

ILLiad TN: 3847206



Scan&Deliver

Call #: WID GEN Math 174.2

Borrower: HLS
Lending String: HLS

Location: HLS

2/3/2012 06:09:34 PM

Patron: Faculty: Mark Schiefsky

Shipping Address:

Harvard University - Widener Library
Interlibrary Loan
Harvard University
Cambridge, MA 02138

Journal Title: Quellen und Studien zur Geschichte
der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung
B, Studien.

Volume: 2 **Issue:**
Month/Year: 1933 **Pages:** 369-87

Fax:
Ariel:
Odyssey: 206.107.43.109
Email:

Article Author:

MaxCost:

Article Title: Eudoxos-Studien II

Special Instructions:

ILL Number: 3847068



THIS IS NOT AN INVOICE!

NON-IFM LIBRARIES WILL RECEIVE AN
INVOICE UNDER SEPARATE COVER FOR THIS
TRANSACTION FROM HARVARD UNIVERSITY
ACCOUNTS RECEIVABLE IN 4-6 WEEKS

**PLEASE DO NOT SEND PAYMENT UNTIL YOU
RECEIVE AN INVOICE!**

Widener Library Interlibrary Loan

Eudoxos-Studien II.

Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen?

Von Oskar Becker in Bonn.

(Eingegangen 22. 5. 1933.)

1.

Die auf Eudoxos zurückgehenden sog. „Exhaustionsbeweise“ im XII. Buch der „Elemente“ Euklids benutzen bekanntlich stillschweigend die Voraussetzung, daß zu drei Größen stets die vierte Proportionale existiert. Oder, genauer und etwas enger gesagt, setzt z. B. der erste „Exhaustionsbeweis“ in XII, 2 folgendes voraus: Sind P_1 und P_2 die Flächeninhalte zweier Polygone, ist K_1 der dem P_1 umschriebene Kreis, so gibt es eine Fläche F , die die Proportion erfüllt:

$$P_1 : P_2 = K_1 : F.$$

Nun haben schon H. Hasse und H. Scholz¹⁾ bemerkt, daß diese Voraussetzung aus dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom für geometrische Größen gefolgert werden kann, nach dem „jeder (Dedekindsche) Schnitt in einem vollständigen System homogener geometrischer Größen . . . durch eine Größe dieses Systems erzeugt wird“. Hasse und Scholz fahren fort: „Es ist im höchsten Grade wahrscheinlich, daß die Alten unter dem Eindruck der anschaulichen Evidenz dieses Stetigkeitsaxioms das nicht formulierte Existenzpostulat adoptiert haben, ähnlich wie sie wohl auch das . . . Axiom . . . „Aus $A < B$, $B < C$ folgt $A < C$ “ als unmittelbar evident unausgesprochen ließen²⁾.“

Dazu ist zunächst zu sagen, daß das zuletzt genannte Postulat in der Fassung: τὰ τοῦ ἐλάττωτος ἐλάττω καὶ αὐτὸ ἐλάττω bei Aristoteles

¹⁾ Kantstudien Bd. XXXIII, S. 25/26.

²⁾ In der unterdrückten Stelle des Zitates wird auch noch das a. a. O. S. 19 zitierte Größenaxiom „Zwischen irgend zwei Größen G, H besteht stets eine und nur eine der Beziehungen $G > H$ “ genannt. Aber dieses Axiom wird u. E. gar nicht allgemein in der griechischen Mathematik angenommen, so nicht, wenn G, H selbst Verhältnisse (λόγοι) sind.

(Physik Z 2, p. 232b, 13) steht, also keineswegs unausgesprochen blieb. Und hieran knüpft sich die Frage, ob sich denn wirklich nichts über das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom und seinen Zusammenhang mit dem Problem der Kreisquadratur im griechischen mathematischen und philosophischen Schrifttum finden läßt. Die Frage ist um so spannender, als kürzlich briefliche Äußerungen von Dedekind selbst gegenüber R. Lipschitz bekannt geworden sind, wo Dedekind durchaus bestreitet, daß Euklid oder irgendein griechischer Mathematiker den entscheidenden Punkt seines Stetigkeitsaxioms, nämlich die Existenz des trennenden Elements bei jedem Schnitt jemals ausgesprochen habe³⁾.

