

LES ŒUVRES COMPLÈTES D'ARCHIMÈDE

SUIVIES DES
COMMENTAIRES D'EUTOCIUS D'ASCALON

Traduites du grec en français
avec une introduction et des notes

PAR

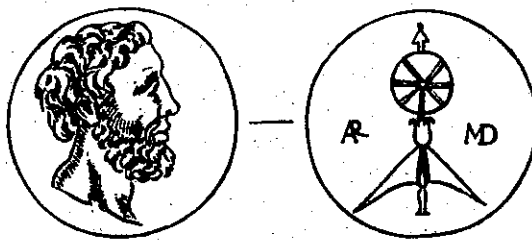
PAUL VER EECKE

INGÉNIEUR DES MINES (A. I. LG.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL

*Ouvrage honoré de Subventions par le Ministère de l'Instruction Publique
et la Fondation Universitaire de Belgique*

TOME I

Δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.
Donne-moi où je puisse me tenir ferme,
et j'ébranlerai la terre



LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

ALBERT BLANCHARD

9, RUE DE MÉDICIS, PARIS

DE LA MESURE DU CERCLE

PROPOSITION I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base ⁽¹⁾.

Que le cercle $AB\Gamma\Delta$ soit tel qu'on le suppose par rapport au triangle E ; je dis qu'il lui est équivalent.

En effet, que le cercle soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons-lui le carré AF , divisons les arcs en deux parties égales, et que les segments soient finalement moindres que l'excédent du cercle sur le triangle ⁽²⁾. Dès lors, la figure rectiligne est plus grande encore que le triangle ⁽³⁾. Prenons le centre N et menons la perpendiculaire $N\Xi$; dès lors, $N\Xi$ est plus petit que le côté du triangle ⁽⁴⁾. Or, le périmètre de la figure rectiligne est aussi plus petit que le côté restant ⁽⁵⁾, puisqu'il est plus petit que la circonférence du cercle ⁽⁶⁾ ; par conséquent, la figure rectiligne est plus petite que le triangle ; ce qui est absurde ⁽⁷⁾.

D'autre part, que le cercle soit, s'il se peut, plus petit que le

1. L'énoncé de cette proposition est repris, d'une manière un peu plus correcte, dans le Commentaire d'Eutocius relatif à cette proposition (cfr. éd. Heiberg, vol. III, p. 230).

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition VI.

3. On a finalement : Σ segments < cercle — triangle ; or, Σ segments = cercle — figure inscrite, d'où : cercle — figure inscrite < cercle — triangle, ou fig. inscrite > triangle.

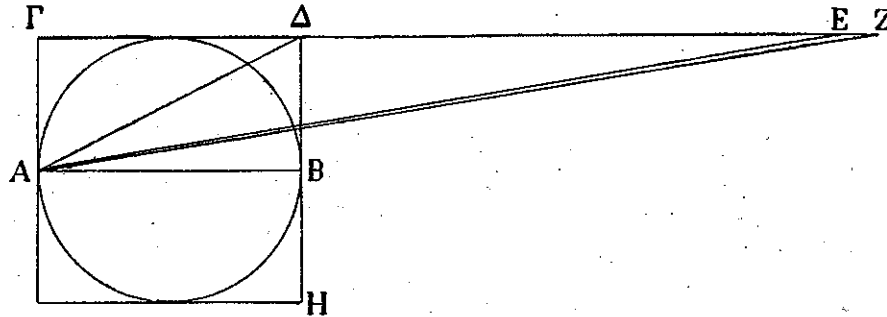
4. C.-à-d. plus petit que le côté de l'angle droit que l'on a posé égal au rayon.

5. C.-à-d. que l'autre côté de l'angle droit.

6. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, postulats, *in fine*.

7. Puisqu'on a vu que figure inscrite > triangle.

est celui de 21 à 7, tandis que le rapport du triangle $\Gamma\Delta$ au triangle AEZ est celui de 7 à 1, le rapport du triangle AFZ au triangle $\text{AF}\Delta$ sera celui de 22 à 7 ⁽¹⁾. Or, le carré de ΓH est quadruple



du triangle $\text{AF}\Delta$, tandis que le triangle $\text{AF}\Delta\text{Z}$ est équivalent au cercle AB , puisque, d'une part, la hauteur AF est égale au rayon du cercle et que, d'autre part, il sera démontré que la base est le triple du diamètre augmenté, à peu de chose près, de son septième ⁽²⁾. En conséquence, le rapport du cercle au carré ΓH est celui de 11 à 14 ⁽³⁾.

