

LES ŒUVRES COMPLÈTES D'ARCHIMÈDE

SUIVIES DES
COMMENTAIRES D'EUTOCIUS D'ASCALON

Traduites du grec en français
avec une introduction et des notes

PAR

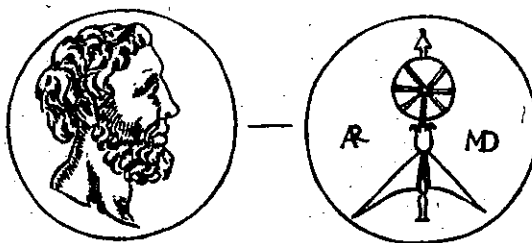
PAUL VER EECKE

INGÉNIEUR DES MINES (A. I. LG.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL

*Ouvrage honoré de Subventions par le Ministère de l'Instruction Publique
et la Fondation Universitaire de Belgique*

TOME II

Δός μοί ποῦ στᾶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.
Donne-moi où je puisse me tenir ferme,
et j'ébranlerai la terre



LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

ALBERT BLANCHARD

9, RUE DE MÉDICIS, PARIS

LA MÉTHODE RELATIVE AUX THÉORÈMES MÉCANIQUES

Archimède à Eratosthène (1), prospérité !

Je t'ai transmis antérieurement, par écrit, les énoncés de théorèmes que j'ai découverts, en te chargeant de trouver les démonstrations que je n'en avais pas encore données. Les énoncés des théorèmes déjà envoyés étaient les suivants :

En premier lieu, si, dans un prisme droit, ayant comme base un parallélogramme, l'on inscrit un cylindre ayant ses bases inscrites dans les parallélogrammes (2) opposés et ses côtés dans les plans restants du prisme (3), et si l'on mène un plan par le centre du cercle de base

1. Eratosthène de Cyrène (276-194 av. J.-C.), fils d'Aglaüs, fut appelé à la bibliothèque d'Alexandrie par Ptolémée III Evergète. Il s'occupa d'histoire, de géographie, de géométrie, d'astronomie, de philosophie, de grammaire et de poésie. Il composa le premier système géographique basé sur la forme sphérique de la terre. Ayant mesuré la distance de Syène à Alexandrie à l'aide d'un gnomon, il évalua la longueur de la circonférence terrestre à 252.000 stades. Son ouvrage en trois livres sur la géographie est perdu, et nous n'en connaissons que des extraits dans les *Œuvres* de Strabon. Comme astronome, il nous a laissé, sous le titre de *Catastérismes*, un catalogue d'étoiles, dont l'unique manuscrit d'Oxford fut publié pour la première fois, en cette ville, par Jean Fell, en 1672, et qui fut traduit en français par l'abbé Halma (Paris, 1823, in-4°). Eratosthène avait écrit un ouvrage sur la Duplication du cube, que nous ne connaissons que par l'esquisse qu'Eutocius en a donnée dans son commentaire sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. Tous les fragments des œuvres d'Eratosthène ont été publiés sous le titre de *Eratosthenica*, par J. BERNHARDY. (Berlin, 1822, in-8°.)

2. Le mot *παράλληλόγραμμον*, parallélogramme, est employé ici deux fois dans l'acception restreinte de carré, comme l'indique du reste le mot *τετράγωνον*, carré, employé dans la phrase suivante.

3. C'est-à-dire ayant sa surface latérale tangente aux plans du prisme autres que les bases, ou bien, ayant quatre de ses génératrices dans les plans du prisme.

du cylindre et par un côté du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené séparera du cylindre un segment délimité par deux plans et par la surface du cylindre, l'un des plans étant celui qui a été mené, l'autre celui dans lequel se trouve la base du cylindre, la surface étant celle qui est située entre les dits plans, et le segment séparé du cylindre sera la sixième partie du prisme entier.

L'énoncé de l'autre théorème était le suivant : Si, dans un cube, on inscrit un cylindre ayant ses bases dans des carrés opposés et sa surface tangente aux quatre plans restants, et si, dans ce même cube, on inscrit encore un autre cylindre ayant ses bases dans d'autres carrés et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure qui, enveloppée par les surfaces des cylindres, est située dans l'un et l'autre cylindre, vaut les deux tiers du cube entier ⁽¹⁾.

