ARCHIMEDIS
OPERA OMNIA
CUM COMMENTARIIS EUTOCII

ITERUM EDIDIT

J. L. HEIBERG
PROFESSOR HAUNIENSIS

VOLUMEN I

MDCCCCX
LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI

DE SPHAERA ET CYLINDRO

LIBRI II.

α΄.

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν.

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ' ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον· ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. ἔστιν δὲ τάδε· πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος· πρὸς δὲ τούτοις, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμ-

In A prima pagina detrita erat; om. H. *Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* AC, *α΄* add. CE. **1** *χαίρειν*] BCDE, *εὐπράττειν* G. **2** *ἀπέσταλκά*] BCDG, *ἐπεστάλκαμεν* E. *σοι*] hic des. E. *σοι*—**3** *ἀποδείξεως*] BC, lac. G, *σοι τα δυσ ποτε θεωρημενα γραψαντες μετα ἀποδειξεων* seq. lac. D. **4** *τε εὐθείας καί*]

I.

Archimedes Dositheo s.

Antea ad te misi eorum, quae ad id tempus perspexeram, hoc demonstratione adiuncta conscriptum: quoduis segmentum recta et coni rectanguli sectione comprehensum tertia parte maius esse triangulo eandem basim habenti, quam segmentum, et altitudinem aequalem.[1] postea autem cum incidissem in theoremata quaedam nondum demonstrata, demonstrationes eorum confeci. sunt autem haec: primum cuiusuis sphaerae superficiem quadruplo maiorem esse circulo maximo;[2] deinde cuiusuis segmenti sphaerae superficiei aequalem esse circulum, cuius radius aequalis sit rectae a uertice segmenti ad ambitum ductae circuli, qui basis sit segmenti;[3] et prae-

1) H. e. *Τετραγ. παραβ.* 17; 24.
2) H. e. *Περὶ σφ. καὶ κυλ.* I, 30.
3) Ibid. I, 39—40.

BCG, om D. **5** *επι* lac. *τριτον* D. *τριγώνου*—**6** *αὐτήν*] (C), trigoni habentis basem eandem B, *ταύτην τὴν βάσιν* D, *τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτήν* G. **6** *ἔχοντος*] CD, om. G. *ὕστερον δέ*] BC, lac. G, *μετὰ δὲ ταῦτα* D. **7** *ἡμῖν ὑποπεσόντων*] BC, *ἀποπεσον των* D, *πεσόντων* G. *ἀξίων λόγου*] BC, *αντιλεγον* D, lac. G. *πεπραγματεύμεθα περί*] BC, *πεπραγματευον δη μετα* D, *πεπραγμα* seq. lac. G. **8** *αὐτῶν*] BC, *αυτα* D, om. G. *ἔστιν*] D, *ἔστι(ν)* C, om. G. *δέ*] BC, *δε τι* D, om. G. *τάδε*—**9** *πάσης*] om. G. **9** *πάσης*] BC, *της* D. **10** *ἐστίν*] C, *ἐστί* DG. *τῶν ἐν αὐτῇ*] BCG, om. D. *ἔπειτα*] *εἶτα* post lac. G. **11** *τμάματος* C. **12** *κύκλος*] *κωνῳ* D. **14** *βασης* D. **15** *ὁ* (pr.)] om. D. *ὁ βάσιν μὲν ἔχων*] *την βασιν εχοντος* D. **16** *ἴσην*] *τὴν αὐτὴν* post ras. 1 litt. G. **17** *ισσον* D. *τῇ*] om. D. *αὐτός τε ἡμιόλιός*] *τοτε ημιολιον* D. **18** *ἐστι* G. **19** *δὲ τὰ συμπτώματα*] lac. G. **20** *τῇ*] *αυτη* D. *εἰρημένα*] seq. ras. 2 litt. G. *ἠγνοεῖτο*] BC, *ηγνοειστο* D, *γνοει* inter 2 lac. G. *σχάματα* C. **21** *δὲ ὑπὸ τῶν*] lac. G. *ἀνεστραμμένων*] BC, *ἀνε* seq. lac. DG.

μένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος, ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία· διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ’ ὑφ’ ἑνὸς κατανοηθῆναι. ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα· τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομέν που μάλιστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι· δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἐρρωμένως.

Γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

---

1 *οὐδενός—ἐπινενοηκότος*] BC, *ενοηκοτος* D, *νενοηκότος* G. 2 *ἐστίν*] om. G. *συμμετρία*] BC, lac. DG. *διόπερ*] C, propter quod itaque B, lac. DG. *οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι*] C, non sum veritus B, *οκνησαιμι* D, om. G. 3 *ἀντιπαραβαλεῖ* G. *πρός—γεωμέτραις*] BC, *το* post lac. D, lac. G. 4 *πολύ*—5 *ὑπό*] (C), multum excedere B, *πολλα* seq. lac. D, *πολ* seq. lac. G. 5 *Εὐδόξου*] B, (*Εὐ*)*δόξου* C, lac. D, *ξου* post lac. G. *θεωρητεντων* D. 6 *μερος ἐστι* D. 7 *τῇ*] DG, om. C. *πυραμιδει* D. 8 *ἐστίν*] C, comp. D, *ἐστί* G. 10 *τούτων*] *που των* D. *σχάματα* C. 11 *πρό*] seq. lac. G, mg. *ἐν τοῖς ἐσχάτοις χωρίοις τούτοις οὐδὲν λείπει.*

terea quemuis cylindrum basim habentem circulo maximo sphaerae aequalem, altitudinem autem diametro sphaerae aequalem, et ipsum dimidia parte maiorem esse sphaera, et superficiem eius superficie sphaerae dimidia parte maiorem.[1]) hae autem proprietates ipsa natura figuris, quas commemoraui, inde ab initio erant, ignorabantur autem ab iis, qui ante nos geometriae studebant, nec quisquam eorum intellexerat, harum figurarum commensurationem esse; quare non dubitauerim eas eodem loco ponere, quo et ea, quae ceteri geometrae perspexerunt, et ea, quae longe praestare uidentur eorum theorematum, quae Eudoxus de figuris solidis proposuit: quamuis pyramidem tertiam esse partem prismatis eandem basim habentis, quam pyramis, et altitudinem aequalem, et quemuis conum tertiam partem esse cylindri basim eandem habentis, quam conus, et altitudinem aequalem; nam cum hae quoque proprietates ipsa natura his figuris essent inde ab initio, adcidit, ut ab omnibus geometris, qui tamen plurimi et praestantissimi ante Eudoxum fuerant, ignorarentur nec a quoquam intellegerentur. licebit autem omnibus, qui quidem poterunt, haec inuenta mea examinare. certe Conone uiuo haec edenda fuerunt; illum enim existimo praeter ceteros haec intellegere potuisse et aptum de iis iudicium proferre. sed operae pretium me esse facturum ratus, si haec cum mathematices studiosis communicassem, ad te demonstrationes, quas conscripsi, misi, quas mathematices peritis licebit examinare. uale.

Primum proponuntur et postulata, et quae ad demonstrationes inuentorum meorum adsumpsi.

---

1) H. e. I, 34 coroll.

---

12 *ἀγνοεῖσθαι*] *εισθαι* post lac. G. 13 *ἐξέσται*] seq. lac. in extr. lin. G (cfr. ad lin. 11). 15 putabamus B. 16 *ἄν*] om. BCDG. 17 *αὐτῶν*] -*ω* e corr. G. *ἀπόφανσιν* G. 18 *καλῶς*] inc. EH. 19 *μαθημα* seq. lac. G. *ἀποστέλλομέν*] lac. E, *λλομεν* post lac. G. 20 *περί*] CEHG, etiam B, *τε* D. 21 *ἐρρωμένως*] A, *ἐρωμένως* C, vale B, *ἔρρωσο* Basil. 22 *τά τε ἀξιώματα*] BCGH, *τω τε αξιωμα* D, *τό τε ἀξίωμα* E.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

α΄. Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

β΄. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

γ΄. Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

δ΄. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

ε΄. Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου.

ϛ΄. Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ᾽ εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

---

1 et numeros add. *Torellius*. 7 ἐάν] ABC, ἄν *Riualtus*.

