ARCHIMEDIS
OPERA OMNIA
CUM COMMENTARIIS EUTOCII

ITERUM EDIDIT

J. L. HEIBERG
PROFESSOR HAUNIENSIS

VOLUMEN II

MDCCCCXIII
LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI

QUADRATURA PARABOLAE.

Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημες ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστεῖλαι τοι γράψαντες, ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμες, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμάματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν

1 Ἀρχιμηδους τετραγ. A, liber Archimedis qui dicitur quadratura parabolae 𝔅. 3 οὐδὲν ἐπιλείπων] scripsi, ετι λειπων A, om. 𝔅. 4 ἐν φιλίᾳ] A, amicus 𝔅. τὶν] scripsi, τινα A𝔅, τένη *Torellius*. 5 εἶμεν] A, fore 𝔅. 6 εἵνεκεν] A; om. 𝔅, mg. grauiter. καὶ] A, om. 𝔅. 8 τοι] *Torellius*, om. A𝔅. 9 ἐγνωκότες ἦμες] ἐγνωκότες ἦμεν H, εγνωκοτες ειμεν A, consueueramus 𝔅. 11 ἁμῶν] ημων A; aliis 𝔅, mg. in alio a nobis. 12 καὶ] A, om. 𝔅. ἐπιδειχθέν. τῶν] A, demonstratis 𝔅. 13 οὖν] addidi, om. A𝔅. 15 ἐὸν] A, erat 𝔅. 16 ταῦτα] A, hoc 𝔅. 19 διόπερ] *Torellius*, οπερ A; quae quidem 𝔅, mg. οπερ.

Quadratura parabolae.[1]

Archimedes Dositheo s.

Cum audiuissem, Cononem mortuum esse, qui erga nos nullum amicitiae officium neglegebat, te autem Cononi familiarem fuisse geometriaeque esse peritum, demortui causa dolore adfecti sumus, quippe qui et amicus et in mathematicis admirabili acumine praeditus esset, suscepimus autem ad te per litteras, sicuti ad Cononem mittere constitueramus, geometricorum theorematum quoddam mittere, quod antea perspectum non erat, nunc uero a nobis perspectum est, prius per mechanica inuentum, postea autem etiam per geometrica demonstratum. eorum enim, qui antea in geometria uersati sunt, quidam[2]) conati sunt scribere, fieri posse, ut spatium rectilineum inueniretur dato circulo et dato circuli segmento aequale, et deinde spatium totius[3]) coni sectione rectaque comprehensum quadrare conabantur lemmata minime manifesta adsumentes; quare plerique agnouerunt, haec

1) Hic titulus ab Archimede profectus esse nequit; cfr. Eutocius ad pl. aeq. II, 8.

2) De circuli quadratura egerant praeter alios Antipho, Hippias, Hippocrates; hunc maxime significat Archimedes. adparet, Archimedem, cum haec scriberet, nondum ipsum de dimensione circuli egisse.

3) ὅλου τοῦ κώνου τομά uix alia esse postest quam ellipsis. sed et insolenter dictum est, et offendit, quod propter καὶ εὐθείας etiam de segmentis ellipsis accipiendum est; cfr. Quaest. Arch. p. 149. de conatibus ellipsim quadrandi ante Archimedem nihil notum est.

πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθεν. τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται· δείκνυται γάρ, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τᾶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρωμένοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λῆμμά τι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶ-

1 *κατεγνώσθεν* mg. 𝔅 (despecta sunt). *δὲ ὑπ' εὐθείας*] *Torellius*, om. A, autem (contentam) a 𝔅. 2 *τε*] addidi, om. A𝔅. *καὶ*] A, om. 𝔅. 3 *προτέρων*] scripsi, *πρωτων* A𝔅. 11 *ἑαυτᾷ*] addidi, om. A, excessum in ras. 𝔅. 15 *αὐτῷ τούτῳ*] scripsi, *αυτῳ* A, hoc 𝔅. 17 *ὅτι*] addidi, om. A𝔅. *πυραμὶς*] H, e corr. G, *μυραμις* A. 21 *ὁμοῖον*] scripsi, *ομοιως* A𝔅. 22 *λῆμμά τι*] *λημματι* A𝔅. 23 *δὲ*] *Torellius*, om. A𝔅. 24 *τοῦ λήμματος*] A, om. 𝔅. 25 *ἀρκεῖ*] scripsi, sufficit 𝔅, *αρτι* A. 26 *τούτοις*] scripsi, *τουτου* A𝔅, *τούτων* *Torellius*. *ἀναγμένων*] scripsi, *αναγμενον* A𝔅, *ἀναγομένων* G.

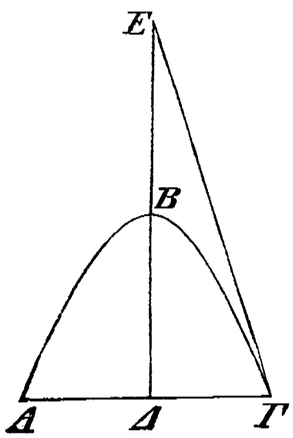
ab iis inuenta non esse. segmentum autem linea recta sectioneque coni rectanguli comprehensum neminem ex prioribus quadrare conatum esse scimus, id quod iam a nobis inuentum est; demonstramus enim, quoduis segmentum linea recta sectioneque coni rectanguli comprehensum tertia parte maius esse triangulo basim eandem habenti quam segmentum et altitudinem aequalem, hoc ad demonstrationem adsumpto lemmate,[1] spatiorum inaequalium excessum, quo maius excedat minus, sibi ipsum additum quoduis spatium datum terminatum excedere posse. hoc autem lemmate priores quoque geometrae usi sunt; nam circulos duplicem rationem habere inter se quam diametros [Eucl. XII, 2], hoc ipso lemmate usi demonstrauerunt, et sphaeras triplicem inter se rationem habere quam diametros [Eucl. XII, 18], et porro quamuis pyramidem tertiam esse partem prismatis eandem basim habentis, quam pyramis, et altitudinem aequalem [Eucl. XII, 7]; et quemuis conum tertiam esse partem cylindri eandem basim habentis, quam conus, et altitudinem aequalem [Eucl. XII, 10], demonstrabant lemma illi simile [Eucl. X, 1] adsumentes. accidit autem, ut omnia illa theoremata nullo minus eorum, quae sine hoc lemmate demonstrata sunt, certa habeantur; et satis mihi est, si ea, quae nunc edimus, ad eandem fidem perducta sunt. demonstrationes igitur eorum a nobis conscriptas mittimus, prius, quo

1) De hoc lemmate cfr. De sph. et cyl. I p. 9 not. 2, De spiral. II p. 12, 6 sqq. inter priores geometras (lin. 13) praecipue de Eudoxo cogitandum esse, adparet ex I p. 4, 5 sqq., ubi Eucl. XII, 7 et 10 ei adtribuuntur, quarum haec ope Eucl. X, 1 demonstratur, illa alio prorsus modo (u. Studien über Euklid p. 34). in Eucl. XII, 2 usurpatur X, 1, in XII, 18 neque hoc neque lemma Archimedis. cfr. Quaest. Archim. p. 150.

τον μέν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καί, ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰς ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

α΄.

Εἴ κα ἦι ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς ἁ $AB\Gamma$, *ἁ δὲ* $B\Delta$ *παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ* $A\Gamma$ *παρὰ τὰν κατὰ τὸ* B *ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα ἐσσεῖται ἁ* $A\Delta$ *τᾷ* $\Delta\Gamma$· *κἂν ἴσα ἦι ἁ* $A\Delta$ *τᾷ* $\Delta\Gamma$, *παραλλήλοι ἐσσοῦνται ἅ τε* $A\Gamma$ *καὶ ἁ κατὰ τὸ* B *ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς.*



β΄.

Εἴ κα ἦι ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ $AB\Gamma$, *ἦι δὲ ἁ μὲν* $B\Delta$ *παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ* $A\Delta\Gamma$ *παρὰ τὰν κατὰ τὸ* B *ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ δὲ* $E\Gamma$ *τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ* Γ, *ἐσσοῦνται αἱ* $B\Delta$, BE *ἴσαι.*

γ΄.

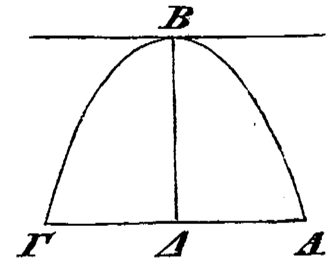
Εἴ κα ἦι ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ $AB\Gamma$, *ἁ δὲ* $B\Delta$ *παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ* $A\Delta$, EZ *παρὰ τὰν κατὰ τὸ* B *ἐπιψαύ-*

7 *ἁ δὲ*] *η δε* A𝔅, *ἦι δὲ ἁ μὲν* *Basil.*; cfr. lin. 14. 10 *τᾷ* $\Delta\Gamma$] 𝔅G, om A. *ἅ τε*] 𝔅G, *αιτε* A. 11 *ἐπιψαύουσα*] 𝔅G, *επιψανουσαι* A. 22 *ἦι*] 𝔅EG, supra scr. D, om. H.

modo per mechanica perspecta sunt, deinde uero etiam, quo modo per geometrica demonstrantur. praemittuntur autem etiam conica elementa ad demonstrationem utilia. uale.

I.

Si data est sectio coni rectanguli, in qua est $AB\Gamma$, et recta $B\Delta$ diametro parallela est uel ipsa diametrus, $A\Gamma$ autem rectae in B sectionem coni contingenti parallela, erit $A\Delta = \Delta\Gamma$; et si $A\Delta = \Delta\Gamma$, recta $A\Gamma$ rectaque in B sectionem coni contingens parallelae erunt [Apollon. I, 46].[1])

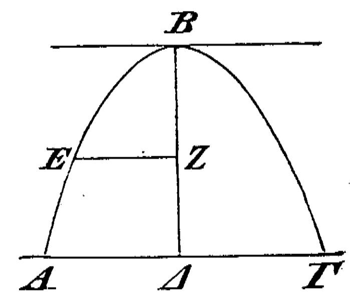


II.

Si $AB\Gamma$ sectio est coni rectanguli, et recta $B\Delta$ diametro parallela est uel ipsa diametrus, recta autem $A\Delta\Gamma$ rectae in B sectionem coni contingenti parallela est, et recta $E\Gamma$ sectionem in puncto Γ contingit, erit $B\Delta = BE$ [Apollon. I, 35].[2])

III.

Si $AB\Gamma$ sectio est coni rectanguli, et recta $B\Delta$ diametro parallela uel ipsa diametrus, ducuntur autem rectae quaedam $A\Delta$, EZ



1) Cfr. ZMP. XXV p. 51 nr. 14.
2) Cfr. ibid. p. 53 nr. 16.

ὀρθογωνίου] 𝔅GH, *ορθογωνιον* A. *ἁ δὲ*] *Torellius*, *η δε* A, *ἦι δὲ* 𝔅E. 23 *αὐτὰ*] 𝔅, *αυτα τα* A, *αὐτὰ ἁ* G. *διάμετρος*] 𝔅G, *διαμετρῳ* A. *ἀχθέωντί*] *ἀχθῶσι* E, *αχθωσαν* A. 24 *παρὰ — B*] 𝔅, om. A. *ἐπιψαύουσαν*] A𝔅; *ἐπιψαύουσαι* G, mg. *παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν.*

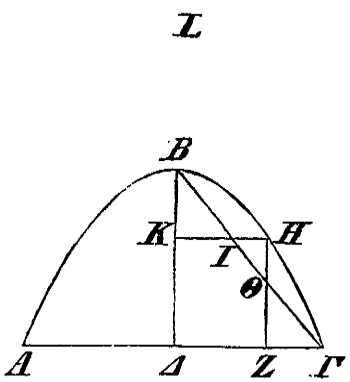
ουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται, ὡς ἁ $B\varDelta$ ποτὶ τὰν BZ, δυνάμει ἁ $A\varDelta$ ποτὶ τὰν EZ.

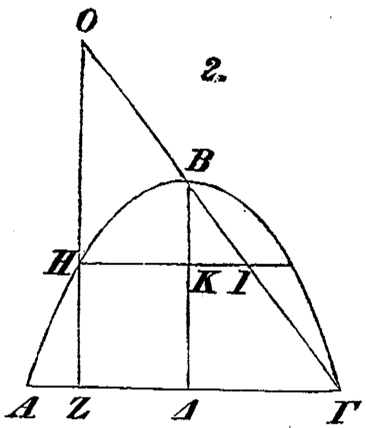
ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ'.

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ $AB\Gamma$, ἁ δὲ $B\varDelta$ ἀπὸ μέσας τᾶς $A\Gamma$ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω ἢ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ $B\Gamma$ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή κα ἀχθῇ τις ἄλλα ἁ $Z\Theta$ παρὰ τὰν $B\varDelta$ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν B, Γ εὐθεῖαν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ $Z\Theta$ ποτὶ τὰν ΘH, ὃν ἁ $\varDelta A$ ποτὶ τὰν $\varDelta Z$.

ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ H παρὰ τὰν $A\Gamma$ ἁ KH· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ $B\varDelta$ ποτὶ τὰν BK μάκει, οὕτως ἁ $\varDelta\Gamma$ ποτὶ τὰν KH δυνάμει· ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται





ἄρα, ὡς ἁ $B\Gamma$ ποτὶ τὰν BI μάκει, οὕτως ἁ $B\Gamma$ ποτὶ τὰν $B\Theta$ δυνάμει· ἴσαι γὰρ αἱ $\varDelta Z$, KH· ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ $B\Gamma$, $B\Theta$, BI γραμμαί. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ $B\Gamma$ ποτὶ τὰν $B\Theta$, ὃν ἁ $\Gamma\Theta$ ποτὶ τὰν ΘI· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ $\Gamma\varDelta$ ποτὶ τὰν $\varDelta Z$, οὕτως ἁ ΘZ

rectae in B sectionem coni contingenti parallelae, erit $B\varDelta : BZ = A\varDelta^2 : EZ^2$.[1])

Haec autem in elementis conicis demonstrata sunt.[2])

IV.

Sit $AB\Gamma$ segmentum linea recta sectioneque coni rectanguli comprehensum, et a media recta $A\Gamma$ ducatur $B\varDelta$ diametro parallela, uel ipsa diametrus sit, ducta autem recta $B\Gamma$ producatur.[3]) si igitur alia recta $Z\Theta$ rectae $B\varDelta$ parallela ducitur, ita ut rectam per B, Γ ductam secet, erit $Z\Theta : \Theta H = \varDelta A : \varDelta Z$.

ducatur enim per punctum H recta KH rectae $A\Gamma$ parallela; erit igitur $B\varDelta : BK = \varDelta\Gamma^2 : KH^2$; hoc enim demonstratum est[4]) [prop. 3]. erit igitur

$$B\Gamma : BI = B\Gamma^2 : B\Theta^2;\ \text{nam}\ \varDelta Z = KH;^{5)}$$

itaque rectae $B\Gamma$, $B\Theta$, BI proportionales sunt [Eucl. V

1) Apollon. I, 20; ZMP. XXV p. 50 nr. 12.

2) In elementis conicis Aristaei et Euclidis; ibid. p. 42.

3) Respicitur ad fig. 2 solam; sed cfr. ZMP. XXV p. 58**. in 𝔅 ad figuras adscribitur: in utroque (in ras.) exemplari erant duae figurationes.

4) Sc. a prioribus, ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις; neque enim in prop. 3 demonstratum est. sed fortasse ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο lin. 14 interpolata sunt. ceterum debuit esse $A\varDelta^2 : KH^2$; sed $A\varDelta = \varDelta\Gamma$.

5) Itaque $\varDelta\Gamma : KH = \varDelta\Gamma : Z\varDelta = B\Gamma : B\Theta$; et

$$B\varDelta : BK = B\Gamma : BI$$

(Eucl. VI, 2).

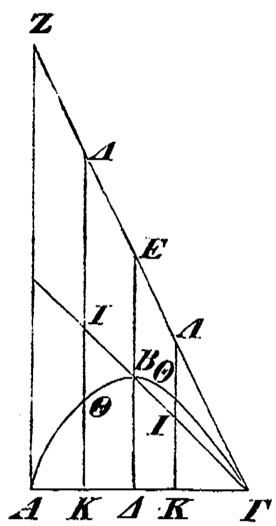
1 $B\varDelta$] A, *bd* longitudine 𝔅. 2 BZ] A, BZ μάκει e corr. G, *bz* ita 𝔅. 3 δὲ] 𝔅, δη A. 6 τὸ] A, om. 𝔅. 9 κα ἀχθῇ] scripsi, καταχθειη A, producatur 𝔅. 10 B] 𝔅, $\varDelta$ A. 12 H] 𝔅, I A. KH] A, KI G, *hk* supra scr. at *ki* 𝔅 13 ἄρα] A, autem 𝔅. 14 KH] *Basil.*, KI A𝔅, in alio *kh* mg. 𝔅. 15 ποτὶ (alt.) — 17 $B\Gamma$] 𝔅, om. A. 19 $\varDelta Z$ — p. 270, 1 ΘH] 𝔅, ΘH seq. lac. magna A.

ποτὶ τὰν ΘΗ. τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἐστὶν ἁ ΔΑ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ, ὃν ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ.

ε'.

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ ἁ ΓΖ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παρὰ τὰν ΑΖ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς καὶ ἁ ΑΓ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας [ἀνάλογον], ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς ΑΓ τὸ ποτὶ τῷ Α τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τῷ Α.

ἄχθω γάρ τις ἁ ΔΕ παρὰ τὰν ΑΖ, καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ ΔΕ τὰν ΑΓ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ καὶ ἀγμένα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΔ, ΔΓ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ ΑΓ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν, ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν ἁ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΕ ἄκται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΔΓ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ ΕΒ τᾷ ΒΔ· ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΕ. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν ΑΓ, δέδεικται· εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ ΚΛ



4 ε'] om. A𝔅; et sic deinceps. 11 ἀνάλογον] A, om. 𝔅; delendum cum *Basil.* et *Torellio*. 12 τὸ ποτὶ τῷ] scripsi, ποτι το A𝔅. 13 τῷ (tert.)] scripsi, τα A, τὸ (𝔅). 14 παρὰ] 𝔅, ποτι A.

def. 9]. quare erit $B\Gamma : B\Theta = \Gamma\Theta : \Theta I$;[1]) erit igitur

$$\Gamma\Delta : \Delta Z = \Theta Z : \Theta H.$$[2])

sed $\Delta A = \Delta\Gamma$; ergo adparet, esse

$$\Delta A : \Delta Z = Z\Theta : \Theta H.$$

V.

Sit $AB\Gamma$ segmentum linea recta sectioneque coni rectanguli comprehensum, et a puncto A diametro parallela ducatur recta ZA, a Γ autem recta ΓZ sectionem coni in puncto Γ contingens. iam si in triangulo $ZA\Gamma$ rectae AZ parallela recta aliqua ducitur, in eadem ratione et recta ducta a sectione coni rectanguli et $A\Gamma$ a ducta recta secta erit, pars autem rectae $A\Gamma$ ad A sita respondebit parti ductae rectae ad A sitae.

ducatur enim recta aliqua ΔE rectae AZ parallela, et primum recta ΔE rectam $A\Gamma$ in duas partes aequales secet. iam quoniam $AB\Gamma$ sectio est coni rectanguli, $B\Delta$ autem diametro parallela, et $A\Delta = \Delta\Gamma$, recta in puncto B sectionem coni rectanguli contingens rectae $A\Gamma$ parallela erit [prop. 1 b]. rursus, quoniam recta ΔE diametro parallela est, a puncto Γ autem recta ΓE ducta est sectionem coni rectanguli in Γ contingens, et recta $\Delta\Gamma$ rectae in puncto B contingenti parallela est, erit $EB = B\Delta$ [prop. 2]; quare $A\Delta : \Delta\Gamma = \Delta B : BE$. si igitur recta ducta rectam $A\Gamma$ in duas partes aequales diuidit, demonstratum est propositum; si minus, alia recta KA rectae AZ parallela ducatur; de-

1) Quia $B\Gamma : B\Theta = B\Theta : BI$ siue (Eucl. V, 16)

$$BI : B\Theta = B\Theta : B\Gamma,$$

erit (Eucl V, 18) $I\Theta : B\Theta = \Theta\Gamma : B\Gamma$; tum u. Eucl. V, 16.

2) Nam $B\Gamma : B\Theta = \Gamma\Delta : \Delta Z$, et $\Gamma\Theta : \Theta I = \Theta Z : \Theta H$ (Eucl. VI, 2).

παρὰ τὰν AZ· δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ AK ποτὶ τὰν $K\Gamma$, ὃν ἁ $K\Theta$ ποτὶ τὰν $\Theta\Delta$. ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ BE τᾷ $B\Delta$, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ $I\Delta$ τᾷ KI· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΔK ποτὶ τὰν KI, ὃν ἁ $A\Gamma$ ποτὶ τὰν ΔA. ἔχει δὲ καὶ ἁ KI ποτὶ τὰν $K\Theta$ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔA ποτὶ τὰν AK· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ $K\Theta$ ποτὶ τὰν $\Theta\Delta$, ὃν ἁ AK ποτὶ τὰν $K\Gamma$. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ϛʹ.

Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ] προκείμενον [δρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καὶ τᾶς AB γραμμᾶς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ $B\Delta\Gamma$ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ B γωνίαν καὶ τὰν $B\Gamma$ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τᾶς AB τῇ $B\Gamma$], κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν B, Γ σαμείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Z ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ A, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Z χωρίον κατὰ τὸ A κρεμάμενον τῷ $B\Delta\Gamma$ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δή, τὸ Z χωρίον τοῦ $B\Delta\Gamma$ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη κα ἁ $A\Gamma$ γραμμὰ παρὰ τὸν ὁρίζοντα, αἱ δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ $A\Gamma$ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρί-

2 τὰν (pr.)] G, e corr. E, τον A. 4 ἁ ΔK] 𝔅, om. A. 7 ὥστε] 𝔅, ως A. 11 τὸ (pr.) — 12 δρώμενον] A, propositum 𝔅. 12 ἐπίπεδον ὀρθὸν] scripsi, επι ορθου A𝔅. 13 ἔπειτα] A, om. 𝔅. τὰ] A, hoc 𝔅. 14 κάτω νοείσθω] G, κατανοεισθω A𝔅. τὰ] A, hoc 𝔅. 15 τῷ] scripsi, τα A, τὸ

monstrandum igitur, esse $AK : K\Gamma = K\Theta : \Theta\Delta$. nam quoniam $BE = B\Delta$, erit etiam $I\Delta = KI$;[1]) itaque

$$\Delta K : KI = A\Gamma : \Delta A.$$

uerum etiam $KI : K\Theta = \Delta A : AK$; hoc enim in praecedenti demonstratum est;[2]) quare erit $K\Theta : \Theta\Delta = AK : K\Gamma$.[3]) ergo constat propositum.

VI.

Fingatur autem planum suppositum[4]) ad horizontem perpendiculare, et quae in eadem parte rectae AB sunt, in qua est punctum Δ, infra esse fingantur, quae in altera, supra, triangulus autem $B\Delta\Gamma$ sit rectangulus angulum ad B positum rectum habens et latus $B\Gamma$ dimidiae librae aequale,[5]) suspendatur autem triangulus ex punctis B, Γ, et in altera parte librae aliud spatium Z ex puncto A suspendatur, spatiumque Z ex A suspensum cum triangulo $B\Delta\Gamma$ ita se habenti, uti nunc positus est, aequilibritatem seruet. dico igitur, spatium Z tertiam partem esse trianguli $B\Delta\Gamma$.

nam quoniam suppositum est, libram aequilibritatem seruare, recta $A\Gamma$ horizonti parallela erit, et rectae ad $A\Gamma$ perpendiculares in plano ad horizontem perpendiculari ductae ad horizontem perpendiculares erunt.[6]) secetur igitur

1) ZMP. XXIV p. 178 nr. 3.

2) Ex prop. 4 erit $KI : I\Theta = A\Delta : K\Delta$; tum u. Eucl. V, 19 coroll.

3) Erit enim (Eucl. V, 22) $K\Delta : K\Theta = A\Gamma : AK$; tum u. Eucl. V, 17 et 7 coroll.

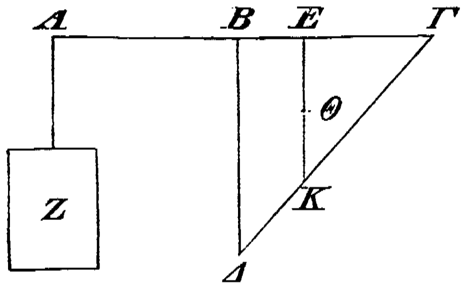
4) De toto hoc loco u. Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. V p. 67.

5) Uerba inepta δηλονότι — $B\Gamma$ lin. 17 sine dubio interpolata sunt.

6) Nam $A\Gamma$ ei rectae, secundum quam planum perpendiculare horizontem secat, parallela erit (Eucl. XI, 16); quare rectae ad $A\Gamma$ perpendiculares etiam ad illam rectam perpendiculares erunt (Eucl. I, 29). tum u. Eucl. XI def. 4.

Torellius. 21 ἔχοντι] Torellius, εοντι A𝔅. 24 εἴη κα] scripsi, εηκα A, assimilatur 𝔅. 25 παρὰ τὸν ὁρίζοντα, αἱ] Torellius, αυτον οριζονται A, ipsi orizonti 𝔅.

ζοντα καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμάσθω δὴ ἁ ΒΓ γραμμὰ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τᾶς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΒ ἁ ΚΕ



καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΓ τριγώνου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. εἴ κα οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἁ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἐξ οὗ σαμείου κα κατασταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν Ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δῆλον, ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκεσιν, καί ἐστιν, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἁ ΑΒ τᾶς ΒΕ· καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Ζ χωρίου.

φανερὸν δὲ [ὅτι] καί, εἴ κα τριπλάσιον ᾖ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζʹ.

Ἔστω πάλιν ζυγὸς ἁ ΑΓ γραμμά, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον], τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ

recta ΒΓ in puncto Ε ita, ut sit $ΓΕ = 2\,ΕΒ$, et ducatur recta ΚΕ rectae ΔΒ parallela seceturque in puncto Θ in duas partes aequales; itaque punctum Θ trianguli ΒΔΓ centrum grauitatis est; hoc enim in Mechanicis demonstratum est [De plan. aequil. I, 14].[1]) iam si trianguli ΒΔΓ ex punctis Β, Γ suspendium soluitur, et ex Ε suspenditur, triangulus manebit, ut nunc se habet; omnia enim suspensa, in quocunque puncto posita sunt, ita manent, ut punctum suspendii centrumque grauitatis suspensi in perpendiculari posita sint; nam hoc quoque demonstratum est.[2]) quoniam igitur triangulus ΒΓΔ eandem positionem habebit ad libram, ut antea cum eo aequilibritatem seruabit spatium Z. et quoniam spatium Z ex Α suspensum triangulusque ΒΔΓ ex Ε suspensus aequilibritatem seruant, adparet, ea in contraria longitudinum proportione esse [De plan. aequil. I, 6—7], et esse $ΒΔΓ : Z = ΑΒ : ΒΕ$. sed $ΑΒ = 3\,ΒΕ$; ergo etiam $ΒΔΓ = 3\,Z$.

et manifestum est etiam, si triangulus ΒΔΓ triplo maior sit spatio Z, aequilibritatem ea seruatura esse.

