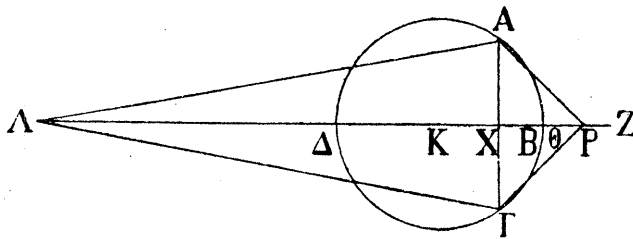


PROPOSITION IV

Couper une sphère donnée de manière que les segments de sphère soient entre eux dans un rapport donné.

Soit $AB\Gamma\Delta$ la sphère donnée. On doit la couper par un plan de manière que les segments de sphère soient entre eux dans le rapport donné. Coupons par un plan passant par la droite $A\Gamma$. Dès lors, le rapport du segment $A\Delta\Gamma$ de la sphère au segment $AB\Gamma$ de la sphère est donné. Coupons la sphère par le centre ⁽¹⁾, que la section soit le grand cercle $AB\Gamma\Delta$, que le centre soit K et le diamètre ΔB . Faisons en sorte que PX soit à XB comme la somme de $K\Delta$, ΔX est à ΔX , tandis que ΛX soit à $X\Delta$ comme la somme de KB , BX est à BX , et menons les droites de jonction $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$, AP , $P\Gamma$. Dès lors, le cône $A\Lambda\Gamma$ équivaut au segment $A\Delta\Gamma$ de la sphère et le cône $AP\Gamma$ au segment $AB\Gamma$ ⁽²⁾; par conséquent, le rapport du cône $A\Lambda\Gamma$ au cône $AP\Gamma$ est donné. Or, ΛX est à XP comme cône est à cône, puisque ces cônes ont comme même base le cercle décrit autour du diamètre $A\Gamma$; par conséquent, le rapport de ΛX à XP est donné également. Pour les mêmes raisons que précédemment, par construction, KB est à BP et ΔX est à XB comme $\Delta\Delta$ est à $K\Delta$ ⁽³⁾. Et, puisque $K\Delta$ est à $\Lambda\Delta$ comme PB est à BK , par composition, $K\Lambda$ est à $\Lambda\Delta$ comme PK est à KB , c'est-à-dire à $K\Delta$; par conséquent, $K\Lambda$ est aussi à $\Lambda\Delta$ comme la droite entière $P\Lambda$ est à



1. Le texte sous-entend ici, ou bien aura perdu : « par un plan perpendiculaire au plan mené par $A\Gamma$. »

2. Voir proposition II.

3. Par une suite de relations analogues à celles de la proposition II, on a, par construction : $\frac{K\Delta + \Delta X}{\Delta X} = \frac{PX}{XB}$, d'où : $\frac{K\Delta + \Delta X - \Delta X}{\Delta X} = \frac{PX - XB}{XB}$, ou $\frac{K\Delta}{\Delta X} = \frac{PB}{XB}$. Or, $K\Delta = KB$, d'où : $\frac{KB}{\Delta X} = \frac{PB}{XB}$ et, par permutation : $\frac{KB}{PB} = \frac{\Delta X}{XB}$ (I). D'autre part, par construction : $\frac{\Lambda X}{X\Delta} = \frac{KB + BX}{BX}$, d'où : $\frac{\Lambda X - X\Delta}{X\Delta} = \frac{KB + BX - BX}{BX}$, ou $\frac{\Lambda\Delta}{X\Delta} = \frac{KB}{BX}$. Or, $KB = K\Delta$, d'où : $\frac{\Lambda\Delta}{X\Delta} = \frac{K\Delta}{BX}$ et, permutant, $\frac{\Lambda\Delta}{K\Delta} = \frac{X\Delta}{BX}$ (II). Dès lors, les relations (I), (II) donnent, comme le texte : $\frac{KB}{PB} = \frac{\Delta X}{XB} = \frac{\Lambda\Delta}{K\Delta}$.