DEFINITIONES.

1. Sunt quaedam in plano curuae lineae terminatae, quae aut totae in eadem parte sunt rectarum terminos earum iungentium aut nihil in altera parte positum habent.

2. In eandem partem cauam lineam eiusmodi uoco, in qua sumptis duobus punctis quibuslibet rectae puncta iungentes aut omnes in eandem partem lineae cadant, aut aliae in eandem partem, aliae in ipsam lineam, nulla autem in alteram partem.

3. Similiter etiam superficies quaedam sunt terminatae, ipsae quidem non in plano positae, terminos autem in plano positos habentes, quae aut totae in eadem parte sunt illius plani, in quo terminos positos habent, aut certe nihil in altera parte positum habent.

4. In eandem igitur partem cauas eiusmodi uoco superficies, in quibus sumptis duobus punctis rectae puncta iungentes aut omnes in eandem partem superficiei cadant, aut aliae in eandem partem, aliae in ipsam, nulla autem in alteram partem.

5. Sectorem autem solidum uoco, cum conus sphaeram secat uerticem habens ad centrum sphaerae, figuram, quae a coni superficie eaque parte superficiei sphaerae continetur, quae intra conum cadit.

6. Rhombum autem solidum uoco, cum duo coni eandem basim habentes uertices habent in utraque parte plani, in quo est basis, positos, ita ut axes eorum in directo siti sint, figuram solidam ex utroque cono compositam.

---

11 δή] autem B. **13** αἵ] scripsi, και ABC. **14** ἔχουσιν] D, habentes B, -es del., εχουσαι AC. **18** πίπτουσιν] A, πίπτουσι C. **19** αὐτῆς] Jen., αὐτ(ῆς) C, αυτων AB. δέ] AB, δὲ μέρη C. **21** τέμνῃ] A, τέμῃ C. τῷ κέντρῳ] C, το κεντρον A. **28** κώνοιν] C, κονοιν A. **29** στερεόν] A, τὸ στερεόν C.

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ.

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

α΄. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.

β΄. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

γ΄. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον.

δ΄. Τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

ε΄. Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

1 et numeros add. *Torellius.* **3** *τῶν*] C, *τῳ των* A. **5** *ἐάν*— **6** *ἀνίσους*] AB, om. C. **6** *ἔχωσιν*] habeant B, *εχουσιν* A. **8** *ἑτέρας*] *Barrowius*, *ετερας επιφανειας* AC, altera superficies B, sed superficies del. **10** *ἔχῃ*] A, *ἔχει* C, h$\overline{n}$t corr. in habeat B. **15** *καί*] AC, om. B; fort. *τῶν*. **16** *ἀνίσους*] C, *ανισας* A (H et E, sed corr.). **19** *ἡ ἑτέρα*] scripsi, *ετερα* A, altera supra scr. B, om. C. *ἐπιφάνεια*] A, superficies corr. ex superficie B, *ἐπιφανείας* C. **21** *ἔχῃ*] A, *ἔχει* C, habe^a^t B¹. **25** *αὐτό*] H, *εαυτο* AC, ipsum B. **26** *ἑαυτῷ*] AB, *αὐτῷ* C

POSTULATA.

Postulo autem haec:

1. Omnium linearum eosdem terminos habentium minimam esse rectam.[1])

2. Ex ceteris uero lineis, si in plano positae eosdem terminos habeant, inaequales esse eiusmodi lineas, si utraque in eandem partem caua sit, et aut tota altera ab altera rectaque eosdem terminos habenti comprehendatur, aut pars eius comprehendatur, pars communis sit, et minorem esse eam, quae comprehendatur.

3. Similiter etiam inter superficies eosdem terminos habentes, si in plano terminos habeant, minorem esse planam superficiem.

4. Inter ceteras autem superficies eosdem terminos habentes, si in plano sint termini, inaequales esse eiusmodi superficies, si in eandem partem utraque caua sit, et aut tota altera ab altera superficieque plana eosdem terminos habenti comprehendatur, aut pars eius comprehendatur, pars communis sit, et minorem esse eam, quae comprehendatur.

5. Porro autem inter lineas inaequales et inaequales superficies et inaequalia solida maius excedere minus eiusmodi magnitudine, quae ipsa sibi addita quamuis magnitudinem datam earum, quae cum ea comparari possint, excedere possit.[2])

1) Cfr. Eucl. Elem. I def. 4: *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται* et Proclus in Eucl. p. 110, 10 *Friedlein*: *ὁ δ' αὖ Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. διότι γάρ, ὡς ὁ Εὐκλείδιος λόγος φησίν, ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις, διὰ τοῦτο ἐλαχίστη ἐστὶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν.*

2) Eucl. V def. 4: *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.* de hoc axiomate etiam alibi ab Archimede sumpto u. Quaest. Archim. p. 44 sq. cfr. Eucl. X, 1.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

α΄.

Ἐὰν περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΒΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΛ περιφερείας διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως δὲ καὶ συναμφότερος μὲν ἡ ΔΓ, ΓΒ τῆς ΔΒ, συναμφότερος δὲ ἡ ΛΚ, ΚΘ τῆς ΛΘ, συναμφότερος δὲ ἡ ΖΗΘ τῆς ΖΘ, ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

β΄.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Δ, καὶ ἔστω μεῖζον

3 πολυγώνου] C, πολυγονου A (D et E, sed corr.). ἐστίν] C, εστι A. 6 τῆς αὐτῆς] AC, ipso B; fort. αὑτῆς. 9 ἐστίν] C, εστι A. 13 ἐστί] C, εστι A. 14 ἐστ(ί) C. 16 δὲ καί] autem et B, και AC, δέ H. 18 ΖΗΘ] eras. C. ΖΘ] AB, ΘΖ C. 23 ( )ύο C. 25 ἢ τὸ μεῖζον] AB, ἤτοι μείζων C. 27 ἔστω (pr.)] BC, ωστε A. μείζων C.

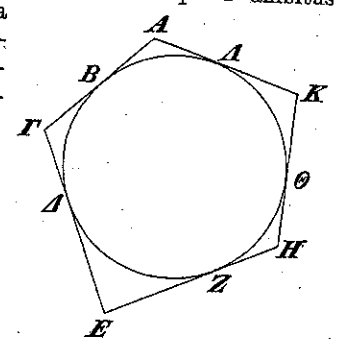
His autem positis, si in circulo polygonum inscribatur, adparet, perimetrum polygoni inscripti minorem esse ambitu circuli; unumquodque enim latus polygoni minus est quam ea pars circuli, quae ab ea abscinditur.

I.

Si circum circulum polygonum circumscribitur, perimetrus polygoni circumscripti maior est ambitu circuli.

circumscribatur enim circum circulum polygonum, quod infra positum est.[1]) dico, perimetrum polygoni maiorem esse ambitu circuli.[2])

nam quoniam $BA + A\Lambda$ maiores sunt quam ambitus pars, quae est $B\Lambda$, propterea quod eosdem terminos habentes illam ambitus partem comprehendunt (post. 2), et similiter etiam



$$\Delta\Gamma + \Gamma B > \Delta B$$

ambitu et

$$\Lambda K + K\Theta > \Lambda\Theta$$

ambitu, porro autem

$$\Delta E + EZ > \Delta Z$$

ambitu, tota perimetrus polygoni maior est ambitu circuli.

II.

Datis duabus magnitudinibus inaequalibus fieri potest, ut inueniantur duae rectae inaequales eiusmodi, ut maior recta ad minorem rationem habeat minorem quam maior magnitudo ad minorem.

sint duae magnitudines inaequales AB, Δ, et maior sit

1) Respicitur ad figuram ab Archimede ipso additam; cfr. p. 14, 2.

2) Citat Pappus I p. 312, 7 ed. *Hultsch.*

τὸ ΑΒ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας.

