

LES ŒUVRES COMPLÈTES
D'ARCHIMÈDE

SUIVIES DES
COMMENTAIRES D'EUTOCIUS D'ASCALON

TOME II

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

Archimède à Dosithée, prospérité !

Lorsque j'appris que Conon, dont l'amitié à mon égard ne fut jamais en défaut, était mort ; que tu avais été lié avec Conon, et que tu étais habile en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un mathématicien distingué, et je m'occupai de te faire parvenir par écrit, comme j'avais pensé d'en écrire à Conon, un théorème de géométrie qui n'avait pas encore été examiné, et qu'après l'avoir étudié maintenant moi-même, j'ai trouvé d'abord par la mécanique, puis démontré par la géométrie.

Parmi ceux qui, d'ailleurs, se sont occupés de géométrie avant nous, d'aucuns se sont efforcés d'exposer par écrit qu'il était possible de trouver une aire rectiligne équivalente à celle d'un cercle donné ou d'un segment de cercle donné ⁽¹⁾ ; puis ils ont essayé de carrer l'aire, délimitée par une section de cône entier ⁽²⁾ et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles ; motif pour lequel beaucoup ont reconnu que ces choses n'avaient pas été découvertes par eux. Mais aucun de mes prédécesseurs n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant. Nous démontrons, en effet, que

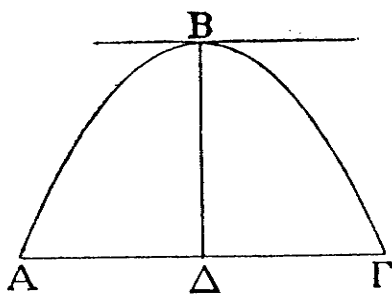
1. Allusion aux premières recherches de la quadrature exacte du cercle et notamment à celles d'Hippocrate de Chio qui, combinant la constance du rapport du cercle au carré du rayon avec la proposition de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse, découvrit la proposition sur les lunules, célèbre dans l'antiquité.

2. L'expression *ὑπὸ τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς*, littéralement « par une section de cône entier », est incompréhensible, et a probablement été altérée par un copiste. Il s'agit sans doute de l'aire comprise entre un arc d'ellipse et une droite, c'est-à-dire de l'aire d'un segment elliptique.

tout segment délimité par une droite et par une parabole dépasse d'un tiers le triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant d'ailleurs pour la démonstration ce lemme : que l'excès dont la plus grande de deux aires inégales dépasse la plus petite peut être ajouté à lui-même jusqu'à dépasser toute aire finie donnée. Les géomètres qui nous ont précédé ont également fait usage de ce lemme ; car ils s'en sont servis pour démontrer que le rapport de cercles entre eux est le même que celui des carrés de leurs diamètres, et que le rapport de sphères entre elles est le même que celui des cubes de leurs diamètres. De plus, ils ont assumé un lemme semblable pour démontrer que toute pyramide est le tiers du prisme ayant même base et même hauteur que cette pyramide, et que tout cône est le tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que ce cône. Il se fait cependant que les divers théorèmes que nous venons de mentionner ne sont pas considérés comme moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme, et il me suffira que ceux que je publie maintenant soient traités avec ce même degré de certitude. Je t'envoie donc les démonstrations que j'en ai écrites, d'abord telles que je les ai examinées par la mécanique, puis telles que je les ai établies par la géométrie. Elles sont d'ailleurs précédées de propositions élémentaires sur les sections coniques qui seront utiles à la démonstration. Sois en bonne santé.

PROPOSITION I

Si l'on a une parabole, sur laquelle se trouve l'arc $AB\Gamma$, une droite



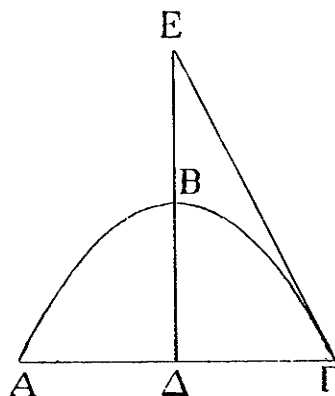
$B\Delta$ parallèle au diamètre, ou diamètre elle-même ⁽¹⁾, une droite $A\Gamma$ parallèle à la tangente à la parabole en B, la droite $A\Delta$ sera égale à la droite $\Delta\Gamma$, et, si la droite $A\Delta$ est égale à la droite $\Delta\Gamma$, la droite $A\Gamma$ et la tangente à la parabole en B seront parallèles ⁽²⁾.

1. C'est-à-dire si BA est une parallèle à l'axe de la parabole, ou l'axe même.

2. Archimède ne donne pas la démonstration de cette proposition, probablement donnée déjà par ses prédécesseurs ; mais on en trouve plus tard, une démonstration dans le traité *Des Coniques* d'APOLLONIUS (livre I, prop. XLVI). Voir trad. française de P. Ver Eecke, p. 85.

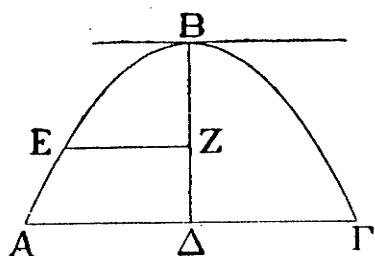
PROPOSITION II

Si $AB\Gamma$ est une parabole, la droite $B\Delta$ une parallèle au diamètre, ou diamètre elle-même, la droite $A\Delta\Gamma$ une parallèle à la tangente à la parabole au point B , et si la droite $E\Gamma$ est une tangente à la parabole au point Γ , les droites $B\Delta$, BE seront égales ⁽¹⁾.



PROPOSITION III

Si $AB\Gamma$ est une parabole, la droite $B\Delta$ une parallèle au diamètre, ou le diamètre même, et, si des droites $A\Delta$, EZ sont menées parallèlement à la tangente à la parabole au point B , le carré de la droite $A\Delta$ sera au carré de la droite EZ comme la droite $B\Delta$ est à la droite BZ ⁽²⁾. Ces propositions sont d'ailleurs démontrées dans les *Eléments* relatifs aux sections coniques ⁽³⁾.



PROPOSITION IV

Soit $AB\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole ; menons, du milieu de la droite $A\Gamma$, la droite $B\Delta$ parallèle au diamètre, c'est-à-dire étant elle-même un diamètre, et prolongeons la droite de jonction $B\Gamma$. Dès lors, si une autre droite $Z\Theta$ est menée parallèlement à la droite $B\Delta$, coupant la droite menée par les points B , Γ , le rapport de $Z\Theta$ à ΘH sera le même que celui de ΔA à ΔZ .

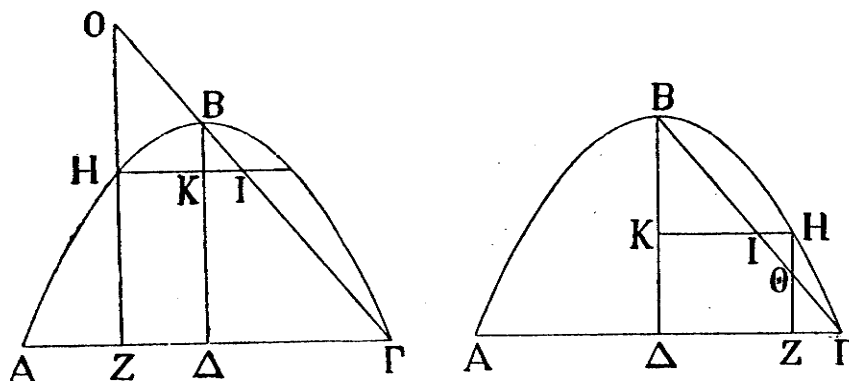
En effet, par le point H menons la droite KH parallèle à la droite $A\Gamma$. Dès lors, le carré de $\Delta\Gamma$ est au carré de KH comme la

1. Voir APOLLONIUS, *Les Coniques*, livre I, prop. XXV et trad. de P. Ver Eecke.

2. *Ibidem*, livre I, proposition XX. Voir trad. de P. Ver Eecke.

3. C'est-à-dire dans les ouvrages élémentaires qui auraient été écrits par Aristée et Euclide, lesquels ne nous sont pas parvenus.

longueur $B\Delta$ est à la longueur BK ; car cela a été démontré ⁽¹⁾. Par conséquent, le carré de $B\Gamma$ sera au carré de $B\Theta$ comme la longueur $B\Gamma$



est à la longueur BI ; car les droites ΔZ , KH sont égales ⁽²⁾. Dès lors, les droites $B\Gamma$, $B\Theta$, BI sont proportionnelles ; en sorte que le rapport de $B\Gamma$ à $B\Theta$ est le même que celui de $\Gamma\Theta$ à ΘI . En conséquence, ΘZ est à ΘH comme $\Gamma\Delta$ est à ΔZ . Or, ΔA est égal à $\Delta\Gamma$; donc il est évident que le rapport de ΔA à ΔZ est le même que celui de $Z\Theta$ à ΘH ⁽³⁾.

PROPOSITION V.

Soit $AB\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole ; par le point A menons la droite ZA parallèle au diamètre, et par le point Γ la droite ΓZ tangente à la parabole en Γ . Dès lors, si dans le triangle $ZA\Gamma$ l'on mène une parallèle quelconque à la droite AZ , la droite menée sera partagée par la parabole dans le même rapport que celui dans lequel la droite $A\Gamma$ est partagée par la droite menée,

1. Même renvoi à des démonstrations perdues de prédécesseurs.

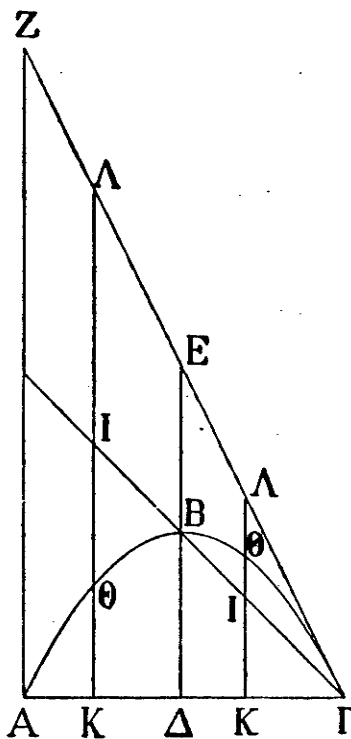
2. On a : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{B\Delta}{BK}$, par similitude de triangles : $\frac{B\Delta}{BK} = \frac{B\Gamma}{BI}$, et $\frac{\Delta\Gamma}{KH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{B\Theta}$;

donc : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{B\Theta}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{B\Theta}^2} = \frac{B\Gamma}{BI}$.

