

ILLiad TN: 3857094



Scan&Deliver

Call #: WID GEN Math 174.2

Borrower: HLS
Lending String: HLS

Location: HLS

2/18/2012 09:29:08 AM

Patron: Graduate: Amy Koenig

Shipping Address:

Harvard University - Widener Library
Interlibrary Loan
Harvard University
Cambridge, MA 02138

Journal Title: Quellen und Studien zur Geschichte
der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung
B. Studien.

Volume: 2 **Issue:**
Month/Year: 1933 **Pages:** 311-330

Fax:
Ariel:
Odyssey: 206.107.43.109
Email:

Article Author:

MaxCost:

Article Title: Eudoxus-Studien: I: Eine
voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren
bei Aristoteles und Euklid

Special Instructions:

ILL Number: 3857077



THIS IS NOT AN INVOICE!

NON-IFM LIBRARIES WILL RECEIVE AN
INVOICE UNDER SEPARATE COVER FOR THIS
TRANSACTION FROM HARVARD UNIVERSITY
ACCOUNTS RECEIVABLE IN 4-6 WEEKS

**PLEASE DO NOT SEND PAYMENT UNTIL YOU
RECEIVE AN INVOICE!**

Widener Library Interlibrary Loan

Eudoxos-Studien I.

Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid.

Von Oskar Becker in Bonn.

(Eingegangen am 1. 11. 1932.)

1.

In der aristotelischen Topik (Θ. 3, p. 158b 29—35) findet sich folgende Stelle:

τοῖσι δὲ καὶ ἐν ταῖς μαθήμασι
ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειπιν οὐ ῥα-
δίως γράγεσθαι, οἷον [καὶ] ὅτι
ἢ παρὰ τὴν πλεονὰν τέμνουσα τὸ
ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τὴν τε
γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον.

τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως
φανερὸν τὸ λεγόμενον. τὴν γὰρ
αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ
χωρία καὶ αἱ γραμμαί. ἔστι δ'
ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγον <πρῶ-
τος> οὗτος.

Es scheint aber auch in der Mathe-
matik Einiges wegen des Fehlens einer
Definition nicht leicht zu beweisen zu
sein, wie z. B. daß die ein Parallelo-
gramm parallel zur Seite schneidende
Gerade die Linie und die Fläche (d. i.
die anliegenden Seiten und die Fläche
des Parallelogramms) in demselben
Verhältnis teilt.

Wenn aber die Definition ausgespro-
chen ist, ist das Gesagte sogleich ein-
leuchtend. Denn dieselbe „Antanai-
resis“ haben die Flächen und die Li-
nien. Es ist aber die <erste?> Definition
desselben (d. i. des gleichen) Verhält-
nisses diese (d. h. die soeben an-
geführte).

Der Zusammenhang der Stelle ist belanglos; sie stellt nur eines der
vielen Beispiele der Topik dar, die im allgemeinen noch zweifellos aus
dem gemeinsamen Material der Akademie stammen. Der Text folgt der
Ausgabe von Strache-Wallies, die auch das καὶ in l. 31 streicht. (Ich
fügte l. 35 πρῶτος zur Erwägung bei, das sich in dem entsprechenden
Zitat des Alexander-Kommentars zur Stelle in einer guten Handschrift
(P) und in dem Erstdruck der Aldina findet.)

Die Beziehung der Stelle auf den Satz, daß sich Parallelogramme von gleicher Höhe wie ihre Grundlinien verhalten (Euklid Elem. VI, 1), der im Text noch in einer gewissen Spezialisierung, nämlich bezogen auf zwei einander gleichwinkelige Parallelogramme erscheint, ist evident und zum Überfluß durch den erwähnten Kommentar des Alexander von Aphrodisias gesichert, der sich auf S. 545, 1–21 (Wallies) mit unserer Stelle beschäftigt.

Es heißt da nämlich p. 545, 9–12 (nach der Walliesschen Textgestaltung): *ἔστι δὲ τὸ λεγόμενον, ὅτι τὰν ἐπίπλευον παραλλήλογραμμον ἢ, ἀχθῇ δ' ἐν αὐτῷ μιᾷ τῶν πληρῶν παραλλήλων, ἢ παραλλήλων ὁμοίως διαιρεῖ τὴν γραμμὴν καὶ τὸ πᾶν χωρίον, τοῦτίσιν ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογία.*

Damit ist aber noch nicht die Bedeutung des Wortes „Antanairesis“, das die Definition der Verhältnisgleichheit bestimmt, erklärt. Das sehr Merkwürdige ist nun, daß in den unmittelbar folgenden Zeilen des Kommentars diese Bedeutung — für den, der zu lesen versteht — in voller Klarheit zutage tritt, und damit sich ein überraschender Einblick in die Struktur einer voreuklidischen, ja wie ich meine, voreudoxischen Proportionenlehre eröffnet, die sich bereits auch auf irrationale Verhältnisse bezieht.

Der Kommentator fährt nämlich zunächst fort (p. 545, 12–17): *τοῦτο γὰρ ὁμοίως μὲν λεγόμενον οὐκ ἔστι γνώριμον· ὁιθέντος μέντοι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀνάλογον γνώριμον γίνεται ὅτι ἀνάλογον ἐπὶ τῆς ἀχθείσης παραλλήλων τέμνεται ἢ τε γραμμὴ καὶ τὸ χωρίον.*

Und dann folgt die entscheidende Stelle:

ἔστι δὲ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ὃ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἀλλήλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις· αὐτὸς δὲ τὴν ἀνθυφαίρεσιν ἀνταίρεσιν εἴρηκε.

Es ist aber die Definition der proportionalen (Größen), deren sich die Alten bedienten, folgende: In Proportion stehen Größe zueinander, denen dieselbe „Anthyphairesis“ zukommt. Aristoteles aber nannte die Anthyphairesis „Antanairesis“¹⁾.

Zunächst freilich scheint durch die Aussage des Kommentators nicht viel gebessert. Wir erfahren zwar, daß es sich um eine fest formulierte Definition der Verhältnisgleichheit bei den „Alten“ handelt, aber ihr Inhalt bleibt dunkel. Er ist in der Tat bisher nicht verstanden worden. Heiberg (Mathematisches bei Aristoteles, S. 22) glaubt die „eudoxische“ Definition (Euklid El. V, def. 5) wiederzuerkennen, wozu der Text aber keinen begründeten Anlaß gibt. Heath (The thirteen books of Euclid's

¹⁾ Diese Definition findet sich wörtlich wieder bei Suidas (Lexicon, sub verbo ἀνάλογον), wodurch ihr Wortlaut gesichert ist.

Elements, Vol. II, p. 120–21) lehnt dies mit Recht ab. Aber er selbst gibt keine positive Erklärung, hält die Ausdrücke „Antanairesis“ und „Anthyphairesis“ für „metaphysisch“ (im Sinne Barrows)²⁾ und vag und versucht eine etymologische Deutung, die natürlich zu nichts Präzisem führt^{2a)}.

Trotzdem ist die Lösung sehr einfach. Alexander erklärt offenbar den für ihn veralteten und nicht mehr ohne weiteres verständlichen Ausdruck „Antanairesis“ durch den ihm geläufigen „Anthyphairesis“. Woher kann er den letzteren haben? Die nächstliegende Vermutung ist: aus Euklids Elementen, die er ja auch sonst öfter zitiert³⁾ und als allgemein bekannt voraussetzt. In der Tat kommt nun zwar nicht das Verbalsubstantiv „Anthyphairesis“, wohl aber das zugehörige Verbum *ἀνθυφαίρειν* an entscheidendster Stelle in den Elementen vor, nämlich in VII, 1, 2 und X, 2, 3⁴⁾. Die letzte Stelle ist besonders wichtig. Dort bedeutet das Verb die Operation des sog. „Euklidischen Teilerverfahrens“ („Algorithmus“) zur Aufsuchung des (größten) gemeinsamen Maßes zweier Größen; im Falle seines Nichtabbrechens kennzeichnet es ihre Inkommensurabilität (X, 2). (In VII, 1, 2 ist entsprechend von Zahlen, ihrem (größten) gemeinsamen Teiler bzw. von ihrer Teilerfremdheit die Rede.)

Das Teilerverfahren zwischen zwei Größen a , b ist nun bekanntlich äquivalent mit der Kettenbruchentwicklung des Verhältnisses („Bruches“) $a:b$. Das heißt aber: Die „Definition der Alten“ besagte:

„Zwei (rationale oder auch irrationale!) Verhältnisse sind gleich dann und nur dann, wenn sie dieselbe Kettenbruchentwicklung haben.“

²⁾ Lectiones mathematicae XVIII (The mathematical works, ed. Whewell, Cambridge 1860, p. 299).

^{2a)} Nach Abschluß des Manuskripts dieser Arbeit erfuhr ich durch eine freundliche Mitteilung des Herrn Pater Steele S. J. (einem Mitglied des Bonner mathematisch-historischen Seminars), daß die richtige Deutung von *ἀνταναιρέσις* in unserer Stelle schon im Jahre 1917 von H. G. Zeuthen in seiner nur in dänischer Sprache veröffentlichten Abhandlung „Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Enklid blev national Videnskab“ (D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Aft. 8. Raekke, I. 5, Kopenhagen 1917) S. 108 (306) ff. gegeben worden ist. [Anm. bei der Korrektur.]

³⁾ Z. B. im Kommentar zur aristot. Metaphysik, ad. p. 1051a 27 (p. 568, 3; cf. p. 158, 1 Bonitz).