Im folgenden soll versucht werden, zu zeigen, daß das Dedekindsche Axiom im Zusammenhang mit der Kreisquadratur in der antiken Mathematik tatsächlich formuliert worden ist. Zwar stammen die direkten Quellen, auf die wir uns stützen können, aus der Spätzeit; sie sind nicht früher als Proklos (5. Jahrh. n. Chr.). Diese spätantiken Erörterungen knüpfen aber an den alten Quadraturversuch des Bryson (5. Jahrh. v. Chr.) an und es muß als wahrscheinlich bezeichnet werden, daß ähnliche Gedanken auch schon vor Eudoxos gedacht worden sind.

Die Quellen finden sich im Euklidkommentar des Proklos und in verschiedenen Kommentaren zu Aristoteles: Themistius in *Analyt. post.*, Johannes Philoponus in *Anal. post.*, Simplicius in *Physic.* (wozu noch zu vergleichen ist: Pseudo-Alexander = Michael Ephesius (?) in *Soph. Elench.*) und werden im folgenden ausführlich zur Sprache kommen.

2.

Es erscheint zweckmäßig, an die Spitze der weiteren Darlegungen die Kernstücke zweier Berichte über die „Kreisquadratur“ des Bryson nebeneinander zu stellen, die von Themistios (A) und Alexander von Aphrodisias (B), zitiert von Philoponos, herrühren. Später wird dann ein dritter Bericht (C) von Proklos (ebenfalls bei Joh. Philoponos überliefert) zur Sprache kommen, der entscheidend Neues bringt.

A.

Themistius in *Anal. post.*
p. 19, 13 (Wallies)

ὁ κύκλος τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων πάντων μείζων ἐστὶ, τῶν περιγραφομένων δ' ἐλάττω.

B.

Alexander nach Joh. Philoponus in
Analyt. post. p. 111, 21 ss (Wallies).

παιτὸς ἐγγραφομένου ἐν τῷ κύκλῳ εὐθυγράμμου σχήματος μείζων ἐστὶ ὁ κύκλος, τοῦ δὲ περιγραφομένου ἐλάττω . . . ἀλλὰ

³⁾ Vgl. Dedekinds *Gesammelte Werke*, Bd. III (Braunschweig 1932), S. 469 bis 479. Ich komme weiter unten darauf noch zurück. Den Hinweis auf die Stelle verdanke ich Herrn Prof. Bessel-Hagen.

ὁμοίως καὶ τὸ πολύγωνον τὸ μεταξὺ γραφόμενον τῶν τε ἐγγραφομένων καὶ τῶν περιγραφόμενων τῷ κύκλῳ· τῶν αὐτῶν ἄρα μείζων τε καὶ ἐλάττω ἐστὶν ὁ τε κύκλος καὶ τουτὶ τὸ πολύγωνον, ὥστε καὶ ἀλλήλοις ἴσα διὰ τὸ ἀξίωμα τὸ εἰρημένον.
cf. p. 19, 7–11: χρῆται (sc. Bryso) γὰρ ἀξιόματι ἀληθεῖ μὲν κοινῷ δέ· τοιοῦτον γὰρ <τὸ> ὧν τὰ αὐτὰ μείζω καὶ ἐλάττω, ἐκεῖνα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

καὶ τὸ μεταξὺ τοῦ τε ἐγγραφομένου καὶ περιγραφόμενου εὐθυγράμμου γραφόμενον εὐθύγραμμον σχῆμα τοῦ μὲν περιγραφόμενου ἐστὶ ἐλάττω τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζον· τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ ἐλάττωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁ κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ μεταξὺ γραφόμενῳ εὐθυγράμμῳ τοῦ τε ἐγγραφομένου καὶ περιγραφόμενου. ἔχομεν δὲ παντὶ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι· τῷ κύκλῳ ἄρα ἴσον τετράγωνον ἔστι ποιῆσαι.