3. La relation de la note précédente peut s'écrire : $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{B\Theta}{BI}$, c'est-à-dire, comme le texte, que les droites $B\Gamma$, $B\Theta$, BI sont proportionnelles, et, suivant que l'on considère l'une ou l'autre figure du texte, on aura : $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{B\Gamma \pm B\Theta}{B\Theta \pm BI} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta I}$. Or, $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$, et $\frac{\Gamma\Theta}{\Theta I} = \frac{\Theta Z}{\Theta H}$; donc : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Theta Z}{\Theta H}$. Mais, $\Delta A = \Gamma\Delta$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta A}{\Delta Z} = \frac{Z\Theta}{\Theta H}$.

et le segment de la droite $A\Gamma$, situé du côté du point A, correspondra au segment de la droite menée situé du côté du point A.

En effet, menons une parallèle quelconque ΔE à la droite AZ , et que la droite ΔE partage d'abord la droite $A\Gamma$ en deux parties égales. Dès lors, puisque $AB\Gamma$ est une parabole, que la droite $B\Delta$ a été menée parallèlement au diamètre, et que les droites $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ sont égales, la tangente en B à la parabole sera parallèle à la droite $A\Gamma$ ⁽¹⁾. D'autre part, puisque ΔE est parallèle au diamètre, que la droite ΓE , menée par le point Γ , est tangente à la parabole en Γ , et que la droite $\Delta\Gamma$ est parallèle à la tangente en B , la droite EB sera égale à la droite $B\Delta$ ⁽²⁾ ; en sorte que le rapport de $A\Delta$ à $\Delta\Gamma$ est le même que celui de ΔB à BE . La proposition est donc démontrée dans le cas où la droite menée divise $A\Gamma$ en deux parties égales. Mais, s'il n'en est pas ainsi, menons une autre parallèle quelconque $K\Lambda$ à AZ . Il faut démontrer que le rapport de AK à $K\Gamma$ est le même que celui de $K\Theta$ à $\Theta\Lambda$. En effet, puisque la droite BE est égale à la droite $B\Delta$, la droite $I\Lambda$ est aussi égale à la droite KI . Donc, le rapport de ΛK à KI est le même que celui de $A\Gamma$ à ΔA , et le rapport de KI à $K\Theta$ est aussi le même que celui de ΔA à AK ; car cela a été démontré antérieurement dans une proposition. En conséquence, le rapport de la droite $K\Theta$ à la droite $\Theta\Lambda$ est le même que celui de la droite AK à la droite $K\Gamma$ ⁽³⁾, et, dès lors, la proposition est démontrée.



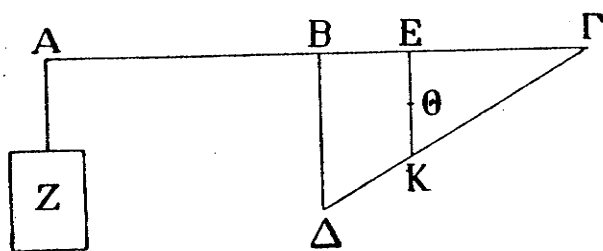
1. Voir proposition I.

2. Voir proposition II.

3. On a, par construction : $\Delta\Gamma = \Delta\Lambda$, et la proposition II donne : $BE = BA$; donc, par similitude de triangles : $IA = KI$. Dès lors : $\frac{IA}{KI} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Lambda}$, d'où : $\frac{2IA}{KI} = \frac{2\Delta\Gamma}{\Delta\Lambda}$, ou, comme le texte : $\frac{\Delta K}{KI} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Lambda}$. D'autre part, la proposition IV donne : $\frac{KI}{I\Theta} = \frac{\Delta\Lambda}{K\Lambda}$, d'où : $\frac{KI}{KI - I\Theta} = \frac{\Delta\Lambda}{\Delta\Lambda - K\Lambda}$, ou, comme le texte : $\frac{KI}{K\Theta} = \frac{\Delta\Lambda}{\Delta K}$; donc : $\frac{\Delta K}{KI} \times \frac{KI}{K\Theta} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Lambda} \times \frac{\Delta\Lambda}{\Delta K}$, ou : $\frac{\Delta K}{K\Theta} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta K}$, d'où : $\frac{K\Theta}{\Delta K - K\Theta} = \frac{\Delta K}{\Delta\Gamma - \Delta K}$ ou, comme le texte : $\frac{K\Theta}{\Theta\Lambda} = \frac{\Delta K}{KI}$.

PROPOSITION VI

Imaginons que le plan qui se présente au regard soit perpendiculaire à l'horizon ; figurons-nous comme étant au-dessous, ce qui est situé du côté d'une droite AB, où se trouve le point Δ , et comme au-dessus, ce qui est situé de l'autre côté. Soit un triangle rectangle $B\Delta\Gamma$ ayant l'angle droit situé au point B et le côté $B\Gamma$ égal à la moitié d'un levier ⁽¹⁾. Que ce triangle soit suspendu aux points B, Γ ; qu'une autre aire Z soit suspendue au point A, dans l'autre partie du levier, et que cette aire, suspendue au point A, fasse équilibre au triangle $B\Delta\Gamma$ dans la position qu'il occupe maintenant. Je dis que l'aire Z est la troisième partie du triangle $B\Delta\Gamma$.



En effet, puisque l'on suppose le levier en équilibre, la ligne $A\Gamma$ sera parallèle à l'horizon, et les perpendiculaires à $A\Gamma$, menées dans le plan perpendiculaire à l'horizon, seront perpendiculaires à l'horizon.

Coupons la ligne $B\Gamma$ en un point E, de manière que la droite ΓE soit double de la droite EB ; menons la droite KE parallèle à la droite $B\Delta$, et divisons-la en deux parties égales au point Θ . Le point Θ sera le centre de gravité du triangle $B\Delta\Gamma$; car cela est démontré dans les propositions mécaniques ⁽²⁾. Dès lors, si le triangle $B\Delta\Gamma$ est détaché de ses points de suspension B et Γ pour être suspendu au point E, le triangle restera comme il est placé maintenant, attendu que tout corps, suspendu en quelque point que ce soit, reste dans une position telle que le point de suspension et le centre de gravité du corps suspendu soient sur une perpendiculaire ; chose qui, du reste, a été démontrée aussi ⁽³⁾. Dès lors, puisque la position du triangle $B\Gamma\Delta$

1. ζυγός, littéralement : joug ; mot qu'Archimède emploie pour désigner les bras conjugués d'un fléau ou levier de balance.

Le texte présente ici une petite interpolation : « il est évident que $B\Gamma$ est égal à AB ».

2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition XIV.

3. Nous ne possédons pas la démonstration de cette proposition de mécanique qui aurait été donnée, quelque part, par Archimède. D'après Heiberg, cette démonstration aurait trouvé place dans un ouvrage perdu, ayant comme titre : Κεντροβαρική, c'est-à-dire *Des Centres de gravité* » (loc. cit. vol. II, p. 275). D'après Heath,

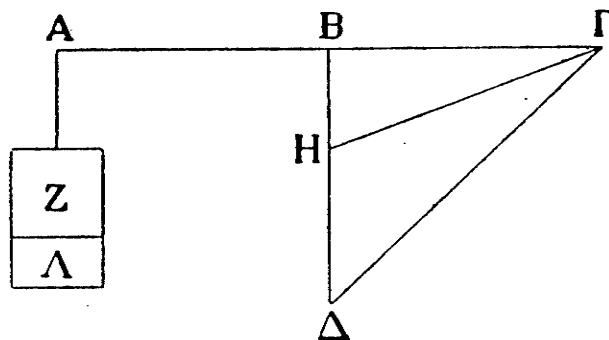
est restée la même par rapport au levier, l'aire Z équilibrera le triangle de la même manière. De plus, puisque l'aire Z , suspendue au point A , équilibre le triangle $B\Delta\Gamma$, suspendu au point E , il est évident que les distances sont inversement proportionnelles ⁽¹⁾, et que le triangle $B\Delta\Gamma$ est à l'aire Z comme AB est à BE . Or, AB est triple de BE ; par conséquent, le triangle est aussi triple de l'aire Z . Il est donc clair aussi que, si le triangle $B\Delta\Gamma$ est triple de l'aire Z , il y aura équilibre.

PROPOSITION VII

Que la ligne $A\Gamma$ soit de nouveau un levier, dont le milieu est le point B , et qu'il soit suspendu en ce point B . Soit $\Gamma\Delta H$ un triangle obtusangle, dont la base est la droite ΔH , et dont la hauteur est égale à la moitié du levier. Suspendons le triangle $\Delta\Gamma H$ aux points B , Γ , et qu'une aire Z , suspendue au point A , fasse équilibre au triangle $\Gamma\Delta H$ dans la position qu'il occupe maintenant. Nous démontrerons, de la même manière, que l'aire Z est la troisième partie du triangle $\Gamma\Delta H$.

En effet, suspendons, au point A , une autre aire qui soit la troisième partie du triangle $B\Gamma H$. Dès lors, le triangle $B\Delta\Gamma$ sera en équilibre avec l'aire $Z\Lambda$.