1. Par hypothèse $\Delta\text{E} = 2\Gamma\Delta$ et $\text{EZ} = \frac{1}{7}\Gamma\Delta$, d'où $\Gamma\Delta + \Delta\text{E} = \Gamma\text{E} = 3\Delta\text{E}$ et $\Gamma\Delta = 7\text{EZ}$. Dès lors, observant que les triangles ont même hauteur, $\text{AF}\text{E} = 3\text{AF}\Delta$, et $\text{AF}\Delta = 7\text{AEZ}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{AF}\text{E}}{\text{AF}\Delta} = 3 = \frac{21}{7}$, et $\frac{\text{AF}\Delta}{\text{AEZ}} = 7$. Combinant, il vient : $\frac{\text{AF}\text{E}}{\text{AEZ}} = 21$, d'où : $\frac{\text{AF}\text{E} + \text{AEZ}}{\text{AEZ}} = 21 + 1$ ou $\frac{\text{AFZ}}{\text{AEZ}} = 22$, d'où, combinant avec $\frac{\text{AF}\Delta}{\text{AEZ}} = 7$, il vient, comme le texte : $\frac{\text{AFZ}}{\text{AF}\Delta} = \frac{22}{7}$.

2. Le triangle $\text{AF}\Delta\text{Z} = \text{cercle AB}$ en vertu de la proposition I. Toutefois, ayant posé $\Gamma\text{Z} = (3 + \frac{1}{7})\Gamma\Delta = \frac{22}{7}\Gamma\Delta = \frac{22}{7}\text{diam. cercle}$, on doit admettre que $\Gamma\text{Z} = \text{circonférence cercle AB}$, ce qui ne sera démontré qu'à la proposition III suivante. Cette anomalie a fait supposer à Heiberg (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 237) que l'ordre dans lequel les propositions II et III se présentent dans tous les manuscrits aurait été interverti par un copiste qui a voulu atténuer son erreur en interpolant toute la phrase qui précède à partir du mot « ἐπεὶ, puisque ». D'autre part, Heath est aussi d'avis qu'Archimède n'a pu placer la proposition II avant la proposition III dont elle dépend (cfr. *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. 93). Enfin, Barrow, dans son *Archimède abrégé*, à la différence de toutes les autres éditions, donne la proposition II à la suite de la proposition III, sans autres explications. (Cfr. *Archimedis opera methodo nova illustrata et succincte demonstrata*. Londini, 1675, p. 41). Nous croyons cependant que l'on peut admettre l'ordre dans lequel ces deux propositions se présentent ; car nous avons d'autres exemples de propositions dans lesquelles Archimède se base sur quelque propriété dont il annonce la démonstration ultérieure. D'ailleurs on ne doit pas perdre de vue qu'Archimède a été un voyant extraordinaire en géométrie, comme le prouvent ses nombreuses démonstrations par la réduction à l'absurde, et qu'en démontrant la proposition II, il possédait peut-être déjà la mesure approchée du cercle par une méthode qu'il jugeait moins rigoureuse que celle qu'il adoptera dans la proposition III.

3. La relation $\frac{\text{AFZ}}{\text{AF}\Delta} = \frac{22}{7}$ donne, en observant que le triangle $\text{AFZ} = \text{cercle AB}$, et que carré $\Gamma\text{H} = 4$ triangles $\text{AF}\Delta$: $\frac{\text{cercle AB}}{\text{carré } \Gamma\text{H}} = \frac{22}{4 \times 7} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$.

PROPOSITION III

Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre.

Soit un cercle, un diamètre AF , le centre E , une tangente $\Gamma\Delta Z$ et l'angle sous ZE , $E\Gamma$ tiers d'un angle droit. Dès lors, le rapport de EZ à ΓZ est celui de 306 à 153, tandis que le rapport de $E\Gamma$ à ΓZ est celui de 265 à 153 ⁽¹⁾. Partageons l'angle $ZE\Gamma$ en deux parties égales par la droite EH ; dès lors, ZE est à $E\Gamma$ comme ZH est à $H\Gamma$ ⁽²⁾. Par conséquent, la somme de ZE , $E\Gamma$ est à $Z\Gamma$ comme $E\Gamma$ est à ΓH ; de manière que le rapport de ΓE à ΓH est plus grand que celui de 571 à 153. Dès lors, le rapport du carré de EH au carré de $H\Gamma$ est égal à celui de 349450 à 23409; donc, le rapport des racines est égal à celui de 591 $\frac{1}{2}$ à 153 ⁽³⁾.

Que l'angle $HE\Gamma$ soit de nouveau divisé en deux parties égales par la droite $E\Theta$. Dès lors, de même, le rapport de $E\Gamma$ à $\Gamma\Theta$ sera plus grand que celui de 1162 $\frac{1}{2}$ à 153; par conséquent, le rapport de ΘE à $\Theta\Gamma$ sera plus grand que celui de 1172 $\frac{1}{2}$ à 153 ⁽⁴⁾.