Die Texte A und B unterscheiden sich eigentlich nur im Gebrauch des Numerus; A hat den Plural (τῶν ἐγγραφομένων usw.), wo B den entsprechenden Singular gibt (τοῦ ἐγγραφομένου usw.). Der Sinn erfordert offenbar den Plural, ebenso die Worte πάντων (A) und παντός (B). Das heißt: die Fassung A würde mit der Fassung B im wesentlichen zusammenfallen, wenn man die Singulare in B im kollektiven Sinne versteht, wozu ja auch das Wort παντός allen Anlaß gibt⁴⁾.

Die Berichte A und B stehen sich so nahe, daß mit Sicherheit eine gemeinsame Quelle anzunehmen ist. A hat die klarere, wahrscheinlich aber etwas freiere Fassung, Themistios gibt ja auch eine „paraphrasis“. B folgt möglicherweise der Vorlage, dem verlorengegangenen Alexanderkommentar zur zweiten Analytik, wörtlich, die genaue Parallele der singularischen Fassung (B) des ἀξίωμα mit der euklidischen notio comm. I springt in die Augen:

Euklid, El. I, n. c. I.

τὰ πῶ αὐτῷ ἴσα καὶ
ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Alexander (nach Philoponus)

τὰ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ
ἐλάττωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Das Argument des Bryson hat einen guten Sinn, sofern die pluralische bzw. kollektiv-singularische Fassung angenommen wird. Es besagt dann im wesentlichen, daß alles, was dieselbe Einteilung (denselben Dedekindschen „Schnitt“) in einer linear geordneten Menge von Größen hervorbringt, einander gleich ist. Mit andern Worten: es wird die Eindeutigkeit, aber nicht die Existenz der einen Schnitt hervorbringenden Größe gefordert. Über die Existenzfrage selbst gleiten die Beweise A

⁴⁾ Man müßte also z. B. übersetzen: τὸ μεταξὺ τοῦ τε ἐγγραφομένου καὶ περιγραφόμενου εὐθυγράμμου γραφόμενον εὐθύγραμμον σχῆμα mit „die zwischen je einem beliebigen (d. i. soviel wie „jedem beliebigen“ oder „allen“) ein- und umgeschriebenen Polygon beschriebene geradlinige Figur.“

und B beide hinweg — im Gegensatz zu C (Proklos), wie wir sehen werden.

In der „echt singularischen“ Fassung ist das Axiom offenbar falsch. Wie Proklos (bei Philoponos p. 112, 9—14) bemerkt, ist ja z. B. 9 von 10 verschieden, obwohl doch beide kleiner als 12 und größer als 8 sind. Daß aber Alexander selbst das Axiom für falsch gehalten habe, davon steht bei Philoponos nichts, und der Bericht des Themistios erklärt es sogar ausdrücklich als „zwar wahr, aber allgemein“ (*ἀληθὲς μὲν, κοινὸν δέ*. p. 18, 8)⁵).