Donc, puisque le triangle $B\Gamma H$ est en équilibre avec l'aire Λ , que le triangle $B\Gamma\Delta$ est en équilibre avec l'aire $Z\Lambda$, et que l'aire $Z\Lambda$ est le tiers du triangle $B\Gamma\Delta$, il est clair que le triangle $\Gamma\Delta H$ est le triple de l'aire Z .

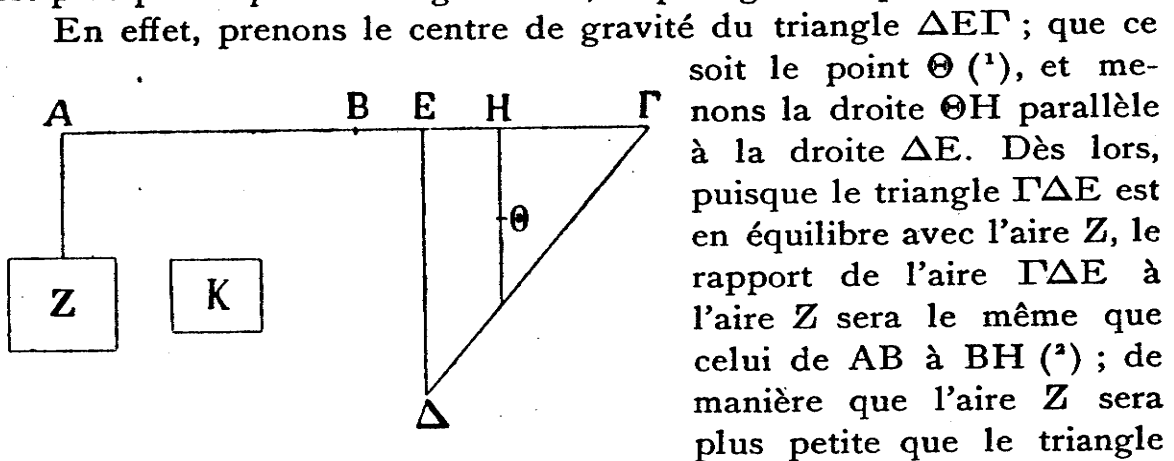


au contraire, cette démonstration devait se trouver dans l'ouvrage perdu intitulé : *Περὶ Ζυγῶν*, c'est-à-dire *Des Balances ou des Leviers* (*loc. cit.*, p. 238). La proposition convenait en tout cas à l'un et l'autre de ces deux ouvrages, dont la perte ne fut pas étrangère à l'état de stagnation dans lequel est restée la mécanique rationnelle jusqu'au XVI^e siècle, c'est-à-dire jusqu'aux travaux de Stévin et de Galilée.

1. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, prop. VI et VII.

PROPOSITION VIII

Soit un levier $AB\Gamma$, dont le milieu est le point B, et qui est suspendu au point B. Soit un triangle rectangle $\Gamma\Delta E$, ayant l'angle droit du côté du point E, suspendu au levier aux points Γ , E. Soit une aire Z, suspendue au point A, en équilibre avec le triangle $\Gamma\Delta E$ dans la position qu'il occupe maintenant, et que le rapport du triangle $\Gamma\Delta E$ à une aire K soit le même que celui de AB à BE. Je dis que l'aire Z est plus petite que le triangle $\Gamma\Delta E$, et plus grande que l'aire K.



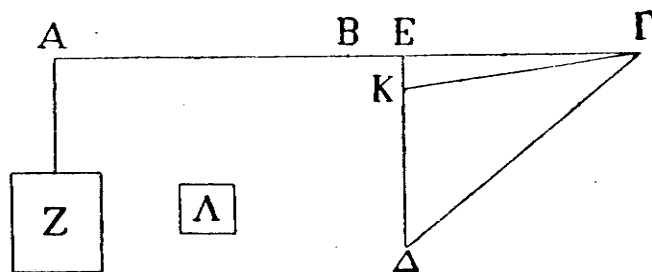
En effet, prenons le centre de gravité du triangle $\Delta E\Gamma$; que ce soit le point Θ ⁽¹⁾, et menons la droite ΘH parallèle à la droite ΔE . Dès lors, puisque le triangle $\Gamma\Delta E$ est en équilibre avec l'aire Z, le rapport de l'aire $\Gamma\Delta E$ à l'aire Z sera le même que celui de AB à BH ⁽²⁾; de manière que l'aire Z sera plus petite que le triangle $\Gamma\Delta E$. D'autre part, puisque le rapport du triangle $\Gamma\Delta E$ à l'aire Z est le même que celui de BA à BH, et que son rapport à l'aire K est le même que celui de BA à BE ⁽³⁾, il est évident que le rapport du triangle $\Gamma\Delta E$ à l'aire K est plus grand que son rapport à l'aire Z; en sorte que l'aire Z est plus grande que l'aire K ⁽⁴⁾.

PROPOSITION IX

Soit de nouveau un levier $A\Gamma$, dont le milieu est le point B, et un triangle obtusangle $\Gamma\Delta K$, ayant comme base ΔK et comme hauteur

1. Voir proposition VI et note.
2. Voir *De l'Équilibre des Plans*, livre I, propositions VI et VII.
3. Par hypothèse.
4. On a démontré : $\frac{\Gamma\Delta E}{Z} = \frac{AB}{BH}$. Or, $BH < AB$; donc : $Z < \Gamma\Delta E$. D'autre part, on a posé : $\frac{\Gamma\Delta E}{K} = \frac{AB}{BE}$. Or, $BE < BH$; donc : $\frac{\Gamma\Delta E}{K} > \frac{AB}{BH}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta E}{K} > \frac{\Gamma\Delta E}{Z}$, d'où, comme le texte : $Z > K$.

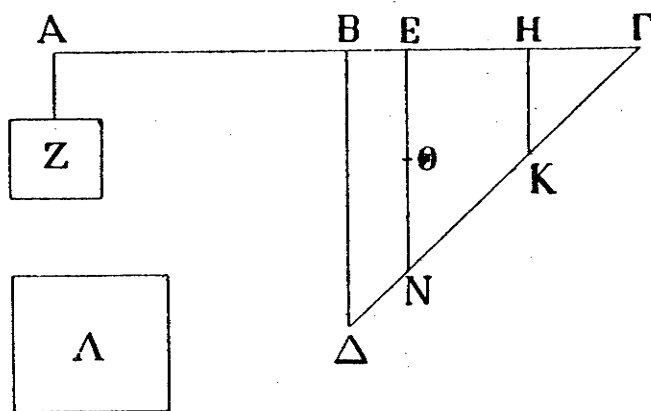
ET. Que le triangle soit suspendu au levier aux points Γ , E, et qu'une aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au triangle $\Delta\Gamma K$ dans la position qu'il occupe maintenant. Que le rapport du triangle $\Gamma\Delta K$ à une aire Λ soit le même que celui de AB à BE. Dès lors, je dis que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ , et qu'elle est plus petite que le triangle $\Delta\Gamma K$; ce qui se démontrera de la même manière que dans la proposition précédente.



PROPOSITION X

Soit de nouveau un levier $AB\Gamma$ dont le milieu est le point B; soit un trapèze dont les angles situés aux points B et H sont droits, et dont le côté $K\Delta$ est dirigé vers le point Γ , et que le rapport du trapèze $B\Delta HK$ à une aire Λ soit le même que celui de AB à BH. Que le trapèze $B\Delta HK$ soit suspendu au levier aux points B et H, et qu'une aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au trapèze $B\Delta KH$ dans la position qu'il occupe maintenant. Je dis que l'aire Z est plus petite que l'aire Λ .

En effet, coupons la droite $A\Gamma$ en un point E, de manière que le rapport de EH à BE soit le même que celui du double de ΔB , augmenté de KH , au double de KH augmenté de $B\Delta$ (¹), et coupons la droite EN, menée par le point E, parallèlement à la droite $B\Delta$, en deux parties égales au point Θ . Dès lors, le point Θ est le centre de gravité du trapèze $B\Delta HK$; car cela est



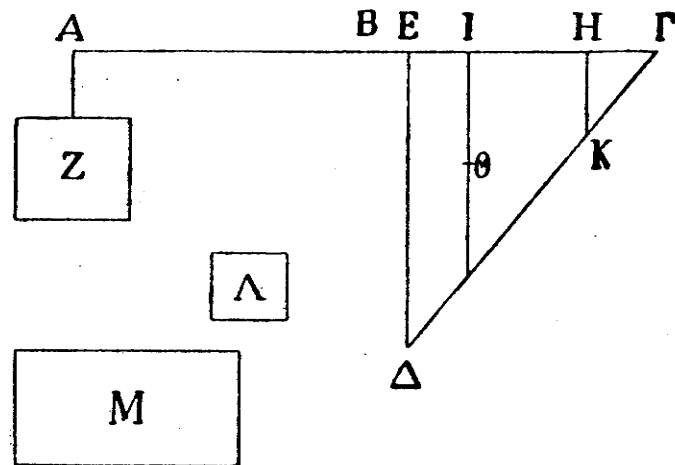
1. Archimède s'en rapporte au problème résolu à la proposition X du livre VI d'EUCLIDE, laquelle est énoncée comme suit : « Partager une droite donnée, qui n'est point partagée, de la même manière qu'une autre droite donnée est partagée » (traduction Peyrard, Paris, 1809, p. 228.)

PROPOSITION XII

Soit de nouveau un levier AF dont le milieu est le point B ; soit un trapèze ΔEKH , ayant les angles situés aux points E, H droits, et les lignes $K\Delta, EH$ dirigées vers le point Γ . Que le rapport du trapèze ΔKEH à M soit le même que celui de AB à BH , et que le rapport du trapèze ΔKEH à Λ soit le même que celui de AB à BE . Que le trapèze ΔKEH soit suspendu au levier aux points E, H , et qu'une aire Z soit suspendue au point A en faisant équilibre au trapèze tel qu'il est placé maintenant. Je dis que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ et plus petite que l'aire M .