1. Par hypothèse : angle $ZE\Gamma = \frac{1}{3}$ angle droit, d'où angle $\Gamma ZE = \frac{2}{3}$ angle droit, d'où : $EZ = 2 \Gamma Z$, d'où : $\frac{EZ}{\Gamma Z} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$. Or, $E\Gamma = \sqrt{EZ^2 - \Gamma Z^2} = \sqrt{306^2 - 153^2} = \sqrt{70227} > 265$, d'où : $E\Gamma > 265$. Donc : $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z} > \frac{265}{153}$, ou, suivant le texte, $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{265}{153}$ en valeur approchée.

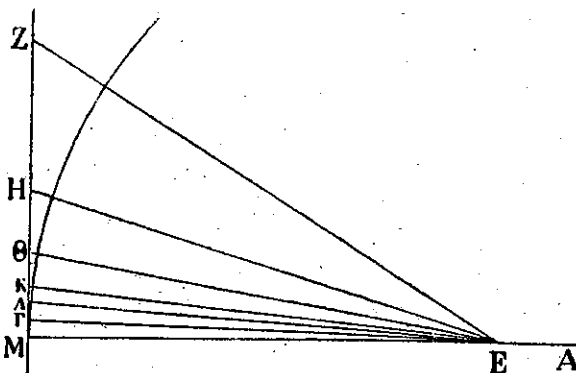
2. Cf. EUCLIDE, livre VI, proposition 3.

3. Puisque $\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{ZH}{H\Gamma}$, on a $\frac{ZE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{ZH + H\Gamma}{H\Gamma}$, ou $\frac{ZE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{Z\Gamma}{H\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{H\Gamma}$. Or, $\Gamma Z = 153$, $EZ = 306$ et $E\Gamma > 265$; donc $\frac{E\Gamma}{H\Gamma} \geq \frac{306 + 265}{153}$, ou $\frac{E\Gamma}{H\Gamma} \geq \frac{571}{153}$, d'où $\frac{E\Gamma^2 + H\Gamma^2}{H\Gamma^2} \geq \frac{571^2 + 153^2}{153^2}$, ou $\frac{EH^2}{H\Gamma^2} \geq \frac{349450}{23409}$, d'où, comme le texte : $\frac{EH}{H\Gamma} \geq \frac{591\frac{1}{2}}{153}$.

4. On aura : $\frac{NE}{E\Gamma} = \frac{H\Theta}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{HE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{H\Theta + \Theta\Gamma}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{HE + E\Gamma}{H\Theta + \Theta\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma}$, ou $\frac{HE + E\Gamma}{H\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma}$. Or, $\frac{E\Gamma}{H\Gamma} \geq \frac{571}{153}$ et $\frac{EH}{H\Gamma} \geq \frac{591\frac{1}{2}}{153}$, d'où, substituant, $\frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma} > \frac{591\frac{1}{2} + 571}{153}$ ou, comme le texte : $\frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma} > \frac{1162\frac{1}{2}}{153}$, d'où : $\frac{E\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} > \frac{(1162\frac{1}{2})^2}{153^2}$, d'où : $\frac{E\Gamma^2 + \Theta\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} > \frac{(1162\frac{1}{2})^2 + 153^2}{153^2}$, ou $\frac{\Theta E^2}{\Theta\Gamma^2} > \frac{1350534\frac{33}{4} + 23409}{23409}$, d'où : $\frac{\Theta E}{\Theta\Gamma} > \frac{1172\frac{1}{2}}{153}$.

Que l'angle $\Theta E \Gamma$ soit encore divisé en deux parties égales par la droite EK . Dès lors, le rapport de $E\Gamma$ à ΓK sera plus grand que celui de $2334 \frac{1}{4}$ à 153 ; par conséquent, le rapport de EK à ΓK est plus grand que celui de $2339 \frac{1}{4}$ à 153 ⁽¹⁾.

Que l'angle $KE\Gamma$ soit encore divisé en deux parties égales par la droite ΛE . Dès lors, le rapport de $E\Gamma$ à $\Lambda \Gamma$ sera plus grand que celui de $4673 \frac{1}{2}$ à 153 ⁽²⁾ ; par conséquent, puisque l'angle $Z E \Gamma$, qui est le tiers de l'angle droit, a été divisé quatre fois en deux parties égales, l'angle $\Lambda E \Gamma$ sera la quarante-huitième partie de l'angle droit. Faisons donc au point E un angle $\Gamma E M$ égal à ce dernier angle ⁽³⁾. Dès lors, l'angle $\Lambda E M$ est la vingt-quatrième partie de l'angle droit, et, par conséquent, la droite ΛM est le côté du polygone de 96 côtés circonscrit au cercle. Donc, puisqu'il a été démontré que le rapport de $E\Gamma$ à $\Gamma \Lambda$ est plus grand que celui de $4673 \frac{1}{2}$ à 153 , tandis que $\Lambda \Gamma$ est le double de $E\Gamma$ et que ΛM est le double de $\Gamma \Lambda$, il en résulte que le rapport de $\Lambda \Gamma$ au périmètre du polygone de 96 côtés est aussi plus grand que celui de $4673 \frac{1}{2}$ à 14688 . De plus, ce dernier nombre est le triple du premier avec un excédent de $667 \frac{1}{2}$ qui est moindre que la septième partie de $4673 \frac{1}{2}$; de manière que le polygone ⁽⁴⁾ circonscrit au cercle est plus petit que le triple augmenté de plus d'un