⁴⁾ Erstaunlicherweise hat das Heath übersehen, das Wort *ἀνθυφαίρειν* fehlt in seinem griechischen Wörterverzeichnis; es kommt allerdings nicht in der Form einer Definition vor. — Ich habe das Teilerverfahren selbst „Anthyphairesis“ genannt (in meinem Aufsatz „Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen“, diese Zeitschr., Bd. I, S. 479) — ohne zu ahnen, daß dieses Wort in einem mathematisch relevanten Zusammenhang wirklich in einem erhaltenen griechischen Text vorkommt.

Der historische und sachliche Sinn dieser Definition und die Möglichkeit, von ihr aus eine allgemeine Proportionenlehre (sowohl den Verhältnissen als auch der Größenart nach) zu begründen, wird im folgenden untersucht werden.

Vorerst sei noch über die wörtliche Bedeutung von *ἀνθυφαίρεσις* bemerkt, daß sie mit „gegenseitig wegnehmen“ (z. B. Land im Kriege) wiedergegeben werden kann. Das Wort *ἀντάρωσις* wird sogar schon speziell vom „sich gegenseitig Wegheben“ von Posten in einer Rechnung (etwa wie Vermögen und Schulden) gebraucht. Das gegenseitige Abtragen der „Reste“ im euklidischen Verfahren (das von den Griechen nicht unter dem Bilde einer Teilung, sondern eines Wegnehmens der Kleineren vom Größeren, so oft es geht, gesehen wurde) findet dort ein freilich viel primitiveres Vorbild, aus dem immerhin der Wortgebrauch ziemlich verständlich wird.

2.

Um in die historische Bedeutung der „anthyphairetischen“ Definition des Verhältnisses einzudringen, stehen als Quellen — außer einer noch zu besprechenden Stelle aus der aristotelischen Zweiten Analytik und einigen kurzen Andeutungen bei Proklos — nur die Euklidischen Elemente zur Verfügung. In diesen Quellen wird die Anthyphairesis als Definition des Logos nicht erwähnt; wir sind daher auf indirekte Schlüsse angewiesen.

Daß die Euklidischen Elemente auf verschiedene Quellen zurückgehen, wird allgemein angenommen. Auf die vier ersten „elementaren“ Bücher — gekennzeichnet durch das Fehlen des heute so genannten „archimedischen Axioms“ und des allgemeinen Größenbegriffs (*μέγεθος*) — folgen die „höheren“ Bücher V—XIII, die methodisch ganz von der Proportionenlehre beherrscht werden. Aus diesem Material heben sich auf Grund der Scholien, des Prokloskommentars zu I und des Papposkommentars zu X zwei Gruppen heraus, die bekannten voreuklidischen Mathematikern zugeschrieben werden dürfen: Buch VII—IX und der Anfang von X dem Theätet, Buch V und XII dem Eudoxos. (Buch XIII, das nach den Forschungen von Eva Sachs theätetische und eudoxische Bestandteile enthält, kann hier außer Betracht bleiben, die Stellung von VI und der „höheren“ Sätze von XI wird noch zu bestimmen sein.)

Es erhebt sich nun die Frage, ob auch die beiden Definitionen der Proportion (Verhältnisgleichheit), die euklidische (Elem. V, def. 5) und die anthyphairetische, sich den beiden bahnbrechenden Forschern zuschreiben lassen. Nämlich die „Definition der Alten“ dem Theätet und die vermutlich jüngere Definition Euklids dem Eudoxos. Das letztere

ist ohne weiteres anzunehmen, denn das ganze V. Buch lebt sozusagen von seiner 5. (und 7.) Definition und wird dem Eudoxos ja allgemein gegeben. Das erstere erscheint ebenfalls sehr plausibel, wenn man bedenkt, daß am Anfang des VII. und X. Buchs, für Zahlen und stetige Größen, das Teilerverfahren entwickelt wird (VII, 1, 2 und X, 2, 3), während die 5. Definition des V. Buches in VII–X niemals explizit angewandt wird. Dazu kommt noch der im folgenden näher zu erörternde Umstand, daß gerade die anthyphairetische Definition aus dem elementaren Gleichheitsbegriff rationaler Verhältnisse (wie ihn VII, def. 20 gibt) durch einen beinahe stetigen Gedankengang entwickelt werden kann. Um die Gleichheit zweier schwer zu übersehenden rationalen Brüche festzustellen, muß man sie kürzen, d. h. den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner beidemal durch den euklidischen Algorithmus bestimmen: man bemerkt dabei bald, daß die fraglichen Brüche dann und nur dann gleich sind, wenn der Algorithmus beide Male dieselben „Teilungszahlen“ der Reihe nach liefert, so daß man diese Eigenschaft unmittelbar als Gleichheitskriterium verwenden kann. Im rationalen Fall bricht das Verfahren ab, im irrationalen nicht. Aber auch dann hindert nichts, daß man die übereinstimmend verlaufende Anthyphairesis zum Kennzeichen der Verhältnissgleichheit nimmt. Damit hat man aber vom rationalen μέρη-Begriff aus den irrationalen *μηλ-ζώτης*-Begriff gewissermaßen stetig erreicht.

Aber gegen diese Auffassung wendet sich ein anscheinend entscheidender Einwand. Im X. Buch, dessen Anfangssätze Theätet unbedingt zuzuschreiben sind (ein Scholion zu X, 9 bezeichnet den Satz ausdrücklich als seine Entdeckung), wird zwar nicht unmittelbar von der „eudoxischen“ Definition, aber wohl vielfach von der allgemeinen Proportionslehre, die in V ganz auf jener Definition aufgebaut ist, Gebrauch gemacht; das nach unserer Auffassung „ältere“ theätetische X. Buch wäre also in Wahrheit abhängig von dem „jüngeren“ eudoxischen V. Buch! Eine offenbare Absurdität.

Dieser Einwand kann nur durch ein Mittel widerlegt werden: Dadurch, daß gezeigt wird, daß eine „allgemeine“ Proportionslehre, so wie sie als Fundament des X. Buchs gebraucht wird, auch auf Grund der anthyphairetischen Definition lückenlos und streng entwickelt werden kann. Dabei muß genau darauf geachtet werden, welche Weise und welcher Grad von Allgemeinheit im X. Buch benötigt wird, nämlich zwar Anwendbarkeit auf rationale wie irrationale Verhältnisse, aber nicht unbedingt für ganz beliebige Arten von Größen, sondern nur für Strecken und Rechtecke. Denn obwohl zu Anfang von X eine Reihe allgemeiner Größensätze formuliert wird, erfolgt ihre spätere Anwendung doch stets nur in dem erwähnten beschränkten Sinne.

Es ist also unbedingt notwendig, eine auf der Anthyphairesis begründete Proportionenlehre im Umriß zu entwerfen, wie es im folgenden geschieht. Dabei wird zugleich ihre immanente Begrenztheit zutage treten und das Motiv verständlich werden, das Eudoxos antrieb, über sie hinauszugehen.

3.

Der folgende Rekonstruktionsversuch der voreudoxischen Proportionenlehre kann naturgemäß nicht beanspruchen, die historische Wahrheit unverfälscht darzustellen. Es kann sich nur darum handeln, eine mögliche anthyphairetische Theorie der Verhältnislehre zu geben, die irrationale Logoi mitumfaßt und zugleich klar erkennen läßt, wie weit sie eine Theorie für allgemeine Größen ($\mu\rho\acute{\iota}\theta\eta$) sein kann. Ob und wann im Verlauf der geschichtlichen Entwicklung sie das wirklich gewesen ist, soll erst später untersucht werden.

Die folgende Betrachtung stellt also eine systematische mathematische Überlegung dar, die indessen immer versucht, mit den Denkmitteln der voreudoxischen und eudoxischen Zeit zu arbeiten und sich, wo angängig, an antikes Material anschließt.

Überblickt man das V. Buch der Elemente, so sieht man bald, daß die eudoxische Logosdefinition (enthalten in der 5. und 7. Definition) den ganzen Aufbau des Buchs weitgehend bedingt. Ihr Ersatz durch die alte anthyphairetische Definition bringt also einen ganz anderen Aufbau der Beweise mit sich, obwohl eine Reihe davon immerhin beibehalten werden kann. Vor allem die Gruppierung und Reihenfolge der Sätze ändert sich durchgreifend; einige werden sogar ganz überflüssig.

Um mit dem letzten Punkt zu beginnen: V, 14, 20, 21 dienen bei Euklid der „spezifisch eudoxischen“ Vorbereitung von 16, 22, 23; eine ähnliche Rolle spielt 4. Diese Theoreme können also nicht in der alten Theorie gestanden haben; sie sind ihrer Begriffsbildung ganz fremd. Ferner enthalten die ganz elementaren Theoreme 1–3, 5, 6 überhaupt keine Proportionen; von ihnen können wir auch absehen.

Es bleiben also noch die Sätze 7–13, 15–19, 22–25 übrig. Diese gruppieren sich gemäß folgender Übersichtstafel:

Vorgruppe: Elementare Sätze: 1–3, 5–6.

Gruppe A: Für allgemeine Größen beweisbare Sätze:

- I. Solche, die unmittelbar aus der anthyphairetischen Logosdefinition folgen: 7, 11.
- II. Solche mit rein algorithmischen Beweisen: 12 (15) und 19, 17 und 18.

III. Solche, deren Beweis Konvergenzbetrachtungen (d. h. das „archimed. Axiom“) braucht: 8–10, 13, (25).

Gruppe B: Nicht für allgemeine Größen beweisbare Sätze: 16, 22, 23, (24).