En effet, prenons le centre de gravité du trapèze ΔKEH , et que ce soit le point Θ . Que ce centre soit pris de la même manière que précédemment⁽¹⁾, et menons la droite ΘI parallèlement à la droite ΔE .

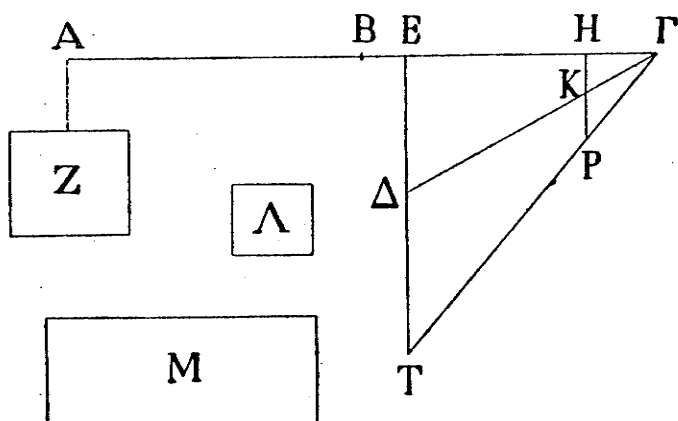
Dès lors, si le trapèze est suspendu au levier au point I , et qu'il en est détaché aux points E, H , il restera dans la position qu'il occupe, et il fera équilibre à l'aire Z pour les mêmes raisons que précédemment⁽²⁾. D'autre part, puisque le trapèze, suspendu au point I , fait équilibre à l'aire Z , suspendue au point A , le rapport du trapèze à l'aire Z est le même que celui de AB à BI . Dès lors, il est évident que le rapport du trapèze ΔKEH à l'aire Λ est plus grand que son rapport à l'aire Z , et que son rapport à l'aire M est plus petit que son rapport à l'aire Z ; en sorte que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ , et qu'elle est plus petite que l'aire M ⁽³⁾.



1. Voir proposition X.
2. Voir proposition VI.
3. Voir proposition X et notes.

PROPOSITION XIII

Soit de nouveau un levier AT , le point B étant placé en son milieu, et un trapèze $K\Delta TP$ ayant ses côtés ΔK , TP dirigés vers le point Γ , et ses côtés ΔT , KP perpendiculaires à la droite $B\Gamma$. Que le trapèze soit suspendu au levier aux points E , H , et qu'une aire Z , suspendue



au point A , fasse équilibre au trapèze ΔKTP dans la position qu'il occupe maintenant. De plus, que le rapport du trapèze ΔKTP à une aire Λ soit le même que celui de AB à BE , et que le rapport de ce trapèze à une aire M soit le même que celui de AB à BH . Dès lors, on démontrera, de la même manière que précédemment,

que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ et plus petite que l'aire M ⁽¹⁾.

PROPOSITION XIV

Soit $B\Theta\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole. Soit, dans un premier cas, la droite $B\Gamma$ perpendiculaire au diamètre. Menons, par le point B , la droite $B\Delta$ parallèle au diamètre, et, par le point Γ , la droite $\Gamma\Delta$ tangente à la parabole au point Γ ; le triangle $B\Gamma\Delta$ sera donc rectangle. Partageons la droite $B\Gamma$ en autant de parties égales qu'on voudra : BE , EZ , ZH , $H\Gamma$; menons, par les points de division, les parallèles au diamètre $E\Sigma$, ZT , $H\Upsilon$, $\Gamma\Xi$, et relierons au point Γ , par des droites que nous prolongeons, les points où ces parallèles coupent la parabole. Dès lors, je dis que le triangle $B\Delta\Gamma$ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE , ΛZ , MH , NI et du triangle $\Xi I\Gamma$, et qu'il est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes $Z\Phi$, $H\Phi$, III et du triangle $IO\Gamma$.

1. Voir proposition XI.

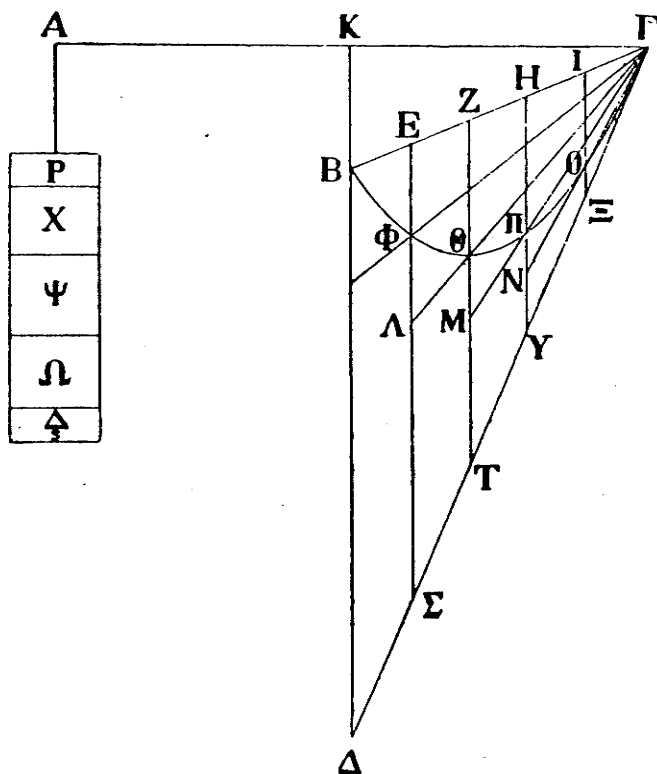
trapèze ΛZ , que son rapport à BH est le même que celui du trapèze TH au trapèze MH , et que son rapport à BI est le même que celui du trapèze YI au trapèze NI . Dès lors, puisque l'on a un trapèze ΔE , ayant les angles placés aux points B et E droits et les côtés dirigés vers le point Γ , tandis qu'une aire P , suspendue au levier au point A , fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant, et que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme BA est à BE , il s'ensuit que l'aire KE est plus grande que l'aire P ; car cela a été démontré ⁽¹⁾. D'autre part, on a de nouveau un trapèze $Z\Sigma$, ayant les angles situés en Z et E droits et la droite ΣT dirigée vers le point Γ , tandis qu'une aire X , suspendue au levier en A , fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant ; de plus, le trapèze $Z\Sigma$ est au trapèze $Z\Phi$ comme AB est à BE , et le trapèze $Z\Sigma$ est au trapèze ΛZ comme AB est à BZ . En conséquence, l'aire X sera plus petite que le trapèze ΛZ et plus grande que le trapèze $Z\Phi$; car cela a été démontré aussi ⁽²⁾. Enfin, pour les mêmes raisons, l'aire Ψ sera plus petite que le trapèze MH et plus grande que le trapèze ΘH ; l'aire Ω sera plus petite que le trapèze $NOIH$ et plus grande que le trapèze III , et, de même ⁽³⁾ encore, l'aire Δ sera plus petite que le triangle $\Xi\Gamma$ et plus grande que le triangle ΓIO . Dès lors, puisque le trapèze KE est plus grand que l'aire P , le trapèze ΛZ plus grand que l'aire X , le trapèze MH plus grand que l'aire Ψ , le trapèze NI plus grand que l'aire Ω , et le triangle $\Xi I\Gamma$ plus grand que l'aire Δ , il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, est plus grand que l'aire $PX\Psi\Omega\Delta$. Or, l'aire $PX\Psi\Omega\Delta$ est la troisième partie du triangle $B\Gamma\Delta$; par conséquent, il est évident que le triangle $B\Gamma\Delta$ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE , ΛZ , MH , NI et du triangle $\Xi I\Gamma$. D'un autre côté, puisque le trapèze $Z\Phi$ est plus petit que l'aire X , le trapèze ΘH plus petit que l'aire Ψ , le trapèze III plus petit que l'aire Ω , et le triangle $IO\Gamma$ plus petit que l'aire Δ , il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, sera aussi plus petit que l'aire $\Delta\Omega\Psi X$. Donc, il est évident que le triangle $B\Delta\Gamma$ est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ΦZ , ΘH , III et du

-
1. Voir proposition X.
 2. Voir proposition XII.
 3. Voir proposition VIII.

triangle $I\Gamma O$, et qu'il est plus petit que le triple des aires désignées en premier lieu ⁽¹⁾.

PROPOSITION XV

Soit de nouveau un segment $B\Theta\Gamma$ délimité par une droite et par une parabole, et que la droite $B\Gamma$ ne soit plus perpendiculaire au diamètre. Dès lors, il faut nécessairement qu'un angle obtus soit formé avec la droite $B\Gamma$, soit par la droite menée du point B parallèlement au diamètre du côté du segment, soit par la droite menée du point Γ . Que la droite formant l'angle obtus soit celle qui est située du côté du point B . Du point B , menons la droite $B\Delta$ parallèle au diamètre, et du point Γ , la droite $\Gamma\Delta$ tangente à la parabole en Γ . Divisons la droite $B\Gamma$ en autant de parties égales qu'on voudra : $BE, EZ, ZH, HI, I\Gamma$; des points E, Z, H, I , menons les droites $E\Sigma, ZT, HY, I\Xi$, et, des points où ces dernières coupent la parabole, menons, vers le point Γ , les droites de jonction que nous prolongeons. Je dis que, maintenant encore, le triangle $B\Delta\Gamma$ est plus petit que le triple des trapèzes $B\Phi$,



1. On aura, en vertu des propositions VIII et XII :
 Σ trapèzes $(KE, \Lambda Z, MH, NI)$ + triangle $\Xi I\Gamma >$ aire $(P + X + \psi + \Omega + \Delta)$, et Σ trapèzes $(Z\Phi, \Theta H, I\Pi)$ + triangle $I O\Gamma <$ aire $(X + \psi + \Omega + \Delta)$. Or, en vertu de la proposition VI, on a : aire $(P + X + \psi + \Omega + \Delta) = \frac{1}{3}$ triangle $B\Gamma\Delta$; donc :
triangle $B\Gamma\Delta = 3$ aires $(P + X + \psi + \Omega + \Delta)$, et triangle $B\Gamma\Delta > 3$ aires $(X + \psi + \Omega + \Delta)$,
d'où, par substitution des valeurs précédentes, il vient, comme dans le texte :
triangle $B\Delta\Gamma < 3 [\Sigma$ trapèzes $(KE, \Lambda Z, MH, NI)$ + triangle $\Xi I\Gamma]$, et triangle $B\Delta\Gamma > 3 [\Sigma$ trapèzes $(Z\Phi, \Theta H, I\Pi)$ + triangle $I O\Gamma]$.