1. On aura : $\frac{\Theta E}{E\Gamma} = \frac{\Theta K}{\Gamma K}$, d'où : $\frac{\Theta E + E\Gamma}{\Theta K + \Gamma K} = \frac{E\Gamma}{\Gamma K}$, ou $\frac{\Theta E + E\Gamma}{\Theta \Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma K}$. Or, $\frac{\Theta E}{\Theta \Gamma} > \frac{1172 \frac{1}{2}}{153}$, et $\frac{E\Gamma}{\Theta \Gamma} > \frac{1162 \frac{1}{2}}{153}$ d'où : $\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{1172 \frac{1}{2} + 1162 \frac{1}{2}}{153}$, ou $\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{2334 \frac{1}{4}}{153}$, d'où : $\frac{E\Gamma^2 + \Gamma K^2}{\Gamma K^2} > \frac{(2334 \frac{1}{4})^2 + 153^2}{153^2}$, ou $\frac{EK^2}{\Gamma K^2} > \frac{5472132 \frac{1}{4}}{23409}$, d'où, comme le texte : $\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339 \frac{1}{4}}{153}$.

2. On aura : $\frac{KE}{E\Gamma} = \frac{KA}{\Lambda \Gamma}$, d'où : $\frac{KE + E\Gamma}{KA + \Lambda \Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Lambda \Gamma}$, ou $\frac{KE + E\Gamma}{\Gamma K} = \frac{E\Gamma}{\Lambda \Gamma}$. Or, $\frac{KE}{\Gamma K} > \frac{2339 \frac{1}{4}}{153}$, et $\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{2334 \frac{1}{4}}{153}$, d'où : $\frac{E\Gamma}{\Lambda \Gamma} > \frac{2339 \frac{1}{4} + 2334 \frac{1}{4}}{153}$, ou $\frac{E\Gamma}{\Lambda \Gamma} > \frac{4673 \frac{1}{2}}{153}$.

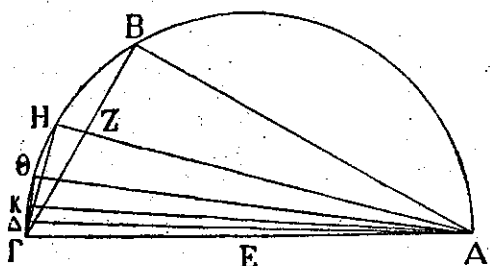
3. La solution de ce problème est donnée dans EUCLIDE, livre I, proposition 23.

4. C'est-à-dire le périmètre du polygone.

septième du diamètre. En conséquence, la circonférence du cercle est à fortiori plus petite que le triple augmenté de plus d'un septième du diamètre ⁽¹⁾.

Soit un cercle de diamètre AF et un angle BAF qui soit le tiers de l'angle droit. Dès lors, le rapport de AB à BF est moindre que celui de 1351 à 780 ⁽²⁾, tandis que le rapport de AF à FB est celui

de 1560 à 780 ⁽³⁾. Divisons l'angle BAF en deux parties égales par la droite AH . Dès lors, puisque l'angle BAH est égal à l'angle HFB ainsi qu'à l'angle HAF , l'angle $H\Gamma$ sera aussi égal à l'angle HAF . De plus, l'angle droit AHT est commun; par conséquent, le troi-



sième angle $HZ\Gamma$ sera égal au troisième angle $A\Gamma H$. Il en résulte que les triangles AHT , ΓHZ sont équiangles. Dès lors, AH est $H\Gamma$ comme ΓH est à HZ et comme AF est à ΓZ . Or, AF est à ΓZ comme la somme des droites ΓA , AB est à BF ; par conséquent, la somme de ΓA , AB est aussi à BF comme AH est à $H\Gamma$. Il résulte de là que le rapport de AH à $H\Gamma$ est moindre que celui de 2911 à 780, et que le rapport de AF à ΓH est moindre que celui de 3013½ à 780 ⁽⁴⁾. Divi-

