζ, de manière que ce point ζ résolve le problème et fasse en sorte que le carré de la droite BΣ, multiplié

$B'H \times H\Omega = \overline{B'P^2}$. (I) Or, on a : $\frac{\Gamma H}{HB'} = \frac{\varsigma A}{\overline{AT}}$ et l'on peut écrire : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{B'H \times H\Omega} = \frac{\Gamma H}{B'H}$

donc : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{B'H \times H\Omega} = \frac{\varsigma A}{\overline{AT}}$ d'où la relation (I) donne : $\frac{\Gamma H \times H\Omega}{\overline{B'P^2}} = \frac{\varsigma A}{\overline{AT}}$ ou :

$\frac{\Gamma H \times H\Omega}{\overline{B\varsigma^2}} = \frac{\varsigma A}{\overline{AT}}$ d'où : $(\Gamma H \times H\Omega) \times \overline{AT} = \overline{B\varsigma^2} \times \varsigma A$. Or, $\Gamma H \times HM > \Gamma H \times H\Omega$, donc :

$(\Gamma H \times HM) \times \overline{AT} > \overline{B\varsigma^2} \times \varsigma A$. Or, on a posé au début : $\frac{\Gamma H \times HM}{\overline{BE^2}} = \frac{EA}{\overline{AT}}$ d'où :

$(\Gamma H \times HM) \times \overline{AT} = \overline{BE^2} \times EA$; donc : $\overline{BE^2} \times EA > \overline{B\varsigma^2} \times \varsigma A$.

1. Les deux figures qui précèdent sont combinées en une seule dans certains manuscrits, et c'est à une figure unique qu'Eutocius se rapporte ici. L'édition d'Archimède de Torelli (Oxford, 1792) donne la figure unique (p. 167), tandis que l'édition critique donnée par Heiberg (Leipzig, 1915), et que suit notre traduction française, donne les deux figures séparément (pp. 143 et 147).

2. Voir l'avant-dernière figure.

3. APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. XI énoncée dans une note précédente. On aura, en effet $\overline{TX^2} = XH \times H\Omega$.

4. APOLLONIUS, *ibidem*, liv. I, prop. XXVI : Lorsque, dans la parabole ou l'hyperbole, une droite est menée parallèlement au diamètre de la section elle rencontrera la section en un seul point.

5. Voir la dernière figure.

par la droite ΣA , devienne équivalent au carré de la droite $B\zeta$ multiplié par la droite ζA , comme cela résulte manifestement des démonstrations qui précèdent ⁽¹⁾. En conséquence, comme il est possible de prendre, sur la droite BA , deux points qui réalisent ce que nous cherchons, il est permis de prendre celui des deux points que nous voulons, soit le point situé entre les points E, P , soit celui qui est situé entre les points E, A . Car, si nous voulons prendre celui qui est situé entre les points E, B , la parabole décrite par les points H, T , coupant l'hyperbole en deux points comme nous l'avons dit, le point plus rapproché du point H , c'est-à-dire plus rapproché de l'axe de la parabole, fera découvrir un point situé entre les points E, A de même que le point T fait découvrir le point Σ ⁽²⁾; tandis que le point plus éloigné fera découvrir un point situé entre les points E, A de même que le point P fait découvrir le point ζ ⁽³⁾. Le problème est donc ainsi analysé et synthétisé d'une manière générale. Mais, pour conformer cette manière au verbe d'Archimède, imaginons, comme dans la figure même de son texte ⁽⁴⁾, que la droite ΔB est le diamètre de la sphère, que la droite BZ est égale à son rayon et que la droite $Z\Theta$ est donnée. Dès lors, il dit qu'on doit donc couper la droite donnée ΔZ au point X et faire en sorte qu'une donnée ⁽⁵⁾ soit au carré de ΔX comme XZ est à une droite donnée ⁽⁶⁾. Mais, en énonçant la chose simplement de cette manière, il y aura discussion ⁽⁷⁾.

En effet, si l'aire donnée, multipliée par une droite donnée, se présentait plus grande que le carré de la droite ΔB multiplié par la droite BZ , le problème serait impossible, comme cela a été démontré; tandis que, si elle se présentait équivalente, le point B résoudrait le problème et ne servirait en rien à la proposition d'Archimède; car la sphère n'était pas coupée dans un rapport donné ⁽⁸⁾. En énonçant ainsi la chose simplement, il y avait discussion; mais si on ajoute

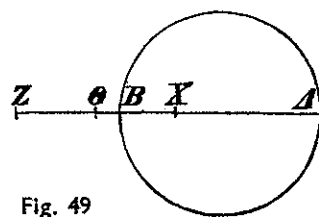


Fig. 49

1. On a démontré plus haut que l'on a : $\overline{B\Sigma}^2 \times \Sigma A = (\Gamma H \times H\Omega) \times \Gamma A = \overline{B\zeta}^2 \times \zeta A$.

2. Voir l'avant-dernière figure.

3. Voir la dernière figure.

4. ARCHIMÈDE, *ibidem*, liv. II, prop. IV, fig. p. 101.

5. C'est-à-dire $\overline{BA}^2$.

6. C'est-à-dire la droite donnée $Z\Theta$.

7. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 103, ll. 9-12.