ΔZ , MH , NI , augmentés du triangle $\Gamma I \Xi$, et qu'il est plus grand que le triple des trapèzes $Z\Phi$, $H\Theta$, III , augmentés du triangle ΓOI .

Prolongeons la droite ΔB de l'autre côté ⁽¹⁾. Ayant mené perpendiculairement la droite ΓK , prenons la droite AK égale à la droite ΓK . Imaginons de nouveau que $A\Gamma$ est un levier, dont le milieu est le point K , et qu'il est suspendu au point K . Suspendons le triangle $\Gamma K \Delta$, tel qu'il est disposé maintenant, à la moitié du levier, aux points Γ et K , et suspendons à l'autre partie du levier, au point A , des aires P , X , Ψ , Ω , Δ . Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE tel qu'il est placé maintenant, l'aire X au trapèze $Z\Sigma$, l'aire Ψ au trapèze TH , l'aire Ω au trapèze TI , et l'aire Δ au triangle $\Gamma I \Xi$. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre ; en sorte que le triangle $\Delta B \Gamma$ sera triple de l'aire $PX\Psi\Omega\Delta$ ⁽²⁾. On démontrerait, comme précédemment ⁽³⁾, que le trapèze $B\Phi$ est plus grand que l'aire P ; que le trapèze ΘE est plus grand que l'aire X , et que le trapèze $Z\Phi$ est plus petit ; que le trapèze MH est plus grand que l'aire Ψ , et que le trapèze $H\Theta$ est plus petit ; que le trapèze NI est plus grand que l'aire Ω , et que le trapèze III est plus petit ; que le triangle $\Xi I \Gamma$ est plus grand que l'aire Δ , et que le triangle $\Gamma I O$ est plus petit. En conséquence, la proposition est évidente.

PROPOSITION XVI

Soit de nouveau un segment $B\Theta\Gamma$ délimité par une droite et par une parabole. Par le point B , menons la droite $B\Delta$ parallèle au diamètre, et, par le point Γ , la droite $\Gamma\Delta$ tangente à la parabole au point Γ . Soit une aire Z la troisième partie du triangle $B\Delta\Gamma$. Dès lors, je dis que le segment $B\Gamma\Theta$ est équivalent à l'aire Z .

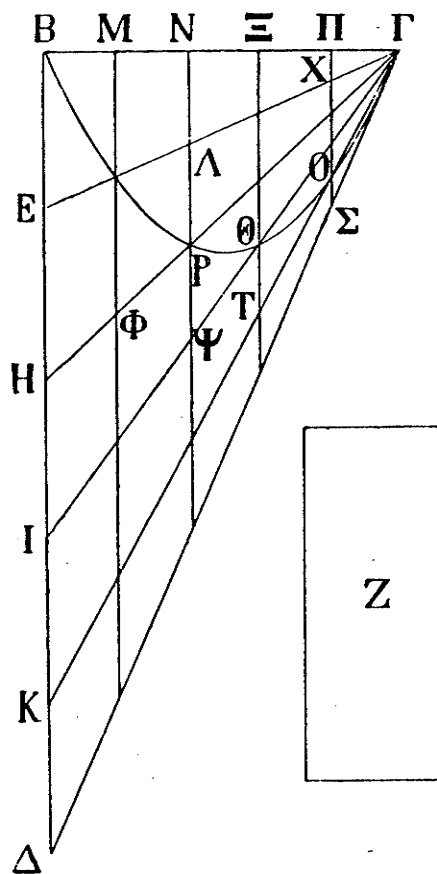
En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont

1. C'est-à-dire de l'autre côté du segment.

2. Voir proposition VII.

3. Voir proposition XIV, et, subsidiairement, les propositions IX, XI et XIII, au lieu des propositions VIII, X et XII qui visent les cas particuliers du triangle rectangle et du trapèze à angles droits.

le segment dépasse l'aire Z , ajouté à lui-même ⁽¹⁾, sera plus grand que le triangle $B\Gamma\Delta$ ⁽²⁾. Au reste, il est possible de choisir une certaine aire qui, plus petite que cet excédent, soit une portion du triangle $B\Delta\Gamma$. Soit donc $B\Gamma E$ un triangle, plus petit que l'excédent en question, et qui soit une portion du triangle $B\Delta\Gamma$; il en résulte que la droite BE sera une portion adéquate de la droite $B\Delta$ ⁽³⁾. Dès lors, divisons la droite $B\Delta$ dans la mesure de cette portion. Soient H , I , K les points de division, et menons les droites qui relient les points H , I , K au point Γ ; ces droites coupent la parabole, parce que la droite $\Gamma\Delta$ lui est tangente au point Γ . Par les points où ces droites coupent la parabole, menons les droites $M\Phi$, NP , $\Xi\Theta$, ΠO parallèlement au diamètre; elles seront elles-mêmes parallèles à $B\Delta$ ⁽⁴⁾. En conséquence, puisque le triangle $B\Gamma E$ est plus petit que l'excédent dont le segment $B\Theta\Gamma$ dépasse l'aire Z , il est évident que l'ensemble de l'aire Z et du triangle $B\Gamma E$ sera plus petit que le segment. De plus, les trapèzes ME , $\Phi\Lambda$, ΘP , ΘO et le triangle $\Gamma O\Sigma$, au travers desquels passe la parabole, valent le triangle $B\Gamma E$; car le trapèze ME est commun, et le trapèze $M\Lambda$ équivaut au trapèze $\Phi\Lambda$, le trapèze $\Lambda\Xi$ au trapèze ΘP , le trapèze $X\Xi$ au trapèze $O\Theta$, et le triangle $\Gamma X\Pi$ au triangle $\Gamma O\Sigma$ ⁽⁵⁾. Donc, l'aire Z sera plus petite que l'ensemble des trapèzes $M\Lambda$, ΞP ,



1. C'est-à-dire ajouté continuellement à lui-même.
2. Voir le lemme invoqué par Archimède dans son introduction adressée à Dosithee.
3. Car, les triangles $B\Gamma E$, $B\Gamma\Delta$ ont même hauteur et sont entre eux comme les bases.
4. Car, $B\Delta$ a été mené par le point B parallèlement au diamètre du segment.
5. La droite $B\Delta$, ayant été divisée en parties égales, le faisceau qui relie les points de division au point Γ divise les parallèles à $B\Delta$ en parties égales, d'où équivalence des trapèzes de même rang, ayant même hauteur et côtés parallèles égaux, et équivalence des triangles $\Gamma X\Pi$, $\Gamma O\Sigma$, ayant même hauteur et bases égales. Dès lors, on a, comme le texte : trap. ME + trap. $\Phi\Lambda$ + trap. ΘP + trap. ΘO + triangle $\Gamma O\Sigma$ = triangle $B\Gamma E$.

$\Pi\Theta$ et du triangle $\Pi O\Gamma$ ('). Or, le triangle $B\Delta\Gamma$ est triple de l'aire Z ; par conséquent, le triangle $B\Delta\Gamma$ sera plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes MA , $PΞ$, $\Theta\Pi$ et du triangle $\Pi O\Gamma$; ce qui est impossible, car il a été démontré qu'il est plus grand que le triple ('). Donc, le segment $B\Theta\Gamma$ n'est pas plus grand que l'aire Z .

D'autre part, je dis qu'il n'est pas plus petit. Et, en effet, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont l'aire Z dépasse le segment $B\Theta\Gamma$, ajouté à lui-même, sera aussi plus grand que le triangle $B\Delta\Gamma$, et il est possible de choisir une certaine aire, plus petite que cet excédent, qui soit une portion du triangle $B\Delta\Gamma$. Soit donc $B\Gamma E$ le triangle, plus petit que cet excédent, qui soit une portion du triangle $B\Delta\Gamma$, et que les autres constructions soient les mêmes que les précédentes. En conséquence, puisque le triangle $B\Gamma E$ est plus petit que l'excédent dont l'aire Z dépasse le segment $B\Theta\Gamma$, l'ensemble du triangle $B\Gamma E$ et du segment $B\Theta\Gamma$ est moindre que l'aire Z . Or, l'aire Z est aussi moindre que l'ensemble des quadrilatères EM , ΦN , $\PsiΞ$, ΠT et du triangle $\Gamma\Pi\Sigma$; car le triangle $B\Delta\Gamma$ est triple de l'aire Z , et il est plus petit que le triple des aires que nous venons de dire, comme on l'a démontré à la proposition précédente. Donc, l'ensemble du triangle $B\Gamma E$ et du segment $B\Theta\Gamma$ sera moindre que l'ensemble des quadrilatères EM , ΦN , $Ξ\Psi$, ΠT et du triangle $\Gamma\Pi\Sigma$; en sorte que, si nous retranchons le segment commun, le triangle ΓBE sera moindre que les aires restantes; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que le triangle $B\Gamma E$ équivaut aux trapèzes EM , ΦA , ΘP , ΘO , augmentés du triangle $\Gamma O\Sigma$; ce qui est plus grand que les aires restantes ('). Donc, le segment $B\Theta\Gamma$ n'est pas plus petit que l'aire Z . Or,

1. Par hypothèse, triangle $B\Gamma E < \text{segment } B\Theta\Gamma - \text{aire } Z$, d'où, en présence de la relation de la note précédente et de la relation évidente : $ME + N\Phi + \Xi\Psi + \Pi T + \Pi\Sigma\Gamma > \text{segt } B\Theta\Gamma$, on aura : $ME + \Phi A + \Theta P + \Theta O + \Gamma O\Sigma < ME + N\Phi + \Xi\Psi + \Pi T + \Pi\Sigma\Gamma - \text{aire } Z$, d'où : aire $Z < (N\Phi - \Phi A) + (\Xi\Psi - \Theta P) + (\Pi T - \Theta O) + (\Pi\Sigma\Gamma - \Gamma O\Sigma)$, ou, comme le texte : aire $Z < MA + \Xi P + \Pi\Theta + \text{triangle } \Pi O\Gamma$.