la droite entière $K\Lambda$. Dès lors, le rectangle formé sous $P\Lambda$, $\Lambda\Delta$ équivaut au carré de $K\Lambda$ et le carré de $K\Lambda$ est donc au carré de $\Lambda\Delta$ comme $P\Lambda$ est à $\Lambda\Delta$ ⁽¹⁾. De plus, puisque ΔX est à XB comme $\Lambda\Delta$ est à ΔK , par inversion et par composition, $B\Delta$ sera à ΔX comme $K\Lambda$ est à $\Lambda\Delta$ ⁽²⁾. Posons la droite BZ égale à la droite KB ; il est d'ailleurs évident qu'elle s'étendra au delà du point P ⁽³⁾. Or, puisque le rapport de $\Delta\Lambda$ à ΛX est donné, celui de $P\Lambda$ à ΛX sera donc donné aussi ⁽⁴⁾. Donc, puisque le rapport de $P\Lambda$ à ΛX se compose du rapport de $P\Lambda$ à $\Lambda\Delta$ et de celui de $\Lambda\Delta$ à ΛX , mais que le carré de ΔB est au carré de ΔX comme $P\Lambda$ est à $\Lambda\Delta$, tandis que BZ est à ZX comme $\Delta\Lambda$ est à ΛX , il en résulte que le rapport de $P\Lambda$ à ΛX se compose du rapport du carré de $B\Delta$ au carré de ΔX et du rapport de BZ à ZX ⁽⁵⁾. Etablis-

1. La relation $\frac{KB}{PB} = \frac{\Lambda\Delta}{K\Lambda}$ de la note précédente, présentée dans le texte sous la forme $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{PB}{KB}$, donne : $\frac{K\Lambda + \Lambda\Delta}{\Lambda\Delta} = \frac{PB + KB}{KB}$, ou $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{PK}{KB}$, ou, en observant que $K\Lambda = KB$, $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{PK}{K\Lambda}$. Donc, par permutation et par addition, on a : $\frac{K\Lambda + \Lambda\Delta}{\Lambda\Delta} = \frac{PK + K\Lambda}{K\Lambda}$, ou $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{P\Lambda}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{P\Lambda}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{P\Lambda}{K\Lambda}$, d'où, comme le texte : $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{P\Lambda}{K\Lambda}$.

2. La relation de la note avant-précédente $\frac{\Delta X}{XB} = \frac{\Lambda\Delta}{\Delta K}$ donne par inversion : $\frac{XB}{\Delta X} = \frac{\Delta K}{\Lambda\Delta}$, et par addition $\frac{XB + \Delta X}{\Delta X} = \frac{\Delta K + \Lambda\Delta}{\Lambda\Delta}$, ou $\frac{B\Delta}{\Delta X} = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta}$.

Le texte présente ici l'interpolation suivante : « et le carré de $B\Delta$ est au carré de ΔX comme le carré de $K\Lambda$ est au carré de $\Lambda\Delta$. Et, de nouveau, puisque la somme de KB , BX est à BX comme ΛX est à ΔX , par différence KB est à BX comme $\Lambda\Delta$ est à ΔX . »

3. En effet, dans la relation $\frac{\Delta X}{XB} = \frac{KB}{PB}$, on a $\Delta X > XB$; donc $KB > PB$. (Or, $BZ = KB$, donc $BZ > PB$.)

Le texte présente ici l'interpolation : « et ZB sera à BX comme $\Lambda\Delta$ est à ΔX , en sorte que BZ sera aussi à ZX comme $\Lambda\Delta$ est à ΔX . »

4. On a posé $BZ = KB$, donc la relation donnée $\frac{\Delta X}{XB} = \frac{KB + BX}{BX}$ devient : $\frac{\Delta X}{XB} = \frac{ZX}{BX}$, d'où : $\frac{\Delta X}{\Lambda X - X\Delta} = \frac{ZX}{ZX - BX}$, ou $\frac{\Delta X}{\Lambda X} = \frac{ZX}{ZB}$. Or, $ZB = KB$ est une donnée, XB et par

suite $XB + BZ = ZX$ sont déterminées par la position du plan sécant, donc $\frac{ZX}{ZB}$ est donné, d'où $\frac{\Delta X}{\Lambda X}$ est donné. D'autre part, on a vu plus haut que le rapport $\frac{\text{cône } APT}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$

est donné. Or, $\frac{XP}{\Lambda X} = \frac{\text{cône } APT}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$, d'où : $\frac{XP + \Lambda X}{\Lambda X} = \frac{\text{cône } APT + \text{cône } A\Lambda\Gamma}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$, ou $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{\text{cône } A\Lambda\Gamma P}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$; donc $\frac{P\Lambda}{\Lambda X}$ est donné.