(Wegfallend oder nachträglich beweisbar:

A. für allg. Größen: 14. B. nicht für allg. Größen: 4, 20, 21.)

Der entscheidende Unterschied ist der zwischen den Gruppen A und B. Er ist, wie sich zeigen wird, dadurch bedingt, daß die Sätze der Gruppe B den Begriff der Multiplikation von Verhältnissen (Brüchen) enthalten — wie wir uns heute ausdrücken. Aber dieser Begriff läßt sich in der anthyphairetischen Theorie nicht für allgemeine Größen oder Verhältnisse (mit vielleicht irrationalen Werten) zwischen solchen definieren. Die Theoreme der Gruppe A benötigen diesen Multiplikationsbegriff dagegen noch nicht und sind gerade deshalb für allgemeine Größen beweisbar.

Wir gehen nun zu den einzelnen Beweisen über.

I. Die Definition der Gleichheit und Ungleichheit von Verhältnissen.

Definition A: Zwei Verhältnisse sind dann und nur dann gleich, wenn sämtliche Teilungszahlen ihrer Anthypharesis übereinstimmen.

Definition B: Im Fall der Ungleichheit sind zwei Unterfälle zu unterscheiden: 1. Die erste differierende Teilungszahl steht im Algorithmus an ungerader Stelle, dann entspricht das größere Verhältnis der größeren Teilungszahl, das kleinere der kleineren.

2. Die erste differierende Teilungszahl steht an gerader Stelle, dann entspricht umgekehrt das größere Verhältnis der kleineren Teilungszahl, das kleinere aber der größeren.

In Zeichen: Ist $a:b = [x_0 x_1 x_2 \dots]$; $c:d = [y_0 y_1 y_2 \dots]$, so ist $a:b = c:d$ dann und nur dann, wenn $x_i = y_i$ für alle i ; $a:b \neq c:d$ dann und nur dann, wenn es ein i gibt, für das $x_i \neq y_i$. Ist nun j das kleinste derartige i , so ist, falls $j+1$ ungerade, $a:b \geq c:d$, je nachdem $x_j \geq y_j$; falls aber $j+1$ gerade, ist umgekehrt $a:b \geq c:d$, je nachdem $x_j \leq y_j$.

Logische Beziehungen zwischen Verhältnissen: Es geht aus den vorstehenden Definitionen sofort hervor, daß keine der Beziehungen größer, kleiner, gleich mit einer anderen zugleich bestehen kann. („Satz vom Widerspruch.“) Dagegen folgt mit finiten logischen Mitteln⁵⁾

⁵⁾ Im Sinne D. Hilberts, „intuitionistisch“ im Sinne Brouwers. Vgl. vorläufig A. Heyting, „Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies

nicht, daß zwei Verhältnisse entweder gleich oder ungleich (größer oder kleiner) sind. (Wohl aber gilt, daß von zwei ungleichen Verhältnissen — was mehr besagt als von „zwei nicht gleichen Verhältnissen!“ — das eine entweder größer oder kleiner ist als das andere.)

D. h. es gilt ($\neg$ bedeutet „nicht“, $\rightarrow$ „impliziert“):

$$(1) a:b=c:d \rightarrow \overline{a:b \gtrless c:d}; \quad (2) a:b \gtrless c:d \rightarrow \overline{a:b=c:d}$$

Damit ist aber noch keineswegs gesagt, daß auch gilt:

$$(3) \overline{a:b=c:d} \rightarrow a:b \gtrless c:d; \quad (4) \overline{a:b \gtrless c:d} \rightarrow a:b=c:d.$$

In der Tat werden auch von Euklid im V. Buch derartige Argumentationen nicht benutzt.

Die Unverträglichkeit von Gleichheit und Ungleichheit von Logoi wird dagegen in den euklidischen Beweisen von V, 9, 10 stillschweigend vorausgesetzt. Sie ist auf Grund der eudoxischen Definitionen 5 und 7 nicht ohne weiteres einleuchtend, worauf schon R. Simson und de Morgan hingewiesen haben (vgl. Heath, Vol. II, p. 130/31, 156/57). Das kann daher rühren, daß noch die ältere Theorie nachwirkt.

II. Unmittelbare Folgesätze der Definition des Verhältnisses.

Satz 7. *Gleiche Größen haben zu derselben Größe dasselbe Verhältnis und dieselbe Größe hat zu gleichen Größen dasselbe Verhältnis.*

Der Satz ist in der anthyphairetischen Theorie nahezu selbstverständlich. Denn führt man für eine Größe eine gleiche in das Teilverfahren ein, so ergeben sich die gleichen Multipla und dann nach dem Subtraktionsaxiom (Buch I, not. comm. 3) gleiche Reste. Das Verfahren verläuft also ganz unverändert, und ergibt somit die gleichen Teilungszahlen.

Auch das zugehörige Porisma ergibt sich sofort. Überhaupt ist in der alten Theorie ein Verhältnis stets mit dem größeren Glied als Vorderglied zu schreiben, weil das ja die Anthyphaireisis verlangt. Die fast ausnahmslose griechische Gewohnheit, Verhältnisse mit einem größeren Vorderglied anzusetzen, geht vermutlich auf diesen Umstand zurück.

Satz 11. *Sind zwei Verhältnisse einem dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.*

mit nichtkommutativer Multiplikation“ und „Zur intuitionistischen Begründung der projektiven Geometrie“, Math. Annal., Bd. 98, S. 465 ff., 491 ff. — Die Frage wird in einer zweiten Studie näher erörtert werden.

Sind nämlich die Teilungszahlen der drei Verhältnisse x_i, y_i, z_i , so ist nach Voraussetzung $x_i = z_i$ und $y_i = z_i$ für alle i , also nach I, not. comm. 1 $x_i = y_i$. Woraus sich nach Def. A die Behauptung ergibt.

Satz 13. *Ist ein Verhältnis gleich einem zweiten und das zweite größer als ein drittes, so ist das erste größer als das dritte.*

Hier sind nämlich die Teilungszahlen $x_i = y_i$ für alle i und es gibt eine erste y_j , die an ungerader Stelle j stehend, größer als z_j oder an gerader Stelle j stehend, kleiner als z_j ist. Dann ist aber auch in den entsprechenden Fällen x_j größer bzw. kleiner als z_j . Demnach ist nach Def. B das erste Verhältnis größer als das dritte.

III. Algorithmisch beweisbare Sätze der Gruppe A.

Satz 12. *Wenn $a:a' = b:b' = c:c' = \dots = [x_0 x_1 x_2 \dots]$, so ist auch $(a + b + c + \dots):(a' + b' + c' + \dots) = [x_0 x_1 x_2 \dots] = a:a'$ usw.*

Die Ausführung der Anthyphaireseis ergibt nämlich folgendes (die sich sukzessiv ergebenden Reste sollen mit $r_0 r_1 r_2 \dots, s_0 s_1 s_2 \dots, t_0 t_1 t_2 \dots$ bezeichnet werden):

$$\begin{aligned} a &= x_0 a' + r_0, & r_0 < a' & \quad b = x_0 b' + s_0, & s_0 < b' & \quad c = x_0 c' + t_0, & t_0 < c' \\ a' &= x_1 r_0 + r_1, & r_1 < r_0 & \quad b' = x_1 s_0 + s_1, & s_1 < s_0 & \quad c' = x_1 t_0 + t_1, & t_1 < t_0 \\ r_0 &= x_2 r_1 + r_2, & r_2 < r_1 & \quad s_0 = x_2 s_1 + s_2, & s_2 < s_1 & \quad t_0 = x_2 t_1 + t_2, & t_2 < t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c + \dots &= x_0 (a' + b' + c' + \dots) + (r_0 + s_0 + t_0 + \dots), \\ r_0 + s_0 + t_0 + \dots &< a' + b' + c' + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' + b' + c' + \dots &= x_1 (r_0 + s_0 + t_0 + \dots) + (r_1 + s_1 + t_1 + \dots), \\ r_1 + s_1 + t_1 + \dots &< r_0 + s_0 + t_0 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_0 + s_0 + t_0 + \dots &= x_2 (r_1 + s_1 + t_1 + \dots) + (r_2 + s_2 + t_2 + \dots), \\ r_2 + s_2 + t_2 + \dots &< r_1 + s_1 + t_1 + \dots \end{aligned}$$

Satz 15. $a:a' = ma:ma'$, wo m eine natürliche Zahl.

Das ist Spezialfall von (12) für $a = b = c = \dots; a' = b' = c' = \dots$

Satz 19. *Wenn $a:a' = b:b'$, dann ist $(a - a'):(b - b') = a:a'$.*

Der Beweis ist wie der von (12) für zwei Glieder, nur daß die Addition durch Subtraktion ersetzt ist.

Satz 17. $(a + a'):a' = (b + b'):b'$ hat zur Folge $a:a' = b:b'$.

Sei $(a + a'):a' = [x_0 x_1 x_2 \dots]$, so ist $a:a' = [(x_0 - 1) x_1 x_2 \dots]$; da nun nach Voraussetzung ebenfalls $(b + b'):b' = [x_0 x_1 x_2 \dots]$, ist analog $b:b' = [(x_0 - 1) x_1 x_2 \dots]$. Also ist $a:a' = b:b'$. Falls $x_0 = 1$, wird

$x_0 - 1 = 0$, das bedeutet, daß $a < a'$ und also durch Umkehrung (ἀντιπαλίω) des Verhältnisses $a:a'$ in $a':a$ die Anthyphairesis ermöglicht werden muß, ebenso natürlich bei $b:b'$.

Satz 18. $a:a' = b:b'$ hat zur Folge $(a + a'):a' = (b + b'):b'$.

Beweis analog dem von (17), nur mit Addition statt Subtraktion von 1 bei der ersten Teilungszahl der Anthyphairesis von $a:a'$.

IV. Die Sätze der Gruppe A, die das archimedische Axiom voraussetzen.

Satz 8. Ist a' größer als a , so ist auch $a':b$ größer als $a:b$ und $b:a$ größer als $b:a'$.