Man wird also annehmen müssen, daß der echte Alexander die pluralische (kollektiv-singularische) Fassung gemeint hat und daß er damit Brysons Argument richtig wiedergab. Denn es scheint undenkbar, daß ein solch plumper Fehlschluß, wie die „echt singularische“ Auslegung dem Bryson zumutet, von Aristoteles und in all den folgenden Jahrhunderten der Tradierung für würdig gehalten worden ist. Aristoteles gebraucht in der „Zweiten Analytik“ und in den „Sophistischen Widerlegungen“ das Axiom und den Schluß des Bryson zwar als ein Beispiel einer eristischen Argumentation, aber nur wegen seiner allzu großen („formalen“) Allgemeinheit, die die Gefahr mit sich bringt, daß die besondere Bedeutung, die für eine sachlich gültige Überlegung zugrunde gelegt werden müßte, nicht gesichert ist. (Es folgt bei Aristoteles, *Soph. El.*, cap. XI, p. 172a, 8—9 das etwas krasse Beispiel vom ärztlich verordneten Spaziergang, gegen den man nicht die Zenonischen Argumente gegen die Bewegung vorbringen dürfe⁶). Das Beispiel zeigt klar, wenn auch derb, was gemeint ist: die allgemeine ontologische Überlegung des Zeno wendet sich gegen die metaphysische Möglichkeit der Bewegung, aber nicht gegen ihre besondere und konkrete „praktisch-alltägliche“ Möglichkeit. Ebenso scheint die Gültigkeit des Brysonschen Axioms nicht in jedem besonderen Fall und für jede besondere Größenauffassung — z. B. bei geraden und gemischtlinigen Winkeln, wie wir noch sehen werden — a priori gesichert.)

Es muß aber daran festgehalten werden, daß Aristoteles selbst das

⁵) Der viel spätere Bericht des Pseudo-Alexander (vermutlich Michael Ephesios) in *soph. elench.* p. 90, 10ss, kommt nicht ernsthaft in Betracht; er ist offenbar eine Kompilation und z. T. Verwechslung älterer Quellen wie Philoponos und Themistios; z. B. ist Hippokrates von Chios mit Antiphon verwechselt (p. 90, 8: . . . *οἷος ὁ τοῦ Ἱπποκράτους καὶ ὁ διὰ τῶν μηρίσων τοῦ Ἀντιφῶντος τοῦ κύκλου τετραγωνισμός* — vorausgesetzt freilich, daß der Text korrekt überliefert ist und nicht das *καὶ* vor *ὁ διὰ* in Wahrheit vor *Ἀντιφῶντος* gehört!). Er faßt das Axiom echt singularisch und erklärt es dementsprechend in einem Atem für falsch. Aber der Text ist keinesfalls von Alexander selbst.

⁶) *ἢ εἴ τις μὴ ταίη βέλτιον εἶναι ἀπὸ δειπνοῦ περιπατεῖν διὰ τὸν Ζήνωνος λόγον, οὐκ ἰατρικός· κοινὸς γάρ.*

Argument des Bryson an sich nicht für falsch hält. Einmal ist nämlich Anal. post. I, 9 (p. 75b, 38—41) davon die Rede, daß ein Beweis aus einer wahren, unbeweisbaren und unmittelbaren Voraussetzung keine Erkenntnis gibt, sofern er nicht ἐκ τῶν ἐκάστου ἀρχῶν abgeleitet ist. ἔστι γὰρ οὕτω δεῖξαι, ὥσπερ Βρύσων τὸν τετραγωνισμόν. Aristoteles scheint also sagen zu wollen, daß Brysons Argument aus wahren, obzwar „gemeinsamen“ (κοινά) Prämissen erfolgte. (So interpretiert ja auch, völlig korrekt, Themistius die Sache.)⁷⁾ Ebenso heißt es in den Soph. El. cap. 11, p. 171b, 17: ἀλλ' ὡς Βρύσων ἐτετραγώνιζε τὸν κύκλον, εἰ καὶ ἐτετραγώνιζε τὸν κύκλον, ἀλλ' ὅτι οὐ κατὰ τὸ πρᾶγμα (nicht sachhaltig, sondern formal-allgemein) διὰ τοῦτο σοφιστικός⁸⁾. . . . καὶ ὁ κατὰ τὸ πρᾶγμα φαινόμενος συλλογισμός (die scheinbar sachhaltige Argumentation), καὶ ἢ συλλογισμός (selbst wenn sie eine richtige Argumentation ist!), ἐριστικός λόγος. Es wird also die Brysonsche Argumentation als an sich richtig zweimal anerkannt, nur ihr mangelnder Sachgehalt kritisiert. Ja sogar die Quadratur wird als möglicherweise gelungen bezeichnet, also zum mindesten für durchaus diskutabel gehalten, was ganz unmöglich wäre, wenn der oben genannte plumpe Fehlschluß die ganze Weisheit Brysons wäre.