Au reste, il se fait que ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés précédemment ; car dans ceux-là, nous avons comparé, en volume, des figures de conoïdes, de sphéroïdes ⁽²⁾, et leurs segments avec des figures de cônes et de cylindres ; mais aucune d'elles n'a été trouvée équivalente à une figure solide délimitée par des plans, tandis que chacune de ces figures-ci, délimitée par deux plans et par des surfaces cylindriques, a été trouvée équivalente à une figure solide délimitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je te transmets par écrit dans le présent livre.

D'ailleurs, te considérant, ainsi que je l'ai déjà dit, comme habile, excellemment à la hauteur de la philosophie, et comme ne reculant pas devant les questions mathématiques qui se présentent, j'ai songé à t'exposer par écrit, et à illustrer, dans ce même livre, la nature particulière d'une méthode qui te permettra éventuellement de venir à bout de certaines propositions mathématiques par la mécanique. Or, je suis persuadé que cette méthode n'est pas moins utile pour la démonstration même des propositions ; car certaines d'entre elles, d'abord évidentes pour moi par la mécanique, ont été démontrées après coup par la géométrie, parce que l'investigation par cette méthode est exclusive d'une démonstration. La recherche de la démonstration, précédée d'une certaine connaissance des questions par cette méthode,

1. C'est-à-dire le volume commun aux deux cylindres qui s'intersectionnent à angle droit dans le cube.

2. C'est-à-dire les paraboloides, hyperboloides et ellipsoïdes de révolution.

est, en effet, plus aisée que sa recherche sans cette connaissance. Et c'est ainsi que, pour ce qui concerne les propositions relatives au cône et à la pyramide, dont Eudoxe ⁽¹⁾ a le premier trouvé la démonstration, notamment que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur, l'on doit attribuer une part non négligeable à Démocrite ⁽²⁾ qui, le premier, a affirmé les choses, sans démonstration, pour les figures que nous venons de dire. Comme il se fait que la découverte des propositions, que nous allons exposer maintenant, m'est venue de la même manière que pour les précédentes, j'ai voulu divulguer cette méthode par écrit, aussi bien pour ne paraître à personne avoir lancé des paroles vaines, d'autant plus que j'en ai déjà parlé antérieurement ⁽³⁾, que parce que je suis convaincu qu'elle ne doit pas apporter un mince avantage à l'objet de nos études. En effet, je suis persuadé qu'à la faveur de cette méthode, une fois qu'elle aura été exposée, d'autres propositions, qui ne se sont pas encore présentées à moi-même, seront trouvées par d'autres, tant parmi ceux qui vivent que parmi ceux qui doivent encore naître.

En conséquence, je mettrai d'abord par écrit ce qui m'a aussi été révélé en premier lieu par la mécanique ; notamment que tout segment

1. Eudoxe de Cnide (environ 300 ans av. J.-C.), fils d'Eschine, et disciple d'Archytas et de Platon, géomètre, astronome et médecin. Initié à la science sacerdotale en Egypte, il enseigna, le premier en Grèce, la doctrine du mouvement des planètes, construisit le cadran solaire dont Vitruve nous a laissé la description (VITRUVÉ, édition de la traduction précitée, livre IX, chap. IX, tome II, p. 201), et corrigea le cycle de Méton. Ses ouvrages, dans lesquels il établissait probablement les théorèmes qu'Archimède lui attribue, ne nous sont point parvenus. Ils existaient encore à l'époque où Aratus (270 ans av. J.-C.) mit en vers les deux ouvrages d'Eudoxe intitulés *Le Miroir* et *Les Phénomènes*, dont il fit un seul poème intitulé : *Des Phénomènes et des Signes*. Edité pour la première fois chez les Alde, à Venise, en 1499, l'ouvrage d'Aratus a été traduit en français par l'abbé Halma, avec les scholies de Théon, les *Catastérismes* d'Eratosthène et la *Sphère* de Léontius. (Paris, 1823, in-4°.)