2. Par hypothèse : aire $Z = \frac{1}{3}$ triangle $B\Delta\Gamma$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : triangle $B\Delta\Gamma < 3[MA + PΞ + \Theta\Pi + \Pi O\Gamma]$; ce qui est absurde, car, en vertu des propositions XIV et XV, on a : triangle $B\Delta\Gamma > 3[MA + PΞ + \Theta\Pi + \Pi O\Gamma]$.

3. La seconde partie de la démonstration se résume comme suit :

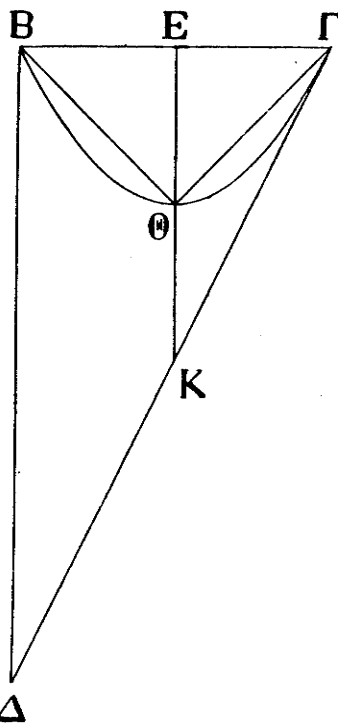
On a, en 2^{de} hypothèse : triangle $B\Gamma E < \text{aire } Z - \text{segment } B\Theta\Gamma$. Or, on a posé : aire $Z = \frac{1}{3}$ triangle $B\Delta\Gamma$, et on a, en vertu des propositions XIV et XV : triangle $B\Delta\Gamma < 3[EM + \Phi N + \PsiΞ + \Pi T + \Gamma\Pi\Sigma]$; donc, comme le texte : triangle $B\Gamma E + \text{segment } B\Theta\Gamma < EM + \Phi N + \PsiΞ + \Pi T + \Gamma\Pi\Sigma$, d'où : triangle $B\Gamma E < EM + \Phi N + \PsiΞ + \Pi T + \Gamma\Pi\Sigma - \text{segment } B\Theta\Gamma$; ce qui est impossible, car on a vu (1^{re} partie de la démonstration) que : triangle $B\Gamma E = ME + \Phi A + \Theta P +$

il a été démontré qu'il n'est pas plus grand ; par conséquent, le segment équivaut à l'aire Z.

PROPOSITION XVII

Ces choses étant démontrées, il est manifeste que tout segment, délimité par une droite et par une parabole, équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment ⁽¹⁾.

En effet, soit un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit le point Θ son sommet, et inscrivons le triangle $B\Theta\Gamma$ ayant même base et même hauteur que le segment. Dès lors, puisque le point Θ est le sommet du segment, la droite menée du point Θ , parallèlement au diamètre ⁽²⁾, divise la droite $B\Gamma$ en deux parties égales ⁽³⁾, et la droite $B\Gamma$ est parallèle à la tangente à la parabole au point Θ ⁽⁴⁾. Menons la droite ΘE parallèle au diamètre ; menons encore, par le point B , la droite $B\Delta$ parallèle au diamètre, et, par le point Γ , la droite $\Gamma\Delta$ tangente à la parabole en Γ . Dès lors, puisque la droite $K\Theta$ est parallèle au diamètre, que la droite $\Gamma\Delta$ est tangente à la parabole en Γ , et que la droite $E\Gamma$ est parallèle à la tangente à la parabole au point Θ , le triangle $B\Delta\Gamma$ sera quadruple du



$\Theta O + \Gamma O \Sigma$. Or, $\Phi \Lambda + \Theta P + \Theta O + \Gamma O \Sigma > \Phi N + \Psi \Sigma + \Pi T + \Gamma \Pi \Sigma$ — segment $B\Theta\Gamma$, ou : $ME + \Phi \Lambda + \Theta P + \Theta O + \Gamma O \Sigma > ME + \Phi N + \Psi \Sigma + \Pi T + \Gamma \Pi \Sigma$ — segment $B\Theta\Gamma$; donc : triangle $B\Theta\Gamma > ME + \Phi N + \Psi \Sigma + \Pi T + \Gamma \Pi \Sigma$ — segment $B\Theta\Gamma$.

1. Les propositions qui précèdent, basées sur la notion baricentrique des aires, et sur la notion de l'équilibre du levier, aboutissent donc ici à l'invention mécanique de la quadrature de la parabole. La série des sept propositions suivantes reprendra, au contraire, la démonstration de la quadrature de la parabole par la géométrie pure.

2. C'est-à-dire menée parallèlement au diamètre principal ou à l'axe.

3. Comme l'avaient, du reste, déjà fait remarquer Heath (*loc. cit.*, p. 246) et Heiberg (*loc. cit.*, vol. II, p. 299), Archimède emploie ici les termes de base et de sommet du segment parabolique, dont il ne donnera cependant la définition qu'à la suite de cette proposition. De plus, il anticipe sur la proposition XVIII en invoquant sa réciproque.

4. Voir proposition I.

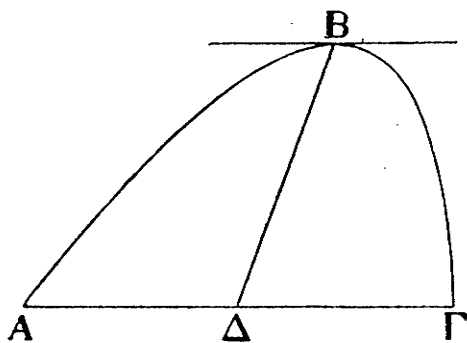
triangle $B\Theta\Gamma$ ⁽¹⁾. De plus, puisque le triangle $B\Delta\Gamma$ est triple du segment $B\Theta\Gamma$ ⁽²⁾, et qu'il est quadruple du triangle $B\Theta\Gamma$, il est évident que le segment $B\Theta\Gamma$ vaut les quatre tiers du triangle $B\Theta\Gamma$.

J'appelle base, la droite des segments délimités par une droite et par une ligne courbe ; hauteur, la plus grande perpendiculaire menée de la ligne courbe sur la base du segment, et sommet, le point d'où est menée la plus grande perpendiculaire.

PROPOSITION XVIII

Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on mène, du milieu de la base, une parallèle au diamètre, le sommet du segment sera le point où la parallèle au diamètre coupe la section de cône.

En effet, soit $AB\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole, et, du milieu de la droite $A\Gamma$, menons la droite ΔB parallèle au diamètre. Dès lors, puisque la droite $B\Delta$ a été menée, parallèlement au diamètre dans une parabole, et que les droites $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ sont égales, il est évident que la droite $A\Gamma$ et la tangente à la parabole au point B sont parallèles ⁽³⁾. Donc, il est clair que, parmi les perpendiculaires menées de la parabole sur la droite $A\Gamma$, la plus grande sera celle qui est menée du point B . Dès lors, le point B est le sommet du segment ⁽⁴⁾.



1. Puisque ΘE est un diamètre et $B\Gamma$ une corde conjuguée, on a : $BE = E\Gamma$; donc : $B\Delta = 2EK$, d'où : triangle $B\Gamma\Delta = 4$ triangles $E\Gamma K$. Or, puisque ΓK est une tangente à la parabole, on a : $E\Theta = \Theta K$. Dès lors, considérant des triangles de même hauteur et ayant des bases égales : triangle $B\Theta E =$ triangle $E\Theta\Gamma =$ triangle $\Theta\Gamma K$, d'où : triangle $E\Gamma K =$ triangle $B\Theta\Gamma$, d'où, comme le texte : triangle $B\Delta\Gamma = 4$ triangles $B\Theta\Gamma$.

2. En vertu de la proposition XVI, on a : segment $B\Theta\Gamma = \frac{1}{3}$ triangle $B\Delta\Gamma$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : segment $B\Theta\Gamma = \frac{4}{3}$ triangle $B\Theta\Gamma$.

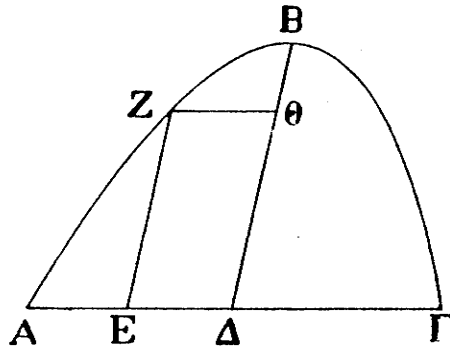
3. Voir proposition I.

4. Voir les définitions qui terminent la proposition XVII.

PROPOSITION XIX

Dans un segment délimité par une droite et par une parabole, la droite menée ⁽¹⁾ du milieu de la base a comme longueur les quatre tiers de la droite menée ⁽²⁾ du milieu de la moitié de la base.