1. Reprenons plus explicitement le texte qui précède au point où nous l'avons laissé dans la note avant-précédente :

On a : $AF = 2 EF$ et $AM = 2 \Gamma A$, d'où, par substitution dans la relation $\frac{EF}{\Gamma A} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, il vient : $\frac{AF}{AM} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, d'où : $\frac{AF}{96 \times AM} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \times 153}$, ou, suivant le texte : $\frac{AF}{\text{polygone de 96 côtés}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$; or, on a $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}$, tandis que $667\frac{1}{2} < \frac{1}{7} \times 4673\frac{1}{2}$. Donc, $\frac{\text{polygone circonscrit}}{AF = \text{diam. cercle}} < 3 + \frac{1}{7}$, d'où $\text{polygone circonscrit} < 3 + \frac{1}{7} \text{ diam. cercle}$, d'où, en vertu de la prop. I du livre I de la *Sphère et du Cylindre*, à fortiori, $\text{circonférence cercle} < 3 + \frac{1}{7} \text{ diamètre cercle}$.

2. Puisque l'angle $BAF = \frac{1}{3}$ angle droit, BF est le côté de l'hexagone inscrit et l'on a : $\frac{AB}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{1}$. Or, $3 \times 608400 = 1825200 < 1825201$, d'où : $\frac{3}{1} < \frac{1825201}{608400}$, d'où : $\frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{1351}{780}$, d'où, comme le texte : $\frac{AB}{BF} < \frac{1351}{780}$.

$$3. \frac{AF}{FB} = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 780}{780} = \frac{1560}{780}.$$

4. Les triangles AHT , ΓHZ sont équiangles, car les angles $H\Gamma B$, HAF sont égaux comme inscrits et mesurés par des arcs égaux, et l'angle droit en H est commun, donc : $\frac{AH}{HT} = \frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{AF}{\Gamma Z}$. Or, AZ divise l'arc ΓB en deux parties égales, d'où : $\frac{AF}{AB} = \frac{\Gamma Z}{ZB}$.

sons l'angle ΓAH en deux parties égales par la droite $A\Theta$; le rapport de $A\Theta$ à $\Theta\Gamma$ sera, pour les mêmes motifs, plus petit que celui de $5924 \frac{3}{4}$ à 780, ou que celui de 1823 à 240, car ces nombres sont respectivement les $\frac{4}{13}$ des nombres précédents. Par conséquent, le rapport de $A\Gamma$ à $\Gamma\Theta$ est moindre que celui de $1838 \frac{9}{11}$ à 240 ⁽¹⁾.

Divisons encore l'angle $\Theta A\Gamma$ par la droite KA ; dès lors, le rapport de AK à $K\Gamma$ est moindre que celui de 1007 à 66, car ces nombres sont respectivement les $\frac{11}{16}$ d'autres nombres. Par conséquent, le rapport de $A\Gamma$ à ΓK est moindre que celui de $1009 \frac{1}{8}$ à 66 ⁽²⁾.

Divisons encore l'angle $K A\Gamma$ en deux parties égales par la droite ΛA ; dès lors, le rapport de ΛA à $\Lambda\Gamma$ sera moindre que celui de 2016 $\frac{1}{3}$ à 66, tandis que le rapport de $A\Gamma$ à $\Gamma\Lambda$ sera moindre que celui de 2017 $\frac{1}{4}$ à 66 ⁽³⁾.

d'où : $\frac{A\Gamma}{A\Gamma + AB} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma Z + ZB}$, ou $\frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{A\Gamma + AB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{A\Gamma + AB}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} + \frac{AB}{B\Gamma}$. Or, $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1560}{780}$, et $\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780}$; donc $\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{1560 + 1351}{780}$, ou $\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{2911}{780}$. D'autre part, $\frac{AH^2}{H\Gamma^2} < \frac{(2911)^2}{(780)^2}$, d'où : $\frac{AH^2 + H\Gamma^2}{H\Gamma^2} < \frac{2911^2 + 780^2}{780^2}$, ou $\frac{A\Gamma^2}{H\Gamma^2} < \frac{9082321}{608400}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 \frac{3}{4}}{780}$.

1. On aura, comme dans le cas précédent : $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{A\Gamma + AH}{H\Gamma} = \frac{A\Gamma}{HA} + \frac{AH}{H\Gamma}$, d'où, substituant les valeurs de ces deux derniers termes : $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{3013 \frac{3}{4} + 2911}{780}$, ou $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{5924 \frac{3}{4}}{780}$, ou $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{\frac{4}{13} \times 5924 \frac{3}{4}}{\frac{4}{13} \times 780}$, ou $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{1823}{240}$. D'autre part, $\frac{A\Theta^2}{\Theta\Gamma^2} < \frac{1823^2}{240^2}$, d'où : $\frac{A\Theta^2 + \Theta\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} < \frac{1823^2 + 240^2}{240^2}$, ou $\frac{A\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} < \frac{3380929}{57600}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838 \frac{9}{11}}{240}$.