VII.

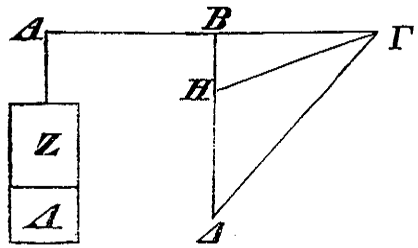
Rursus recta ΑΓ libra sit, mediumque eius sit Β, et ex Β suspendatur,[3]) ΓΔΗ autem triangulus sit obtusiangulus basim habens rectam ΔΗ, altitudinem uero rectam dimi-

1) Cfr. ZMP. XXIV p. 179 nr. 6.
2) Sine dubio ab Archimede ipso in libro de centro grauitatis olim edito.
3) Sc. libra; cfr. p. 276, 16. nam triangulus ΓΔΗ non ex Β, sed ex Β et Γ suspenditur (p. 276, 1).

1 καθέτοι] 𝔅, καθετοις A. 10 ἁ] *Torellius*, ο A. 11 λυθῇ] scripsi, λυθειη A. 12 μενεῖ] manet 𝔅. 13 κα κατασταθῇ] scripsi, κατασταθεν A, statutum est 𝔅 (-atu- in ras.). 16 γὰρ] 𝔅, ουν A. 17 ΒΓΔ] A, *bdg* 𝔅. 18 ἰσορροπέοντι] E, ισορροπεωντι A. 24 ὅτι] A𝔅, deleo. 28 τὸ ΓΔΗ τρίγωνον] A𝔅, deleo.

ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου.

κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον



μέρος ἐὸν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ ΖΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Λ, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΛ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ, φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ.

η'.

Ἔστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τᾷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον. φαμὶ δή, τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μεῖζον.

λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἁ ΘΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ

1 ΔΓΗ] A, gdh 𝔅. 3 τῷ] GH, το A. 4 δὴ] scripsi, δε A𝔅. 5 τρίτον] A, esse tertia 𝔅. 6 τι] 𝔅DE, τοι GH. 8 δὴ] scripsi, δε A𝔅. 11 Λ] 𝔅, Α A. 12 καὶ —

diae librae aequalem, et triangulus ΔΓΗ ex punctis Β, Γ suspendatur, spatium Z autem ex Α suspensum cum triangulo ΓΔΗ ita se habenti, ut nunc positus est, aequilibritatem seruet. iam eodem modo demonstrabimus, spatium Z tertiam partem esse trianguli ΓΔΗ.

suspendatur enim etiam aliud spatium ⟨Λ⟩ ex puncto Α, quod tertia pars sit trianguli ΒΓΗ; triangulus igitur ΒΔΓ cum spatio Z + Λ aequilibritatem seruabit.[1]) iam quoniam triangulus ΒΓΗ cum spatio Λ triangulusque ΒΓΔ cum Z + Λ aequilibritatem seruant, et tertia pars trianguli ΒΔΓ est spatium Z + Λ,[2]) manifestum est, triangulum ΓΔΗ triplo maiorem esse spatio Z.

VIII.

Libra sit ΑΒΓ mediumque eius punctum Β, et ex puncto Β suspendatur, ΓΔΕ autem triangulus sit rectangulus angulum ad Ε positum rectum habens, et in libra ex punctis Γ, Ε suspendatur, spatium uero Z ex Α suspendatur et cum ΓΔΕ ita se habenti, ut nunc positus est, aequilibritatem seruet, sit autem

$$AB : BE = \Gamma\Delta E : K.$$

dico igitur, spatium Z minus esse triangulo ΓΔΕ, maius autem spatio Κ.

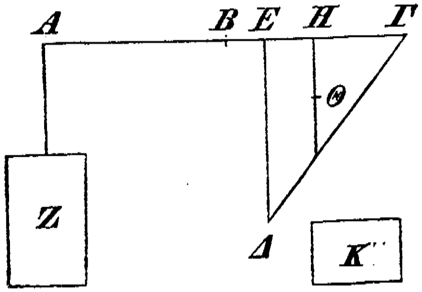
sumatur enim trianguli ΔΕΓ centrum grauitatis et sit Θ [p. 274, 1 sqq.], rectae autem ΔΕ parallela ducatur ΘΗ. iam quoniam triangulus ΓΔΕ cum spatio Z aequilibritatem seruat, erit

1) Nam suppositum est, Z et ΓΔΗ aequilibritatem seruare, et Λ cum ΒΗΓ aequilibritatem seruat (prop. 6 b). hinc autem hoc quoque sequitur, esse $B\Delta\Gamma = 3(Z + \Lambda)$ (prop. 6).

2) Est enim etiam $\Lambda = \frac{1}{3} B\Gamma H$.

13 ΖΛ] A, om. 𝔅. 13 ΖΛ] G, ΖΑ A. 14 τριπλάσιον] A, triplum est 𝔅. 16 ΑΒΓ] 𝔅, ΑΒ A, ΑΓ *Riualtus*. κρεμάσθω] GH, κεκρεμασθω A𝔅. 17 δὲ] addidi (cfr. p. 275 not. 3), om. A𝔅. 18 τῷ] scripsi, ταν A, τὸ *Torellius*. 25 ΔΕΓ] A, gde 𝔅.

χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Z, ὃν ἁ AB ποτὶ τὰν BH· ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ Z τοῦ ΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Z τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ BΔ ποτὶ τὰν BH, ποτὶ δὲ τὸ K, ὃν ἁ BΔ ποτὶ τὰν BE, δῆλον, ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ K ἢ ποτὶ τὸ Z· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Z τοῦ K.



θ'.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν AΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ B, τὸ δὲ ΓΔK τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔK, ὕψος δὲ τὰν EΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, E, τὸ δὲ Z χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ A καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΓK τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ AB ποτὶ τὰν BE, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔK τρίγωνον ποτὶ τὸ Λ. φαμὶ δή, τὸ Z τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ ΔΓK ἔλασσον.

δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι'.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ABΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ B, τὸ δὲ BΔHK τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς B, H σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ KΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσαν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ AB ποτὶ τὰν

5 ἔχει] 𝔅, εχον A. 14 ἀμβλυγώνιον] A, sit ambligonium 𝔅. 15 κρεμάσθω] *Basil.*, κεκρεμασθω A. 16 κρεμάσθω] *Basil.*, κεκρεμασθω A. 17 ΔΓK] 𝔅, ΔEK A. 22 ὁμοίως] A, autem similiter 𝔅. 25 τὸ B] A, sit *b* 𝔅. τραπέζιον] scripsi, τραπεζειον A; et sic deinceps. 27 AB] 𝔅, BA A.

$$\Gamma\Delta E : Z = AB : BH \text{ [De plan. aequil. I, 6—7]};$$

quare $Z < \Gamma\Delta E$. et quoniam est

$$\Gamma\Delta E : Z = B\Delta : BH,$$

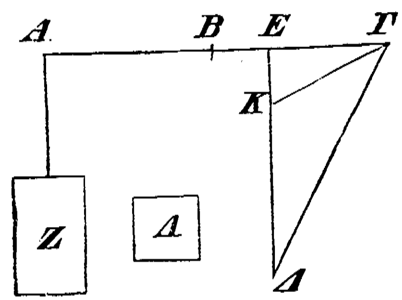
et $\Gamma\Delta E : K = B\Delta : BE$ [ex hypothesi], adparet, esse

$$\Gamma\Delta E : K > \Gamma\Delta E : Z$$

ergo $Z > K$ [Eucl. V, 10].

IX.

Rursus sit $A\Gamma$ libra mediumque eius punctum B et $\Gamma\Delta K$ triangulus obtusiangulus basim habens ΔK, altitudinem autem $E\Gamma$, et in libra ex Γ, E suspendatur, Z autem spatium ex A suspendatur et cum triangulo $\Delta\Gamma K$ ita se habenti, ut nunc positus est, aequilibritatem seruet, sit autem



$$\Gamma\Delta K : \Lambda = AB : BE.$$

dico igitur, spatium Z maius esse spatio Λ, minus autem triangulo $\Delta\Gamma K$.

demonstrabitur eodem modo, quo praecedens propositio.

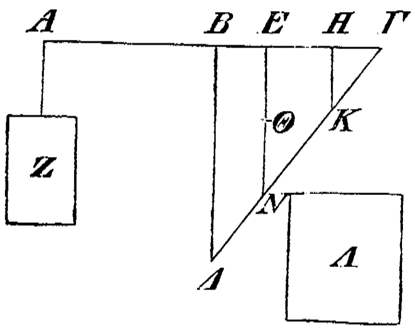
X.

Rursus sit $AB\Gamma$ libra mediumque eius punctum B et $B\Delta HK$ trapezium angulos ad puncta B, H positos rectos habens latusque $K\Delta$ ad Γ uergens, et sit

$$B\Delta KH : \Lambda = AB : BH,$$

BH, τοῦτον ἐχέτω τὸ $B\varDelta KH$ τραπέζιον ποτὶ τὸ $\varLambda$, κρεμάσθω δὲ τὸ $B\varDelta HK$ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ B, H σαμεῖα, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ Z χωρίον κατὰ τὸ A καὶ ἰσορροπείτω τῷ $B\varDelta KH$ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμί, τὸ Z χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ $\varLambda$.

τετμάσθω γὰρ ἁ $A\Gamma$ κατὰ τὸ E οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς $\varDelta B$ καὶ ἁ KH ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς KH καὶ τὰν $B\varDelta$, τοῦτον ἔχειν τὰν EH ποτὶ τὰν BE, καὶ διὰ τοῦ E παρὰ τὰν $B\varDelta$ ἀχθεῖσα ἁ EN τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ $B\varDelta HK$ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. ἢν οὖν τὸ $B\varDelta HK$ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ E κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν B, H σαμείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ Z χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ $B\varDelta HK$ τραπέζιον κατὰ τὸ E κρεμάμενον τῷ Z χωρίῳ κατὰ τὸ A κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται, ὡς ἁ AB ποτὶ τὰν BE, τὸ $B\varDelta HK$ τραπέζιον ποτὶ τὸ Z χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ $B\varDelta HK$ τραπέζιον ποτὶ τὸ Z ἤπερ ποτὶ τὸ $\varLambda$, ἐπεὶ καὶ ἁ AB ποτὶ τὰν BE μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ποτὶ τὰν BH· ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ Z τοῦ $\varLambda$.



ια΄.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν $A\Gamma$ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ B, τὸ δὲ $K\varDelta TP$ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν $K\varDelta$,

trapezium autem $B\varDelta HK$ in libra ex punctis B, H suspendatur, spatium uero Z ex A suspendatur et cum trapezio $B\varDelta KH$ ita se habenti, ut nunc positum est, aequilibritatem seruet. dico, spatium Z minus esse spatio $\varLambda$.

secetur enim recta $A\Gamma$ in puncto E ita, ut sit

$$2\,\varDelta B + KH : 2\,KH + B\varDelta = EH : BE \text{ [Eucl. VI, 10]},$$

et recta EN per E rectae $B\varDelta$ parallela ducta in puncto Θ in duas partes aequales secetur; itaque trapezii $B\varDelta HK$ centrum grauitatis est Θ; hoc enim in Mechanicis demonstratum est [De plan. aequil. I, 15]. si igitur trapezium $B\varDelta HK$ ex puncto E suspenditur, a B, H autem punctis soluitur, manet eandem positionem habens propter eadem, quae supra [p. 274, 12 sqq.], et cum spatio Z aequilibritatem seruat. iam quoniam trapezium $B\varDelta HK$ ex E suspensum cum spatio Z ex A suspenso aequilibritatem seruat, erit

$$AB : BE = B\varDelta HK : Z \text{ [De plan. aequil. I, 6—7]};$$

quare $B\varDelta HK : Z > B\varDelta HK : \varLambda$, quia etiam

$$AB : BE > AB : BH \text{ [Eucl. V, 8]};$$

ergo $Z < \varLambda$ [Eucl. V, 10].

XI.