κείσθω διὰ τὸ β' τοῦ α' τῶν Εὐκλείδου τῷ Δ ἴσον τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ· τὸ δὴ ΓΑ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΘ τοῦ ΑΓ, τοσαυταπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΘΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς ΑΘ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστιν τὸ ΑΘ τοῦ Δ, τουτέστι τοῦ ΓΒ, τὸ ἄρα ΓΑ πρὸς τὸ ΑΘ λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ. ἀλλ' ὡς τὸ ΓΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ· ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ· καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ [ἄρα] πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ [διὰ λῆμμα]. ἴσον δὲ τὸ ΒΓ τῷ Δ· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ.

εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ποιοῦσαι τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα [τουτέστιν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον].

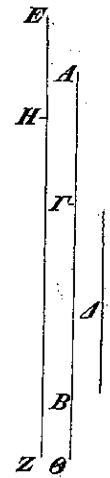
γ'.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον.

---

1 τό] C, τα A. In ΑΘ litt. Α et Β permut. AB². 3 τό] A, το(ῦ) C. α'] ᾱ C, πρωτου A. τῶν] A, om. C. 4 ΖΗ] ΖΕ G², ΕΗ *Hauber*. 5 ὑπεϱέξει C. 8 ΗΕ] e corr. B, ΖΕ AC. 9 ἡ (pr.)] G², το AC. ΗΕ] C, e corr. B, ΖΕ A. ΕΗ] AB, ΗΕ C. 10 ἐστιν] C, εστι A. 12 ἀλλ'—15 ΓΒ] C, om. AB. 14 λόγον—15 ΓΒ] (C). 15 καί] AB, om. C. 20 εἰρημένον] C, ισον AB. τουτέστιν] C, τουτεστι A. 22 des. C.

AB. dico, fieri posse, ut inueniantur duae rectae inaequales id, quod quaeritur, praestantes.



ponatur per secundam propositionem primi libri Euclidis[1]) [Eucl. Elem. I, 2] $B\Gamma = \Delta$, et ponatur recta ZH; itaque ΓA magnitudo ipsa sibi addita Δ magnitudinem excedet [post. 5]. multiplicetur igitur, et sit $A\Theta$, et quoties $A\Gamma$ in $A\Theta$ continetur, toties contineatur HE in ZH; est igitur $\Theta A : A\Gamma = ZH : HE$ [cfr. Eucl. V, 15]; et e contrario [Eucl. V, 7 coroll.] $EH : HZ = A\Gamma : A\Theta$. et quoniam $A\Theta > \Delta$ siue $A\Theta > \Gamma B$, erit [Eucl. V, 8] $\Gamma A : A\Theta < \Gamma A : \Gamma B$. uerum $\Gamma A : A\Theta = EH : HZ$; itaque $EH : HZ < \Gamma A : \Gamma B$; et componendo $EZ : ZH < AB : B\Gamma$ [u. Eutocius].[2]) sed $B\Gamma = \Delta$; itaque $EZ : ZH < AB : \Delta$.

ergo inuentae sunt duae rectae inaequales, quae praestant id, quod quaerendum proposuimus [id est, maiorem ad minorem rationem habere minorem quam maior magnitudo ad minorem].

III.

Datis duabus magnitudinibus inaequalibus et circulo fieri potest, ut in circulo polygonum inscribatur et aliud circumscribatur ita, ut latus polygoni circumscripti ad latus polygoni inscripti minorem habeat rationem quam maior magnitudo ad minorem.

---

1) Proclus in Eucl. p. 68, 12: *καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιβαλὼν τῷ πρώτῳ (Πτολεμαίῳ) μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου.*

2) Idem demonstrat Pappus II p. 686, 5 sq. cfr. Eucl. V, 18.

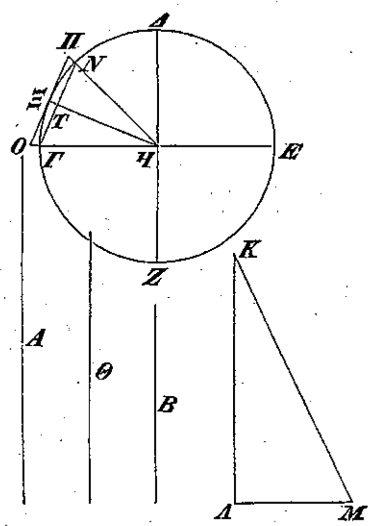
ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ A, B, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα.

εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Θ, $K\Lambda$, ὧν μείζων ἔστω ἡ Θ, ὥστε τὴν Θ πρὸς τὴν $K\Lambda$ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΛK πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛM, καὶ ἀπὸ τοῦ K τῇ Θ ἴση κατήχθω ἡ KM [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓE, ΔZ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν $\Delta H\Gamma$ γωνίαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ αἰεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομέν τινα γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ ΛKM. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ $NH\Gamma$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $N\Gamma$· ἡ ἄρα $N\Gamma$ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου [ἐπείπερ ἡ ὑπὸ $NH\Gamma$ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ $\Delta H\Gamma$ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ $N\Gamma$ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν $\Gamma\Delta$ τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου· φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο]. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓHN γωνία δίχα τῇ $H\Xi$ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ $O\Xi\Pi$, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ $HN\Pi$, $H\Gamma O$· ὥστε καὶ ἡ ΠO πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον καὶ ἰσοπλεύρου [φανερόν, ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ $N\Gamma$]. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ $NH\Gamma$ τῆς ὑπὸ ΛKM, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ $TH\Gamma$, ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ $TH\Gamma$ τῆς ὑπὸ ΛKM. καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Λ, T·

5 ὥστε τὴν Θ] *Basil.*, om. A, que etiam B. **10** ΓE] e corr. B, ΓB A (in fig. B pro E). **20** $H\Xi$] e corr. B[1]G, $N\Xi$ AB. **25** $N\Gamma$] BG[2], $HN\Gamma$ A. In fig. Π addidi.

sint datae duae magnitudines A, B,[1]) datus circulus autem is, qui infra positus est. dico igitur, fieri posse, ut praestetur id, quod quaeritur.

sint enim inuentae duae rectae Θ, $K\Lambda$, quarum maior sit Θ, ita ut Θ ad $K\Lambda$ minorem rationem habeat quam maior magnitudo ad minorem [prop. 2], et ducatur ab Λ puncto recta ΛM ad ΛK perpendicularis [Eucl. I, 11], et a K puncto ducatur KM rectae Θ aequalis [u. Eutocius], et ducantur duae diametri circuli inter se perpendiculares ΓB et ΔZ. si igitur $\angle \Delta H\Gamma$ in duas partes aequales secuerimus et rursus dimidium angulum in duas partes aequales, et hoc deinceps fecerimus, relinquemus angulum quendam minorem quam duplicem angulum ΛKM. relinquatur et



sit $NH\Gamma$, et ducatur $N\Gamma$; recta $N\Gamma$ igitur latus est polygoni aequilateri[2]) [u. Eutocius]. et secetur $\angle NH\Gamma$ in duas partes aequales recta $H\Xi$, et in puncto Ξ tangat circulum recta $O\Xi\Pi$, et producantur rectae $HN\Pi$, $H\Gamma O$; itaque etiam ΠO latus est polygoni circa circulum circumscripti et aequilateri[3]) [u. Eutocius].

quoniam autem $\angle NH\Gamma < 2\,\Lambda KM$, sed $\angle NH\Gamma = 2\,TH\Gamma$, erit

1) Desideratur: et maior sit A; cfr. p. 16, 14.

2) Archimedes scripserat lin. 14—15: *πολυγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά*; u. Eutocius.

3) Archimedes scripserat lin. 22 sq.: *ὥστε καὶ ἡ $O\Pi$ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά*; u. Eutocius.

ἡ ἄρα ΜΚ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΗ τῇ ΗΞ· ὥστε ἡ ΗΞ πρὸς ΗΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ ΠΟ πρὸς ΝΓ, ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· ἔτι δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α πρὸς τὸ Β. καί ἐστιν ἡ μὲν ΠΟ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ ΓΝ τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

δ΄.

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

ἔστω γὰρ πάλιν δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ Ε, κύκλος δέ τις ὁ ΑΒΓ κέντρον ἔχων τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τομεὺς συνεστάτω ὁ ΑΔΒ· δεῖ δὴ περιγράψαι καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν ΑΒΔ τομέα ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν ΒΔΑ, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα.

εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Η, ΘΚ ἄνισοι καὶ μείζων ἡ Η, ὥστε τὴν Η πρὸς τὴν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ προσβεβλήσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΛ [δυνατὸν γάρ, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Η τῆς ΘΚ]. τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν ΑΔΒ γωνίας δίχα καὶ τῆς ἡμισείας δίχα καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ ΛΚΘ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ ΑΔΜ· ἡ ΑΜ οὖν γίνεται πολυ-

25 ἐστίν] H, εστι A.

$$\angle THΓ < ΛKM.$$

et anguli ad Λ, T puncta positi recti sunt; itaque

$$MK : ΛK > ΓH : HT.^{1)}$$

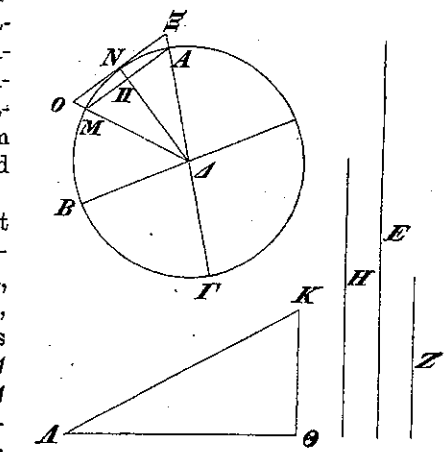
sed $ΓH = HΞ$; erit igitur

$$HΞ : HT < MK : KΛ \text{ siue } ΠO : NΓ < MK : KΛ.^{2)}$$

porro autem $MK : KΛ < A : B$;[3] ⟨itaque $ΠO : NΓ < A : B$⟩. et $ΠO$ recta latus est polygoni circumscripti, $ΓN$ autem inscripti; quod erat inueniendum.

IV.

Rursus datis duabus magnitudinibus inaequalibus et sectore fieri potest, ut circum sectorem polygonum circumscribatur et aliud inscribatur ita, ut latus polygoni circumscripti ad latus inscripti minorem rationem habeat quam maior magnitudo ad minorem.



rursus enim sint E, Z duae magnitudines inaequales, quarum maior sit E, et sit $ABΓ$ circulus centrum habens $Δ$ punctum, et ad $Δ$ punctum construatur sector $AΔB$; oportet igitur polygonum circumscribi et inscribi in sectore

1) U. Eutocius; cfr. quae scripsi ZMP XXIV p. 179 nr. 8.

2) Nam $HΞ : HT = ΠO : NΓ$, quia $HΞ : HT = OΞ : ΓT$ (ibid. p. 178 nr. 4) $= 2OΞ : 2ΓT = ΠO : ΓN$ (Eucl. I, 26). Archimedes sine dubio uerba τουτέστιν ἡ ΠΟ πρὸς ΝΓ lin. 3 ante ἐλάσσονα λόγον posuerat.

3) Nam ex hypothesi est $Θ : KΛ < A : B$ et $Θ = MK$.

γώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ $A\Delta M$ γωνίαν δίχα τῇ ΔN καὶ ἀπὸ τοῦ N ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν $N\Xi O$, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ· καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ΞO πρὸς τὴν AM ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ E μέγεθος πρὸς τὸ Z.

ε'.

Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

ἐκκείσθω κύκλος ὁ A καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ E, Z καὶ μεῖζον τὸ E· δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν.

λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς Γ, Δ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Γ, ὥστε τὴν Γ πρὸς τὴν Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν E πρὸς τὴν Z· καὶ τῶν Γ, Δ μέσης ἀνάλογον ληφθείσης τῆς H μείζων ἄρα καὶ ἡ Γ τῆς H. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Γ πρὸς τὴν H [καθὼς ἐμάθομεν]· διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν διπλάσιός ἐστι ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸν πολύγωνον [ὅμοια γάρ], τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν H ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν

3 *κπο* B.

$AB\Delta$ aequalia habens latera praeter $B\Delta$, ΔA, ita ut fiat id, quod quaeritur.

inueniantur enim duae rectae inaequales H, ΘK, quarum maior sit H, ita ut $H : \Theta K < E : Z$ [prop. 2], et a Θ puncto uti supra [prop. 3] ducatur recta ad $K\Theta$ perpendicularis, et iungatur $K\Delta$ rectae H aequalis [prop. 3 p. 14, 7]. si igitur $\angle A\Delta B$ in duas partes aequales secuerimus et dimidium in duas partes aequales et hoc deinceps fecerimus, relinquetur angulus minor quam duplex angulus $\Delta K\Theta$. relinquatur igitur $\angle A\Delta M < 2\ \Delta K\Theta$; itaque recta AM latus erit polygoni in circulo inscripti [p. 12, 22]. et si $\angle A\Delta M$ in duas partes aequales secuerimus recta ΔN et ab N puncto rectam $N\Xi O$ circulum tangentem duxerimus, ea latus erit polygoni circum circulum circumscripti similis[1]) polygono, quod nominauimus; et eodem modo quo supra [prop. 3] erit

$$\Xi O : AM < E : Z.^{2)}$$

V.

Circulo et duabus magnitudinibus inaequalibus datis polygonum circum circulum circumscribere et aliud inscribere ita, ut polygonum circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habeat quam maior magnitudo ad minorem.

ponantur circulus A et duae magnitudines inaequales E, Z, quarum maior sit E; oportet igitur polygonum in circulo inscribi et aliud circumscribi ita, ut fiat id, quod quaeritur.

sumo enim duas rectas Γ, Δ, quarum maior sit Γ, ita ut Γ ad Δ minorem rationem habeat quam E ad Z [prop. 2]; quare etiam sumpta recta H media inter rectas Γ, Δ proportionali [Eucl. VI, 13] erit $\Gamma > H$.[3]) circumscribatur igitur polygonum circum circulum et aliud inscribatur ita, ut latus polygoni circumscripti ad latus inscripti minorem

1) U. p. 14, 24 et Eutocius ad prop. 3 extr.

2) $\angle A\Delta M = 2 M\Delta\Pi < 2\Delta K\Theta$; itaque $\angle M\Delta\Pi < \Delta K\Theta$; quare $\Delta K : K\Theta > M\Delta : \Delta\Pi$ siue $\Delta N : \Delta\Pi < \Delta K : K\Theta$. sed $\Delta N : \Delta\Pi = ON : M\Pi = \Xi O : AM < \Delta K : K\Theta < E : Z$ siue $\Xi O : AM < E : Z$.

3) Quia $H^2 = \Gamma \times \Delta < \Gamma^2$.

ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ E πρὸς τὸ Z.

ς΄.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστιν περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

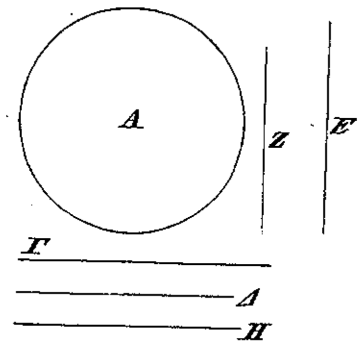
Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδοται.

Δεικτέον δέ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος ἢ τομέως καὶ χωρίου δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου· ἔσται γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

δεδόσθω κύκλος ὁ A καὶ χωρίον τι τὸ B. δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ B χωρίου· καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ τε χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου,

4 ς΄] A, del. G², om. B. 5 δή] autem B. 10 ς΄ G². 15 παραδέδοται] EHG², παραδεδωται A. 17 mg. 6 B. 21 ἔσται] scripsi, εστω AB.

rationem habeat quam Γ ad H [prop. 3]; quare etiam ratio duplicata minor est ratione duplicata. et laterum ratio duplicata aequalis est rationi polygonorum [Eucl. VI, 20, cfr. p. 19 not. 1], ratio autem rectarum Γ, H duplicata aequalis est rationi rectarum Γ, Δ [Eucl. V def. 9]; quare etiam polygonum circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habet quam Γ ad Δ; ergo multo etiam magis polygonum circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habet quam E ad Z.[1])



VI.