So erscheint also sachlich, wie quellenmäßig Bryson als ernst zu nehmender Forscher. Er hat vermutlich als erster den Gedanken des

⁷⁾ Damit scheint mir auch der Einwand widerlegt, den G. R. G. Mure in seiner Übersetzung der *Analytica posteriora* (The Works of Aristotle, translated under the editorship of W. D. Ross, Oxford 1928, Vol. I), Anm. 6 zu p. 76a, 4 erhebt. Mure nimmt im Anschluß an Heath (Greek Mathematics, vol. I, p. 223—25) die pluralische Deutung des Brysonschen Arguments an, macht sich zum Schluß aber selbst den Einwand, daß nach Aristoteles dann das Brysonsche Axiom auf Raumgrößen spezialisiert, allgemein richtig sein müßte, während es de facto einer weiteren Reduktion (auf „commensurate magnitudes“, d. h. wohl einen λόγος im Sinne von Euklid, El. V, def. 4 besitzende Größen) bedürfe, um auf Polygone anwendbar zu sein. Aber es ist ja bei Aristoteles nirgends gesagt, wie weit die Reduktion eines κοινόν getrieben werden muß. Auch der allgemeine Begriff des geometrischen μέγεθος ist in gewissem Sinn ein κοινόν, dessen einzelne Spezifikationen nicht immer übersehbare Gesetze haben. Gerade in der hier akuten Frage der „nicht-archimedischen“ Größensysteme, für die die Alten die gemischtlinigen Winkel anführen, wird auch das Problem, wie weit der μέγεθος-Begriff reicht, aktuell. In der Tat wird die Frage, ob der Winkel eine Größe (μέγεθος, nicht nur ein Quantitatives, ποσόν) sei, bei Proklos erwähnt; in Eucl. p. 126, 4—6 (Friedlein): τοῦτο δὲ πάντων παραδοξότατον, εἰ ἔστιν τι μέγεθος ἐφ' ἣν διαστατὸν ἔξω γραμμῆς („ob“ oder „wenn es irgendwelche ‚Größe‘ gibt, einfach ausgedehnt [d. i. eindimensional], außer der Linie“). Vorher wird gesagt, daß der Winkel ein ποσόν sei (nach Karpos) und zwar ἐφ' ἣν διεστώς, deswegen aber nicht etwa eine Linie (p. 125, 25—126, 3); vgl. p. 121, 20/21: μέγεθος καὶ τοῦτο οὐ γραμμικόν.

⁸⁾ Paccius übersetzt: *sed ut Bryson quadravit circulum, etiamsi circulus quadretur, quia tamen non est secundum rem, ideo est sophisticus.*

„Schnittes“ gefaßt und die Eindeutigkeit der Definition durch einen „Schnitt“ als Axiom hingestellt. Über die Existenzfrage freilich glitt er hinweg.

Hier ist der Ort, die enge Verwandtschaft mit Eudoxos hervorzuheben. Bryson ist nach der Überlieferung ein Pythagoreer und lebte vermutlich gegen Ende des 5. Jahrhunderts, also etwa eine Generation vor Eudoxos und etwa als (älterer?) Zeitgenosse des Archytas, des Lehrers des Eudoxos. Die von Eudoxos herrührende 5. Definition des V. Buches der euklidischen Elemente, die in der ersten dieser Studien ausführlich behandelt wurde, bezieht sich auf die Gleichheit zweier *λόγοι*. Und zwar besagt diese Definition, daß zwei Verhältnisse dann und nur dann gleich sind, wenn sie den gleichen „Schnitt“ im Gebiet der rationalen Verhältnisse hervorbringen. Ob solche einen Schnitt hervorbringende Verhältnisse stets existieren, ist eine andere Frage. Dedekind hat das Neue seiner Formulierung der Stetigkeitsforderung in einem Größengebiet (wobei bei ihm unter den Begriff der „Größe“ gerade auch die eudoxischen *λόγοι* fallen) ausdrücklich darin erblickt, daß die Existenz der den Schnitt erzeugenden Größe in allen Fällen postuliert wird⁹⁾.