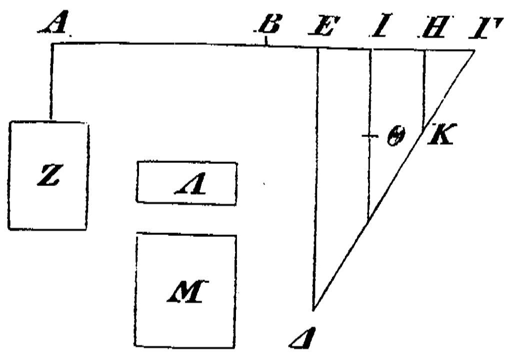
Rursus sit $A\Gamma$ libra mediumque eius punctum B, et $K\varDelta TP$ trapezium sit latera $K\varDelta$, TP ad punctum Γ uergentia habens, latera autem $\varDelta P$, KT ad $B\Gamma$ perpendicu-

2 κρεμάσθω] κεκρεμασθω A. 3 τὰ B, H σαμεῖα] 𝔅, των BH σαμειων A. κρεμασθω] κεκρεμασθω A. 7 $\varDelta\Gamma$] A𝔅; debuit dici BH. 9 τὰν (pr.)] scripsi, της A𝔅. ἔχειν] 𝔅, ον εχει A. 19 λυθῇ] scripsi, λυθειη A. ἔχον] GH, εχοντα A. 20 διὰ τὰ αὐτὰ] scripsi, δι' αυτα A, propter hec (h') 𝔅. 20 ἰσορροπεῖ] 𝔅, ισορροπειτω A, ισορροπησει *Basil.* 23 AB] 𝔅, BA A. 24 ἄρα] *Basil.*, om. A𝔅. ἔχει] *Basil.*, εχον A𝔅. 29 καὶ μέσον] A, medium autem 𝔅.

TP πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, τὰς δὲ ΔP, KT καθέτους ἐπὶ τὰν $B\Gamma$, καὶ ἁ ΔP ἐπὶ τὸ B πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ AB ποτὶ τὰν BH, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔKTP τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, τὸ δὲ ΔKTP τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ B, H καὶ τὸ Z κατὰ τὸ A, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Z τῷ ΔKPT τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Z χωρίον τοῦ Λ.

ιβ'.

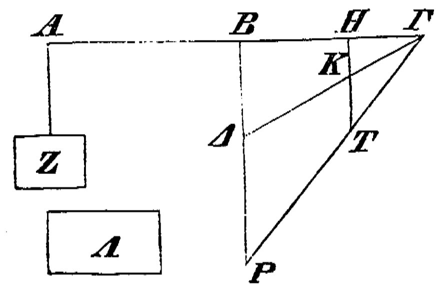
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν $A\Gamma$ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ B, τὸ δὲ ΔEKH τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς E, H σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ $K\Delta$, EH γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νευούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ AB ποτὶ τὰν BH, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔKEH τραπέζιον ποτὶ τὸ M, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ AB ποτὶ τὰν BE, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ ΔKEH τραπέζιον



ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔKEH τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ E, H, τὸ δὲ Z χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ A, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δή, τὸ Z τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ M ἔλασσον.

ἔλαβον γὰρ τοῦ ΔKEH τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἔστω δὲ τὸ Θ· λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον· καὶ ἄγω τὰν ΘI παρὰ τὰν ΔE. ἂν οὖν τὸ

laria, et ΔP in B cadat, sit autem $AB : BH = \Delta KTP : \Lambda$, et trapezium ΔKTP in libra ex B, H suspendatur, Z autem ex A, et spatium Z cum trapezio ΔKPT ita se habenti, ut



nunc positum est, aequilibritatem seruet. eodem igitur modo, quo in praecedentibus propositionibus, demonstrabitur $Z < \Lambda$.

XII.

Rursus sit $A\Gamma$ libra, medium autem eius punctum B, et ΔEKH trapezium sit angulos ad puncta E, H positos rectos habens rectasque $K\Delta$, EH ad punctum Γ uergentes, sit autem

$$AB : BH = \Delta KEH : M, \text{ et } AB : BE = \Delta KEH : \Lambda,$$

et trapezium ΔKEH in libra ex punctis E, H suspendatur, Z autem spatium ex A suspendatur et cum trapezio ita se habenti, ut nunc positum est, aequilibritatem seruet. dico igitur, esse $M > Z > \Lambda$.

sumpsi enim trapezii ΔKEH centrum grauitatis, et sit Θ; sumetur autem eodem modo, quo supra [p. 280, 7 sqq.]; et duco ΘI rectae ΔE parallelam. si igitur trapezium in libra

5 κρεμάσθω] κεκρεμασθω A. 6 τὸ Z] 𝔅, e corr. EG, τῳ Z A. 8 ἔλασσον τὸ Z χωρίον] A, spatium *z* minus esse 𝔅. 12 σαμείοις] A, om. 𝔅. 17 κρεμάσθω] κεκρεμασθω A. 21 κρεμάσθω] scripsi, εκκρεμασθω A, κεκρεμάσθω *Torellius*. 28 ἔλαβον] A, accipio 𝔅. 30 ΘI] A, in ras. 𝔅.

τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ, μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ Ζ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ Ι τῷ Ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ Α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΙ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ΔΚΕΗ ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Ζ, ποτὶ δὲ τὸ Μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζόν ἐστι, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ιγ'.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΚΤΡ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ιδ'.

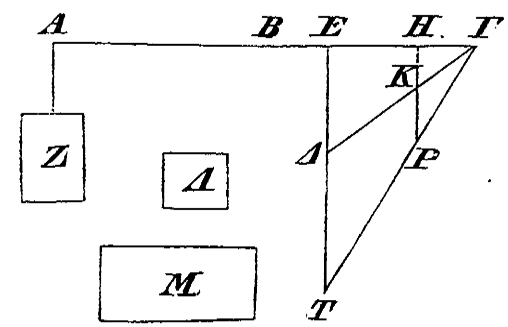
Ἔστω τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ ΒΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Β σαμείου ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ

1 κρεμασθῇ] scripsi, κρεμασθησεται A. 2 μενεῖ] manet 𝔅. 3 τῷ] G, τᾳ A. 7 Λ] 𝔅, Δ A. 12 τραπέζιον] τρα-

ex puncto I suspenditur, a punctis E, H autem soluitur, manebit eandem positionem habens et cum Z aequilibritatem seruabit propter eadem, quae supra [p. 274, 12 sqq.]. et quoniam trapezium ex I suspensum cum Z ex A suspenso aequilibritatem seruat, erit $\Delta KEH : Z = AB : BI$; adparet igitur, esse $\Delta KEH : \Lambda > \Delta KEH : Z$ et $\Delta KEH : M < \Delta KEH : Z$ [Eucl. V, 8; cfr. p. 282, 13 sq.]; ergo erit [Eucl. V, 10] $M > Z > \Lambda$.

XIII.

Rursus sit $A\Gamma$ libra punctumque B in media ea positum et $K\Delta TP$ trapezium eiusmodi, ut latera $K\Delta$, TP ad Γ uergant, latera autem ΔT, KP ad $B\Gamma$ perpendicularia sint, et



suspendatur in libra ex punctis E, H, spatium Z autem ex A suspendatur et cum trapezio ΔKTP ita se habenti, ut nunc positum est, aequilibritatem seruet, et sit

$AB : BE = \Delta KTP : \Lambda$, et $AB : BH = \Delta KTP : M$.

eodem igitur modo, quo supra, demonstrabitur, esse $M > Z > \Lambda$.

XIV.

Sit $B\Theta\Gamma$ segmentum linea recta et sectione coni rectanguli comprehensum. prius igitur $B\Gamma$ ad diametrum perpendicularis sit, et ducatur a puncto B diametro parallela

πεζειον A, sit trapezale 𝔅. 14 καθέτους] A, sint katheti 𝔅. κρεμάσθω] κεκρεμασθω A. 15 Η] 𝔅G, om. A. κρεμάσθω] κεκρεμασθω A.

ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ· ἐσσεῖται δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ ΒΓ ἐς ἴσα τμάματα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΙΟΓ τριγώνου μεῖζον [ἐστιν] ἢ τριπλάσιον.

διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἁ ΑΒΓ, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΑΒ ἴσα τᾷ ΒΓ, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Β· καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Β, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, $\underset{s}{\Delta}$ χωρία κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν Ρ χωρίον τῷ ΔΕ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ $\underset{s}{\Delta}$ τῷ ΞΙΓ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ ΡΧΨΩ$\underset{s}{\Delta}$ χωρίου. καὶ ἐπεί ἐστιν τμᾶμα τὸ ΒΓΘ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἄκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΣΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΕ, ὃν ἁ ΣΕ ποτὶ τὰν ΕΦ· ὥστε καὶ ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ ΑΒ

recta *ΒΔ*, a *Γ* autem recta *ΓΔ* sectionem coni in puncto *Γ* contingens; itaque triangulus *ΒΓΔ* rectangulus erit [Eucl. I, 29; cfr. p. 284, 25 sq.]. diuidatur igitur *ΒΓ* in partes aequales quotlibet *ΒΕ*, *ΕΖ*, *ΖΗ*, *ΗΙ*, *ΙΓ*, et a punctis diuisionum diametro parallelae ducantur *ΕΣ*, *ΖΤ*, *ΗΥ*, *ΙΞ*, a punctis autem, in quibus eae sectionem coni secant, rectae ducantur ad *Γ* et producantur. dico igitur, triangulum *ΒΔΓ* minorem esse quam triplo maiorem trapeziis *ΚΕ*, *ΛΖ*, *ΜΗ*, *ΝΙ* cum triangulo *ΞΙΓ*, maiorem autem quam triplo maiorem trapeziis *ΖΦ*, *ΗΘ*, *ΙΠ* cum triangulo *ΙΟΓ*.

ducatur enim recta *ΑΒΓ*, et abscindatur *ΑΒ* rectae *ΒΓ* aequalis, et fingamus, *ΑΓ* libram esse, cuius medium erit punctum *Β*, et ex *Β* suspendatur, suspendatur autem etiam *ΒΔΓ* in libra ex punctis *Β*, *Γ*, et in altera parte librae ex puncto *Α* suspendantur spatia *Ρ*, *Χ*, *Ψ*, *Ω*, $\underset{s}{\Delta}$, et aequilibritatem seruet spatium *Ρ* cum trapezio *ΔΕ* ita se habenti, *Χ* autem cum trapezio *ΖΣ*, *Ψ* autem cum trapezio *ΤΗ*, *Ω* autem cum trapezio *ΥΙ*, et $\underset{s}{\Delta}$ cum triangulo *ΞΙΓ*; quare etiam totum cum toto aequilibritatem seruabit; itaque triangulus *ΒΔΓ* triplo maior erit spatio

$$P + X + \Psi + \Omega + \underset{s}{\Delta} \text{ [prop. 6].}$$

et quoniam *ΒΓΘ* segmentum est linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum, et a *Β* diametro parallela ducta est recta *ΒΔ*, a puncto *Γ* autem recta *ΓΔ* sectionem coni in *Γ* contingens, et alia quoque recta *ΣΕ* diametro parallela ducta est, erit $B\Gamma : BE = \Sigma E : E\Phi$ [prop. 5];

3 *ἴσα*] scripsi praeeunte *Nizzio*, τα A𝔅. **4** *ΙΓ*] *Nizzius*, om. A𝔅. *τᾶν τομᾶν*] *Torellius*, τας τομας A𝔅. **7** *ἐπὶ*] scripsi, κατα A𝔅. **11** *ἐστιν*] A, esse 𝔅; deleo. **14** *κρεμάσθω* (pr.)] D, κεκρεμασθω A. *κρεμάσθω* (alt.)] κεκρεμασθω A. **16** *κρεμασθω*] κεκρεμασθω A. **17** $\underset{s}{\Delta}$] scripsi, Δ A𝔅. **20** $\underset{s}{\Delta}$] Δ A𝔅. *ΞΙΓ*] 𝔅G, *ΖΙΓ* A. *καὶ*] A, om. 𝔅. **22** *ΡΧΨΩΔ* A𝔅. **23** *ΒΓΘ*] A, *btg* 𝔅.

ποτὶ τὰν BZ τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ ΣZ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΔZ, ποτὶ δὲ τὰν BH, ὃν τὸ TH ποτὶ τὸ MH, ποτὶ δὲ τὰν BI, ὃν τὸ ΥI ποτὶ τὸ NI. ἐπεὶ οὖν ἐστι τραπέζιον τὸ ΔE τὰς μὲν ποτὶ τοῖς B, E σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ P κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ A οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὡς ἁ BA ποτὶ τὰν BE, οὕτως τὸ ΔE τραπέζιον ποτὶ τὸ KE, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ KE χωρίον τοῦ P χωρίου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ καὶ τὸ $Z\Sigma$ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Z, E γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣT νεύουσαν ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ X ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ A οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὡς μὲν ἁ AB ποτὶ τὰν BE, οὕτως τὸ $Z\Sigma$ τραπέζιον ποτὶ τὸ $Z\Phi$, ὡς δὲ ἁ AB ποτὶ τὰν BZ, οὕτως τὸ $Z\Sigma$ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΔZ· εἴη οὖν κα τὸ X χωρίον τοῦ μὲν ΔZ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ $Z\Phi$ μεῖζον· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν MH τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘH μεῖζον, καὶ τὸ Ω χωρίον τοῦ μὲν $NOIH$ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΠI μεῖζον,

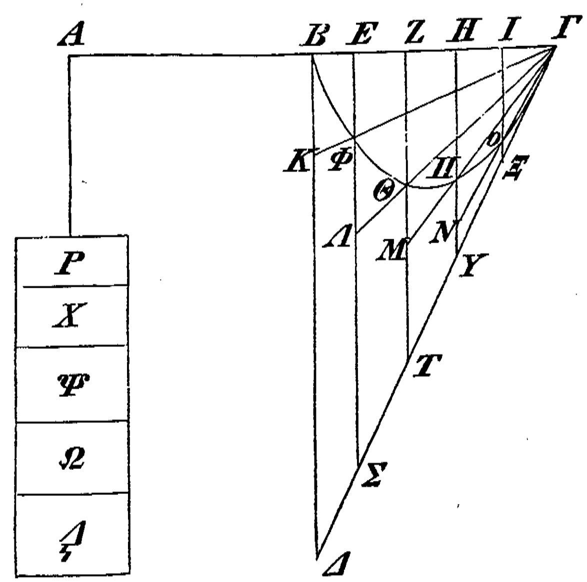
1 ἔχουσα] G, εχοντι A, habere 𝔅. 2 ΔZ] 𝔅, AZ A. 3 BI] 𝔅, BH A. 6 τὸ] EH, τῳ A. 11 τραπέζιον] 𝔅, τραπεζειον A; auditur ἐστιν. 12 ἔχον] G, εχων A. 14 ἔχοντος τοῦ τραπεζίου] 𝔅, εχοντι τῳ τραπεζειῳ A; cfr. lin. 7. 15 AB] 𝔅, BA A. 18 οὖν κα] scripsi; αν και A𝔅, quod fortasse retinendum inserto ἐπεὶ post δὲ lin. 11. 22 $NOIH$] A, *ni* 𝔅. In fig. pro $\underset{5}{\Delta}$ hab. Δ A, 𝔇 𝔅.