Eodem modo demonstrabimus, datis duabus magnitudinibus inaequalibus et sectore fieri posse, ut circum sectorem polygonum circumscribatur et aliud ei simile inscribatur ita, ut circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habeat quam maior magnitudo ad minorem [cf. prop. 4].

Hoc quoque adparet, dato circulo uel sectore et spatio fieri posse, ut in circulo uel sectore polygona aequilatera inscribentes et deinceps in segmentis relictis aliquando segmenta circuli uel sectoris relinquamus eiusmodi, quae minora sint dato spatio; haec enim in Elementis tradita sunt.[2])

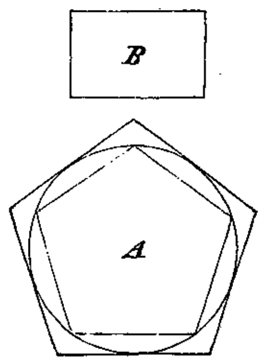
Demonstrandum uero, dato circulo uel sectore et spatio fieri posse, ut circum circulum uel sectorem polygonum circumscribatur ita, ut segmenta relicta figurae circumscriptae minora sint dato spatio; licebit enim, cum in circulo de-

1) Nam $\Gamma : \Delta < E : Z$.

2) Eucl. elem. XII, 2 (p. 144, 6 ed. meae): τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου; cfr. X, 1.

περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν, οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ B.

εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ B χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ B χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ B χωρίον πρὸς τὸν κύκλον· ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ B χωρίου. ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ B χωρίον πρὸς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου· ὥστε καὶ ὅλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ B.



ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

5 περιλείμματα] EH, περιλιμματα A. 15 ἀπολείμματα] E, απολιμματα A. 26 περιλείμματα] F, περιλιμματα A. 27 ἐπί] addidi, om. AB, in mg. B².

monstrauerimus, eandem ratiocinationem ad sectorem transferre.[1])

sit datus circulus A et spatium aliquod B. itaque fieri potest, ut circumscribatur circum circulum polygonum ita, ut segmenta inter circuli polygonique ambitus comprehensa minora sint spatio B; nam datis duabus magnitudinibus inaequalibus, quarum maior est spatium simul cum circulo, minor autem ipse circulus, circumscribatur circum circulum polygonum et aliud inscribatur ita, ut circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habeat quam maior magnitudo ad minorem [prop. 5]. tum polygonum circumscriptum eiusmodi erit, cuius segmenta relicta minora sint spatio dato, quod est B.

nam si quidem polygonum circumscriptum ad inscriptum minorem rationem habet quam $A+B:A$, circulus A autem maior est polygono inscripto [p. 10, 1], multo magis polygonum circumscriptum ad A circulum minorem rationem habet quam $A+B:B$; itaque subtrahendo [per conuersionem propositionis ab Eutocio ad prop. 2 demonstratae, u. p. 13 not. 2; cfr. Eucl. V, 17] segmenta polygoni circumscripti ad circulum minorem habent rationem quam B spatium ad circulum; ergo segmenta relicta polygoni circumscripti minora erunt spatio B [Eucl. V, 10]. uel hoc modo: quoniam polygonum circumscriptum ad circulum minorem rationem habet quam circulus simul cum B spatio ad circulum, polygonum circumscriptum minus erit quam $A+B$;[2]) quare segmenta relicta omnia minora erunt spatio B.

similiter etiam in sectore ratiocinandum.

1) Demonstratio eadem est, nisi quod pro prop. 5 ea usurpanda sunt, quae initio prop. 6 dicta sunt.

2) Ex Eutocio adparet, Archimedem lin. 24—25 scripsisse: διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφ. ceterum Archimedes uix duas demonstrationes dederat; genuinam hanc fere fuisse puto (Quaest. Arch. p. 74): τὸ οὖν περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ B χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου· ὥστε καὶ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ B χωρίου.

ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΟΠΡ, ΘΚΛ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ, ὁ δὲ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ ΘΚΛ ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιᾳοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ· δῆλον δή, ὅτι παράλληλοί εἰσιν τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ· λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΑ.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ· παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ΖΚ τῇ ΕΑ, ἡ δὲ ΒΛ τῇ ΖΚ, καὶ ἔτι ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΘΝ τῇ ΔΗ, καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΘΝ [καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ΕΑ, ΚΖ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΑΟ]· ἔστιν ἄρα,

5 ΕΒΔΖ] A(C), bedz B. 6 περιλείμματι] Basil., περιλήμματι BEH, περιλιμματι DG. 7 κα'] B, κβ' A(C). 17 ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ] e corr. D, ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚΑ ABC. 26 ΓΜ—p. 88, 14 ΘΜ] (C). 27 ΑΟ] B, e corr. G, ΑΘ A.

iam quoniam, ut supra [prop. 19 p. 82, 9], superficies coni ΑΒΓ composita est ex superficie coni ΕΒΖ et superficie inter ΕΖ, ΑΓ posita, et superficies coni ΑΒΓ aequalis est basi coni ΜΝΞ, superficies autem coni ΕΒΖ aequalis basi coni ΟΡΠ, et superficies inter ΕΖ, ΑΓ posita aequalis basi coni ΘΚΛ, basis coni ΜΝΞ aequalis est basibus conorum ΟΠΡ, ΘΚΛ. et coni eandem altitudinem habent; itaque etiam conus

$$M N \Xi = \Theta K \Lambda + O \Pi P \text{ [p. 83 not. 3].}$$

sed $MN\Xi = AB\Gamma\Delta$ [prop. 18], et $O\Pi P = EB\Delta Z$ [prop. 18]; ⟨itaque $AB\Gamma\Delta = \Theta K\Lambda + EB\Delta Z$. subtrahatur rhombus ΕΒΔΖ⟩; ergo, qui relinquitur, conus ΘΚΛ frusto relicto aequalis erit.

XXI.

Si in circulo polygonum inscribitur aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, et ducuntur rectae angulos[1]) polygoni coniungentes, ita ut parallelae sint cuiuis rectarum sub duo latera subtendentium polygoni, omnes simul rectae coniungentes ad diametrum circuli eam habent rationem, quam habet recta subtendens sub latera polygoni uno pauciora, quam dimidius numerus eorum est, ad latus polygoni.

sit circulus ΑΒΓΔ, et in eo inscribatur polygonum ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, et ducantur rectae ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ; adparet igitur, eas parallelas esse rectae sub duo latera polygoni subtendenti;[2]) iam dico, omnes simul rectas, quas commemorauimus, ad diametrum circuli rationem habere, quam ΓΕ ad ΕΑ.

ducantur enim rectae ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ; parallela igitur est ΖΚ rectae ΕΑ, ΒΛ rectae ΖΚ, et porro ΔΗ rectae

1) Archimedes pro πλευράς lin. 10 fortasse scripserat γωνίας; Quaest. Arch. p. 76.

2) Nam quia arcus ΚΛ, ΕΖ aequales sunt, erit

$$\angle EKZ = KZ\Lambda \text{ (Eucl. III, 27);}$$

itaque $EK \parallel \Lambda Z$ (Eucl. I, 28), et eodem modo in ceteris. similiter lin. 23 sqq. ratiocinandum.

ὡς ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, ὁ ΚΞ πρὸς ΞΟ. ὡς δ' ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ὡς δὲ ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, ὡς δὲ ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἔτι, ὡς ἡ μὲν ΒΣ πρὸς ΣΡ, ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ὡς δὲ ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ἡ ΗΥ πρὸς ΥΤ, καὶ ἔτι, ὡς ἡ μὲν ΗΥ πρὸς ΥΤ, ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ὡς δὲ ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, καὶ ἔτι, ὡς μὲν ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΧ πρὸς ΧΓ [καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστίν, ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]· ὡς ἄρα ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ· ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, οὕτω πᾶσαι αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον.

κβ΄.

Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος αἱ τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν.

εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς

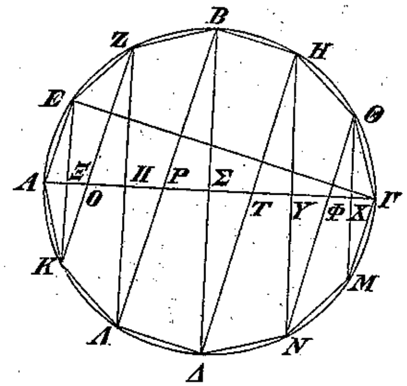
8 ΧΓ] B, e corr. DG, ΗΓ A. 9 ὡς εἷς] ως A, εἷς corr. ex ὡς G; ut B, una proportionum in spatio angustiore ins. 12 ἡ] B, om. A. 15 κβ΄] B, Eutocius ad prop. 35, κγ΄ A(C). 17 ἔχον] C, εχων A. 20 ἡ] addidi, om. AC. 24 ΑΒΓΔ] C, ΑΒΓ AB. διήχθω—ΑΓ] AB, om. C.

$B\Delta$, ΘN rectae ΔH, ΓM rectae ΘN; est igitur [ZMP. XXIV p. 178 nr. 1]

$$E\Xi : \Xi A = K\Xi : \Xi O.$$

sed

$$K\Xi : \Xi O = Z\Pi : \Pi O \text{ [Eucl. VI, 4]}$$
$$= \Lambda\Pi : \Pi P \text{ [ib.]}$$
$$= B\Sigma : \Sigma P \text{ [ib.]},$$



porro

$$B\Sigma : \Sigma P = \Delta\Sigma : \Sigma T \text{ [ib.]}$$
$$= H\Upsilon : \Upsilon T \text{ [ib.]},$$

porro

$$H\Upsilon : \Upsilon T = N\Upsilon : \Upsilon\Phi$$
$$= \Theta X : X\Phi$$
$$= MX : X\Gamma \text{ [ib.]};$$

itaque

$$E\Xi : \Xi A = EK + Z\Lambda + B\Delta + HN + \Theta M : A\Gamma$$

[Eucl. V, 12]. sed $E\Xi : \Xi A = \Gamma E : EA$ [Eucl. VI, 4]; ergo etiam

$$\Gamma E : EA = EK + Z\Lambda + B\Delta + HN + \Theta M : A\Gamma.$$

XXII.

Si in segmento circuli polygonum inscribitur latera praeter basim aequalia et paria numero habens, et ducuntur rectae basi segmenti parallelae angulos[1]) coniungentes, omnes simul rectae ductae cum dimidia basi ad altitudinem segmenti eandem rationem habent, quam recta a diametro circuli ad latus polygoni ducta ad latus polygoni.

ducatur enim in circulo $AB\Gamma\Delta$ recta $A\Gamma$, et super $A\Gamma$ polygonum latera praeter basim $A\Gamma$ aequalia et paria numero habens in segmento $AB\Gamma$ inscribatur, et ducantur ZH,

1) U. p. 87 not. 1.

ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν AK κάθετον ἀγομένην· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ O κώνου, ὃν ἡ $E\Delta$ πρὸς AK. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ M κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ N κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ $E\Delta$ πρὸς AK· τῶν ἄρα Ξ, O κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον [ὅμοιοι ἄρα εἰσίν], καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἕξει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὸν O κῶνον ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ M κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ N κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ $E\Delta$ πρὸς AK.

λγ΄.

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ A· λέγω, ὅτι ὁ A ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ὁ A κύκλος· δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ B, Γ, καὶ τῶν B, Γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ Δ, νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα

4 O] BG(C), om. A. 8 τοῦτο] scripsi, το αυτο ABC. 13 ἑξῆς ἡ καταγραφή C. 14 λγ΄] λα΄ AB(C). 17 ἔστω] BC, e corr. G, ως A. 18 ἐστίν] C, εστι A. 21 τοῦ — 22 σφαίρας] AB, om. C.

similia sunt [ex hypothesi], eandem habet rationem $E\Delta$ ad AK, quam radius sphaerae ad rectam a centro sphaerae ad AK perpendicularem ductam;[1]) eandem igitur rationem habet altitudo coni Ξ ad altitudinem coni O, quam $E\Delta$ ad AK. sed etiam diametrus circuli M ad diametrum circuli N eam habet rationem, quam $E\Delta$ ad AK [u. Eutocius]; itaque diametri basium conorum Ξ, O eandem rationem habent, quam altitudines [lemm. 5 p. 74]; quare conus Ξ ad conum O triplicem rationem habet quam diametrus circuli M ad diametrum circuli N [Eucl. XII, 12]. adparet igitur, etiam figuram circumscriptam ad figuram inscriptam triplicem rationem habituram esse quam $E\Delta$ ad AK.[2])

XXXIII.

Cuiusuis sphaerae superficies quadruplo maior est circulo in ea maximo.[3])

sit enim sphaera, et sit A circulus quadruplo maior circulo maximo; dico, circulum A aequalem esse superficiei sphaerae.

si enim aequalis non est, aut maior aut minor est. prius superficies sphaerae maior sit circulo. duae igitur magnitudines inaequales sunt, superficies sphaerae et circulus A; fieri igitur potest, ut sumantur duae rectae inaequales ita, ut maior ad minorem rationem habeat minorem quam superficies sphaerae ad circulum [prop. 2]. sumantur rectae B, Γ, et inter eas media proportionalis sit Δ, fingatur autem etiam sphaera per centrum secta per circulum $EZH\Theta$, et fingatur etiam polygonum in circulo inscriptum et aliud circumscriptum ita, ut polygonum circumscriptum inscripto simile sit, et latus polygoni circumscripti ⟨ad latus inscripti⟩[4]) minorem rationem habeat quam B ad Δ [prop. 3];

1) Quia trianguli ad centra polygonorum similium positi ipsi quoque similes sunt; tum u. Eucl. VI, 4.

2) Quia ex hypothesi coni Ξ, O figuris aequales sunt.

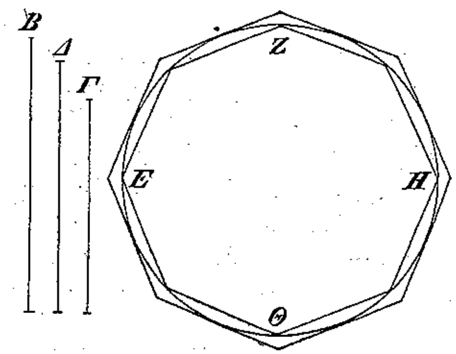
3) Cfr. Simplicius in Aristot. de caelo p. 549, 18 sqq., cfr. p. 550, 10; Hero, Metr. p. 2, 18; 86, 29; Pappus I p. 360.

4) Archimedes non omiserat: πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου

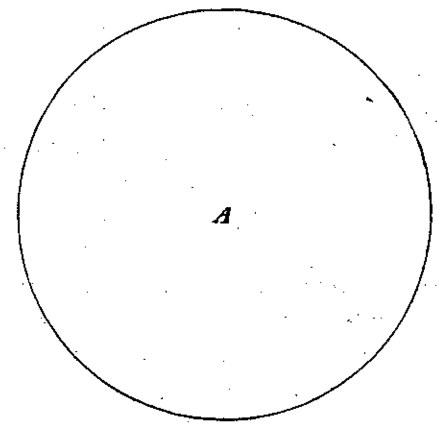
ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ B πρὸς Δ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς B πρὸς Δ διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς B πρὸς τὴν Γ, τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν A κύκλον· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ A κύκλου ἐλάσσων ἐστί [δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ τετραπλασία, τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ A κύκλος]. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ A κύκλου.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ B, Γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν B πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ A κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν B, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω

3 καὶ περιγεγραμμένον] AB, om. C. 6 Δ] C, την Δ A. 9 τῆς δέ] ABC; adcuratius esset τοῦ δὲ τῆς.



quare[1]) superficies figurae circum sphaeram circumscriptae ad superficiem figurae inscriptae minorem rationem habet quam superficies sphaerae ad circulum Δ; quod fieri non potest; nam superficies figurae circumscriptae maior est superficie sphaerae [prop. 28 p. 108], sed superficies figurae inscriptae minor est circulo A [prop. 25].[2]) itaque superficies sphaerae circulo A maior non est.



iam dico, ne minorem quidem eam esse. si enim fieri potest, minor sit; et ut supra inueniantur rectae B, Γ ita, ut B ad Γ minorem rationem habeat quam circulus A ad super-

p. 122, 5. sed cum haec omissio etiam p. 124, 1; 126, 17 al. occurrat, satius duxi, hanc neglegentiam transscriptori tribuere quam cum Nizzio haec uerba omnibus locis addere (ad latus inscripti add. B²); cfr. tamen p. 116, 21.