2. On aura de même : $\frac{AK}{K\Gamma} = \frac{A\Gamma + A\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} + \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$, et, par substitution des valeurs trouvées pour ces deux derniers termes, il vient : $\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1838 \frac{9}{11} + 1823}{240}$, ou $\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{3661 \frac{9}{11}}{240}$, ou $\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{\frac{11}{16} \times 3661 \frac{9}{11}}{\frac{11}{16} \times 240}$, ou $\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1007}{66}$. D'autre part, $\frac{AK^2}{K\Gamma^2} < \frac{1007^2}{66^2}$, d'où : $\frac{AK^2 + K\Gamma^2}{K\Gamma^2} < \frac{1007^2 + 66^2}{66^2}$, ou $\frac{A\Gamma^2}{K\Gamma^2} < \frac{1018405}{14356}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1009 \frac{1}{8}}{66}$.

3. On aura de même : $\frac{\Lambda A}{\Lambda\Gamma} = \frac{A\Gamma + AK}{K\Gamma} = \frac{A\Gamma}{K\Gamma} + \frac{AK}{K\Gamma}$, et, par substitution des valeurs

Il en résulte que, par inversion, le rapport du périmètre du polygone au diamètre est plus grand que celui de 6336 à 2017 $\frac{1}{4}$. Or, le premier de ces nombres est trois et $\frac{10}{11}$ fois plus grand que 2017 $\frac{1}{4}$; par conséquent, le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans un cercle est aussi plus grand que le triple plus $\frac{10}{11}$ du diamètre; de manière que le cercle ⁽¹⁾ est aussi, à fortiori, plus grand que le triple plus $\frac{10}{11}$ du diamètre ⁽²⁾. Dès lors, la circonférence du cercle vaut trois fois le diamètre plus une partie inférieure au septième, mais supérieure aux $\frac{10}{11}$ du diamètre.

précédentes : $\frac{A\Lambda}{A\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{2}}{66} + \frac{1007}{66}$, ou $\frac{A\Lambda}{A\Gamma} < \frac{2016\frac{1}{2}}{66}$. D'autre part,

$$\frac{A\Lambda^2 + A\Gamma^2}{A\Gamma^2} < \frac{(2016\frac{1}{2})^2 + 66^2}{66^2}, \text{ ou } \frac{A\Gamma^2}{A\Gamma^2} < \frac{4069284\frac{1}{4}}{4356}, \text{ d'où, comme le texte: } \frac{A\Gamma}{A\Gamma} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

1. Sous-entendu : περίμετρος, le périmètre (du cercle).

2. La relation de la note avant-précédente donne, par inversion : $\frac{A\Gamma}{A\Gamma} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$, d'où, observant que $96 \times A\Gamma =$ périmètre polygone inscrit de 96 côtés : $\frac{\text{périmètre polygone de 96 côtés}}{\text{diamètre cercle}} > \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}}$, ou $> \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$. Or, $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{11}$, d'où périmètre polygone de 96 côtés $> 3\frac{10}{11}$ diamètre cercle, d'où, à fortiori, suivant le texte : Circonférence cercle $> 3\frac{10}{11}$ diamètre.

COMMENTAIRE

SUR LE TRAITÉ DE LA MESURE DU CERCLE¹

Après nous être rencontré⁽²⁾ avec ce qui exige une plus faible attention dans les écrits d'Archimède, il sera conforme au but que nous avons poursuivi d'ajouter à ce que nous avons déjà publié sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* les choses qui, dans ses écrits, demandent, autant que possible, un certain achèvement, dans le désir de nous rencontrer, comme de juste, avec les plus importantes et dont la connaissance réclame plus de réflexion. Nous ferons donc suivre ici, de même qu'il fait suite dans l'ouvrage publié par Archimède, celui qu'il a écrit sous le titre : *De la Mesure du Cercle* dans lequel l'auteur s'est proposé ce que son titre même nous révèle. Archimède a voulu, en effet, démontrer quelle est l'aire qui équivaut au cercle, chose déjà recherchée longtemps avant lui par de célèbres philosophes ; car il est manifeste que c'était bien cela qui était recherché lorsque Hippocrate de Chio et Antiphon⁽³⁾ eurent découvert, après de soigneuses recherches, ces paralogismes que connaissent bien, croyons-nous, ceux qui ont examiné *l'Histoire de la Géométrie* d'Eudème⁽⁴⁾ et pris connaissance du *Rucher Aristotélique*⁽⁵⁾. D'ailleurs,

1. Archimède, p. 127.

2. ἐντυγχάνω.