2. Démocrite d'Abdère (469-361 ans av. J.-C.), philosophe qui fonda, avec Leucippe, l'école des atomistes, dont le système admettait comme principe de toutes choses le vide et les atomes. Il passe pour avoir inventé la construction de la voûte. D'après Vitruve, il aurait écrit sur la perspective ; d'après Varron et Columelle, il aurait écrit sur l'agriculture ; enfin, d'après Plutarque, il aurait écrit sur les sections parallèles à la base du cône. Stobée nous a conservé quelques extraits de ses *Contes moraux* et de ses *Diatribes*. Il ne nous est parvenu sous son nom qu'un ouvrage, peut-être apocryphe, intitulé : *Choses physiques et mystiques*, qui n'a été publié que dans une version latine, à Padoue, en 1573, sous le titre : *Democritus Abderida de Arte magna*. C'est le plus ancien ouvrage sur la pierre philosophale, et il fut fort en honneur chez les Alchimistes.

3. Dans le préambule du livre *De la Quadrature de la Parabole*.

de parabole vaut une fois et un tiers le triangle ayant même base et hauteur égale, puis diverses propositions qui ont été examinées par cette méthode. D'autre part, à la fin du livre, j'écrirai les démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'ai déjà transmis les énoncés.

LEMMES (1)

I. — Si l'on retranche une grandeur d'une grandeur, et si un même point est le centre de gravité de la grandeur entière et de celle qui en est retranchée, ce point est le centre de gravité de la grandeur restante.

II. — Si l'on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point n'est pas le centre de gravité de la grandeur entière et de celle qui en a été retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur la droite reliant les centres de gravité des grandeurs entière et retranchée, au point où cette droite prolongée est coupée à une distance dont le rapport à la droite, placée entre les dits centres de gravité, est le même que celui du poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante (2).

III. — Si les centres de gravité d'un nombre de grandeurs aussi élevé qu'on voudra sont situés sur une même droite, le centre de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera situé aussi sur cette même droite (3).

IV. — Le centre de gravité de toute droite est le point qui divise cette droite en deux parties égales (4).

V. — Le centre de gravité de tout triangle est le point où se coupent les droites menées des angles du triangle au milieu des côtés (5).

VI. — Le centre de gravité de tout parallélogramme est le point où les diagonales se rencontrent (6).

VII. — Le centre de gravité du cercle est le centre même du cercle.

1. La plupart des propositions, qui précèdent ici sous le nom de « Lemmes », ont été démontrées par Archimède dans son traité *De l'Équilibre des Plans*. Elles sont simplement rappelées comme étant utiles aux démonstrations des propositions du traité *De la Méthode mécanique*.

2. Voir *De l'Équilibre des Plans*, livre I, prop. VIII.

3. *Ibidem*, prop. V, corollaire.

4. *Ibidem*, prop. IV restreinte au cas particulier d'une droite.

5. *Ibidem*, prop. XIV.

6. *Ibidem*, prop. X.

VIII. — Le centre de gravité de tout cylindre est le point qui divise son axe en deux parties égales.

IX. — Le centre de gravité de tout prisme est le point qui divise son axe ⁽¹⁾ en deux parties égales.

X. — Le centre de gravité de tout cône est situé sur l'axe, divisé de telle sorte que le segment se trouvant du côté du sommet soit triple du segment restant ⁽²⁾.

XI. — Nous ferons d'ailleurs également usage de la proposition suivante, qui a déjà été exposée dans le livre *Des Conoïdes* ⁽³⁾ :

Si le rapport de grandeurs aussi nombreuses qu'on voudra, prises deux à deux, est le même que celui d'autres grandeurs aussi nombreuses de même rang, et si les premières grandeurs, ou certaines d'entre elles, ont, avec d'autres grandeurs, un rapport quelconque qui soit le même que celui des secondes grandeurs avec encore d'autres grandeurs de même rang, le rapport de la somme des premières grandeurs à la somme de celles que nous avons dites est le même que celui de la somme des secondes grandeurs à la somme des autres grandeurs que nous avons dites ⁽⁴⁾.

PROPOSITION I

Soit un segment ABΓ délimité par la droite AT' et par la parabole ABΓ. Coupons la droite AT' en deux parties égales au point Δ,

1. L'axe désigne ici la droite qui relie les centres de gravité des plans des bases opposées du prisme.

2. Le problème relatif à la détermination du centre de gravité du cône ne se rencontre pas dans les *Œuvres* d'Archimède qui nous sont parvenues. Il est possible qu'il ait été donné dans le traité perdu *Des Leviers*, ou dans une partie perdue du traité *De l'Équilibre des Plans*.

3. ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν, littéralement, dans le (livre) précédemment écrit sur les conoïdes. Cette phrase, dont la forme est d'ailleurs négligée, semble n'être qu'une interpolation, ou une note de référence, ayant passé de marge en corps de texte du manuscrit. (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. II, p. 434.)

4. La traduction textuelle de cette proposition est d'une lecture un peu pénible; mais son interprétation en notations usuelles est la suivante :

Soient deux séries de grandeurs : A ; A₁ ; A₂... ; A_n et B ; B₁ ; B₂... ; B_n, telles que : $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$; $\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{B_{n-1}}{B_n}$. Soient d'autre part les séries : A ; A₁ ; A₂ ; A_n et C ; C₁ ; C₂... ; C_n, telles que : $\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1} = \frac{A_n}{C_n} = m$, et les séries B ; B₁ ; B₂... ; B_n et D ; D₁ ; D₂... ; D_n, telles que : $\frac{B}{D} = \frac{B_1}{D_1} = \frac{B_n}{D_n} = m$, on aura : $\frac{A + A_1 + A_2 + \dots + A_n}{D + D_1 + D_2 + \dots + D_n} = \frac{B + B_1 + B_2 + \dots + B_n}{C + C_1 + C_2 + \dots + C_n}$. La démonstration de cette relation est donnée à la proposition I du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*.

puisque $MΞ$ est à $ΞO$ comme $ΓA$ est à $AΞ$ ⁽¹⁾, que $ΓK$ est à KN comme $ΓA$ est à $AΞ$, et que $ΓK$ est égal à $KΘ$, il s'ensuit que $MΞ$ est à $ΞO$ comme $ΘK$ est à KN ⁽²⁾. Et puisque le point N est le centre de gravité de la droite $MΞ$, parce que la droite MN est égale à la droite $NΞ$ ⁽³⁾, si nous prenons une droite TH , égale à la droite $ΞO$, ayant son centre de gravité au point $Θ$, de manière que la droite $TΘ$ soit égale à la droite $ΘH$ ⁽⁴⁾, la droite $TΘH$ fera équilibre à la droite $MΞ$ laissée en place, parce que la droite $ΘN$ est divisée dans le rapport inverse des poids de TH et de $MΞ$, et que $MΞ$ est à HT comme $ΘK$ est à KN ⁽⁵⁾; en sorte que le centre de gravité de l'ensemble de ces poids sera le point K ⁽⁶⁾. Il en sera d'ailleurs de même pour toutes les droites menées parallèlement à la droite $EΔ$ dans le triangle ZAF , lesquelles, laissées en place, feront respectivement équilibre à leurs parties, découpées par la parabole et déplacées au point $Θ$, de manière que le point K soit le centre de gravité de la grandeur composée des unes et des autres. Et puisque le triangle $ΓZA$ est constitué par les droites menées dans le triangle $ΓZA$, et que le segment $ABΓ$ est constitué par les droites prises dans la parabole de la même manière que la droite $ΞO$, il s'ensuit que le triangle ZAF , laissé en place, fera équilibre, par rapport au point K , au segment de parabole dont le centre de gravité aura été transporté au point $Θ$, de manière que le point K soit le centre de gravité de l'ensemble. Dès lors, divisons la droite $ΓK$ au point X de manière que la droite $ΓK$ soit triple de la droite KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle $AZΓ$; car cela a été démontré dans le livre *Des Équilibres* ⁽⁷⁾. Donc, puisque le triangle ZAF , maintenu en place, s'équilibre au point K avec le segment $ABΓ$, dont le centre de gravité est transporté au point $Θ$, et que le point X est le centre de gravité du triangle ZAF , la droite $ΘK$ est à la droite XK comme le triangle $AZΓ$.

1. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, proposition V. Une petite interpolation ajoute ici : « car cela est démontré dans un lemme ».

2. En vertu de la proposition rappelée dans la note précédente, on a : $\frac{MΞ}{ΞO} = \frac{ΓA}{AΞ}$,

et l'on a : $\frac{ΓA}{AΞ} = \frac{ΓK}{KN}$, d'où : $\frac{MΞ}{ΞO} = \frac{ΓK}{KN}$. Or, par hypothèse : $ΓK = ΘK$; donc : $\frac{MΞ}{ΞO} = \frac{ΘK}{KN}$.