Es sei $a' - a = D$. Bei dem ersten Schritt der Anthyphairesis von $a':b$ erscheint dann statt des Restes r_0 der Anthyphairesis von $a:b$ der größere „Rest“ $r_0 + D$. Ist nun schon $r_0 + D > b$, so wird die erste Teilungszahl z_0 des Algorithmus von $a:b$ im geänderten Algorithmus (von $a':b$) bereits überschritten. Es ist alsdann $a':b > a:b$. Im anderen Fall stimmen die beiden Algorithmen zunächst noch überein und an Stelle des zweiten Restes r_1 tritt der neue „Rest“ $r_1' = r_0 - z_1 D \leq r_0 - D$. Man sieht, daß, solange keine neuen Teilungszahlen auftreten, die ungeraden Reste $r_0, r_2, r_4, \dots$ um mindestens D vermehrt, die geraden $r_1, r_3, r_5, \dots$ um mindestens D vermindert werden. Andererseits nehmen die Reste immer mehr ab und jeder Rest ist offenbar sogar kleiner als die Hälfte seines Vorvorgängers $r_{n+2} < \frac{1}{2} r_n$. Nach dem Satz X, 1, der aus dem archimedischen Axiom folgt, unterschreiten die Reste schließlich jede Größe, also auch D . Geschieht dies, so ändert sich aber die Teilungszahl des neuen Algorithmus spätestens beim nächsten Schritt und zwar, wie man sich leicht überlegt, stets in dem Sinne, daß $a':b > a:b$ wird.

Gilt Satz X, 1 nicht, so wird der Beweis hinfällig. Der Satz 8 gilt in der Tat nicht notwendig, wenn die Differenz D gegenüber a, b im „nichtarchimedischen“ Sinn „unendlich klein“ ist. (Man denke, a, b seien geradlinige, D ein „hornförmiger“ [Kontingenz-] Winkel. Dann ist ohne weitere Voraussetzungen gar nicht bestimmt, ob $(a + D):b$ größer oder gleich $a:b$ ist.)

Satz 9 und 10 sind leichte Folgerungen aus 8, die wie bei Euklid bewiesen werden können. Bemerkenswert ist, daß keine „transfiniten“ Schlußweisen verwandt werden, sondern nur aus $a:b$ größer bzw. kleiner als $c:d$ gefolgert wird, daß $a:b$ nicht gleich $c:d$ ist. Dieser Schluß ist aber auch in der intuitionistischen („finiten“) Logik zulässig.

Satz 14 läßt sich ebenfalls wie bei Euklid (aus 8–10, 13) ableiten und mit seiner Hilfe ist weiterhin Satz 25 anthyphairetisch für allgemeine Größen beweisbar, worauf nicht näher eingegangen sei.

V. Sätze der Gruppe B.

Vorbemerkung. Die Sätze der Gruppe B sind im wesentlichen drei: 16, 22, 23. Alle drei hängen eng mit dem Begriff der Multiplikation von Größen mit Größen und von Verhältnissen mit Verhältnissen zusammen. Der tiefere Grund, warum diese Sätze nicht in der anthyphairischen Theorie für allgemeine *μεγέθη* beweisbar sind, liegt darin, daß die beiden genannten Multiplikationsaufgaben in dieser Theorie nicht unmittelbar lösbar sind. In unserer Sprache gesagt: Es gibt keine einfache Formel, die aus den Teilennern zweier Kettenbrüche (den Teilungszahlen der entsprechenden Anthyphaireseis) die Teilnenner desjenigen Kettenbruchs zu berechnen gestattet, dessen Wert gleich dem Produkt der Werte der beiden ersten Kettenbrüche ist. Unsere übliche Multiplikationsformel für Verhältnisse $(a:b) \cdot (c:d) = ac:bd$ setzt voraus, daß die Produkte ac und bd definiert sind, auch wenn a, b, c, d allgemeine Größen sind. Das ist aber nicht der Fall, sondern definiert ist zunächst nur $a + b$ und $a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$ usw., d. h. ma , wo m eine natürliche Zahl ist⁶⁾.

Den Begriff der Multiplikation von Verhältnissen kennt indessen Euklid nicht eigentlich. Dagegen wird von ihm ein spezieller Fall davon, die „Komposition“ der Verhältnisse $a:b$ und $b:c$ zu $a:c$ (d. h. $[a:b] \cdot [b:c] = a:c$), benutzt, wenn auch nicht definiert. Definiert wird nur der besondere Fall der duplicata und triplicata ratio oder proportio (*διπλασίων* und *τριπλασίων λόγος*). In VI, 23 (Beweis) heißt es: „ἀλλ' ὁ τῆς K πρὸς τὴν M λόγος συγκρίνεται ἐκ τε τοῦ τῆς K πρὸς τὴν A λόγου καὶ τοῦ τῆς A πρὸς τὴν M .“ („Aber das Verhältnis von K zu M ist zusammengesetzt aus dem Verhältnis von K zu A und dem von A zu M .“)

Betrachtet man nun die Sätze 16, 22, 23, so sieht man, daß sie abgeleitet werden können aus der Forderung der Eindeutigkeit und Kommutativität der oben genannten „Komposition“.

Satz 22. Wenn $a:b = a':b'$ und $b:c = b':c'$, so ist $a:c = a':c'$.

Das bedeutet einfach die Eindeutigkeit der Komposition.

Satz 23. Wenn $a:b = b':c'$ und $b:c = a':b'$, so ist $a:c = a':c'$.

Ist die Operation $(a:b) \cdot (b:c) = a:c$ und $(b':c') \cdot (a':b') = (a':b') \cdot (b':c') = a':c'$ eindeutig, so gilt der Satz. Zu beachten die Vertauschung bei der zweiten Operation!

⁶⁾ Man vergleiche etwa die Sachlage in der sog. Streckenrechnung (Hilbert, Grundlagen der Geometrie, § 15, O. Hölder, Streckenrechnung und projektive Geometrie, Berichte d. Sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. LXIII, S. 67ff.) und auch schon im gewöhnlichen Vektorkalkül. — Der Vergleich der antiken geometrischen Methoden mit der modernen axiomatischen Untersuchung ist eine zwar sehr interessante, aber auch umfangreiche, hier nicht angreifbare Aufgabe.

Satz 16. Wenn $a:b = c:d$ dann $a:c = b:d$.

Es ist $(a:b) \cdot (b:c) = (b:c) \cdot (c:d)$ infolge der Eindeutigkeit und Kommutativität der Komposition. Also $a:c = b:d$.

Euklid ist nun nicht in der Lage, Eindeutigkeit und Kommutativität der Komposition als bewiesen vorauszusetzen. Immerhin gelingt es ihm im V. Buch, die Sätze 16, 22, 23 zu beweisen und damit die genannten Eigenschaften der Komposition sicher zu stellen. Aber nur durch einen eigentümlichen Schluß, der auf der spezifisch eudoxischen Definition der Verhältnisgleichheit beruht und also sicher selbst von Eudoxos stammt.

Am Beispiel von (16): Der Satz (14): „Wenn $a:b = c:d$, so ist, wenn a größer, kleiner, gleich c , auch entsprechend b größer, kleiner, gleich d “, hat zur Folge $a:c = b:d$. Denn aus $a:b = c:d$ folgt $ma:mb = nc:nd$; also ist, wenn $ma > = < mc$, auch $nb > = < nd$, woraus nach Def. 5 (Eudoxos!) sich ergibt $a:c = b:d$.

Ganz analog sind die Beweise von (22), (23) gebaut.

Das Charakteristische an dieser Argumentation ist, die Einführung der Produkte ma, mb, nc, nd , wo m, n willkürliche natürliche Zahlen bedeuten. Damit ordnet Eudoxos die irrationalen Verhältnisse nach ihrer Größe in die Gesamtheit aller rationalen Verhältnisse $m:n$ ein. (Wir tun heute dasselbe bei allen unseren Theorien der reellen Zahlen.)

Es läßt sich unschwer zeigen, daß ohne die Einführung dieser Vergleichsverhältnisse, rein auf Grund der Sätze 7—11, 13—14, der Satz 16 ebensowenig zu beweisen ist, wie mit Hilfe der „algorithmischen“ Sätze 12, 17—19 allein. Denn es gibt Funktionen zweier Variablen $f(x, y)$, die allen Sätzen 7—11, 13, 14 gehorchen, aber doch nicht der Bedingung 16.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß von der anthyphairetischen Theorie aus keine direkte Beweismöglichkeit von V, 16 für allgemeine Größen besteht. Allerdings — das sei besonders betont — handelt es sich um keinen axiomatischen Sachverhalt. Beweisbar sind die Sätze 16, 22, 23 mittels des archimedischen Axioms und der üblichen anderen Voraussetzungen der Proportionenlehre. Andererseits sind zwar die „algorithmischen“ Proportionsätze ohne archimedisches Axiom beweisbar, aber nicht Satz 8 usw. Was durch Eudoxos hinzukommt, ist also nicht ein neues Axiom (wenn er V, def. 4 und X, 1 vielleicht auch zuerst formuliert hat, dann aber im Zusammenhang anderer Untersuchungen, nämlich der „Exhaustionsbeweise“ des XII. Buchs!), sondern eine neue Beweismethode und von dieser Beweismethode aus eine neue Definition der Verhältnisgleichheit.

Es muß ein Übergangsstadium (zum mindesten im Geiste des Eudoxos) zwischen beiden Theorien bestanden haben, in dem zwar noch die alte anthyphairetische Definition in Geltung war, aber die spätere

eudoxische Definition als beweisbare charakteristische Eigenschaft zweier nach der alten Definition gleicher Verhältnisse fungierte. Es erwies sich dann als ökonomischer und durchsichtiger, die alte Definition ganz fallen zu lassen und die charakteristische Eigenschaft von vornherein als Definition zugrunde zu legen, womit allerdings ein ziemlich weitgehender Umbau der ganzen Theorie verbunden war.