1) Nam latera polygonorum quadrata et minorem habent rationem quam $B^2 : \Delta^2$, h. e. quam $B : \Gamma$ (Eucl. VI, 20 coroll. 2), et eam, quam superficies figurarum (prop. 32). sed quibus hoc continetur, uerba lin. 6—12 fortasse subditiua sunt; cfr. p. 124, 5.

2) Repetitionem inutilem prop. 25 deleo (lin. 19—22).

πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς *B* πρὸς *Δ* [καὶ τὰ διπλάσια ἄρα]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ *B* πρὸς *Γ*. ἡ δὲ *B* πρὸς *Γ* ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ὁ *A* κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ *A* κύκλου, ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ *A* κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ *A* κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

λδ'.

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ *ΑΒΓΔ*. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ τετραπλασία· ἔστω δὲ ὁ *Ξ* κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ *ΑΒΓΔ* κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ *Ξ* κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος· δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν *Ξ* κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ *K*, *H*, αἱ δὲ *I*, *Θ* εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλή-

2 τοῦ] BCG, το A. 5 ἡ *B* — 6 ἤπερ] C, om. AB. 14 λδ'] λβ' AB(C). 26 ἐλάσσονα (alt.)] (ἐλάσσο)να C, om. A (λόγον ἐλάσσονα BG).

ficiem sphaerae [prop. 2], et *Δ* media inter *B*, *Γ* proportionalis, et inscribatur et circumscribatur rursus polygonum ita, ut latus circumscripti ⟨ad latus inscripti⟩[1]) minorem rationem habeat quam *B* ad *Δ* [prop. 3]; itaque[2]) superficies figurae circumscriptae ad superficiem inscriptae minorem rationem habet quam [*B* : *Γ*. sed *B* : *Γ* minorem rationem habet quam][3]) circulus *A* ad superficiem sphaerae; quod fieri non potest; nam superficies figurae circumscriptae maior est circulo *A* [prop. 30], sed superficies inscriptae minor est superficie sphaerae [prop. 23 p. 94].

itaque ne minor quidem est superficies sphaerae circulo *A*. demonstratum autem est, ne maiorem quidem eam esse; ergo superficies sphaerae aequalis est circulo *A*, h. e. quadruplo maior circulo maximo.

XXXIV.

Quaevis sphaera quadruplo maior est cono basim habenti circulo maximo sphaerae aequalem, altitudinem autem radium sphaerae.[4])

sit enim sphaera et in ea circulus maximus *ΑΒΓΔ*. si igitur sphaera cono, quem significauimus, quadruplo maior non est, sit, si fieri potest, maior quam quadruplo maior; et conus *Ξ* basim habeat quadruplo maiorem circulo *ΑΒΓΔ*, altitudinem autem radio sphaerae aequalem; itaque sphaera maior est cono *Ξ*. erunt igitur duae magnitudines inaequales, sphaera et conus; fieri igitur potest, ut sumantur duae rectae inaequales ita, ut maior ad minorem rationem

1) Cfr. p. 121 not 4.

2) U. p. 123 not. 1. sed uerba praecedentia lin. 2 hic quoque subditiua sunt; nihil enim continent nisi neglegentem et imperfectam significationem uerborum, quae p. 123 not. 1 damnaui.

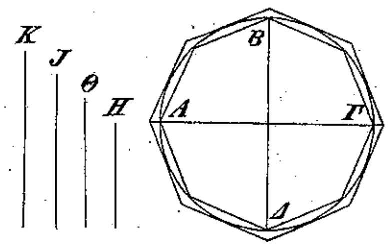
3) Uerba lin. 5 e C recepta Archimedis esse nequeunt; ita enim deesset conclusio: itaque superficies figurarum minorem rationem habent quam *A* ad superficiem sphaerae, et discrepantia a p. 122, 5 sq. offensionem haberet. interpolatoris esse possunt.

4) Cfr. Pappus I p. 360.

λων ὑπερέχειν τὴν *Κ* τῆς *Ι* καὶ τὴν *Ι* τῆς *Θ* καὶ τὴν *Θ* τῆς *Η*, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν *ΑΒΓΔ* κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρότερον, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ἡ *Κ* πρὸς *Ι*, καὶ ἔστωσαν αἱ *ΑΓ*, *ΒΔ* διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς *ΑΓ* διαμέτρου περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται σχήματα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν *ΑΒΓΔ* κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *Κ* πρὸς τὴν *Ι*· ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τριπλασίονα τοῦ *Κ* πρὸς *Ι*. ἔχει δὲ καὶ ἡ *Κ* πρὸς *Η* μείζονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ *Κ* πρὸς *Ι* [τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων]· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ *Κ* πρὸς *Η*. ἡ δὲ *Κ* πρὸς *Η* ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν *Ξ* κῶνον· καὶ ἐναλλάξ· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ *Ξ* κώνου [διότι ὁ μὲν *Ξ* κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ *ΑΒΓΔ* κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ

1 *Θ*] BC, e corr. G, *H* A. 8 *ΑΓ*, *ΒΔ*] B, *ΑΒ* *ΓΔ* AC. 9 *διάμετροι*] in *διά-* des. C. 11 *σχήματα*] scripsi, *το σχημα* AB. Litteras in circulo positas et polygona om. A.

habeat minorem quam sphaera ad conum Ξ [prop. 2]. sint igitur rectae K, H, et rectae I, Θ ita sumantur, ut aequali spatio excedat K rectam I, I rectam Θ, Θ rectam H, fingatur autem etiam in circulo $AB\Gamma\Delta$ polygonum inscriptum, cuius laterum numerus per quattuor diuidi possit, et aliud circumscriptum inscripto simile, sicut antea, latusque polygoni circumscripti ad latus inscripti minorem rationem habeat quam $K:I$ [prop. 3], et $A\Gamma$, $B\Delta$ diametri sint inter se perpendiculares. si igitur manente diametro $A\Gamma$ circumuoluitur[1]) planum, in quo sunt polygona, orientur figurae, altera in sphaera inscripta, altera circumscripta, et figura circumscripta ad inscriptam triplicem rationem habebit quam latus polygoni circumscripti ad latus polygoni in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscripti [prop. 32]. sed latera minorem habent rationem



quam $K:I$ [ex hypothesi]; quare figura circumscripta ⟨ad inscriptam⟩[2]) minorem rationem habet quam $K^3:I^3$. uerum etiam $K:H > K^3:I^3$ [u. Eutocius]; itaque figura circumscripta ad inscriptam multo minorem rationem habet quam $K:H$. sed K ad H minorem rationem habet quam sphaera ad conum Ξ [ex hypothesi]; ⟨quare figura circumscripta ad inscriptam minorem rationem habet quam sphaera

1) Optatiuus *περιενεχθείη* lin. 10 posterioris temporis scriptoribus aptior fortasse transscriptori debetur, cum Archimedes scripsisset: *εἴ κα—περιενεχθῇ*.
2) U. p. 121 not. 4.

τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου ἢ τετραπλάσιον]. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου.

ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἢ τετραπλασία· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ K, H εὐθεῖαι, ὥστε τὴν K μείζονα εἶναι τῆς H καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, καὶ αἱ Θ, I ἐκκείσθωσαν, καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ K πρὸς I, καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον· ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ K πρὸς I· ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ K πρὸς τὴν I. ἡ δὲ K πρὸς τὴν H μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ K πρὸς τὴν I· ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ἡ K πρὸς τὴν H. ἡ δὲ K πρὸς τὴν H ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ Ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου τοῦ

4 ἔστω] AB; fort. ἔστω δή. εἰ] BGH, η A. 8 Θ, I] A, *it* B. 21 I—τήν] mg. G, *i* (corr. ex *h*) que autem *k* ad B, om. A. 24 K] B, HK A.

ad conum Ξ⟩; et permutando [Eucl. V, 16] ⟨figura circumscripta ad sphaeram minorem habet rationem quam figura inscripta ad conum⟩;[1]) quod fieri non potest; nam figura circumscripta maior est sphaera [prop. 28 p. 108], sed inscripta minor cono Ξ [prop. 27]. itaque sphaera maior non est quam quadruplo maior ⟨cono⟩, quem commemorauimus.