3. Voir lemme IV.

4. Voir lemme IV.

5. Voir *De l'Équilibre des Plans*, livre I, propositions VI-VII.

6. Voir lemme III.

7. Voir *De l'Équilibre des Plans*, livre I, proposition XIV, et le lemme V placé en tête de ce traité.

est au segment $AB\Gamma$ placé autour du centre Θ . Or, la droite ΘK est triple de la droite KX ; par conséquent, le triangle $AZ\Gamma$ est aussi triple du segment $AB\Gamma$ ⁽¹⁾. Or, le triangle $ZA\Gamma$ est quadruple du triangle $AB\Gamma$, parce que la droite ZK est égale à la droite KA , et que la droite $A\Delta$ est égale à la droite $\Delta\Gamma$ ⁽²⁾ ; par conséquent, le segment $AB\Gamma$ vaut les quatre tiers du triangle $AB\Gamma$ ⁽³⁾.

PROPOSITION II

Ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. C'est pourquoi, reconnaissant nous-même que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant dans l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et déjà publiée ⁽⁴⁾.

Au reste, d'après cette méthode, nous allons voir, de la manière suivante, que toute sphère est quadruple du cône ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au rayon de la sphère ⁽⁵⁾, et que le cylindre, ayant la base égale au plus grand cercle d'une sphère et la hauteur égale au diamètre de cette sphère, vaut une fois et demie cette sphère ⁽⁶⁾.

En effet, soit une sphère dans laquelle $AB\Gamma\Delta$ est un grand cercle, les droites $A\Gamma, B\Delta$ étant des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. Soit, dans cette sphère, un cercle de diamètre $B\Delta$ perpendiculaire au cercle $AB\Gamma\Delta$. Construisons, sur ce cercle perpendiculaire, un cône

1. On a, en vertu des propositions VI et VII *De l'Équilibre des Plans*, livre I : $\frac{\Theta K}{KX} = \frac{\text{triangle } AZ\Gamma}{\text{segment } AB\Gamma}$. Or, on a posé : $\Theta K = \Gamma K$, et $\Gamma K = 3KX$; donc : $\frac{\Theta K}{KX} = 3$, d'où : triangle $AZ\Gamma = 3$ segments $AB\Gamma$.

2. On a : $ZK = KA$, $A\Delta = \Delta\Gamma$, et $KB = B\Gamma$, d'où, considérant les triangles ayant même hauteur et bases égales : $AZ\Gamma = 2A\Gamma K = 2(AB\Gamma + ABK) = 2(AB\Gamma + AB\Gamma) = 4AB\Gamma$.

3. Les relations des deux notes précédentes donnent : 4 triangles $AB\Gamma = 3$ segments $AB\Gamma$, d'où, comme le texte : segment $AB\Gamma = \frac{3}{4}$ triangle $AB\Gamma$.

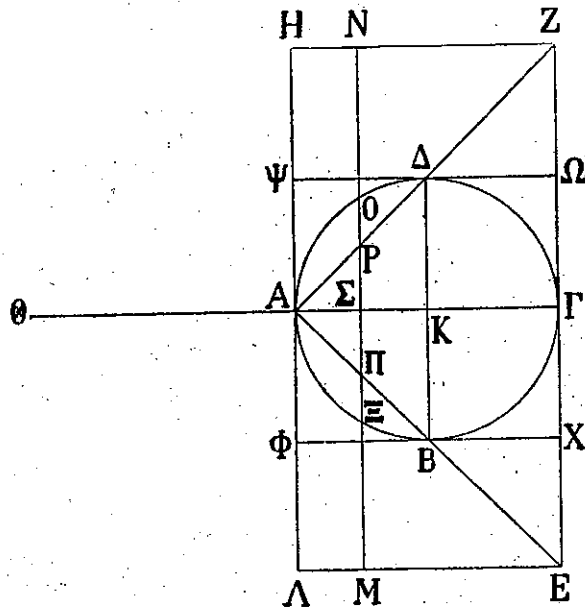
4. Archimède vise ici la démonstration purement géométrique de la quadrature du segment parabolique déjà publiée dans la seconde partie du livre *De la Quadrature de la Parabole*. Bien que le préambule ait annoncé la reproduction de cette démonstration à la fin du traité *De la Méthode mécanique*, elle n'a pas été retrouvée dans le palimpseste de Jérusalem.