En effet, soit $AB\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole. Menons, parallèlement au diamètre, la droite $B\Delta$ du milieu de la droite $\Lambda\Gamma$, la droite EZ du milieu de la droite $A\Delta$, et menons aussi la droite $Z\Theta$ parallèle à la droite $A\Gamma$. Dès lors, puisque la droite $B\Delta$ a été menée parallèlement au diamètre dans une parabole, et que les droites $A\Delta$, $Z\Theta$ sont parallèles à la tangente au point B , il est évident que le rapport de la longueur $B\Delta$ à la longueur $B\Theta$ est le même que celui du carré de $A\Delta$ au carré de $Z\Theta$ ⁽³⁾. Par conséquent, la longueur $B\Delta$ sera quadruple de la longueur $B\Theta$ ⁽⁴⁾. Il est donc clair que la longueur $B\Delta$ vaut les quatre tiers de la longueur EZ ⁽⁵⁾.



PROPOSITION XX

Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, le triangle inscrit sera plus grand que la moitié du segment.

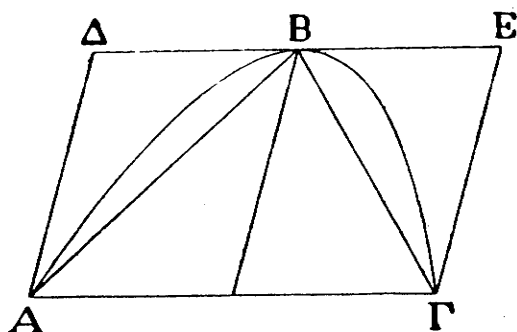
En effet, soit $AB\Gamma$ un segment, tel que nous venons de le dire, ayant même base et même hauteur que le segment entier. Dès lors, puisque le triangle a même base et même hauteur que le segment, il est

1. Sous-entendu : menée parallèlement à un diamètre ou à l'axe de la parabole.
2. Sous-entendu : menée parallèlement au diamètre du segment.
3. Voir proposition III.

4. On a, en vertu de la prop. III : $\frac{B\Delta}{B\Theta} = \frac{A\Delta^2}{Z\Theta^2}$. Or, $A\Delta = 2E\Delta = 2Z\Theta$; donc :

$$\frac{B\Delta}{B\Theta} = \frac{4Z\Theta^2}{Z\Theta^2}, \text{ d'où : } B\Delta = 4B\Theta.$$

5. $B\Delta = 4B\Theta = 4(B\Delta - \Delta\Theta) = 4(B\Delta - EZ)$, d'où : $B\Delta = \frac{4}{3}EZ$.



nécessaire que le point B soit le sommet du segment ⁽¹⁾. Donc, la droite AΓ est parallèle à la tangente à la parabole en B ⁽²⁾. Par le point B, menons la droite ΔE parallèle à la droite AΓ, et, par les points A, Γ, les droites AΔ, ΓE parallèles au diamètre ; ces dernières tomberont donc en dehors du segment ⁽³⁾.

Dès lors, puisque le triangle ABΓ est la moitié du parallélogramme AΔEΓ, il est clair qu'il est plus grand que la moitié du segment.

COROLLAIRE

Cela étant démontré, il est évident que, dans un pareil segment, il est possible d'inscrire un polygone tel que les segments restants soient plus petits que toute aire donnée. En effet, il est clair que, si l'on retranche continuellement ce qui, en vertu de cette proposition ⁽⁴⁾, est plus grand que leur moitié, les segments restants, devenant continuellement plus petits, deviendront moindres que toute aire donnée ⁽⁵⁾.

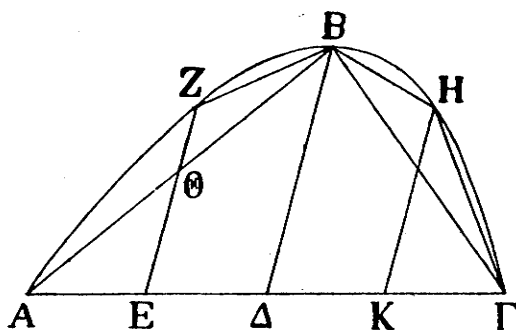
PROPOSITION XXI

Si, dans un segment délimité par une droite et une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si, dans les segments restants, l'on inscrit d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans

1. Voir les définitions à la fin de la proposition XVII.
2. En vertu de la réciproque de la proposition XVIII, la droite menée du sommet du segment, parallèlement au diamètre, divise AΓ en deux parties égales, d'où, en vertu de la proposition I, la droite AΓ est parallèle à la tangente en B.
3. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XVI.
4. C'est-à-dire en vertu de la proposition XX qui précède.
5. Euclide démontre directement ce corollaire à la proposition I du livre X de ses *Éléments*. Elle est énoncée comme suit : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande on retranche une partie plus grande que sa moitié ; si du reste on retranche une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite ; il restera enfin une certaine grandeur qui sera moindre que la plus petite des grandeurs proposées (Traduction Peyrard, Paris, 1809, p. 283bis).

le segment entier sera octuple de chacun des triangles inscrits dans les segments qui restent à l'entour.

Soit $AB\Gamma$ un segment tel que nous venons de le dire ; divisons la droite $A\Gamma$ en deux parties égales en Δ , et menons la droite $B\Delta$ parallèlement au diamètre. Le point B est donc le sommet du segment, et le triangle $AB\Gamma$ a donc même base et même hauteur que le segment ⁽¹⁾. Divisons de nouveau la droite $A\Delta$ en deux parties égales au point E , et menons la droite EZ parallèle au diamètre ; la droite AB est coupée par cette dernière au point Θ . Dès lors, le point Z est le sommet du segment AZB ⁽²⁾, et, par conséquent, le triangle AZB a même base et même hauteur que ce segment. Il faut démontrer que le triangle $AB\Gamma$ est octuple du triangle AZB . La droite $B\Delta$ vaut les quatre tiers de la droite EZ ⁽³⁾, et vaut le double de la droite $E\Theta$ ⁽⁴⁾ ; la droite $E\Theta$ est donc double de la droite ΘZ ⁽⁵⁾ ; en sorte que le triangle AEB est aussi double du triangle ΔBA ; car le triangle $AE\Theta$ est double du triangle $A\Theta Z$, et le triangle ΘBE est double du triangle $Z\Theta B$ ⁽⁶⁾. En conséquence, le triangle $AB\Gamma$ est octuple du triangle AZB , et l'on démontrerait, de la même manière, qu'il est octuple du triangle inscrit dans le segment $BH\Gamma$ ⁽⁷⁾.



1. Voir proposition XVII, *in fine*. Puisque le point B est le sommet du segment $AB\Gamma$, on pourra, de ce point, abaisser sur $A\Gamma$ la plus grande perpendiculaire, laquelle sera à la fois la hauteur du segment et du triangle $AB\Gamma$.

2. Puisque $AE = E\Delta$, on a, par similitude de triangles, $A\Theta = \Theta B$. Donc, puisque ΘZ , qui passe par le milieu de AB , est parallèle au diamètre, ΘZ est le diamètre du segment AZB , et (proposition XVIII), le point Z est son sommet.

3. Voir proposition XIX et note.

4. On a : $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{E\Theta}{B\Delta}$; or, $A\Delta = 2AE$; donc : $B\Delta = E\Theta$.

5. On a, en vertu de la proposition XIX : $B\Delta = \frac{4}{3}EZ$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $E\Theta = \frac{2}{3}EZ = \frac{2}{3}(\Theta Z + E\Theta)$, d'où : $E\Theta = 2\Theta Z$.

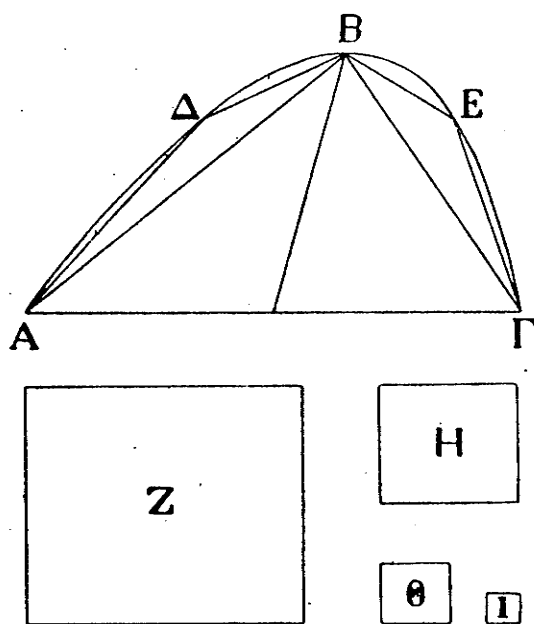
6. Les triangles $A\Theta Z$, $AE\Theta$, qui ont même hauteur, ont comme bases ΘZ et $E\Theta = 2\Theta Z$; donc : triangle $AE\Theta = 2$ triangles $A\Theta Z$. D'autre part, les triangles $Z\Theta B$, ΘBE , qui ont même hauteur, ont comme bases ΘZ et $E\Theta = 2\Theta Z$; donc : triangle $\Theta BE = 2$ triangles $Z\Theta B$. Dès lors, triangle $AE\Theta +$ triangle $\Theta BE = 2$ [triangle $A\Theta Z +$ triangle $Z\Theta B$] , ou triangle $AEB = 2$ triangles ZBA .

7. On a : triangle $ABA = 2$ triangles AEB , et triangle $AB\Gamma = 2$ triangles $ABA = 4$ triangles AEB , d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : triangle $AB\Gamma = 8$ triangles AZB , et, de même : triangle $AB\Gamma = 8$ triangles $BH\Gamma$.

PROPOSITION XXII

Etant donné un segment délimité par une droite et par une parabole, si des aires en nombre quelconque sont établies en une série dont la raison est quatre (¹), la plus grande aire étant équivalente au triangle ayant même base et même hauteur que le segment, l'ensemble de toutes ces aires sera plus petit que le segment.