Gewonnen wurde bei alledem schließlich eine ganz für beliebige Verhältnisse allgemeiner Größen gültige Theorie, während die alte in ihrem zweiten Teil auf solche Allgemeinheit zu verzichten gezwungen war.

Wir kehren nunmehr zu dieser alten Theorie und zwar zu eben diesem „zweiten Teil“ von ihr zurück.

Ohne die eudoxische Methode war man nicht im Besitz einer „Multiplikation“ von Verhältnissen allgemeiner Größen oder von diesen selbst. Dagegen war das „Produkt“ zweier Strecken der Sache nach seit alters her bekannt, nämlich das Rechteck aus diesen Strecken. Eine solche „Produktdarstellung“ spielt schon in der sogenannten „geometrischen Algebra“ des II. Buchs der Elemente eine ausschlaggebende Rolle, ferner im X., nach unserer Auffassung in seinen Anfängen „theätetischen“ Buch. (Zu vergleichen sind ferner die „ebenen Zahlen“ [*ἐπίπεδοι ἀριθμοί*] der ebenfalls „theätetischen Bücher“ VII–IX.) Diese Darstellung garantierte von vornherein die Eindeutigkeit und Kommutativität der „Multiplikation“⁷⁾.

Für diese Art der Betrachtung ist Satz 16 der Schlüsselsatz des zweiten Teils der Theorie. Die Beweise gestalten sich wie folgt.

Satz 16. Wenn $a:b = c:d$, dann $a:c = b:d$.

Der Beweis kann entweder geführt werden nach der Methode von Smith und Bryant⁸⁾ (1901) mit Hilfe von VI, 1 allein oder in engerem Anschluß an das historische Material in folgender Weise.

Der Beweis wird natürlich für alle Größenarten, für die er überhaupt möglich ist, gesondert geführt, und zwar zunächst für Strecken. Man muß den 1. und den 16. Satz des VI. Buchs heranziehen. Das letzte Theorem besagt: „Wenn vier Strecken proportioniert sind, ist das Rechteck aus den äußeren Strecken gleich dem Rechteck aus den inneren Strecken und umgekehrt.“ (Wenn $a:b = c:d$ ist $ad = bc$ und umgekehrt.) Er ist ein Spezialfall von VI, 14, der dasselbe mit Bezug auf gleich-

⁷⁾ Vgl. zu der ganzen Frage der Multiplikation H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 389; H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, S. 44f., 145f.

⁸⁾ S. Heath, The thirteen books of Euclid's elements, Cambridge 1908, Vol. II, p. 165f.

winkelige Parallelogramme sagt. Im Beweis von VI, 14 werden nur die Sätze V, 7, 9, 11 und VI, 1 (und zwar für Parallelogramme) benutzt. Die Sätze aus V gehören zu den im ersten Teil der alten Theorie bewiesenen; VI, 1 wird zwar von Euklid mit Hilfe von V, def. 5 bewiesen, ist aber gerade derjenige Satz, an dem Aristoteles in der Topikstelle, von der wir ausgingen, die „antanairetische“ Definition der Verhältnisgleichheit entwickelt. Von ihm wissen wir also dokumentarisch, daß er durch parallele Antanairesis für $\gamma\alpha\mu\mu\alpha\acute{\iota}$ und $\chi\omicron\rho\omicron\acute{\iota}\alpha$ bewiesen wurde. Der alte Beweisweg von V, 16 läßt sich also so rekonstruieren: Beweis von V, 16 über V, 14 oder auch direkt aus VI, 1 und den genannten Proportionsätzen. Mit Hilfe von VI, 16 dann folgender Schluß: $a:b = c:d$, $ad = bc$ (VI, 16) oder $ad = cb$, $a:c = b:d$ (VI, 16). Damit ist man für Strecken am Ziel.

VI, 1 dient dann ebenfalls dazu, den Satz auf Parallelogramme zu übertragen; XI, 25 bewirkt das gleiche für Parallelepiped, XII, 13 für Zylinder. (Die euklidischen Beweise sind sämtlich, wie bei VI, 1, anthyphairatisch durchzuführen.)

Bei allgemeinen krummlinigen Figuren, pyramidal und krummflächig begrenzten Körpern usw. stößt man aber auf Schwierigkeiten, die die Griechen höchstwahrscheinlich durch das Postulat der Existenz der vierten Proportionale in den betreffenden Fällen überwunden haben⁹⁾.

Zu beweisen bleiben noch 22, 23; denn 24 ist aus ihnen eine leichte Folgerung, die wie bei Euklid bewiesen werden konnte. (14, 20, 21 waren, wie schon gesagt, in der alten Theorie nicht enthalten, obwohl sie natürlich sich leicht bzw. aus 16, 22, 23 rückwärts ergeben hätten.)

Satz 22. Wenn $a:b = a':b'$ und $b:c = b':c'$, dann $a:c = a':c'$.

Als Vorbild für den wahrscheinlich alten Beweis dieses Satzes kann der „theätetische“ Beweis des analogen „ex aequali“-Satzes für Zahlen, VII, 14, dienen. Dieser verläuft so: Aus den beiden Voraussetzungen folgt durch $\epsilon\upsilon\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\epsilon\iota\nu$ $a:a' = b:b'$ und $b:b' = c:c'$. Daraus nach V, 11 $a:a' = c:c'$ und daraus ($\epsilon\upsilon\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi$) $a:c = a':c'$.

Heath (Vol. II, 314) erhebt gegen diesen Beweis den Einwand, daß durch ihn der Satz nur für vier Größen gleicher Art bewiesen sei, während er doch auch noch gelte, wenn a, b, c von anderer Art seien als a', b', c' . Indessen innerhalb des Gültigkeitsbereichs der anthyphairatischen Theorie macht das nichts aus. Denn man kann sich mit VI, 1 und den analogen Sätzen helfen¹⁰⁾.

Satz 23. Wenn $a:b = b':c'$ und $b:c = a':b'$, dann $a:c = a':c'$.

Nach VI, 16 besagen die Voraussetzungen, daß $ac' = bb'$ und bb'

⁹⁾ S. die Ausführungen in der zweiten Studie.

¹⁰⁾ Vgl. Heath, l. c. p. 166.

= $a':c$. Also ist $ac' = a'c$ und, wieder nach VI, 16, $a:c = a':c'$. Auch dieser Beweis gilt zunächst nur für Strecken, kann aber leicht auf alle „erlaubten“ Größenarten ausgedehnt werden.

Es fehlt einzig noch Satz 4: Wenn $a:b = c:d$, dann $ma:nb = mc:nd$. Der Beweis liegt auf der Hand: Aus der Voraussetzung ergibt sich durch V, 16 $a:c = b:d$, daraus durch V, 15 $ma:mc = nb:nd$, daraus wieder durch V, 16 die Behauptung. Ob der Satz allerdings in der alten Theorie vorkam, ist sehr zu bezweifeln.

Überhaupt ist bei aller Einfachheit des Aufbaus dieser rekonstruierten „alten Theorie“ natürlich nicht gesagt, daß sie so in allen Stücken existiert hat. Es ist daher vielleicht nicht uninteressant, zu bemerken, daß Aristoteles scheinbar nur folgende Proportionensätze erwähnt: V, 12 (Eth. Nic. V, 7 [1131b 14]) und V, 11, 16, 24 (d. h. implizit 22), endlich den Satz: „ $a:b = c:d$ impliziert, daß aus $a > b$ folgt $c > d$ “, der keineswegs, wie Heath meint, mit V, 14 äquivalent ist und ohne weiteres aus der antanaitischen Definition der Verhältnisgleichheit sich ergibt (diese sämtlich Meteorol. III, 5, 376a 11–26). Dabei ist merkwürdig, daß 23 fehlt und andererseits auch 8–10, 13. Überlegen wir, was in unserer Rekonstruktion sonst gebraucht wurde, so ist davon VI, 1, wie wir wissen, schon aristotelisch, dagegen ist über VI, 16 (bzw. 14) nichts bekannt. Nun brauchen wir VI, 16 nicht unbedingt, wenn wir V, 23 weglassen¹¹⁾, denn wir können ja V, 16 nach Smith' und Bryants Methode mittels VI, 1 allein beweisen und daraus V, 22, 24. Das ist deshalb interessant, weil der Beweis von VI, 16 den Satz V, 9 verwendet, den Aristoteles nicht erwähnt und der auf V, 8 zurückgeht. Das heißt wir können so alle Sätze der Gruppe A, die auf „Konvergenzbetrachtungen“ beruhen, aus der Theorie herauslassen. Nun läßt sich nicht leugnen, daß die Konvergenzbetrachtung im Beweis von V, 8 bedeutend schwieriger ist als alles sonst in der Theorie; es wäre also wohl möglich, daß sie gefehlt hat¹²⁾.

Wie dem auch sein mag, jedenfalls ist jetzt gezeigt worden, daß eine anthyphairetische Proportionentheorie einfach und in sich konsequent aufgebaut werden kann und zwar teilweise für allgemeine Größen, zum Teil aber auch nur für bestimmte einzelne Größenarten.

Die rekonstruierte Proportionenlehre genügt aber vollkommen, um die Theorie des X. Buchs der Elemente darauf zu gründen. Denn die dort verwendeten Größenarten beschränken sich auf Strecken und Rechtecke.

¹¹⁾ Bemerkenswert ist, daß V, 23 in den Elementen nicht wieder benutzt wird, dagegen wohl bei Archimedes.

¹²⁾ V, 22 ist also für Strecken, nicht aber für allgemeine Größen, ohne archimedisches Axiom beweisbar.

4.