1) Nam $BA = B\Gamma$ et $\Delta E : KE = \Sigma E : E\Phi$; u. ZMP. XXIV p. 180 nr. 11.

quare etiam $BA : BE = \Delta E : KE$.[1]) et eodem modo demonstrabitur, esse $AB : BZ = \Sigma Z : \Delta Z$ et

$$AB : BH = TH : MH \text{ et } AB : BI = \Upsilon I : NI.$$

iam quoniam trapezium est ΔE angulos ad puncta B, E positos rectos habens, latera autem ad Γ uergentia, et spatium aliquod P in libra ex A suspensum cum eo ita se habenti, ut nunc positum est, aequilibritatem seruat, et est $BA : BE = \Delta E : KE$, erit $KE > P$; hoc enim demonstra-



tum est [prop. 10]. rursus autem etiam $Z\Sigma$ trapezium est angulos ad Z, E positos rectos habens latusque ΣT ad Γ uergens, et cum trapezio ita se habenti, ut nunc positum est, spatium X in libra ex A suspensum aequilibritatem seruat, est autem

$$AB : BE = Z\Sigma : Z\Phi \text{ et } AB : BZ = Z\Sigma : \Delta Z;$$

quare erit $\Delta Z > X > Z\Phi$; nam hoc quoque demonstratum est [prop. 12]. eadem igitur de causa erit etiam

$$MH > \Psi > \Theta H$$

et $NOIH > \Omega > \Pi I$, et eodem modo etiam $\Xi I\Gamma > \underset{5}{\Delta} > \Gamma IO$ [prop. 8]. iam quoniam est ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $\underset{\varsigma}{\Delta}$ χωρίον τοῦ μὲν $ΞΙΓ$ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ $ΓΙΟ$ μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $ΚΕ$ τραπέζιον μεῖζόν ἐστι τοῦ $Ρ$ χωρίου, τὸ δὲ $ΛΖ$ τοῦ $Χ$, τὸ δὲ $ΜΗ$ τοῦ $Ψ$, τὸ δὲ $ΝΙ$ τοῦ $Ω$, τὸ δὲ $ΞΙΓ$ τρίγωνον τοῦ $\underset{\varsigma}{\Delta}$, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ $ΡΧΨΩ\underset{\varsigma}{\Delta}$ χωρίου. ἔστιν δὲ τὸ $ΡΧΨΩ\underset{\varsigma}{\Delta}$ τρίτον μέρος τοῦ $ΒΓΔ$ τριγώνου· δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ $ΒΓΔ$ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν $ΚΕ$, $ΛΖ$, $ΜΗ$, $ΝΙ$ τραπεζίων καὶ τοῦ $ΞΙΓ$ τριγώνου. πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν $ΖΦ$ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ $Χ$ χωρίου, τὸ δὲ $ΘΗ$ τοῦ $Ψ$, τὸ δὲ $ΙΠ$ τοῦ $Ω$, τὸ δὲ $ΙΟΓ$ τρίγωνον τοῦ $\underset{\varsigma}{\Delta}$, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ $\underset{\varsigma}{\Delta}ΩΨΧ$ χωρίου· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ $ΒΔΓ$ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν $ΦΖ$, $ΘΗ$, $ΙΠ$ τραπεζίων καὶ τοῦ $ΙΓΟ$ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

ιε'.

Ἔστω πάλιν τὸ $ΒΘΓ$ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ $ΒΓ$ μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ· ἀναγκαῖον δὴ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ $Β$ σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμάματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ $Γ$ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν $ΒΓ$. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ ποτὶ τῷ $Β$, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ $Β$ ἁ $ΒΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Γ$ ἁ $ΓΔ$ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ $Γ$, καὶ διῃρήσθω ἁ $ΒΓ$ εἰς τμάματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ $ΒΕ$, $ΕΖ$, $ΖΗ$, $ΗΙ$, $ΙΓ$, ἀπὸ δὲ τῶν $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Ι$ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ $ΕΣ$,

$$KE > P,\ \Lambda Z > X,\ MH > \Psi,\ NI > \Omega,\ \Xi I\Gamma > \underset{\varsigma}{\Delta},$$

manifestum est, etiam omnia spatia illa maiora esse spatio $P + X + \Psi + \Omega + \underset{\varsigma}{\Delta}$. sed

$$P + X + \Psi + \Omega + \underset{\varsigma}{\Delta} = \tfrac{1}{3}\, B\Gamma\Delta \text{ [prop. 6]};$$

adparet igitur, esse

$$B\Gamma\Delta < 3\,(KE + \Lambda Z + MH + NI + \Xi I\Gamma).$$

rursus, quoniam est $Z\Phi < X$, $\Theta H < \Psi$, $I\Pi < \Omega$, $IO\Gamma < \underset{\varsigma}{\Delta}$, manifestum est, etiam omnia illa spatia minora esse spatio $\underset{\varsigma}{\Delta} + \Omega + \Psi + X$; manifestum est igitur, etiam triangulum $B\Delta\Gamma$ maiorem esse quam triplo maiorem trapeziis ΦZ, ΘH, $I\Pi$ cum triangulo $I\Gamma O$,[1]) minorem autem quam triplo maiorem spatiis supra nominatis.

XV.

Sit rursus $B\Theta\Gamma$ segmentum linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum, $B\Gamma$ uero ad diametrum perpendicularis ne sit; necesse est igitur, aut rectam a puncto B in eandem partem ductam, in qua est segmentum, diametro parallelam aut rectam a Γ ductam obtusum angulum cum recta $B\Gamma$ facere. recta igitur obtusum angulum faciens ea sit, quae ad B est, et a puncto B diametro parallela ducatur $B\Delta$, a Γ autem recta $\Gamma\Delta$ sectionem coni in Γ contingens, et recta $B\Gamma$ in partes aequales quotlibet diuidatur BE, EZ, ZH, HI, $I\Gamma$, a punctis autem E, Z, H, I dia-

1) Nam $B\Delta\Gamma > 3\,(\underset{\varsigma}{\Delta} + \Omega + \Psi + X)$.

1 δὲ] scripsi, δη A𝔅. $\underset{\varsigma}{\Delta}$] Δ A𝔅. **5** $\underset{\varsigma}{\Delta}$] Δ A𝔅. **6** $ΡΧΨΩΔ$ A𝔅. **7** $ΡΧΨΩΔ$ A𝔅. $ΒΓΔ$] *Nizzius*, $ΑΓΔ$ A; *bdg* 𝔅, *b-* in ras. **12** $\underset{\varsigma}{\Delta}$] Δ A𝔅. **13** $\underset{\varsigma}{\Delta}ΩΨΧ$] D, $ΔΩΨΧ$ 𝔅EG, $ΘΩΨΧ$ H. **21** δὴ] scripsi, δε A𝔅. **22** ἀγμέναν] 𝔅G, αγμενων A. **23** αὐτὰ] 𝔅G, om. A. **24** ἔστω] A, et sit 𝔅. **25** ποτὶ τῷ] A𝔅, πρὸς τὸ G, ἀπὸ τοῦ *Nizzius*. **28** τὰ] τᾷ *Basil.*, ταν A, om. 𝔅.

ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΒΦ, ΔΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΞ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον.

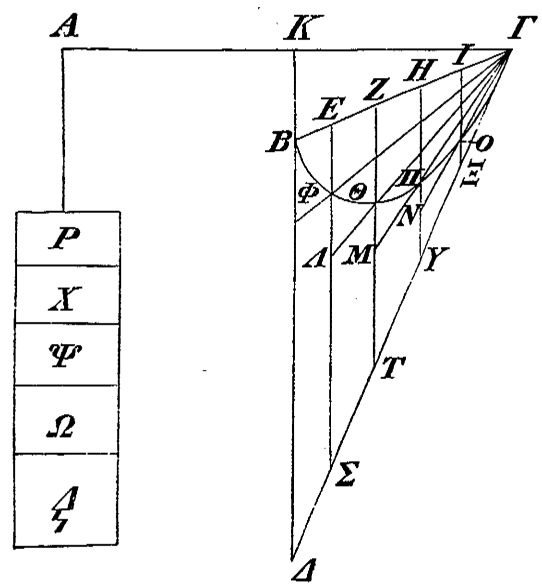
ἐκβεβλήσθω ἁ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τᾷ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΔΚ. νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ_ς χωρία, καὶ τὸ μὲν Ρ τῷ ΔΕ τραπεζίῳ ἰσορροπείτω οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ_ς τῷ ΓΙΞ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩΔ_ς χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ Ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΝΙ τραπέζιον

1 ἃ] G, ο A, ubi 𝔅. 2 ἐπεζεύχθωσαν] G, επιζευχθωσαν A. 4 τῶν μὲν] GH, e corr. E, τῳ μεν A. ΜΗ, ΝΙ] 𝔅, ΘΗ ΠΙ A. 8 οὖν] addidi, om. A𝔅. 9 ἀπέλαβον] A, accipio 𝔅. 11 κρεμάσθω] κεκρεμασθω A. 13 καὶ] addidi, om. A𝔅. ἐκ τοῦ θατέρου] A, ex altera autem 𝔅. 14 τὰ] mg. G, των A. Δ_ς] G², Δ A𝔅. 15 τὸ] GH, e corr. E, τῳ A. 17 τὸ (pr.)] EG, τῳ A. Δ_ς] DG, Δ 𝔅E, Θ H. 18 δὴ] 𝔅, δε A. 19 ΡΧΨΩΔ_ς] rqψωd 𝔅, ΟΧΨΩΔ_ς A. 21 Ρ] 𝔖, ΡΧ A. In fig. Δ_ς G², Δ A, 𝔇 𝔅.

metro parallelae ducantur ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, et a punctis, in quibus eae sectionem coni secant, ad punctum Γ rectae ducantur producanturque. dico igitur, sic quoque esse

$$3(\mathrm{B\Phi}+\Delta\mathrm{Z}+\mathrm{MH}+\mathrm{NI}+\Gamma\mathrm{I}\Xi) > \mathrm{B}\Delta\Gamma > 3(\mathrm{Z\Phi}+\mathrm{H}\Theta+\mathrm{I}\Pi+\Gamma\mathrm{OI}).$$

producatur ΔΒ in alteram partem.[1]) ducta igitur recta ΓΚ perpendiculari posui ΔΚ rectae ΓΚ aequalem. fingamus igitur rursus, libram esse ΑΓ mediumque eius punctum Κ, et ex Κ suspendatur, suspendatur autem etiam triangulus ΓΚΔ in dimidia libra ex punctis Γ, Κ ita se habens, ut nunc positus est, et in altera parte librae ex puncto Α suspendantur spatia Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ_ς, spatium uero Ρ cum trapezio ΔΕ ita se habenti, ut nunc positum est, aequilibritatem seruet, et spatium Χ cum trapezio ΖΣ et Ψ cum ΤΗ et Ω cum ΥΙ et Δ_ς cum triangulo ΓΙΞ; quare etiam totum cum toto aequilibritatem seruabit; itaque erit [prop. 7]



$$\mathrm{\Delta B\Gamma} = 3(\mathrm{P}+\mathrm{X}+\Psi+\Omega+\Delta_\varsigma).$$

eodem igitur modo, quo supra,[2]) demonstrabimus, esse

1) H. e. non in eam partem, in qua segmentum est.
2) Prop. 14, sed pro propp. 10, 12, 8 usurpandae sunt propp. 11, 13, 9.

μεῖζον ἐὸν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΠΙ ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον μεῖζον τοῦ $\underset{\varsigma}{\Delta}$ *χωρίου, τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον· δῆλον οὖν ἐστιν.*

ιϛʹ.