⟨iam⟩, si fieri potest, minor sit quam quadruplo maior; sphaera igitur minor est cono Ξ. sumantur igitur rectae K, H ita, ut K maior sit recta H et minorem ad eam rationem habeat quam conus Ξ ad sphaeram [prop. 2], et ponantur rectae Θ, I, ut supra [p. 124, 28 sq.], fingatur autem polygonum in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscriptum et aliud circumscriptum ita, ut latus polygoni circumscripti ad latus inscripti minorem rationem habeat quam $K : I$, et cetera eodem modo, quo antea, comparata; figura igitur solida circumscripta nunc quoque ad inscriptam rationem habebit triplicem quam latus figurae circum $AB\Gamma\Delta$ circumscriptae ad latus inscriptae [prop. 32]. sed latera minorem rationem habent quam $K : I$ [ex hypothesi]; figura igitur circumscripta ad inscriptam minorem rationem habebit quam $K^3 : I^3$. sed $K : H > K^3 : I^3$ [u. Eutocius]; quare figura circumscripta ad inscriptam minorem rationem habet quam $K : H$. sed K ad H minorem rationem habet quam conus Ξ ad sphaeram [ex hypothesi]; ⟨itaque figura circumscripta ad inscriptam minorem rationem habet quam conus Ξ ad sphaeram⟩;[2]) quod fieri non potest; nam figura inscripta minor est sphaera [prop. 28 p. 108], sed figura circumscripta maior cono Ξ [prop. 31 coroll. p. 114]. itaque sphaera ne

1) Nimia breuitas fortasse transscriptori debetur. P. 126, 24 add. B² mg.: quare circumscripta ad inscriptam habet proportionem minorem quam quidem sphera ad conum *x*.

2) Cfr. not. 1. quare figura circumscripta ad inscriptam habet proportionem minorem quam conus *x* ad spheram mg. B².

βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ $AB\Gamma\Delta$ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων· τετραπλασία ἄρα.

[ΠΟΡΙΣΜΑ.]

Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερόν, ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα· δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως [δῆλον, ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογον ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως], ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως, τουτέστι τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου· ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου

4 πόρισμα] om. AB. 20 γίνεται] *Basil.*, γαρ AB. 23 τουτέστι] *Torellius*, της A, om. B.

minor quidem est quam quadruplo maior cono basim habenti aequalem circulo $AB\Gamma\Delta$, altitudinem autem aequalem radio sphaerae. demonstratum autem est, ne maiorem quidem eam esse; ergo quadrupla est.

[COROLLARIUM.][1]

His autem ante demonstratis adparet, quemuis cylindrum basim habentem circulum maximum sphaerae, altitudinem autem diametro sphaerae aequalem, sesquialterum esse sphaerae, et superficiem eius sesquialteram superficiei sphaerae.

nam cylindrus, quem significauimus, sexcuplo maior est cono eandem basim habenti, altitudinem autem aequalem radio,[2] et demonstratum est, sphaeram quadruplo maiorem esse eodem cono [prop. 34]; adparet igitur, cylindrum sphaerae sesquialterum esse. rursus, quoniam demonstratum est, superficiem cylindri praeter bases aequalem esse circulo, cuius radius media sit proportionalis inter latus cylindri et diametrum basis [prop. 13], cylindri autem, quem commemorauimus, sphaeram comprehendentis latus aequale est diametro basis,[3] circulus autem radium habens diametro basis aequalem quadruplo maior est basi [Eucl. XII, 2], h. e. circulo maximo sphaerae, erit etiam superficies cylindri praeter bases quadruplo maior circulo maximo;[4] tota igitur superficies cylindri una cum basibus sexcuplo maior erit

1) Citatur ab Herone, Metr. p. 4, 1; 120, 28, Stereom. I, 1 (cfr. I, 8, 2), Proclo in Eucl. p. 71, 18; cfr. Simplicius in Arist. de caelo p. 549, 21 sqq. coll. p. 550, 10. alio modo demonstrat Pappus I p. 408.

2) Cylindrus enim triplo maior est cono, cuius basis est circulus maximus, altitudo autem diametrus sphaerae (Eucl. XII, 10); sed hic conus duplo maior est cono, cuius basis eadem est, altitudo autem radius (lemm. 1 p. 72).

3) Praue dicitur, inde, quod superficies cylindri aequalis sit circulo illi (ἐπεί lin. 15), colligi posse, mediam proportionalem diametro aequalem esse. itaque uerba δῆλον lin. 20 —βάσεως lin. 21 transscriptori tribuo.

4) Hoc citat Hero, Metr. p. 88, 10 sqq.

κύκλου. ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

λε'.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν AH κύκλος [ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτό, οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν], καὶ μέγιστος κύκλος ὁ $AH\Theta$ καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ $A\Gamma E\Theta Z\Delta H$ χωρὶς τῆς AH πλευρᾶς, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς $A\Gamma$ πλευρᾶς καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν EZ, $\Gamma\Delta$ καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς AK· δεικτέον, ὅτι ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ.

εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ M, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς $E\Theta$ πλευρᾶς καὶ τῆς ἡμισείας τῆς EZ· γίνεται δὴ ὁ M κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν EZ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ N, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς $E\Gamma$ καὶ τῆς ἡμισείας συν-

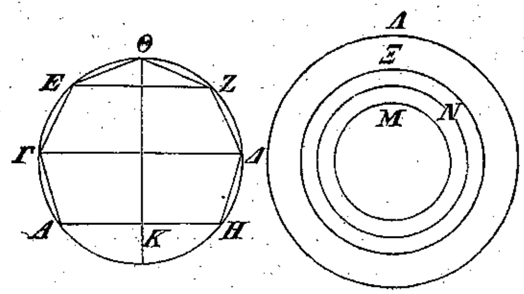
4 λε'] λγ' AB. 7 τῷ] EH, το A. 17 τῷ] EH, το A.

circulo maximo. est autem etiam superficies sphaerae quadruplo maior circulo maximo [prop. 33]; ergo tota superficies cylindri sesquialtera est superficiei sphaerae.

XXXV.

Superficies figurae in segmento[1]) sphaerae inscriptae aequalis est circulo, cuius radius quadratus aequalis est rectangulo, quod continetur uno latere polygoni in segmento circuli maximi inscripti rectaque aequali omnibus rectis basi segmenti parallelis una cum dimidia basi segmenti.

sit sphaera et in ea segmentum, cuius basis circulus circum AH descriptus,[2]) et circulus maximus $AH\Theta$ et $A\Gamma E\Theta Z\Delta H$ polygonum ⟨aequilaterum⟩,[3]) cuius latera



paria sint numero praeter latus AH, et sumatur circulus Λ, cuius radius quadratus aequalis sit rectangulo

$$A\Gamma \times (EZ + \Gamma\Delta + AK);$$

demonstrandum, circulum aequalem esse superficiei figurae.

1) Cum segmentum hic primum nominetur, scriptum esse debuit lin. 5—6 εἰς τμῆμα σφαίρας; sed cfr. p. 136, 10; 138, 9. cfr. p. 137 not. 1.

2) In uerbis uncis inclusis lin. 13—14 offendit et asyndeton (et ins. B) et locus; haec enim figura oritur ex polygono lin. 15 demum nominato. quare ea interpolatori tribuo; cfr. p. 136, 17 sqq. quae sit figura illa inscripta (lin. 5), e prop. 23 satis notum est; sed prop. 35 post prop. 36 collocanda fuit.

3) Hoc ab Archimede praetermissum non fuit (Quaest. Arch. p. 76); ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον Nizzius.