En effet, soit $A\Delta BE\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soient des aires en nombre quelconque Z, H, Θ, I établies en série ; que celle qui précède soit quadruple de la suivante, l'aire Z étant la plus grande, et que l'aire Z soit équivalente au triangle



ayant même base et même hauteur que le segment. Je dis que le segment est plus grand que les aires Z, H, Θ, I .

Soit B le sommet du segment entier, et soient Δ, E les sommets des segments restants. Dès lors, puisque le triangle $AB\Gamma$ est octuple de chacun des triangles $A\Delta B, BE\Gamma$, il est évident qu'il est quadruple de leur ensemble (²). De plus, puisque le triangle $AB\Gamma$ équivaut à l'aire Z , les triangles $A\Delta B, BE\Gamma$, par raison identique, équivaudront à l'aire H (³). On démontrera pareillement que les triangles inscrits dans les segments restants, ayant même base et même

hauteur que ces segments, sont équivalents à l'aire Θ , et que les triangles inscrits dans les segments obtenus ensuite sont équivalents à l'aire I . Dès lors, l'ensemble des aires données sera équivalent à un certain polygone inscrit dans le segment. Il est donc clair que cet ensemble est plus petit que le segment.

1. C'est-à-dire, comme l'indique la démonstration, en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$.

2. En vertu de la proposition XXI, on a : $AB\Gamma = 8A\Delta B = 8BE\Gamma$, d'où : $2AB\Gamma = 8[A\Delta B + BE\Gamma]$ ou, comme le texte : $AB\Gamma = 4[A\Delta B + BE\Gamma]$.

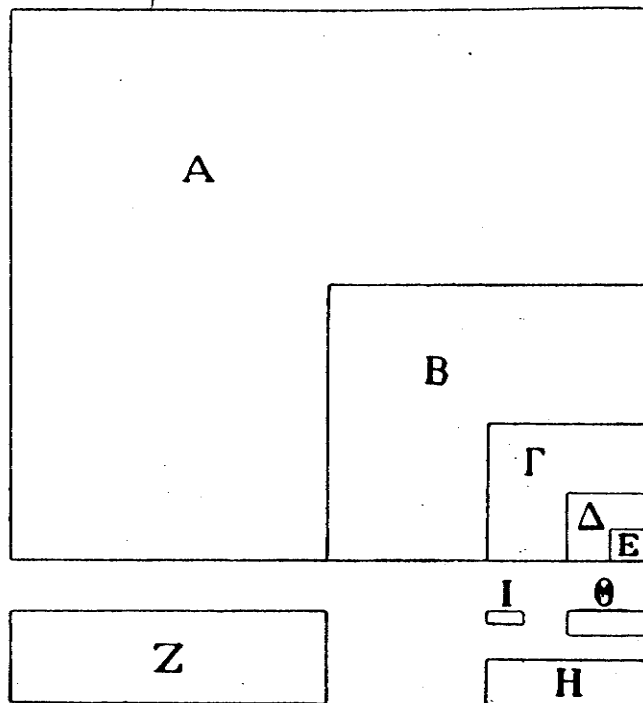
3. Par hypothèse : $Z = 4$ aires H , et aire $Z =$ triangle $AB\Gamma$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : triangle $A\Delta B +$ triangle $BE\Gamma =$ aire H .

PROPOSITION XXIII

Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.

Soient A, B, Γ , Δ , E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ , Θ le tiers de Δ , et I le tiers de E.

Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A, l'ensemble de B, Z sera la troisième partie de A; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H, Γ , sera la troisième partie de B; l'ensemble de Θ , Δ , la troisième partie de Γ , et l'ensemble de I, E, la troisième partie de Δ . Il en résulte que l'ensemble de B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ , I sera aussi la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ , Δ . Or, l'ensemble de Z, H, Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ , Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ , Δ , E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ , Δ , E, augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A (¹).



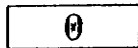
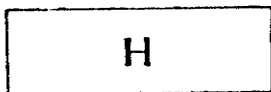
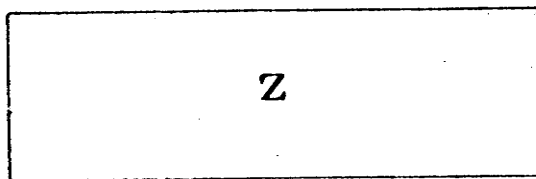
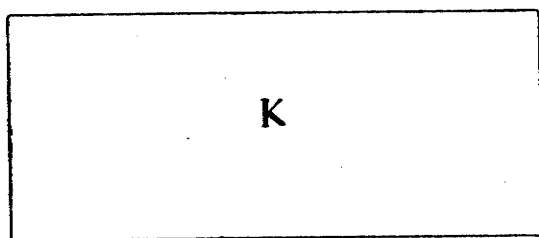
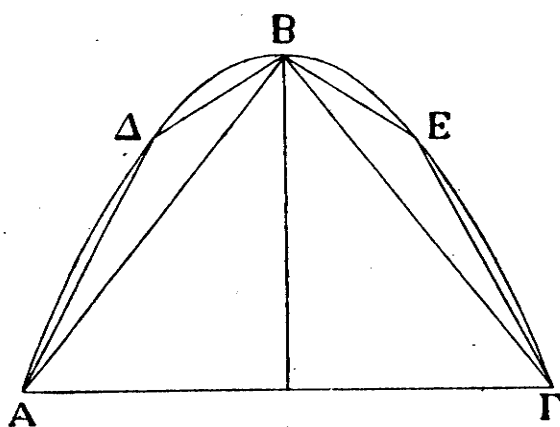
1. Les grandeurs A, B, Γ , Δ , E étant en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$, on aura : $B = \frac{1}{4}A$. Or, on pose : $Z = \frac{1}{3}B$; donc : $B + Z = (\frac{1}{4} + \frac{1}{12})A = \frac{1}{3}A$. On aura de même : $H + \Gamma = \frac{1}{3}B$, $\Theta + \Delta = \frac{1}{3}\Gamma$, et $I + E = \frac{1}{3}\Delta$; d'où : $B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{3}(A + B + \Gamma + \Delta)$. Or, on a posé : $Z = \frac{1}{3}B$, $H = \frac{1}{3}\Gamma$, et $\Theta = \frac{1}{3}\Delta$; donc : $Z + H + \Theta = \frac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta)$, d'où, substituant dans l'égalité précédente, il vient : $B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta) + I = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \Gamma + \Delta$, ou $B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{1}{3}A$, d'où, ajoutant A de part et d'autre, et observant que l'on a posé $I = \frac{1}{3}E$, il vient, comme le texte : $A + B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A$.

Algébriquement, la somme d'une progression décroissante par quotient s'obte-

PROPOSITION XXIV

Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

En effet, soit $A\Delta BE\Gamma$ un segment délimité par une droite et par



une parabole ; soit $AB\Gamma$ un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire K équivalente aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$. Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment $A\Delta BE\Gamma$. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment $A\Delta BE\Gamma$ soit d'abord plus grand que l'aire K , s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles $A\Delta B$, $BE\Gamma$, comme il a été dit ⁽¹⁾, et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment $A\Delta BE\Gamma$ dépasse l'aire K ⁽²⁾ ; en

nant en retranchant du premier terme le produit du dernier terme par la raison, et en divisant la différence par l'excès de l'unité sur la raison, on aurait aussitôt :

$$S = \frac{A - \frac{1}{4}E}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E, \text{ d'où : } S + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A.$$

1. C'est-à-dire, comme il a été dit à la proposition XXI.
2. Voir proposition XX, corollaire.

sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle $AB\Gamma$ est d'abord quadruple des triangles $A\Delta B$, $BE\Gamma$ ⁽¹⁾, qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande ⁽²⁾. Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire ⁽³⁾ ; par conséquent, le segment $A\Delta BE\Gamma$ n'est pas plus grand que l'aire K .

Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle $AB\Gamma$, une aire H équivalente au quart de l'aire Z , et, de même, une aire Θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z , H , Θ , I , augmenté du tiers de l'aire I , vaut les quatre tiers de l'aire Z ⁽⁴⁾.

Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z , H , Θ , I , augmenté de la troisième partie de l'aire I ⁽⁵⁾. Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z , H , Θ , I d'une aire plus petite que l'aire I , et qu'elle excède le segment d'une aire plus grande que l'aire I , il est évident que l'ensemble des aires Z , H , Θ , I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment ⁽⁶⁾. En conséquence, le segment $A\Delta BE\Gamma$ n'est pas plus petit que l'aire K . Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus

1. Voir proposition XXI.

2. Voir proposition XXIII et note.

3. Par hypothèse : $K = \frac{4}{3}$ triangle $AB\Gamma$, et triangle $AB\Gamma$ est la plus grande aire.

4. Voir proposition XXIII. On aura : $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3}I = \frac{4}{3}Z$.

5. On a posé : $K = \frac{4}{3}Z$; donc, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3}I$.

6. L'égalité de la note précédente donne : $K - (Z + H + \Theta + I) = \frac{1}{3}I < I$. D'autre part, en 2^{de} hypothèse, on a : aire $K >$ segt $A\Delta BE\Gamma$, et aire $K - \text{segt } A\Delta BE\Gamma > I$, d'où, comparant avec la 1^{re} inégalité, on a, à fortiori : $K - (Z + H + \Theta + I) < K - \text{segment } A\Delta BE\Gamma$, ou, comme le texte : $Z + H + \Theta + I > \text{segment } A\Delta BE\Gamma$; relation impossible. En effet, la proposition XXII a démontré que l'on a : $Z + H + \Theta + I < \text{segment } A\Delta BE\Gamma$.

grand ; donc, il est équivalent à l'aire K. Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle $AB\Gamma$; donc, le segment $A\Delta BE\Gamma$ vaut aussi les quatre tiers du triangle $AB\Gamma$.