3. Antiphon, sophiste grec qui, vers 300 ans avant J.-C., fit des recherches sur la quadrature du cercle, mais sans aboutir à une solution effective.

4. Ἱστορία γεωμετρική, ouvrage qui ne nous est pas parvenu d'Eudème de Rhodes, disciple d'Aristote et de Théophraste, ayant vécu environ 300 ans avant notre ère. Cet ouvrage devait cependant encore exister à l'époque de Proclus de Lycie qui l'utilisa dans son *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide* (Voir la trad. française de Proclus, par P. Ver Eecke, Bruges, 1948, pp. 306-358).

5. Ἀριστοτελικά Κηρία, le *Rucher Aristotélique*, titre d'une compilation composée par Sporus de Nicée vers la fin du III^e siècle de notre ère, et qui contenait

comme le dit Héraclide dans sa *Vie d'Archimède* ⁽²⁾, ce livre est nécessaire aux besoins de la vie ; car il nous montre que la circonférence est le triple du diamètre en excédant encore celui-ci de ce qui est inférieur à sa septième partie et supérieur à sa dix-septième et unième partie ⁽³⁾. Au reste, Archimède nous dit que ce fait est démontré d'une manière approchée, et qu'il a trouvé aussi une droite égale à la circonférence d'un cercle donné au moyen de certaines lignes spirales ⁽⁴⁾.

des extraits mathématiques sur la quadrature du cercle et sur la duplication du cube. Échappée au sac de Sérapion, en 380, parce qu'elle circulait sans doute en plusieurs mains, cette compilation pouvait encore être consultée à l'époque d'Eutocius. Voir Paul Tannery, *Sur Sporus de Nicée*. (Mémoires scientifiques de P. Tannery, vol. I, pp. 178 à 184).

2. Ἀρχιμήδους βίος. Cet Héraclide dont la biographie d'Archimède ne nous est pas parvenue, était probablement cet ami du même nom qu'Archimède mentionne dans le préambule de son traité : *Des Spirales*, voir prop. XVIII, p. 339.

3. Le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre ne fut désigné par π , première lettre du mot περιφέρεια (périphérie) que depuis l'année 1705. Mais il avait déjà été trouvé empiriquement égal à 3 par les Babyloniens, et égal à $\sqrt{10}$ par les Égyptiens. Archimède fut le premier à le calculer rigoureusement en partant de l'hexagone régulier dont il double quatre fois les côtés, soit donc l'hexagone de 96 côtés et il aboutit à l'approximation $3 + \frac{1}{16} < \pi < 3 + \frac{1}{8}$ ou $3,140845 < \pi < 3,142857$ d'où, en moyenne : $\pi = 3,1418$. Après Archimède, le mathématicien Hindou Arya-Bhata (475-550) trouve l'approximation $\pi = 3,1416$ encore en usage de nos jours. A la Renaissance le problème fut repris, d'abord par le Batave Adriaan Metius (1591-1635) qui trouva $\pi = \frac{355}{113} = 3,141592$; ensuite par François Viète (1540-1603) qui trouva π avec dix décimales, en partant, comme Archimède, de l'hexagone régulier dont les côtés doublés 16 fois sont au nombre de 393216. Après lui Ludolph van Ceulen (1539-1610) obtient le nombre transcendant π avec 127 décimales. Enfin, l'anglais William Shanks, en 1874, calcula π avec 708 chiffres qui sont inscrits sur la frise intérieure du dôme du Palais de la Découverte, à Paris.

En 1879, un pédagogue resté inconnu imagine un procédé mnémotechnique pour retenir le nombre $\pi = 3,141592653589793238462643383279$ au moyen des vers suivants :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Il est à remarquer que le nombre π se rencontre sans relations géométriques dans la sommation de certaines séries telle que la série de Leibnitz $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$, dont la somme est $\frac{\pi}{4}$. D'autre part, Wallis (1610-1703) a démontré que

la fraction indéfinie $\frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6 \times 6}{5 \times 7} \times \frac{8 \times 8}{7 \times 9} \times \frac{10 \times 10}{9 \times 11} \times \dots$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