5. Plus explicitement, on peut écrire : $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} \times \frac{\Lambda\Delta}{\Lambda X}$, relation qu'Archimède appelle rapport composé de deux rapports et qu'Eutocius, dans son commentaire

sons BZ à $Z\Theta$ comme PA est à ΛX . Le rapport de PA à ΛX est d'ailleurs donné ; donc, le rapport de BZ à $Z\Theta$ est donné aussi. Or, la droite BZ est donnée, car elle est égale au rayon ; donc, la droite $Z\Theta$ est donnée aussi. De plus, le rapport de BZ à $Z\Theta$ est donc composé des rapports du carré de $B\Delta$ au carré de ΔX et de BZ à ZX . Or, le rapport de BZ à $Z\Theta$ est composé des rapports de BZ à ZX et de ZX à $Z\Theta$ ⁽¹⁾ ; il reste donc que XZ est à $Z\Theta$, c'est-à-dire à une droite donnée, comme le carré $B\Delta$, c'est-à-dire d'une donnée, est au carré de ΔX ⁽²⁾. De plus, la droite $Z\Delta$ est donnée ; donc on doit couper la droite donnée ΔZ au point X et faire en sorte qu'une donnée ⁽³⁾ soit au carré de ΔX comme XZ est à une droite donnée ⁽⁴⁾. Mais, en énonçant la chose simplement de cette manière, il y aura discussion, tandis que si l'on ajoute les conditions qui sont posées dans le présent cas, c'est-à-dire que, suivant l'analyse, ΔB est le double de BZ et que ZB est plus grand que $Z\Theta$, il n'y aura pas de discussion, et le problème se présentera comme suit : Etant données deux droites $B\Delta$, BZ , dont $B\Delta$ double de BZ , ainsi qu'un point Θ sur la droite BZ , couper la droite ΔB en un point X de manière que XZ soit à $Z\Theta$ comme le carré de $B\Delta$ est au carré de ΔX .

Nous donnerons d'ailleurs l'analyse et la synthèse de chacun de ces cas à la fin de la proposition ⁽⁵⁾.

sur cette proposition, démontre longuement par des considérations purement géométriques. Or, la relation $PA \times \Lambda\Delta = \overline{K\Lambda}^2$ obtenue précédemment, donne : $\frac{PA}{\Lambda\Delta} = \frac{\overline{K\Lambda}^2}{\Lambda\Delta^2}$ tandis que l'on a démontré : $\frac{\overline{K\Lambda}^2}{\Lambda\Delta^2} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2}$ d'où : $\frac{PA}{\Lambda\Delta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2}$. D'autre part,

on a vu (note précédente) que $\frac{ZB}{ZX} = \frac{\Lambda\Delta}{\Delta X}$, d'où, substituant dans la première relation, il vient, comme le texte : $\frac{PA}{\Lambda X} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2} \times \frac{BZ}{ZX}$.

1. Le texte présente ici cette petite interpolation : « Eliminons le rapport commun de BZ à ZX . »

2. On établit $\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{PA}{\Lambda X}$; or, $\frac{PA}{\Lambda X}$ est donné ainsi que $BZ = KB$; donc $Z\Theta$ est donné.

Mais, on a eu : $\frac{PA}{\Lambda X} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2} \times \frac{BZ}{ZX}$ d'où : $\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2} \times \frac{BZ}{ZX}$; or, on peut écrire :

$\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{BZ}{ZX} \times \frac{ZX}{Z\Theta}$; donc, $\frac{BZ}{ZX} \times \frac{ZX}{Z\Theta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2} \times \frac{BZ}{ZX}$, ou, comme le texte : $\frac{ZX}{Z\Theta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Delta X^2}$.

3. C'est-à-dire le carré de $B\Delta$.

4. C'est-à-dire à la droite donnée $Z\Theta$.

5. Le problème auxiliaire, dont Archimède annonce la démonstration, n'a pas été retrouvé à la fin de cette proposition ni à un autre endroit de ses œuvres.