5. Voir la démonstration géométrique au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV.

6. Voir la démonstration géométrique au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV, corollaire.

ayant son sommet au point A, et, sa nappe étant prolongée, coupons ce cône par un plan mené par le point Γ parallèlement à la base ; ce plan déterminera donc un cercle perpendiculaire à la droite $A\Gamma$, dont le diamètre sera la droite

EZ . Construisons sur ce cercle un cylindre ayant l'axe égal à la droite $A\Gamma$, et soient $E\Delta$, ZH les côtés de ce cylindre. Prolongeons la droite ΓA ; prenons une droite $A\Theta$ qui lui soit égale, et imaginons que la droite $\Gamma\Theta$ soit un levier dont le milieu est le point A. Menons une parallèle quelconque MN à $B\Delta$, coupant le cercle $AB\Gamma\Delta$ en Ξ et O, le diamètre $A\Gamma$ en Σ , la droite AE en Π , et la droite AZ



en P. Menons par la droite MN un plan perpendiculaire à la droite $A\Gamma$; il déterminera donc une section, laquelle sera le cercle de diamètre MN dans le cylindre, le cercle de diamètre ΞO dans la sphère $AB\Gamma\Delta$, et le cercle de diamètre ΠP dans le cône. Dès lors, puisque le rectangle sous ΓA , $A\Sigma$ équivaut au rectangle sous $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$, car $A\Gamma$ est égal à ΣM et $A\Sigma$ égal à $\Sigma\Pi$, et que le rectangle sous ΓA , $A\Sigma$ équivaut au carré de $A\Xi$, c'est-à-dire aux carrés de $\Xi\Sigma$, $\Sigma\Pi$, il en résulte que le rectangle sous $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$ équivaut aux carrés de $\Xi\Sigma$, $\Sigma\Pi$ (1). Et puisque $M\Sigma$ est à $\Sigma\Pi$ comme ΓA est à $A\Sigma$, et que ΓA est égal à $A\Theta$, il s'ensuit que $M\Sigma$ est à $\Sigma\Pi$, c'est-à-dire que le carré de $M\Sigma$ est au rectangle sous $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$, comme ΘA est à $A\Sigma$. Or, on a démontré que le rectangle sous $M\Sigma$, $\Sigma\Pi$ équivaut aux carrés de $\Xi\Sigma$, $\Sigma\Pi$; par conséquent, le carré de $M\Sigma$ est aux carrés de $\Xi\Sigma$, $\Sigma\Pi$ comme $A\Theta$

1. On a : $A\Gamma = E\Gamma = \Sigma M$, et, par similitude de triangles : $A\Sigma = \Sigma\Pi$, d'où, par produit : $\Gamma A \times A\Sigma = M\Sigma \times \Sigma\Pi$. D'autre part, dans le cercle, une corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par une de ses extrémités et entre la projection de cette corde sur ce diamètre ; donc : $\Gamma A \times A\Sigma = A\Xi^2 = \Xi\Sigma^2 + A\Sigma^2 = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$, d'où, comme le texte : $M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$.