8. Voir plus haut.

les conditions qui sont posées dans le cas présent ⁽¹⁾, c'est-à-dire si la droite ΔB est le double de la droite BZ et la droite BZ plus grande que la droite $Z\Theta$, il n'y aura pas de discussion ⁽²⁾. En effet, le carré donné de la droite ΔB , multiplié par la droite donnée $Z\Theta$, est plus petit que le carré de la droite ΔB multiplié par la droite BZ , parce que la droite BZ est plus grande que la droite $Z\Theta$, et, cela ayant lieu, nous avons démontré que le problème est possible et comment il évolue.

Il y a d'ailleurs lieu de remarquer que nos explications s'accordent avec les termes mêmes d'Archimède ; à la suite de l'analyse de son problème général indiquant ce à quoi il arrive, il dit d'abord : *On doit couper la droite donnée ΔZ au point X et faire en sorte qu'une droite donnée soit au carré de la droite ΔX comme la droite XZ est à une droite donnée* ⁽³⁾. Puis, après avoir dit que le problème en question est généralement sujet à discussion, et, qu'en ajoutant les conditions qu'il a découvertes, c'est-à-dire que, si la droite ΔB est le double de la droite BZ et la droite BZ plus grande que la droite $Z\Theta$, il n'y a pas de discussion, il reprend le problème d'une manière plus particulière, et dit : *Et le problème se présentera comme suit : Étant données deux droites $B\Delta$, BZ , dont la droite $B\Delta$ est le double de la droite BZ , et un point Θ sur la droite BZ , couper la droite ΔB en un point X* ⁽⁴⁾. Il ne dit plus comme précédemment qu'il faut couper la droite ΔZ , mais qu'il faut couper la droite ΔB , parce qu'il n'ignore pas que deux points peuvent être pris sur la droite ΔZ , comme nous l'avons démontré plus haut, et que ces points résolvent le problème : l'un situé entre les points Δ , B , l'autre entre les points B , Z , points dont celui qui est situé entre les points Δ , B lui est utile pour la proposition initiale.

Nous avons donc transcrit ces choses aussi clairement que possible conformément aux termes d'Archimède. Mais Dionysodore, n'ayant rencontré nulle part ce qu'Archimède avait promis d'écrire « à la fin », et n'ayant pour ainsi dire pas la capacité d'imaginer en plus les choses qui n'avaient pas été exposées, a consigné une manière de trouver le problème qui ne manque pas d'élégance, tout en suivant une voie différente pour le problème entier. Nous avons donc pensé qu'il fallait

1. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 103, ll. 13-14.

2. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 103, l. 15.

3. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 103, ll. 9-11.

4. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 103, ll. 15-16.

nécessairement surajouter cette manière aux autres, après l'avoir toutefois corrigée comme nous avons pu le faire ; car, dans toutes les copies que nous avons rencontrées, elle est rapportée en présentant de nombreuses démonstrations obscurcies par une foule d'erreurs dues à la grande négligence des hommes.

SOLUTION A LA MANIÈRE DE DIONYSODORE ⁽¹⁾

Couper une sphère par un plan de manière que ses segments soient entre eux dans un rapport donné.

Soit la sphère dont le diamètre est la droite AB, et que le rapport donné soit celui de la droite $\Gamma\Delta$ à la droite ΔE . Il faut donc couper la sphère par un plan perpendiculaire à la droite AB de manière que le segment dont le sommet est le point A soit dans le rapport de la droite $\Gamma\Delta$ à la droite ΔE avec le segment dont le sommet est le point B. Prolongeons la droite BA au point Z ; posons la droite AZ moitié de la droite AB, et que la droite ZA soit à la droite AH dans le rapport de la droite ΓE à la droite $E\Delta$. Que la droite AH soit à angles droits sur la droite AB ; et prenons la droite A Θ moyenne proportionnelle entre les droites ZA, AH. La droite A Θ est donc plus grande que la droite AH. Décrivons, autour de la droite ZB comme axe et par le point Z, une parabole telle qu'elle ait la droite AH comme paramètre ; elle passera donc par le point Θ parce que le rectangle compris sous les droites ZA, AH équivaut au carré de la droite A Θ ⁽²⁾. Décrivons-la et qu'elle soit Z Θ K. Élevons, par le point B, la droite BK parallèle à la droite A Θ ; qu'elle coupe la parabole au point K, et décrivons, par le point H, une hyperbole dans les asymptotes ZB, BK. Elle coupe donc la parabole entre les points Θ , K. Qu'elle la coupe au point Λ ; menons, du point Λ , la droite ΛM perpendiculaire sur la droite AB et menons par les points H, Λ , les droites HN, ΛE

1. Dionysodore, géomètre grec du II^e siècle avant J.-C. Son ouvrage dans lequel Eutocius a relevé la solution du problème de partager la sphère en segments dans un rapport donné est perdu. Vitruve lui attribua l'invention d'un cadran solaire en forme de cône. (Voir : *L'architecture de Vitruve, traduction nouvelle par Ch. L. Maurras*, Paris, 1847, 2 vol., in-8°, vol. II, p. 361, l. 12). D'autre part, on ne sait si on doit l'identifier avec le Dionysodore mentionné par Héron comme ayant écrit un ouvrage sur le tore (*περὶ σφαιρας*) dont il a calculé le volume.

2. On a par construction : $A\Theta^2 = ZA \times AH$, cfr APOLLONIUS, *Les Coniques*, liv. I, prop. XI énoncée dans une note précédente.