de ΛK est au carré de $\Lambda \Delta$. Par conséquent, $P\Lambda$ sera aussi à $\Lambda \Delta$ comme le carré de $B\Delta$ est au carré de ΔX , c'est-à-dire comme XZ est à ΘZ ⁽¹⁾. Et puisque la somme de KB , BX est à BX comme ΛX est à $X\Delta$, tandis que KB est égal à BZ , il en résulte que ZX sera aussi à XB comme ΛX est à $X\Delta$, et que, par conversion, ZX sera à ZB comme ΛX est à $\Lambda \Delta$; de manière que $\Lambda \Delta$ sera aussi à ΛX comme BZ est à ZX . Et puisque $P\Lambda$ est à $\Lambda \Delta$ comme XZ est à $Z\Theta$, tandis que $\Lambda \Delta$ est à ΛX comme BZ est à ZX , on aura, par identité en proportion troublée, $P\Lambda$ à ΛX comme BZ est à $Z\Theta$. Dès lors, ΛX sera aussi à XP comme $Z\Theta$ est à ΘB . Or, $Z\Theta$ est à ΘB comme Π est à Σ ; par conséquent, ΛX est aussi à XP , c'est-à-dire que le cône $\Lambda \Gamma \Lambda$ est au cône $A \Pi \Gamma$, ou bien que le segment $\Lambda \Lambda \Gamma$ de la sphère est au segment $AB \Gamma$ de la sphère comme Π est à Σ ⁽²⁾.

PROPOSITION V

Construire un segment de sphère semblable à un segment de sphère donné, et équivalent à un autre segment de sphère donné.

Soient deux segments de sphère donnés $AB \Gamma$, EZH . Soit le cercle décrit autour du diamètre AB la base du segment $AB \Gamma$ et le point Γ le sommet; tandis que le cercle décrit autour du diamètre EZ est la

1. La relation $P\Lambda \times \Lambda \Delta = \overline{\Lambda K}^2$ donne : $\frac{P\Lambda \times \Lambda \Delta}{\Lambda \Delta^2} = \frac{\overline{\Lambda K}^2}{\Lambda \Delta^2}$, ou $\frac{P\Lambda}{\Lambda \Delta} = \frac{\overline{\Lambda K}^2}{\Lambda \Delta^2}$. Or, on a vu que $\frac{\overline{\Lambda K}^2}{\Lambda \Delta^2} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Lambda X^2}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda \Delta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Lambda X^2}$. Or, on a posé : $\frac{XZ}{\Theta Z} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\Lambda X^2}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda \Delta} = \frac{XZ}{\Theta Z}$.
2. Plus explicitement : Par hypothèse : $\frac{KB + BX}{BX} = \frac{\Lambda X}{X\Delta}$ et $KB = ZB$,
d'où : $KB + BX = ZB + BX = ZX$, donc : $\frac{ZX}{BX} = \frac{\Lambda X}{X\Delta}$, d'où : $\frac{ZX}{ZX - BX} = \frac{\Lambda X}{\Lambda X - X\Delta}$, ou $\frac{ZX}{ZB} = \frac{\Lambda X}{\Lambda \Delta}$, d'où : $\frac{\Lambda \Delta}{\Lambda X} = \frac{BZ}{ZX}$. Or, on a eu (note précédente) : $\frac{P\Lambda}{\Lambda \Delta} = \frac{XZ}{Z\Theta}$,
d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda \Delta} \times \frac{\Lambda \Delta}{\Lambda X} = \frac{XZ}{Z\Theta} \times \frac{BZ}{ZX}$, ou $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{BZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda X - \Lambda \Delta} = \frac{BZ}{BZ - Z\Theta}$, ou $\frac{P\Lambda}{PX} = \frac{BZ}{\Theta B}$,
d'où : $\frac{P\Lambda}{BZ} = \frac{PX}{\Theta B}$. Or, $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{BZ}{Z\Theta}$ donne $\frac{P\Lambda}{BZ} = \frac{\Lambda X}{Z\Theta}$, donc : $\frac{\Lambda X}{Z\Theta} = \frac{PX}{\Theta B}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Lambda X}{PX} = \frac{Z\Theta}{\Theta B}$. Or, par hypothèse : $\frac{Z\Theta}{\Theta B} = \frac{\Pi}{\Sigma}$; donc : $\frac{\Lambda X}{PX} = \frac{\Pi}{\Sigma}$. Or, $\frac{\text{cône } \Lambda \Lambda \Gamma}{\text{cône } A \Pi \Gamma} = \frac{\Lambda X}{PX}$,
d'où : $\frac{\text{cône } \Lambda \Lambda \Gamma}{\text{cône } A \Pi \Gamma} = \frac{\Pi}{\Sigma}$. Or (prop. II), cône $\Lambda \Lambda \Gamma$ = segment $\Lambda \Lambda \Gamma$, et cône $A \Pi \Gamma$ = segment $AB \Gamma$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{segment } \Lambda \Lambda \Gamma}{\text{segment } AB \Gamma} = \frac{\Pi}{\Sigma}$.