est à $A\Sigma$ ⁽¹⁾. Or, le carré de MN est aux carrés de ΞO , ΠP comme le carré de $M\Sigma$ est aux carrés de $\Xi\Sigma$, $\Sigma\Pi$, tandis que le cercle, ayant dans le cylindre le diamètre MN , est à l'ensemble des cercles, de diamètre ΠP dans le cône et de diamètre ΞO dans la sphère, comme le carré de MN est aux carrés de ΞO , ΠP . En conséquence, le cercle situé dans le cylindre est aux cercles situés, l'un dans la sphère, l'autre dans le cône, comme ΘA est à $A\Sigma$ ⁽²⁾. Dès lors, puisque ΘA est à $A\Sigma$ comme ce même cercle, situé dans le cylindre et laissé en place, est aux deux cercles ayant comme diamètres les droites ΞO , ΠP , déplacés et disposés en Θ de manière que Θ soit leur centre de gravité commun, comme ΘA est à $A\Sigma$, ces cercles s'équilibreront par rapport au point A . On démontrerait pareillement que, si l'on mène une autre parallèle à EZ dans le parallélogramme ΛZ , et si, par la droite ainsi menée, on élève un plan perpendiculaire à la droite $A\Gamma$, le cercle déterminé dans le cylindre, laissé en place, fera équilibre autour du point A aux deux cercles déterminés dans la sphère et dans le cône, déplacés et disposés en Θ sur le levier de manière que Θ soit leur centre de gravité commun. Par conséquent, le cylindre, la sphère et le cône étant remplis de cercles ainsi déterminés, le cylindre laissé en place fera équilibre autour du point A à l'ensemble de la sphère et du cône, déplacés et disposés en Θ sur le levier, de manière que Θ soit leur centre de gravité commun. Dès lors, puisque les solides que nous venons de dire se font équilibre autour du point A , le cylindre restant en place autour de son centre de gravité K ⁽³⁾, et la sphère et le cône étant déplacés autour du centre de gravité Θ , le cylindre sera à la sphère et au cône comme ΘA est à AK ⁽⁴⁾. Or, ΘA est le double de AK ; par conséquent, le cylindre équivaut aussi au double

1. On a : $\frac{\Gamma E}{\Sigma \Pi} = \frac{\Gamma A}{A\Sigma}$. Or, $\Gamma E = M\Sigma$, et on a posé : $\Theta A = \Gamma A$; donc : $\frac{M\Sigma}{\Sigma \Pi} = \frac{M\Sigma^2}{M\Sigma \times \Sigma \Pi} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$, d'où, par substitution de la valeur trouvée dans la note précédente, il vient, comme

le texte : $\frac{M\Sigma^2}{\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2} = \frac{A\Theta}{A\Sigma}$.

2. Observant que les cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres, la relation de la note précédente devient :

$$\frac{M\Sigma^2}{\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2} = \frac{MN^2}{\Xi O^2 + \Pi P^2} = \frac{\text{cercle } MN}{\text{cercle } \Xi O + \text{cercle } \Pi P} = \frac{A\Theta}{A\Sigma}.$$

3. Voir lemme VIII.

4. Voir *De l'Équilibre des Plans*, livre I, propositions VI et VII.

de l'ensemble de la sphère et du cône ⁽¹⁾. Or, ce même cylindre vaut le triple du cône ⁽²⁾ ; par conséquent, trois cônes valent deux de ces mêmes cônes et deux sphères. Retranchons deux cônes de ces cônes ; il s'ensuit qu'un cône, dont AEZ est le triangle passant par l'axe, vaut deux sphères telles que nous les avons dites ⁽³⁾. Or, le cône, dont AEZ est le triangle passant par l'axe, vaut huit cônes dont ABΔ est le triangle passant par l'axe, parce que EZ est le double de BΔ ; par conséquent, huit cônes tels que nous venons de dire valent deux sphères. Dès lors, la sphère, dont ABΓΔ est un grand cercle, est quadruple du cône dont le sommet est le point A, et dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BΔ perpendiculaire à la droite AΓ ⁽⁴⁾.

Menons maintenant, dans le parallélogramme ΔZ, par les points B et Δ, les droites ΦBX, ΨΔΩ parallèles à la droite AΓ, et imaginons le cylindre dont les bases sont les cercles décrits autour des diamètres ΦΨ, XΩ, et dont la hauteur est AΓ. Dès lors, puisque le cylindre, dont ΦΩ est le parallélogramme passant par l'axe, est double du cylindre dont ΦΔ est le parallélogramme passant par l'axe ⁽⁵⁾, et que, d'après *Les Eléments* ⁽⁶⁾, ce dernier cylindre lui-même est triple du cône dont ABΔ est le triangle passant par l'axe, il en résulte que le cylindre, dont ΦΩ est le parallélogramme passant par l'axe, est sextuple du cône dont ABΔ est le triangle passant par l'axe. Or, nous avons démontré que la sphère, dont ABΓΔ est un grand cercle, est

1. En observant que $\Theta A = A\Gamma = 2AK$, la relation donnée par les propositions rappelées dans la note précédente devient : $\frac{\text{cylindre}}{\text{sphère} + \text{cône}} = \frac{\Theta A}{AK} = \frac{2AK}{AK} = 2$, d'où, comme le texte : cylindre = 2 [sphère + cône].