Ἔστω πάλιν τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ Β ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ Ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ζ χωρίῳ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον· ἁ δὴ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ ΒΓΔ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ ΒΕ μέρος τᾶς ΒΔ. διῃρήσθω οὖν ἁ ΒΔ ἐς τὰ μέρεα, καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρεσίων σαμεῖα τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ι, Κ σαμείων ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν τομὰν αἱ εὐθεῖαι,

1 *τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον*] A, trigonum autem *xig* 𝕭. **2** $\underset{\varsigma}{\Delta}$] G², Δ A𝕭. **3** *ἐστιν*] A𝕭, *ἐστιν τὸ προτεθέν* *Torellius*; fort. *ἐστιν* $\overline{οι}$ (h. e. *ὃ ἔδει δεῖξαι*). **12** *ἁ δὴ*] scripsi, autem 𝕭, *α* A. **13** *ΒΘΓ*] 𝕭, *ΒΓΔ* A. **16** *δὴ*] scripsi, *δε* A𝕭. **18** *τὸ αὐτὸ*] A, om. 𝕭. **21** *ἐπὶ τὸ Γ*] apud *g* 𝕭, *επι τα ΓΕ* A. *εὐθεῖαι*] G, *ευθεια* A. **22** *δὴ*] A𝕭, fort. *δὲ*. **23** *καὶ διὰ τῶν σαμείων*] A, a signis autem 𝕭. **24** *καθ' ἃ*] ubi 𝕭, om. A. In fig. pro *O* hab. Σ A𝕭; mg. 𝕭: ponende autem alique littere que male erant in exemplari.

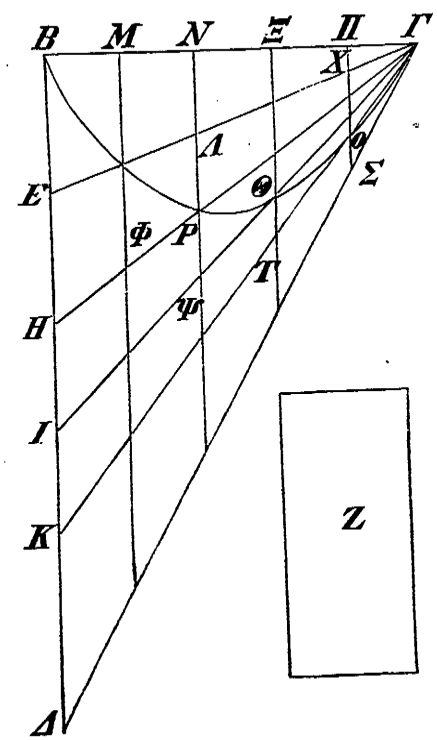
$$B\Phi > P,\ \Theta E > X > Z\Phi,\ MH > \Psi > H\Theta,$$
$$NI > \Omega > \Pi I,\ \Xi I\Gamma > \underset{\varsigma}{\Delta} > \Gamma IO;$$

ergo constat ⟨propositum⟩.

XVI.

Rursus $B\Theta\Gamma$ segmentum sit linea recta et sectione coni rectanguli comprehensum, per B autem ducatur $B\Delta$ diametro parallela et a Γ puncto recta $\Gamma\Delta$ sectionem coni in Γ puncto contingens, spatium uero Z tertia pars sit trianguli $B\Delta\Gamma$. dico igitur, segmentum $B\Theta\Gamma$ aequale esse spatio Z.

nam si aequale non est, aut maius est aut minus. prius igitur, si fieri potest, maius sit; excessus igitur, quo segmentum $B\Theta\Gamma$ spatium Z excedit, sibi ipse additus maior erit triangulo $B\Gamma\Delta$ [p. 264, 9]. et fieri potest, ut sumatur spatium aliquod excessu minus, quod pars sit trianguli $B\Delta\Gamma$. sit igitur triangulus $B\Gamma E$ et excessu illo minor et pars trianguli $B\Delta\Gamma$; eadem autem pars rectae $B\Delta$ erit recta BE [Eucl. VI, 1]. diuidatur igitur recta $B\Delta$ in partes illas, et puncta diuisionum sint H, I, K, a punctis H, I, K autem ad punctum Γ rectae ducantur; secant igitur sectionem coni, quoniam recta $\Gamma\Delta$ eam in puncto Γ contingit; et per puncta, in quibus rectae illae sectionem secant, diametro parallelae ducantur rectae $M\Phi$, NP, $\Xi\Theta$, ΠO; eae autem etiam rectae $B\Delta$ parallelae erunt [Eucl. I, 30]. iam quoniam est $B\Gamma E < B\Theta\Gamma \div Z$,



ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, δῆλον, ὡς τὰ συναμφότερα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμάματος. καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι, δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον· τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ· τὸ δὴ Ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. καί ἐστι τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου· τὸ δὴ ΒΔΓ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἄρα ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω οὖν τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ

1 ΠΟ] *Torellius*, ΠΣ A𝔅. 3 ΒΘΓ] 𝔅, ΒΘΙ A. 8 ΘΡ, ΘΟ] A, *rt ts* 𝔅. 10 ΟΘ] A, *ts* 𝔅. 20 ἄρα] addidi, om. A𝔅. 25 ΒΔΓ] A, *bgd* 𝔅. 27 ΒΓΕ] A, *beg* 𝔅.

adparet, esse $Z + B\Gamma E < B\Theta\Gamma$. triangulo $B\Gamma E$ autem aequalia sunt trapezia, per quae coni sectio ducta est, ME, $\Phi\Lambda$, ΘP, ΘO, cum triangulo $\Gamma O\Sigma$; nam trapezium ME commune est, et

$$M\Lambda = \Phi\Lambda,\ \Lambda\Xi = \Theta P,\ X\Xi = O\Theta,\text{[1]}\ \Gamma X\Pi = \Gamma O\Sigma;\text{[2]}$$

itaque erit

$$Z < M\Lambda + \Xi P + \Pi\Theta + \Pi O\Gamma.\text{[3]}$$

et $B\Delta\Gamma = 3\,Z$; itaque erit

$$B\Delta\Gamma < 3\,(M\Lambda + P\Xi + \Theta\Pi + \Pi O\Gamma);$$

quod fieri non potest; nam demonstratum est, maiorem eum esse quam triplo maiorem [prop. 14—15]. itaque segmentum $B\Theta\Gamma$ maius non est spatio Z.

dico igitur, id ne minus quidem esse. sit enim, si fieri potest, minus. rursus igitur excessus, quo spatium Z segmentum $B\Theta\Gamma$ excedit, sibi ipse additus etiam triangulum $B\Delta\Gamma$ excedet [p. 264, 9]. et fieri potest, ut sumatur spatium excessu minus, ita ut pars sit trianguli $B\Delta\Gamma$. sit igitur triangulus $B\Gamma E$ et minor excessu et pars trianguli $B\Delta\Gamma$, et cetera eodem modo, quo supra [p. 294, 19], comparentur. quoniam igitur triangulus $B\Gamma E$ minor est excessu, quo spatium Z segmentum $B\Theta\Gamma$ excedit, triangulus

1) Nam $M\Lambda : \Phi\Lambda = N\Lambda : \Lambda P$ (ZMP. XXIV p. 180 nr. 11); et $N\Lambda = \Lambda P$, quia

$$N\Lambda : \Lambda P = BE : EH \text{ (ibid. p. 178 nr. 3)},$$

et $BE = EH$.

2) Nam $\Pi X = O\Sigma$, quia $BE = K\Delta$ (ibid. p. 178 nr. 3), et altitudo communis est.

3) Nam $ME + N\Phi + \Xi\Psi + \Pi T + \Pi\Sigma\Gamma > B\Theta\Gamma$ et

$$ME + \Phi\Lambda + \Theta P + \Theta O + \Gamma O\Sigma = B\Gamma E,$$

unde subtrahendo

$$M\Lambda + \Xi P + \Pi\Theta + \Pi O\Gamma > B\Theta\Gamma \div B\Gamma E.$$

et $B\Theta\Gamma \div B\Gamma E > Z$.

τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου· ἔστιν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμάματος ἔλασσον εἴη κα καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἅ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα τὸ τμᾶμα τῷ Ζ χωρίῳ.

ιζʹ.

Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ Θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΒΓ ἐστι παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς

6 ἄρα] A, ergo est 𝔅. 9 κα] addidi, om. A𝔅, ἂν G. ΓΒΕ] A, *bge* 𝔅. 10 ὅπερ] A, quod 𝔅. 12 ΘΡ] A, *rt* 𝔅. 15 δέ] A, ergo 𝔅. ἄρα] A, est ergo 𝔅. 17 τούτου] A, hoc autem 𝔅. 27 καὶ] A𝔅, ἐπεὶ *Nizzius*.

$BE\Gamma$ et segmentum $B\Theta\Gamma$ simul sumpta minora sunt spatio Z. uerum etiam $Z < EM + \Phi N + \Psi\Xi + \Pi T + \Gamma\Pi\Sigma$; nam $B\Delta\Gamma = 3Z$, et

$$B\Delta\Gamma < 3(EM + \Phi N + \Psi\Xi + \Pi T + \Gamma\Pi\Sigma),$$

ut in propositione praecedenti[1]) demonstratum est; itaque

$$B\Gamma E + B\Theta\Gamma < EM + \Phi N + \Xi\Psi + \Pi T + \Gamma\Pi\Sigma.$$

quare ablato, quod commune est, segmento triangulus ΓBE minor erit spatiis reliquis; quod fieri non potest; nam demonstratum est, triangulum $BE\Gamma$ aequalem esse trapeziis $EM + \Phi\Lambda + \Theta P + \Theta O + \Gamma O\Sigma$ triangulo [p. 296, 6], quae maiora sunt spatiis reliquis. itaque segmentum $B\Theta\Gamma$ minus non est spatio Z. at demonstratum est, id ne maius quidem esse; ergo segmentum aequale est spatio Z.

XVII.

Hoc demonstrato manifestum est, quoduis segmentum linea recta et sectione coni rectanguli comprehensum tertia parte maius esse triangulo eandem basim habenti, quam segmentum, et altitudinem aequalem.

sit enim segmentum linea recta et sectione coni rectanguli comprehensum, uertex autem eius sit punctum Θ, et in eo inscribatur triangulus $B\Theta\Gamma$ eandem basim habens, quam segmentum, altitudinemque aequalem. iam quoniam punctum Θ uertex est segmenti, recta a puncto Θ diametro parallela ducta rectam $B\Gamma$ in duas partes aequales diuidit,[2]) et recta $B\Gamma$ rectae in Θ sectionem contingenti parallela est

1) H. e. prop. 14—15, quae fortasse in unum coniungendae erant.

2) Per conuersam prop. 18. mirum est, Archimedem iam hoc loco nomina βάσις τοῦ τμάματος et κορυφὰ τοῦ τμάματος usurpasse, quae infra demum (p. 300, 12) definiuntur.

τομᾶς κατὰ τὸ Θ. ἄχθω δὲ ἁ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, ἁ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΕΓ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμάματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δῆλον, ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ ΒΘΓ τριγώνου.

Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

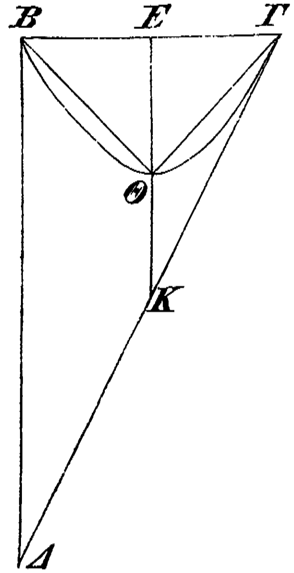
ιη΄.

Εἴ κα ἐν τμάματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ ἄχθω ἁ ΔΒ παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν

7 Θ] A, *t* equalis est quae *te* ipsi *tk* 𝔅. τὸ ΒΔΓ τρίγωνον] A, trigonum ergo *bdg* 𝔅. 10 τμᾶμα] 𝔅, om. A. 11 ΒΘΓ] mg. 𝔅, ΒΔΓ A𝔅. 14 ἀπὸ] 𝔅EG, απο επι A. 15 ἀγομέναν] 𝔅G, απτομεναν A.

[prop. 1, b]. ducatur autem $E\Theta$ diametro parallela, et etiam a puncto B diametro parallela ducatur $B\varDelta$, a Γ autem recta $\Gamma\varDelta$ coni sectionem in puncto Γ contingens. quoniam igitur recta $K\Theta$ diametro parallela est, $\Gamma\varDelta$ autem sectionem in Γ contingit, et $E\Gamma$ rectae sectionem in Θ contingenti parallela est, erit $B\varDelta\Gamma = 4\, B\Theta\Gamma$.[1]) et quoniam triangulus $B\varDelta\Gamma$ triplo maior est segmento $B\Theta\Gamma$ [prop. 16], triangulo autem $B\Theta\Gamma$ quadruplo maior, adparet, segmentum $B\Theta\Gamma$ tertia parte maius esse triangulo $B\Theta\Gamma$.



Segmentorum linea recta et curua aliqua linea comprehensorum basim uoco lineam rectam, altitudinem autem maximam earum rectarum, quae a curua linea ad basim perpendiculares ducantur, uerticem uero punctum, unde perpendicularis maxima ducatur.

XVIII.

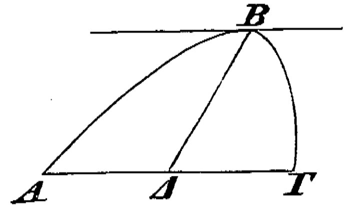
Si in segmento linea recta et coni rectanguli sectione comprehenso a media basi recta diametro parallela ducitur, uertex segmenti erit punctum, in quo recta diametro parallela coni sectionem secat.[2])

sit enim $AB\Gamma$ segmentum linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum, et a media recta $A\Gamma$ ducatur $\varDelta B$ diametro parallela. quoniam igitur in sectione coni rect-

1) Nam $EK : B\varDelta = E\Gamma : B\Gamma$ [Eucl. VI, 4] $= 1:2$. sed $E\Theta = \Theta K$ (prop. 2); quare $E\Theta : B\varDelta = 1:4 = B\Theta\Gamma : B\Gamma\varDelta$ (ZMP. XXIV p. 178 nr. 7).