Nachdem nunmehr der gegen unsere These von der theätetischen Proportionenlehre als Grundlage von Buch X erhobene Einwand als erledigt gelten kann, können die übrigen Euklid-Bücher auf ihr Verhältnis zum V. Buch hin geprüft werden.

Entscheidend wird dabei sein, wie weit gedankliche Grundlagen und sprachliche Ausdrucksweisen, die aus dem V. Buche stammen, außerhalb seines Bereichs verwendet werden. Es handelt sich dabei einmal um den Begriff und Namen der „allgemeinen Größe“ (*μέγεθος*) und dann um die charakteristisch „eudoxischen“ Definitionen 5 und 7.

Nun liegt die Sache, abgesehen von Buch X, ganz klar. Das Wort „*μέγεθος*“ kommt weder in Buch I—IV noch in VII—IX vor, dagegen vereinzelt in VI, XI, XII. Und zwar geschieht das letztere genau an den Stellen, an denen die 5. Definition des V. Buchs zitiert wird, nämlich in VI, 1, 33; XI, 25; XII, 13. In allen diesen Fällen handelt es sich um dieselbe feste Formel, die mit den Worten beginnt: „*πασάντων δὴ ὄντων μεγεθῶν*“, und dann die Anwendung der eudoxischen Definition der Verhältnisgleichheit ausspricht. Sonst kommt *μέγεθος* nicht in den genannten Büchern vor, mit einer Ausnahme, die aber die Regel durchaus bestätigt. Es ist dies das ausdrückliche wörtliche Zitat von X, 1 im Beweis von XII, 2¹²⁾. In genauer Übereinstimmung damit wird V, def. 5 sonst nirgends verwendet und def. 7 erscheint überhaupt niemals außerhalb des V. Buchs.

Die genannten Fälle der Anwendung der eudoxischen Definition sind sämtlich genaue Analoga von VI, 1 und können ebenso wie dieser durch die aristotelische Topik belegte Fall ohne weiteres auch „*antanairatisch*“ behandelt werden. Mit anderen Worten: Es handelt sich bei diesem Vorkommen des allgemeinen Größenbegriffs und der eudoxischen Definition um eine äußerliche Retusche eines späteren Überarbeiters des theätetisch-eudoxischen Materials; es steht nichts im Wege, sie wieder rückgängig zu machen. Denn irgendwelche weiteren Eingriffe in die Beweise sind nicht vonnöten und zugleich verschwindet der den betreffenden Büchern sonst ganz fremde *μέγεθος*-Begriff.

Es ist wahrscheinlich, daß diese Überarbeitung erst von Euklid selbst herrührt. Die bekannten Worte des Proklos über ihn (in Eucl., p. 68, 7—9 Friedl.) gewinnen so eine ganz präzise Bedeutung:

„... *Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν* „... Euklid, der die Elemente zusammenbrachte und Vieles von Eudo-

¹²⁾ Das Zitat ist an sich seiner Form nach ganz ungewöhnlich und vielleicht eine spätere Hinzufügung, aber für unser Argument ist es ohnehin gleichgültig.

Εὐδόξου ἀντάξας, πολλὰ δὲ τῶν *xos* (Herrührende) zusammenordnete,
 Θεαίτητον τελεωσάμενος . . .“ Vieles aber von Theätet (Stammende)
 vollendete.“

Das *αντάττειν* der eudoxischen Forschungen besteht in der Voranstellung des V. Buchs vor allem vor das XII. (das, wie wir später genauer zeigen werden, chronologisch der „allgemeinen Proportionenlehre“ eudoxischer Neuprägung vorzuordnen ist). Die Bücher VI, XI dienen als Vorbereitung von XII und schließlich werden noch VII–X dazwischen geschoben, vermutlich wegen X, 1. Das X. Buch (und vielleicht auch einiges in VII–IX) stellt dagegen die „Vollendung“ der theätetischen Untersuchungen dar (*πολλὰ τῶν Θεαίτητον τελεωσάμενος*). Es ist daher auch verständlich, daß dort, wo die Mitarbeit Euklids intensiver war, der *μέγθος*-Begriff eine größere Rolle spielt; er kommt dort in der Tat in Def. 1 und 2 und den Sätzen 1–8, 11–13, 15–16 vor.

Es bleibt jetzt allerdings noch eine sehr wichtige Frage zur Beantwortung übrig: Die Tragweite der anthyphairetischen Proportionenlehre erwies sich in ihrem zweiten Teil (Sätze der Gruppe B) als beschränkt auf Strecken und ihnen „verwandte“ Gebilde, auf die sich die für Strecken gefundene Sätze übertragen ließen, d. h. geradlinig begrenzte Figuren, Parallelepipede, Prismen, u. U. Zylinder. Reicht sie sachlich für die Beweise der Bücher VI, X–XII hin? Das ist zu bejahen für alle diese Bücher außer dem XII.

Im XII. Buch allerdings kommen Proportionen zwischen krummlinigen Gebilden vor, die streng genommen nicht mehr mit der voreudoxischen Lehre begründet werden können. Aber Euklid, wie überhaupt alle antiken Autoren, helfen sich mit dem Postulat der Existenz der vierten Proportionalen, das — stillschweigend — auch in den Fällen angewandt wird, in denen es nicht, wie für Strecken (vgl. VI, 12) konstruktiv bewiesen werden kann. Das Merkwürdige an der Sachlage ist nun, daß es tatsächlich möglich ist, das genannte Postulat im XII. Buch zu vermeiden und zwar auf Grund der neuen eudoxischen Verhältnisdefinition. Die Frage ist allerdings verwickelter als es zunächst aussieht und wird erst an späterer Stelle behandelt werden. Die bisher vorliegende Lösung von Hasse und Scholz¹³⁾ genügt nämlich noch nicht allen an sie zu stellenden Anforderungen; denn sie verwendet eine „transfinite“ Schlußweise (vollständige Disjunktion zwischen dem Gleich-, Größer- und Kleiner-Sein von Verhältnissen), die sonst nicht in der antiken Mathematik vorkommt. Aber wir werden zeigen, daß sich eine einwandfreie Lösung geben läßt. Nichtsdestoweniger macht aber, wie schon

¹³⁾ H. Hasse und H. Scholz, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik, Kantstudien, Bd. XXXIII, S. 4ff., insb. S. 26f.

gesagt, weder Euklid noch sonst ein griechischer Mathematiker von dieser Möglichkeit Gebrauch.

Es besteht also der eigentümliche Tatbestand, daß die neue Proportionenlehre des Eudoxos in dem einzigen Punkte, in dem sie der alten anthyphairetischen in rein mathematischer Hinsicht überlegen war, nicht ausgenutzt wurde. Es gibt keinen einzigen Satz der griechischen Mathematik, der mit ihrer Hilfe zum erstenmal oder wenigstens strenger als früher bewiesen worden ist. Ihr Vorzug bleibt also auf rein „logischem“, gewissermaßen akademisch-philosophischem Gebiet. Im formalen *μέγεθος*-Begriff werden alle die einzelnen anschaulichen Fälle von Größe „in eine Idee zusammengeschaut“ (*εἰς μίαν ἰδίαν ἀννοήοντα* Phaedr. 273e). Das ist ganz offenbar platonische Denkweise und in ihrer Betätigung wird man den Einfluß Platons selbst auf Eudoxos und seine unmittelbaren Nachfolger sehen müssen. Dabei sei hier dahingestellt, ob schon Eudoxos oder erst die Späteren (vielleicht Theudios¹⁴), Hermotimos oder gar erst Euklid selbst) den Terminus *μέγεθος* in die Aussagen der neuen Theorie einführten oder ob er selbst sich noch mit der unbestimmteren Ausdrucksweise des „absoluten“ Artikels „*τό . . . , τὰ . . .*“, wie sie Euklid noch in den *Notiones Communes* des I. und selbst manchen Theoremen des V. Buchs (wie z. B. 2—4) erhalten hat, begnügte.

Es spricht also nichts dafür, daß das XII. Buch dem V. nachfolgt.

Es fragt sich nun aber, ob den vorgebrachten negativen Gründen, nach denen für die Abhängigkeit der übrigen Euklid-Bücher von V. nichts angeführt werden kann, sich nicht positive Gründe für eine solche Unabhängigkeit zur Seite stellen lassen.

Eine Reihe solcher Gründe ist lange bekannt. In erster Linie die völlige Unabhängigkeit in der Beweisführung und zum größten Teil auch in den Definitionen der arithmetischen Bücher VII—IX. Hervorzuheben ist insbesondere die Definition der Verhältnisgleichheit selbst im kommensurablen Fall, VII, def. 20 (Heiberg), die sich durchaus nicht als Spezialfall von V, def. 5 darstellt. In zweiter Linie kommt die Verwendung eben dieser Definition VII, def. 20 innerhalb des X. Buchs in Frage. In den Beweisen von X, 5, 6 Euklid folgert das Bestehen einer Proportion $\Gamma:A = 1:\Delta$ daraus, daß die Einheit die Zahl Δ ebenso oft mißt wie die Größe Γ die Größe A (*ἰσάκις ἅρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἅρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς*

¹⁴) Vgl. Proclus in Eucl., p. 67, 14—16 (Friedl.): *Θεόδιος . . . καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συντάξεν καὶ πολλὰ τῶν ὀριζῶν* (dies die überlieferte Lesart, die der von Solmsen empfohlenen *μερικῶν* m. E. vorzuziehen ist) *καθολικώτερα ἐποίησεν*. Theudios soll also viele Definitionen (*ὁρίου*) allgemeiner gestaltet haben.

tör 4). Ähnlich in X, 6. Das Kriterium der Proportioniertheit wird also (bei einer aus Zahlen und Größen gemischten Proportion!) nicht in der „allgemeinen“ Definition V, 5, sondern in der speziell für Zahlen gültigen VII, 20 gesucht. Das ist schon von Robert Simson bemerkt worden¹⁵⁾. Ähnliche, wenn auch nicht so scharfe Einwände können gegen X, 9 erhoben werden, welcher Satz ja auch dem Theätet ausdrücklich vom Scholion zugeschrieben wird. Trotz der Verwendung des aus V stammenden *μήτρος*-Begriffs wird also die tiefere und allgemeinere Betrachtungsart aus V nicht mitübernommen — ein Beleg für Euklids mitunter bis zur Inkonsequenz getriebene Ehrfurcht vor der Überlieferung.