2. EUCLIDE, livre XII, proposition 10 : « Le cône est tiers du cylindre de même base et de même hauteur. »

3. Les deux notes précédentes donnant : cylindre = 2 sphères + 2 cônes, et cyl. = 3 cônes, on a, comme le texte : 3 cônes = 2 cônes + 2 sphères, d'où, comme le texte : cône = 2 sphères.

4. En vertu de la proposition 12 du livre XII d'EUCLIDE (« Les cônes semblables sont entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases »), et en observant que $EZ = 2B\Delta$, on aura : $\frac{\text{cône } ABA}{\text{cône } AEZ} = \frac{B\Delta^3}{EZ^3} = \frac{B\Delta^3}{8B\Delta^3} = \frac{1}{8}$, d'où, comme le

texte : cône AEZ = 8 cônes ABA. Or, on vient de voir, note précédente, que : cône AEZ = 2 sphères ABΓΔ ; donc, comme le texte : 8 cônes ABA = 2 sphères ABΓΔ, d'où : sphère ABΓΔ = 4 cônes ABA, relation dont la démonstration purement géométrique est donnée au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV.

5. EUCLIDE, livre XII, proposition 14 : « Cônes et cylindres de bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs ».

6. *Eléments* d'EUCLIDE, livre XII, prop. 10 : Voir note 2 plus haut.

quadruple de ce dernier cône ; par conséquent, le cylindre vaut une fois et demie la sphère ⁽¹⁾ ; ce qu'il fallait démontrer.

Considérant que toute sphère est quadruple du cône dont la base est égale au plus grand cercle et la hauteur égale au rayon de la sphère, j'ai conçu que la surface de toute sphère équivaut à quatre de ses plus grands cercles ⁽²⁾ ; car j'avais eu l'intuition que, puisque tout cercle équivaut au triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle et la hauteur égale au rayon ⁽³⁾, toute sphère équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface de la sphère, et dont la hauteur est égale à son rayon ⁽⁴⁾.

PROPOSITION III

L'on perçoit aussi par cette méthode qu'un cylindre, ayant la base égale au plus grand cercle d'un sphéroïde ⁽⁵⁾, et la hauteur égale à l'axe de ce sphéroïde, vaut une fois et demie ce sphéroïde. Or, cela étant perçu, il est clair que lorsqu'un sphéroïde quelconque est coupé par un plan passant par son centre, perpendiculairement à son axe, la moitié de ce sphéroïde est double du cône ayant même base et même axe que le segment ⁽⁶⁾.

En effet, soit un sphéroïde quelconque, et coupons-le par un plan passant par l'axe ; soit $AB\Gamma\Delta$ l'ellipse déterminée dans la surface de ce plan ; soient AT , BD les diamètres, et K le centre de cette ellipse ; soit enfin, dans le sphéroïde, le cercle décrit autour du diamètre BD perpendiculairement à AT . Imaginons, d'autre part, un cône ayant comme base le cercle que nous venons de dire, et comme sommet le point A , et, sa nappe étant prolongée, coupons ce cône par un plan mené par le point Γ parallèlement à sa base. La section de ce plan

1. Cylindre $\Phi\Omega = 2$ cyl. $\Phi\Delta$. Or, cylindre $\Phi\Delta = 3$ cônes BAA ; donc : cyl. $\Phi\Omega = 6$ cônes BAA . Or, on a vu dans une note précédente que : sphère $AB\Gamma\Delta = 4$ cônes BAA , d'où, comme le texte : cyl. $\Phi\Omega = \frac{3}{2}$ sphère $AB\Gamma\Delta$.

2. Voir démonstration géométrique au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition XXXIII.

3. Voir *De la Mesure du cercle*, proposition I.

4. On a : volume sphère de rayon $R = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}R \times 4\pi R^2 =$ volume du cône de hauteur R et de base $4\pi R^2$. Or, $4\pi R^2 =$ aire de la sphère ; donc : vol. sphère = volume cône de hauteur R et de base égale à l'aire de la sphère.

5. C'est-à-dire un ellipsoïde de révolution.

6. Voir démonstration géométrique au traité *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, propositions XXVII et XXVIII.