2) Recta $\varDelta B$ diametrus segmenti erit (cfr. ZMP. XXV p. 44 et p. 51 nr. 14). tum cfr. Apollon. Con. I def. 4: κορυφὴν δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας (h. e. τῆς διαμέτρου) τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

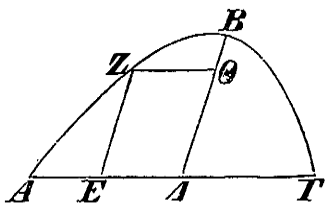
ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ ἆκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΔ, ΔΓ, δῆλον, ὡς παραλλήλοι ἐντι ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν, ὅτι τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται ἁ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένα· κορυφὰ οὖν ἐστιν τοῦ τμάματος τὸ Β σαμεῖον.



ιθʹ.

Ἐν τμάματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΔ, ἄχθω δὲ καὶ ἁ ΖΘ παρὰ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται, καὶ αἱ ΑΔ, ΖΘ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσάν ἐντι, δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΖΘ δυνάμει· τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἁ ΒΔ τᾶς ΒΘ μάκει. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ ΒΔ τᾶς ΕΖ μάκει.



κʹ.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐ-

anguli recta $B\Delta$ diametro parallela ducta est, et $A\Delta = \Delta\Gamma$, adparet, rectam $A\Gamma$ rectamque in puncto B sectionem coni contingentem parallelas esse [prop. 1, b]. itaque manifestum est, rectarum, quae a sectione ad rectam $A\Gamma$ perpendiculares ducantur, maximam fore rectam a puncto B ductam;[1]) ergo punctum B uertex est sectionis [p. 300, 15].

XIX.

In segmento linea recta et sectione coni rectanguli comprehenso recta a media basi ⟨diametro parallela⟩ ducta tertia parte maior est longitudine quam recta a media basi dimidia ⟨eodem modo⟩ ducta.

sit enim $AB\Gamma$ segmentum linea recta et sectione coni rectanguli comprehensum, et diametro parallelae ducantur a media recta $A\Gamma$ recta $B\Delta$, a media autem recta $A\Delta$ recta EZ, et ducatur etiam $Z\Theta$ rectae $A\Gamma$ parallela. quoniam igitur in sectione coni rectanguli $B\Delta$ diametro parallela ducta est, et rectae $A\Delta$, $Z\Theta$ rectae in B contingenti parallelae sunt,[2]) adparet, esse $B\Delta : B\Theta = A\Delta^2 : Z\Theta^2$ [prop. 3]; itaque etiam $B\Delta = 4\,B\Theta$.[3]) ergo manifestum est, esse $B\Delta = \frac{4}{3}\,EZ$.[4])

XX.

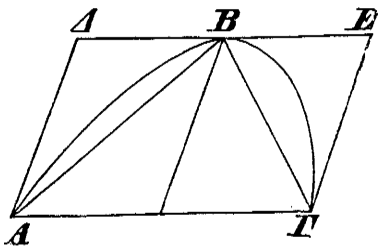
Si in segmento linea recta et coni rectanguli sectione comprehenso triangulus inscribitur eandem basim habens,

1) Nam, si ullius puncti sectionis distantia maior esset, pars sectionis extra rectam in B contingentem caderet; itaque coni sectionem secaret, quod contra hypothesim est.
2) Quia $A\Delta = \Delta\Gamma$; tum u. prop. 1, b.
3) Nam $A\Delta = 2\,Z\Theta$.
4) Nam $\Theta\Delta = 3\,B\Theta = EZ$.

1 κώνου] *Torellius*, om. A𝔅. 2 παραλλήλοι] G, παραλληλος A𝔅. 6 τᾶν] *Torellius*, om. A. 7 ἀγομενᾶν] 𝔅, αγομενας A. καθέτων] scripsi, καθετος A𝔅. 11 ἐν τμάματι περιεχομένῳ] 𝔅, εικα τμημα περιεχομενον A. 22 κατὰ τὸ Β] A, om. 𝔅. 23 ἐντι] 𝔅, αι μεν τι A. τὸν αὐτὸν] e corr. G, ταν αυταν A. ἔχει] 𝔅, εχοντι A.

τὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον ἢ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

ἔστω γὰρ τὸ $AB\Gamma$ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον, τὸ B σαμεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμάματος· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ $A\Gamma$ τᾷ κατὰ τὸ B ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς. ἄχθω ἁ ΔE διὰ τοῦ B παρὰ τὰν $A\Gamma$ καὶ ἀπὸ τῶν A, Γ αἱ $A\Delta$, ΓE παρὰ τὰν διάμετρον· πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $A\Delta E\Gamma$ παραλληλογράμμου, φανερόν, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δεδειγμένου δὲ τούτου δῆλον, ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμᾶμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμάματα ποιήσομες ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

10 ἄχθω] A, ducatur autem 𝔅. **11** ΔE] A, *ze* 𝔅. **12** τῶν] *Basil.*, ταν A. **13** $A\Delta$] A, *az* 𝔅. **15** $A\Delta E\Gamma$] A, *azeg* 𝔅. **18** πόρισμα] om. A𝔅. **19** δεδειγμένου δὲ τούτου] 𝔅, δεδειγμενον A, τούτου δεδειγμένου G. ὅτι ὡς] A, quod 𝔅; fort. ὅτι; cfr. p. 308, 20. **21** περιλειπόμενα] 𝔅G, περιπομενα D, περιεπόμενα EH.

quam segmentum, altitudinemque eandem, triangulus inscriptus maior erit dimidia parte segmenti.

sit enim $AB\Gamma$ segmentum, quale diximus, et in eo inscribatur triangulus $AB\Gamma$ eandem basim habens, quam totum segmentum, altitudinemque aequalem. quoniam igitur triangulus eandem basim habet, quam segmentum, altitudinemque eandem, necesse est, punctum B uerticem esse segmenti;[1]) itaque $A\Gamma$ rectae in B sectionem contingenti parallela est.[2]) ducatur per punctum B rectae $A\Gamma$ parallela recta ΔE, et a punctis A, Γ diametro parallelae rectae $A\Delta$, ΓE; cadent igitur extra segmentum.[4]) quoniam igitur triangulus $AB\Gamma = \frac{1}{2} A\Delta E\Gamma$ [Eucl. I, 41], manifestum est, maiorem eum esse dimidia parte segmenti.

COROLLARIUM.

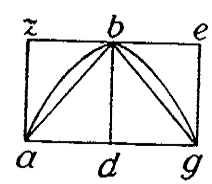
Hoc autem demonstrato adparet, fieri posse, ut in tali segmento polygonum inscribatur, ita ut segmenta reliqua minora sint quouis spatio dato; nam si semper spatium, quod propter hanc propositionem [20] maius est parte dimidia, abstulerimus, manifestum est, nos spatia reliqua semper minuentes ⟨aliquando⟩ ea minora facturos esse quouis spatio dato [Eucl. X, 1].

1) Nam altitudo trianguli recta est a B ad $A\Gamma$ perpendicularis, quae cum etiam segmenti sit altitudo, maxima erit rectarum a sectione ad $A\Gamma$ perpendicularium (p. 300, 14); tum u. p. 300, 15.

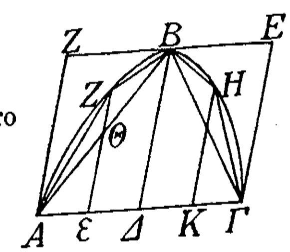
2) Nam recta a B diametro parallela ducta rectam $A\Gamma$ in duas partes aequales diuidet (per conuersam prop. 18; cfr. prop. 17 p. 298, 25); tum u. prop. 1, b.

3) De conoid. 16; ZMP. XXV p. 53 nr. 19.

In 𝔅 fig. haec est



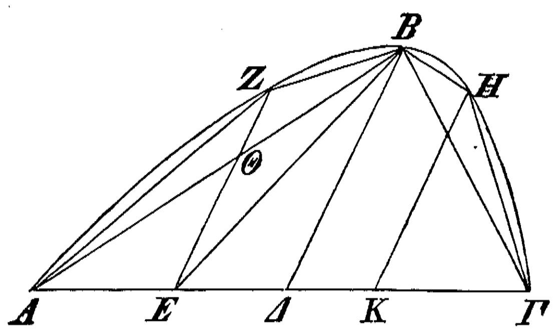
In D uero haec



κα'.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα ἐς τὰ λειπόμενα τμάματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν.

ἔστω τὸ $AB\Gamma$ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ τετμάσθω ἁ $A\Gamma$ δίχα τῷ Δ, ἁ δὲ $B\Delta$ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον· τὸ B ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστιν τοῦ τμάματος.



τὸ ἄρα $AB\Gamma$ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ $A\Delta$ τῷ E, καὶ ἄχθω ἁ EZ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δὲ ἁ AB κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα Z σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος τοῦ AZB. τὸ δὴ AZB τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ [AZB] τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον, ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τοῦ AZB τριγώνου.

ἔστιν οὖν ἁ $B\Delta$ τᾶς μὲν EZ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ $E\Theta$ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ $E\Theta$ τᾶς ΘZ. ὥστε καὶ τὸ AEB τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ $ZB A$· τὸ μὲν γὰρ $AE\Theta$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ $A\Theta Z$, τὸ δὲ ΘBE τοῦ $Z\Theta B$. ὥστε τὸ $AB\Gamma$ τοῦ AZB ἐστιν ὀκταπλάσιον.

XXI.

Si in segmento linea recta et coni rectanguli sectione comprehenso triangulus inscribitur eandem basim habens, quam segmentum, altitudinemque eandem, et etiam in segmentis reliquis alii trianguli inscribuntur eandem basim habentes, quam segmenta, altitudinemque eandem, triangulus in toto segmento inscriptus aequalis erit utriuis triangulorum in segmentis reliquis inscriptorum octies sumpto.

sit $AB\Gamma$ segmentum, quale diximus, et recta $A\Gamma$ in puncto Δ in duas partes aequales diuidatur, $B\Delta$ autem diametro parallela ducatur; punctum B igitur uertex est segmenti [prop. 18]. itaque triangulus $AB\Gamma$ eandem basim habet, quam segmentum, altitudinemque eandem.[1]) rursus recta $A\Delta$ in puncto E in duas partes aequales diuidatur, diametro autem parallela ducatur EZ, et recta AB ab ea in Θ secetur; punctum Z igitur uertex est segmenti AZB.[2]) quare triangulus AZB eandem basim habet, quam segmentum AZB, altitudinemque eandem. demonstrandum est, esse

$$AB\Gamma = 8\, ABZ.$$

est igitur $B\Delta = \frac{4}{3}\, EZ$ [prop. 19] $= 2\, E\Theta$;[3]) itaque $E\Theta = 2\, \Theta Z$.[4]) quare etiam $AEB = 2\, ZBA$; nam

$$AE\Theta = 2\, A\Theta Z \text{ et } \Theta BE = 2\, Z\Theta B \text{ [Eucl. VI, 1].}$$

1) Nam altitudo trianguli recta est ab B ad $A\Gamma$ perpendicularis, quae eadem altitudo est segmenti, quia B uertex est (p. 300, 15).

2) Nam $E\Theta \parallel B\Delta$ [Eucl. I, 30]; itaque $AE : E\Delta = A\Theta : \Theta B$ [Eucl. VI, 2]. et $AE = E\Delta$; quare $A\Theta = \Theta B$; tum u. prop. 18.

3) Nam $AE : A\Delta = E\Theta : B\Delta$ [Eucl. VI, 4] $= 1 : 2$.

4) Nam $E\Theta = \frac{2}{3}\, EZ$; itaque $\Theta Z = \frac{1}{3}\, EZ$.

---

21 Θ] A, *t* in duo equa 𝕭. In fig. ducta est BK in 𝕭, sed *k* expunctum et mg. adscr. male figurata. **23** τῷ] GH, το A. AZB] A, om. 𝕭; fort. delendum. **25** AZB] 𝕭, ABZ A.

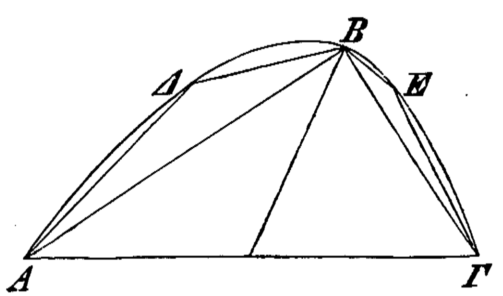
ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ $BH\Gamma$ τμᾶμα ἐγγραφέντος.

κβʹ.

Εἴ κα ᾖ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ $A\Delta BE\Gamma$ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ Z, H, Θ, I, τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἀγούμενον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Z, καὶ ἔστω τὸ Z ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν Z, H, Θ, I χωρίων μεῖζόν ἐστιν.

ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ B, τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ Δ, E. ἐπεὶ οὖν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν $A\Delta B$, $BE\Gamma$ τριγώνων, δῆλον, ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ



τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Z χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ $A\Delta B$, $BE\Gamma$ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ H χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ τῷ Θ καὶ τὰ ἐς

ergo $AB\Gamma = 8\, AZB$.[1]) et eodem modo demonstrabimus, esse etiam $AB\Gamma = 8\, BH\Gamma$.

XXII.