Ein merkwürdigerweise wohl noch nicht in diesen Zusammenhang gebrachter weiterer Fall¹⁶⁾ aus dem VI. Buch verdient Erwähnung: Im Beweis von Satz 9 wird aus der Proportioniertheit von vier Strecken geschlossen, daß, wenn die erste das Doppelte der zweiten ist, auch die dritte Strecke das Doppelte der vierten ist¹⁷⁾. Das ist wiederum eine Anwendung nicht etwa der 5. Definition des V., sondern der 20. Definition des VII. Buches¹⁸⁾, das bei Euklid doch erst auf das VI. Buch folgt! Also auch hier dieselbe Abhängigkeit von der alten „theätetischen“ Begriffsbildung.

5.

Das geschichtliche und textliche Material, das außer den „Elementen“ über die Frage der anthyphairetischen Proportionenlehre zur Verfügung steht, ist gering. Es muß daher jede Andeutung ausgenutzt werden. Da ist nun zu nennen eine schon oft behandelte Stelle in der aristotelischen Zweiten Analytik, I. Buch, Kapitel 5 (p. 74a, 17–25).

καὶ τὸ ἀνάλογον ὅτι ἐναλλάξ, ἢ ἀριθμοὶ καὶ ἢ γραμμαὶ καὶ ἢ στερεὰ καὶ ἢ χρόνοι, ὥσπερ ἐδείκνυτο ποτε χωρὶς, ἐνδεχόμενον γε κατὰ πάντων μὴ ἀποδείξει δειχθῆναι· ἀλλὰ διὰ τὸ

Und daß die Innenglieder einer Proportion vertauschbar sind, — wie das früher gesondert bewiesen wurde für Zahlen, Strecken, Körper und Zeiten; während es doch gezeigt werden konnte bezüglich aller durch einen Beweis

¹⁵⁾ Euclidis Elementorum libri priores sex etc., Glaguae 1756, Liber quintus prop. C (p. 144), nota ad prop. C Lib. V (p. 360).

¹⁶⁾ Doch erwähnt auch R. Simson (l. c. Lib. V. Prop. D et Nota, pp. 145, 361) den Satz VI, 9 als ungenügend bewiesen.

¹⁷⁾ ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλὴ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ. (Aus dem Beweis von VI, 9.)

¹⁸⁾ Ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰναι, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκως ἢ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. (VII, def. 20.) Nach diesem Vorbild muß die in VI, 9 zugrunde gelegte Definition gestaltet gewesen sein.

μὴ εἶναι ὀνομασμένον τι πάντα ταῦτα ἓν, ἀριθμοὶ μήκη χρόνος στερεά, καὶ εἶδει διαφέρειν ἀλλήλων, χωρὶς ἐλαμβάνετο. νῦν δὲ καθόλου δείκνυνται· οὐ γὰρ ἡ γραμμαὶ ἢ ἡ ἀριθμοὶ ἐπῆρχεν, ἀλλ' ἡ τοδί, ὃ καθόλου ἐποτίθενται ἐπάρχειν.

⟨gang⟩. Aber, weil Alles dieses ⟨als⟩ Eines ⟨genommen⟩ nicht irgend etwas genannt war (irgendwie hieß), Zahlen, Längen, Zeit, Körper und dem Aussehen (der anschaulichen Gestalt) nach sich voneinander unterschied, wurde es gesondert erfaßt.

Jetzt aber wird die Eigenschaft im Ganzen bewiesen, denn sie bestand nicht, soweit es sich um Strecken oder Zahlen ⟨handelte⟩, sondern um das, was als „allgemein“ bestehend (subsistierend) vorausgesetzt wird.

An dieser Stelle ist in erster Linie höchst bemerkenswert die Erwähnung des *ἐναλλάξ*-Satzes V, 16. An und für sich könnte das ein beliebiges Beispiel sein. Bedenkt man aber, daß dieser Satz geradezu der Schlüsselsatz für die Proportionentheorie der Gruppe B ist, so wird die Annahme seiner bloß zufälligen Erwähnung sehr unwahrscheinlich. Ebenso wie Aristoteles in der Topikstelle VI, 1 einen fundamentalen Satz der anthyphairetischen Theorie nicht zufällig herangezogen haben kann. In beiden Fällen wurden vielmehr den Hörern seiner Pragmatie bekannte und wichtige Beispiele in Erinnerung gebracht, diese Ausführungen sind zugleich Anspielungen auf berühmte wissenschaftliche Fragen der Zeit.

In der Tat war ja die Theoremgruppe B „einstmals“ (ποτέ) nicht „allgemein“ (καθόλου) beweisbar, sondern nur „gesondert“ (χωρὶς). „Jetzt“ (νῦν) aber wird sie allgemein bewiesen, nämlich durch die neue eudoxische Theorie.

Indessen muß ein Zweites die Aufmerksamkeit erregen. Als Grund für die früher bestehende Unmöglichkeit, das *ἐναλλάξ* allgemein zu beweisen, wird nicht eine mathematische Schwierigkeit genannt, sondern eine rein „logische“, geradezu in dem wörtlichen Sinn von λόγος, nämlich Rede. Weil der Name fehlte für „dies Alles als Eines“, konnte der allgemeine Beweis nicht gegeben werden. Ist das nicht ein ganz anderer Gesichtspunkt als der, von dem aus wir die Sache ansehen? Man darf das Namengeben nicht in allzu engem, rein sprachlichem Sinn fassen: Aristoteles selbst gibt weder hier noch an der in vielem verwandten Stelle der Metaphysik (Buch *M* 2, p. 1077 a, 9–12)¹⁹⁾ den Namen an,

¹⁹⁾ ἔτι γράφεται ἓνα καθόλου ὑπὸ τῶν μαθηματικῶν παρὰ ταύτας τὰς οὐσίας. ἔσται οὖν καὶ αὕτη τις ἄλλη οὐσία μεταξὺ χωρισμένη τῶν τ' ἰδεῶν καὶ τῶν μεταξὺ, ἢ οὔτε ἀριθμός ἐστιν οὔτε σιγμαὶ οὔτε μέγεθος οὔτε χρόνος. Vgl. auch Alexander Aphrod.,

sondern gebraucht Umschreibungen. Euklid sagt im V. Buch *μεγέθη*, aber gerade dieses Wort *μέγεθος* verwendet Aristoteles an der zweitgenannten Stelle zur Bezeichnung einer besonderen Größenart oder wenigstens mathematischen Gegenstandsart neben *ἀριθμός*, *στιγμή* und *χρόνος*, während ja die erste Stelle *ἀριθμοί*, *γραμμαί*, *στερεά*, *χρόνοι* bzw. *ἀριθμοί*, *μήκη*, *χρόνος*, *στερεά* hat. Gemeint ist also entweder *μήκος* oder vielleicht auch, wie nach sonstigem aristotelischen Sprachgebrauch nicht unwahrscheinlich²⁰), die entweder ein- oder zwei- oder dreidimensionale Raumgröße²¹). Aristoteles erreicht also den reinen „formalen“ *μέγεθος*-Begriff, den wir Euklid zuzuschreiben pflegen, sprachlich noch nicht. Er meint aber den Begriff desjenigen Allgemeinen, das in irgendeiner Weise über den anschaulich erfaßbaren Gestaltarten (*εἶδη*) als mathematischer Gegenstand anzusetzen ist. (Den Charakter dieser *οὐσα* empfindet er freilich als sehr problematisch.²²)

Und gerade die erste Erfassung dieses allgemeinen Begriffs, dieses „höheren Eidos“ über die anschaulichen Arten der bekannten mathe-

in Metaph. ad loc. (p. 705, 32–706, 25 Bonitz). — Dort wird übrigens p. 706, 1–2 auffallender- und nicht recht verständlicher Weise VI, 16 neben I, not. comm. 3 als *καθόλου γραμμῶν* zitiert.

²⁰) Vgl. vorläufig den Bonitzschen Index Aristotelicus sub verbo *μέγεθος*, insbes. p. 449a, 28–47.

²¹) Vgl. z. B. folgende Stellen: de coelo I, 1 (p. 268a 7): *μεγέθους τὸ μὲν ἐφ' ἐν γραμμῇ, τὸ δ' ἐπὶ δύο ἐπίπεδον, τὸ δ' ἐπὶ τρία σώμα*; Met. A 13 (p. 1020a 11): *μεγέθους τὸ μὲν ἐφ' ἐν συνεχὲς μήκος, τὸ δ' ἐπὶ δύο πλάτος, τὸ δ' ἐπὶ τρία βάθος*; vgl. auch de anim. II, 11 (p. 423a 22) u. a.