4. ARCHIMÈDE, *Des Spirales*, page 269.

COMMENTAIRE SUR LE THÉORÈME I ⁽¹⁾

Le premier théorème ne paraît donner lieu à aucune recherche de la part de ceux qui sont tant soit peu experts en mathématiques, attendu que les expressions mêmes d'Archimède sont émises clairement, et que les conclusions sauvent ⁽²⁾ complètement la proposition. Mais il semblera cependant à d'aucuns que, pour la démonstration de celle-ci, il aurait été fait usage mauvais d'une chose qui n'a pas encore été démontrée. En effet, un triangle rectangle étant posé, Archimède le dit avoir un des côtés placés autour de l'angle droit égal au rayon et le côté restant égal à la périphérie ⁽³⁾. Or, le fait de prendre une ligne droite égale à la périphérie d'un cercle est une chose qu'il ne montre pas incontinent et qui n'a pas été enseignée par quelqu'un d'autre. Il faut cependant remarquer qu'Archimède n'a rien écrit de plus qu'il ne convenait ; car nous croyons évident pour tous que la circonférence du cercle est une grandeur et est parmi celles qui sont établies sous une seule dimension. Or, la ligne droite est de la même espèce ; par conséquent, il ne semble pas encore possible de se procurer ⁽⁴⁾ une droite égale à la circonférence d'un cercle ; mais le fait qu'une droite soit naturellement égale à celle-ci, ne sera néanmoins mis en question par personne. Archimède propose donc que le triangle ayant ses côtés tels que nous venons de le dire, soit équivalent au cercle ; de sorte qu'il ne sera accusé d'aucun mauvais usage en énonçant la proposition, mais paraîtra plutôt admirable quand il applique une invention claire et facile à des questions d'une aussi grande ampleur. Au reste, il n'y a, comme nous l'avons dit, nul besoin d'investigation pour le premier théorème ; car nous avons exposé clairement, dans ce que nous avons écrit sur le premier livre *De la Sphère et du Cylindre* ⁽⁵⁾, que le triangle ΠOP est plus grand que la moitié de la figure $AZOM$ ⁽⁶⁾, et qu'il est absolument possible de circonscrire une figure rectiligne à un cercle donné de manière que les

1. ARCHIMÈDE, *De la Mesure du Cercle*, prop. I, p. 129, fig. p. 128.

2. ἀποσφίσειν.

3. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 129, ll. 2-4.

4. περιέσειν.

5. Voir le commentaire d'Eutocius sur la proposition I du traité *De la Sphère et du Cylindre*.

6. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 128, ll. 4-9.

segments compris entre la circonférence du cercle et les côtés de la figure rectiligne circonscrite soient plus petits qu'une aire donnée.

COMMENTAIRE SUR LE THÉORÈME III ⁽¹⁾

Dans ce théorème, on se propose continuellement de trouver la racine carrée ⁽²⁾ d'un nombre donné. Mais il est impossible de la trouver dans un nombre non carré ; car un nombre, multiplié par lui-même forme un nombre carré ; tandis qu'un nombre et une fraction en sus, multiplié par lui-même, ne forme pas un nombre entier, mais une fraction en sus. La manière dont il faut trouver la racine carrée ⁽³⁾ approchée d'un nombre est donnée, d'une part, par Héron dans ses *Métriques* ⁽⁴⁾ et d'autre part par Pappus ⁽⁵⁾, par Théon ⁽⁶⁾ et par divers autres auteurs qui ont commenté la *Grande Composition* de Claude Ptolémée ; de sorte qu'il n'est pas nécessaire que nous mettions cette matière en question ; car ceux qui aiment les mathématiques ont le loisir de la recueillir chez ces derniers.

Et que l'angle compris sous les droites ΓΕ, ΕΖ soit le tiers de l'angle droit ⁽⁷⁾.

En effet, si, après avoir divisé l'angle de l'hexagone en deux parties égales et pris sa moitié située auprès du point Γ, on mène la droite ΕΖ de jonction, l'angle compris sous les droites ΓΕ, ΕΖ sera le tiers de l'angle droit ; car l'arc, pris auprès du point Γ, étant la moitié de l'arc de l'hexagone, il est la douzième partie du cercle ; de sorte que l'angle compris sous les droites ΓΕ, ΕΖ, situé auprès du

1. ARCHIMÈDE, *ibidem*, prop. III, p. 130, et figure p. 131.

2. τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὐρεῖν, littéralement, trouver le côté tétragonique c'est-à-dire la racine carrée.

3. τὴν δυναμένην πλευρὰν εὐρεῖν, trouver le côté qui est en puissance, autre expression pour désigner la racine carrée.

4. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt*, bearbeitet von W. Schmidt, L. Nix, H. Schöne, J. L. Heiberg, Leipzig, 1899-1912, 5 vol. in-8°, voir vol. III, *Vermessungslehre und Dioptra*, Griech. und Deutsch.

5. *Commentaire de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Texte (grec) établi et annoté par A. Rome*, Tome I. *Pappus d'Alexandrie, Commentaire sur les livres V et VI de l'Almageste*, Roma, Biblioteca Vaticana, 1931, in-8°.

6. *Theonis Alexandrini in Claudii Ptolemaei magnam compositionem commentariorum libri XI*, Basileae, 1538.

7. ARCHIMÈDE, *ibidem*, p. 130, l. 6.