Si datum est segmentum linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum, et ponuntur spatia quotlibet, quae deinceps in quadrupla proportione sunt, maximumque spatium aequale est triangulo basim habenti eandem, quam segmentum, et altitudinem eandem, omnia simul spatia minora erunt segmento.

sit enim $A\Delta BE\Gamma$ segmentum linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum, et ponantur quotlibet spatia deinceps Z, H, Θ, I, praecedens autem quadruplo maius sit sequenti, maximumque sit Z, et Z aequale sit triangulo basim eandem habenti, quam segmentum, altitudinemque aequalem. dico, segmentum maius esse spatiis Z, H, Θ, I.

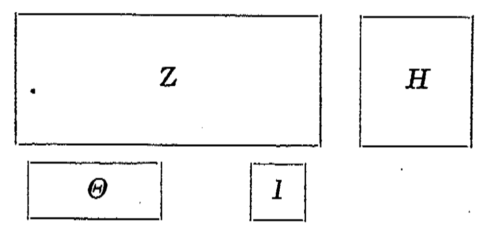
totius segmenti uertex sit B et segmentorum reliquorum uertices Δ, E. quoniam igitur

$$AB\Gamma = 8\, AB\Delta = 8\, BE\Gamma \text{ [prop. 21]},$$

adparet, esse $AB\Gamma = 4\,(AB\Delta + BE\Gamma)$. et quoniam

$$AB\Gamma = Z,$$

ideo erit $A\Delta B + BE\Gamma = H$. similiter autem demonstra-



bimus, etiam triangulos in reliquis segmentis inscriptos eandem basim habentes, quam segmenta, altitudinemque eandem

1) Nam $AB\Gamma = 2\, AB\Delta = 2\,(ABE + BE\Delta) = 4\, ABE$.

1 τμᾶμα] τμῆμα 𝔅G, τμηματος A. **19** $A\Delta B$] 𝔅, $AB\Delta$ A. **20** ὅτι ὡς] A, quod 𝔅, ὡς H; fort. ὡς delendum; cfr. p. 304, 19. **24** ταῦτα δὴ] scripsi, τα αυτα δε A𝔅. **30** ἴσα ἐντὶ] 𝔅G, ισων οντων A. τὰ ἐς] scripsi, ες A.

τὰ ὕστερον γενόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ I χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμάματος.

κγ'.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ A, B, Γ, Δ, E τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ A, ἔστω δὲ τὸ μὲν Z τρίτον τοῦ B, τὸ δὲ H τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ I τοῦ E. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Z τοῦ B τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ B τοῦ A τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ B, Z μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ A. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ H, Γ τοῦ B καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ I, E τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν A, B, Γ, Δ. ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ Z, H, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν B, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ B, Γ, Δ, E, I τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ A. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ A, B, Γ, Δ, E καὶ τὸ I, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ E, τοῦ A ἐστιν ἐπίτριτα.

---

2 I] 𝔅G, ςωι A. προτεθέντα] A, premissa 𝔅. 4 ἐλάσσονά] 𝔅, ελασσον A. 6 τεθέωντι] scripsi, συντεθεωντι A𝔅. 11 τετραπλασίονα] A; τετραπλάσιον 𝔅, *Nizzius*. 16 δὴ] A𝔅, fort. δέ. 18 H, Θ, I] 𝔅G; E, Θ, Γ A. 19 Δ] *Torellius*; Δ, E A𝔅.

aequales esse spatio Θ, et triangulos in segmentis deinde ortis inscriptos aequales spatio I; omnia igitur simul spatia data aequalia erunt polygono cuidam in segmento inscripto. ergo manifestum est, minora ea esse segmento.

XXIII.

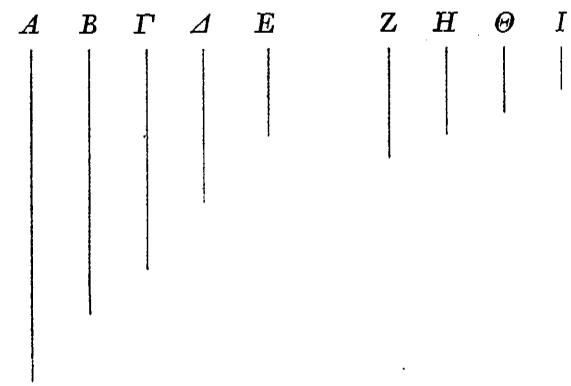
Si magnitudines quaedam ponuntur in quadrupla deinceps proportione, omnes magnitudines et praeterea tertia pars minimae simul sumptae tertia parte maiores erunt maxima.[1])

ponantur igitur deinceps quotlibet magnitudines A, B, Γ, Δ, E, singulae quadruplo maiores sequenti, et maxima sit A, sit autem $Z = \frac{1}{3} B$, $H = \frac{1}{3} \Gamma$, $\Theta = \frac{1}{3} \Delta$, $I = \frac{1}{3} E$. quoniam igitur est $Z = \frac{1}{3} B$ et $B = \frac{1}{4} A$, erit $B + Z = \frac{1}{3} A$. eadem de causa etiam

$$H + \Gamma = \tfrac{1}{3} B,\ \Theta + \Delta = \tfrac{1}{3} \Gamma,\ I + E = \tfrac{1}{3} \Delta;$$

erit igitur etiam

$$B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \tfrac{1}{3}(A + B + \Gamma + \Delta).$$



est autem etiam $Z + H + \Theta = \frac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta)$ [ex hypothesi]; quare etiam $B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{1}{3} A$. ergo adparet, esse $A + B + \Gamma + \Delta + E + I$, h. e.

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \tfrac{1}{3} E = \tfrac{4}{3} A.$$

---

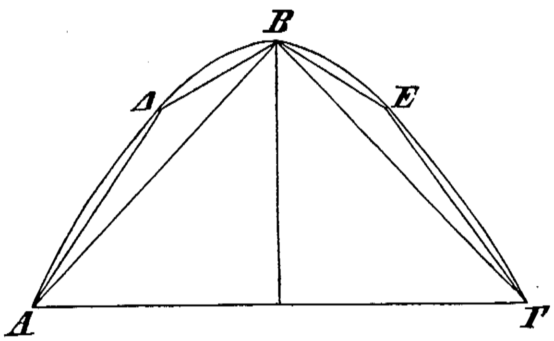
1) Cfr. Quaest. Arch. p. 57—58. idem generaliter demonstrat Euclides Elem. IX, 35 (monente Ludouico Oppermann).

κδ'.

Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δὲ $AB\Gamma$ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δὲ $AB\Gamma$ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ K χωρίον. δεικτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ $A\Delta BE\Gamma$ τμάματι.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα τοῦ K χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ $A\Delta B$, $BE\Gamma$ τρίγωνα,



ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμάματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα τοῦ K χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ K· ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἑξῆς κεί-

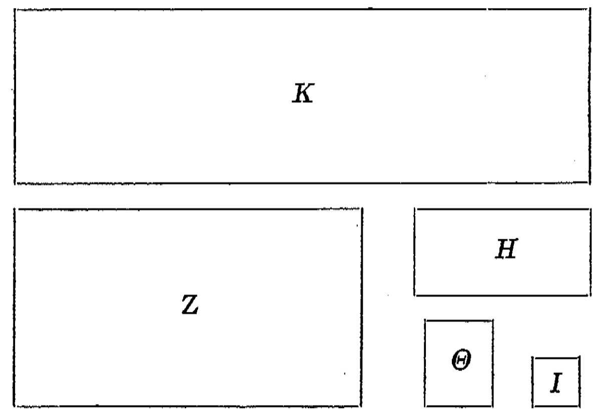
XXIV.

Quoduis segmentum linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum tertia parte maius est triangulo eandem basim habenti, quam segmentum, altitudinemque aequalem.

sit enim $A\Delta BE\Gamma$ segmentum linea recta et coni rectanguli sectione comprehensum, et $AB\Gamma$ triangulus sit eandem basim habens, quam segmentum, altitudinemque aequalem, sit autem $K = \frac{4}{3} AB\Gamma$. demonstrandum est, esse

$$K = A\Delta BE\Gamma.$$

nam si aequale non est, aut maius est aut minus. prius,



si fieri potest, segmentum $A\Delta BE\Gamma$ maius sit spatio K. inscripsi igitur triangulos $A\Delta B$, $BE\Gamma$ ita, ut diximus, et etiam in segmentis reliquis alios triangulos inscripsi eandem basim habentes, quam segmenta, altitudinemque eandem, et semper in segmentis deinde ortis triangulos inscribo eandem basim habentes, quam segmenta, altitudinemque eandem; erunt igitur ⟨aliquando⟩ segmenta reliqua minora excessu, quo segmentum $A\Delta BE\Gamma$ spatium K excedit [prop. 20 coroll.]. itaque polygonum inscriptum maius erit spatio K; quod

9 τῷ] G, e corr. E, το A. 12 $A\Delta BE\Gamma$] 𝔅, $A\Delta EB\Gamma$ A. 17 δύο] A𝔅; melius abesset. 20 $A\Delta BE\Gamma$] 𝔅, $A\Delta EB\Gamma$ A. 22 γάρ] addidi, om. A𝔅.

μενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν $A\Delta B$, $BE\Gamma$ τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων καὶ ἀεὶ οὕτω, δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ K ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα τοῦ K χωρίου.

ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν $AB\Gamma$ τρίγωνον ἴσον τῷ Z, τοῦ δὲ Z τέταρτον τὸ H, καὶ ὁμοίως τοῦ H τὸ Θ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ K χωρίον τοῦ τμάματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ I· ἔστιν δὴ τὰ Z, H, Θ, I χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ I ἐπίτριτα τοῦ Z. ἔστιν δὲ καὶ τὸ K τοῦ Z ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ K τοῖς Z, H, Θ, I καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ I. ἐπεὶ οὖν τὸ K χωρίον τῶν μὲν Z, H, Θ, I χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ I, τοῦ δὲ τμάματος μείζονι τοῦ I, δῆλον, ὡς μείζονά ἐντι τὰ Z, H, Θ, I χωρία τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι, ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμᾶμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. οὐκ ἄρα τὸ $A\Delta BE\Gamma$ τμᾶμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ K χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ K. τὸ δὲ K χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ $AB\Gamma$· καὶ τὸ $A\Delta BE\Gamma$ ἄρα τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου.

---

2 *τρίγωνον*] A, om. 𝔅. **3** *δὲ*] A, om. 𝔅. *αὐτὰ ταῦτα*] scripsi, *τα αυτα* A, ipsa 𝔅. **8** *δή*] A, itaque corr. ex autem 𝔅. *τὸ* — **9** *τῷ* Z] A𝔅; debuit esse *τῷ μὲν* $AB\Gamma$ *τριγώνῳ ἴσον τὸ* Z. **10** *ἕως κα γένηται*] scripsi, *ωστε καταγε-*

fieri non potest. nam quoniam deinceps posita sunt spatia quaedam in quadrupla proportione, primum triangulus $AB\Gamma$ quadruplo maior triangulis $A\Delta B$, $BE\Gamma$ [prop. 21; cfr. p. 308, 20], deinde hi ipsi quadruplo maiores triangulis in segmentis sequentibus inscriptis, et semper hoc modo, adparet, omnia simul spatia minora esse quam tertia parte maiora maximo [prop. 23], spatium autem K tertia parte maius est maximo spatio. itaque segmentum $A\Delta BE\Gamma$ maius non est spatio K.

sit autem, si fieri potest, minus. ponatur igitur

$$Z = AB\Gamma,\ H = \tfrac{1}{4} Z,\ \Theta = \tfrac{1}{4} H, .$$

et deinceps spatia ponantur, dum fiat ultimum spatium minus excessu, quo spatium K segmentum excedit [Eucl. X, 1], sitque ⟨hoc excessu⟩ minus I; sunt igitur

$$Z + H + \Theta + I + \tfrac{1}{3} I = \tfrac{4}{3} Z \text{ [prop. 23].}$$

erat autem etiam $K = \frac{4}{3} Z$; itaque

$$K = Z + H + \Theta + I + \tfrac{1}{3} I.$$

iam quoniam spatium K spatia Z, H, Θ, I excedit spatio minore, quam est spatium I, segmentum uero spatio maiore, quam est I, adparet, spatia Z, H, Θ, I maiora esse segmento; quod fieri non potest; nam demonstratum est, si spatia quotlibet deinceps data sint in quadrupla proportione, et maximum triangulo in segmento inscripto aequale sit, omnia simul spatia minora fore segmento [prop. 22]. itaque segmentum $A\Delta BE\Gamma$ minus non est spatio K. demonstratum autem est, id ne maius quidem esse; itaque spatio K aequale est. uerum spatium K tertia parte maius est triangulo $AB\Gamma$; ergo etiam segmentum $A\Delta BE\Gamma$ tertia parte maius est triangulo $AB\Gamma$.

νηται A, ut fiat 𝔅. **13** *δή*] scripsi, *δε* A𝔅. **15** *ἄρα*] A, ergo est 𝔅. **16** *τῶν*] GH, *τῳ* A. **20** *ἐὰν*] A, om. 𝔅. **26** *ἄρα*] 𝔅, om. A. In fine: *Αρχιμηδους τετραγωνισμος* A (*παραβολης* add. D), explicit liber qui dicitur quadratura parabole (in ras.) 𝔅. Deinde add. D: ЄΥΤΥΧΟΙΗC | ΛЄΟΝ ΓЄѠΜЄΤΡΑ:—|+*πολλοὺς ἐς λυκάβαντας ἴοις πολὺ φίλτατε μούσαις*:∼