²²) Vgl. die Fortsetzung der zitierten Metaphysikstelle p. 1077a 13–14: *εἰ δὲ τοῦτο ἀδύνατον, δῆλον ὅτι κακείνα ἀδύνατον εἶναι πεχωρισμένα τῶν αἰσθητῶν* (cf. Alexander I. c.). — Weiterhin ist heranzuziehen Anal. Post. I, cap. 24 (p. 85a 13 bis 86a 30). Die Erörterung behandelt das Problem, ob der Beweis *καθόλου* oder *κατὰ μέρος* (= *χωρίς* an der Stelle p. 74a 17–25) „besser“ (*βελτίον*) sei. Gegen den „allgemeinen“ Beweis wird geltend gemacht, daß er den Glauben erwecke, es gäbe etwas neben den einzelnen Dingen (*τι παρὰ τὰ καθ' ἕκαστα*). So: ein allgemeines Dreieck, eine allgemeine Figur oder Zahl neben den einzelnen. Zur Erläuterung wird in Parenthese die Proportionenlehre angeführt, p. 85a 37–b 1: *προϋόντες γὰρ δεικνύουσιν, ὥστε περὶ τοῦ ἀνὰ λόγον, οἷον ὅτι δ' (fort. omittendum) ἂν ἦ τι τοιοῦτον, ἔσται ἀνὰ λόγον, ὃ οὔτε γραμμῇ οὔτ' ἀριθμῷ οὔτε στερεὸν οὔτ' ἐπίπεδον, ἀλλὰ παρὰ ταῦτα τι*. („In der Argumentation vorwärtsgehend zeigen sie [die Existenz der „allgemeinen Gegenstände“], wie bei den Proportionen, so z. B.: Wenn etwa etwas Derartiges [nämlich „Allgemeines“] sein sollte, wird es in Proportion stehen, [etwas] was weder Strecke noch Zahl noch Körper, noch Ebenen-[stück], sondern etwas ‚neben‘ diesen.“) — Später (p. 85b 18–21) wird das ganze Argument zurückgewiesen: es sei nicht notwendig *τι παρὰ ταῦτα* anzunehmen, was ein Eines offenbar mache, *ὅτι ἐν ὁμοίῳ*, ebenso wenig wie bei anderem, was kein „etwas“ (*τι*) bedeute, sondern eine Beschaffenheit (*ποιόν*) oder eine Beziehung (*πρός τι*) oder ein Tun (*ποιεῖν*). — Die Proportionen und Verhältnisse werden also als Beziehungen (*πρός τι* = *σχέσις* bei Euklid) aufgefaßt, die allgemein gelten können, ohne daß sie zwischen allgemeinen Gegenständen als Terminus stattfänden.

matischen Gegenstände hinaus ist es, was Eudoxos, dem Freunde Platons, zugeschrieben werden muß²³⁾. Gerade diese Erfassung und Durchsetzung des allgemeinen Logosbegriffs, des Logos zwischen beliebigen Größen, ist seine große Leistung als Platoniker!

Über die Art seines sprachlichen Ausdrucks dieses neuen Gedankens soll damit noch nichts gesagt sein. Auch das werde nicht entschieden, ob er als erster die Theoreme der Gruppe A, die sachlich allgemein gültig bereits in der anthyphairetischen Theorie beweisbar waren, zuerst allgemein formulierte oder ob das schon vor ihm geschah²⁴⁾. Auffallend ist jedenfalls, daß noch Archimedes das sog. „archimedische Axiom“ getrennt für die einzelnen anschaulichen Größenarten anführt²⁵⁾ und als *τάδε τὰ λήμματα* bezeichnet²⁶⁾. Da er für die mit dem Lemma beweisbaren Theoreme ausdrücklich Eudoxos zitiert, niemals aber Euklid, so kann in diesem gesonderten Anführen der Lemmata, wie O. Toeplitz bemerkt hat, sehr wohl ein Rückgang auf die Originalschriften des Eudoxos liegen²⁷⁾.

Endlich sei noch ein letzter Punkt, nicht ohne Zögern, erwähnt. Zeuthen²⁸⁾ hat die These vertreten, die aus Platons „Theätet“ so be-

²³⁾ Vgl. Plato, Philebus 15A, Parmenides 128E—130A.

²⁴⁾ Proclus, in Euclid, p. 67, 3—5, sagt: *Ἐξδοξος . . . πρώτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ηἰξήσεν*. Doch ist dies natürlich sehr vieldeutig. Zwar ist es richtig, daß die neuplatonischen Schriftsteller bei den *καθόλου θεωρήματα* vor allem an die Proportionenlehre denken, so Jamblichus, de *communi mathematica scientia*, cap. V, p. 18, 24 ss., 19, 2 ss. (ed. N. Festa) und Proclus selbst, in Eucl., p. 7, 11—8, 4; 9, 4 ss.; 60, 24 ss.; 391, 22 ss. Aber es werden auch andere Theoreme, z. B. der Satz von der Winkelsumme im allgemeinen Dreieck als *καθόλου* bezeichnet, so gerade Aristoteles, in unmittelbarer Fortsetzung der Bemerkung über das *ἐναλλάξ*, Anal. Post. I, 5, p. 74a 25—b 4.

²⁵⁾ Die Stellen sind: de sphaera et cylindro, postulatium 5 (Opp. ed. Heiberg, Vol. I, p. 8, 23—27), de lineis spiralibus, praefat. (Vol. II, p. 12, 6—11), quadratura parabolae, praefatio (Vol. II, p. 264, 8—22).

²⁶⁾ Die Wendung *τάδε τὰ λήμματα* steht l. c. Vol. II, p. 12, 7 allerdings — u. E. unbegründeterweise — nicht im Heibergschen Text (der *τόδε τὸ λήμμα* liest), wohl aber durchweg in der Überlieferung, wie der Apparat ausweist.

²⁷⁾ Auch die Stelle aus *quadrat. parab.* (Vol. II, p. 264, 6—22) ist im Heibergschen Text entstellt. Zunächst ist, wie Toeplitz und Solmsen bemerkt haben, p. 264, 19 das Kolon nach dem Worte *ἴσον* in ein Komma zu verwandeln und wohl zweckmäßigerweise entsprechend in l. 16 das Komma nach *χρωμένοι* in ein Kolon. Dann ist m. E. l. 15 *αὐτῷ τῷ λήμματι* („von dem Lemma selbst“) nach der Überlieferung (Cod. A) gegen Heibergs Lesung *αὐτῷ <τούτῳ> τῷ λήμματι* wiederherzustellen, ebenso l. 22 *λήμματι* (oder vielleicht *λήμμα [τι]*) gegen H.s Lesart *λήμμα τι*. Die Beziehung auf Eucl. El. X, 1 ist irrig, mit *αὐτὸ τὸ λήμμα* ist der Hilfssatz für Flächen (*χωρία*) gemeint, der diesem „ähnliche“ ist die entsprechende Fassung für Körper.

²⁸⁾ H. G. Zeuthen, Notes sur l'histoire des Mathématiques VIII (Sur la constitution des livres arithmétiques des *Éléments* d'Euclide et leur rapport à la question

rühmten Irrationalitätsbeweise für $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$, die Theodoros von Kyrene gegeben hat, seien auf Grund der Kettenbruchentwicklung (d. i. eben der Anthyphairesis) dieser irrationalen Verhältnisse $\sqrt{3}:1$ usw. geführt worden, durch den Nachweis ihrer Periodizität, also ihres Nicht-abbrechens. Toeplitz²⁹⁾ hat dazu bemerkt, daß sich das Aufhören der Reihe dieser einzeln geführten Beweise bei $\sqrt{17}$ dadurch bedingt sein könne, daß die Periode der nächsten relevanten Wurzel, $\sqrt{19}$, wesentlich länger und der Beweis also wesentlich schwieriger sei, als bei den vorhergehenden.

Trifft diese Hypothese zu, so bedeutet das, daß bestimmte irrationale Verhältnisse vom Lehrer Theätets (!) durch ihre anthyphairetische Entwicklung als eindeutig gekennzeichnet angesehen worden wären. Und das ist, prinzipiell gesehen³⁰⁾, nichts anderes als die „antanairetische“ Definition der Verhältnisleichheit.

Indessen handelt es sich bei alledem nur um eine Hypothese, die keineswegs die einzig mögliche ist³¹⁾.

* * *

Damit sei diese erste Studie abgeschlossen. Die Aufgaben, mit denen sich die zweite beschäftigen soll, sind die bisher zurückgestellten drei Probleme (1) der logisch-sprachlichen Entwicklung des μέγεθος-Begriffs bei den Mathematikern und Philosophen, (2) der scheinbar grundlosen Annahme der Existenz der vierten Proportionalen auch ohne konstruktiven Beweis und endlich (3) der Vermeidung der Anwendung sogenannter „transfiniten“ Schlußweisen in der griechischen Mathematik nebst Untersuchung der Stellung der aristotelischen Philosophie (Logik und Physik bzw. Metaphysik) hierzu.

de l'irrationalité), Bulletin de l'Académie R. de Danemark, 1910, Nr. 5 (bes. S. 423ff.). — Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles, ib. 1915, Nr. 3—4 (bes. S. 346ff.).

Vgl. Heath, l. c. Vol. III, p. 18—19, Vol. I, p. 398—401 („side“ and „diagonal“ numbers). — A. E. Taylor, Forms and Numbers: a study in Platonic metaphysics I. (Mind. N. S., Vol. XXXV, Nr. 140), insbes. p. 428ff.

²⁹⁾ Als Ergebnis aus einer gemeinsamen Kieler Seminarübung veröffentlicht bei Hasse-Scholz, a. a. O., S. 28—29.

³⁰⁾ Proclus sagt p. 66, 17—18: Leodamas, Archytas, Theätet, „παρ' ὧν ἐπηνέθη τὰ θεωρήματα καὶ προήλθεν εἰς ἐπιστημονικότεραν σύνταξιν“.

³¹⁾ Vgl. die Aufsätze von C. H. Müller und O. Toeplitz in diesem Heft, in denen gewisse mit der Anthyphairesis möglicherweise konkurrierende (übrigens viel raschere) Näherungsverfahren aus platonischer Zeit belegt werden.