⁹⁾ Gegenüber den wiederholten Einwänden von Lipschitz (Dedekinds Gesammelte Werke, Bd. III [Braunschweig 1932], S. 469f., 475—77), daß in der euklidischen (d. i. eudoxischen) Definition schon alles Wesentliche enthalten sei, betont Dedekind (a. a. O. S. 473), daß Euklid „nichts über die Ausdehnung oder Mannigfaltigkeit eines Gebiets von gleichartigen Größen“ sage, Euklids Definition „sagt nur, wenn zwei in einem Größengebiet vorhandene Individuen dasselbe Verhältnis haben wie zwei andere“. Euklid habe zwar „vollständigere Größengebiete im Auge gehabt“ als die der rationalen Zahlen, denn sonst hätte er sich mit einer einfacheren Definition („ $A:B = A':B'$, wenn es zwei ganze Zahlen m, n von der Art gibt, daß gleichzeitig $nA = mB$ und $nA' = mB'$.“ Das ist die 20. Def. des VII. Buches) begnügt. „Aber nirgends findet sich bei Euklid oder einem späteren Schriftsteller der Abschluß solcher Vervollständigung...“ Später fügt Dedekind hinzu (S. 477): „Euklid kann seine Definition gleicher Verhältnisse auf alle Größen anwenden, die ihm in seinem System vorkommen, d. h. deren Existenz aus guten Gründen ersichtlich ist, und dies reicht für Euklid vollständig aus.“ Für die vollständige Begründung der Arithmetik reiche es aber nicht aus. Denn nichts sei in der Mathematik gefährlicher, als „ohne genügenden Beweis Existenzen anzunehmen und zwar erst dann, wenn die Not, das augenblickliche Bedürfnis es gebeut.“ ... „Wenn nun Euklid weitergehende Untersuchungen beabsichtigt hätte, als es in Wahrheit der Fall war, nämlich solche, bei denen die Stetigkeit eine wesentliche Rolle spielt,“ so würde niemand die Formulierung des Stetigkeitspostulats für „überflüssig oder selbstverständlich“ erklären.

Dedekind hält also das Stetigkeitspostulat im Rahmen der euklidischen Geometrie für überflüssig. Vgl. den Schluß des § 3 der Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (a. a. O. S. 323) und eine Stelle der Vorrede zur ersten Auflage von „Was sind und was sollen die Zahlen?“ An der letzten Stelle wird insbesondere gesagt,

In der Tat ist eine explizite Formulierung der Existenz des einen jeden Schnitt hervorbringenden Elements bei Euklid nicht vorhanden. Benützt wird diese Existenz aber im XII. Buch. Es erhebt sich mit immer größerer Dringlichkeit die Frage: Hat Eudoxos oder irgendein Späterer diese Existenzfrage in sein Bewußtsein erhoben? Oder blieb das erst dem modernen Mathematiker Dedekind vorbehalten?

3.

Eine Antwort auf die soeben gestellte Frage bringt der schon erwähnte Bericht (C) des Proklos über Bryson, der seinerseits bei Philoponos (p. 112) nach den Angaben des Ammonios, der Schüler von Proklos und Lehrer von Philoponos war, wiedergegeben ist.

Proklos bezweifelt die Richtigkeit der *ἐξήγησις* des Alexander (B). Er faßt Alexanders Darlegung im „echt singularischen“ Sinn auf und erklärt sie infolgedessen natürlich für falsch. Zur Widerlegung gibt er das erwähnte Zahlenbeispiel: $9 \neq 10$, obwohl beide zwischen 8 und 12 liegen. Um sie zu retten, müsse man im Sinne Antiphons das *εὐθύγραμμον σχῆμα* zwischen dem ein- und umgeschriebenen Polygon so wählen, daß es sich der Peripherie des Kreises anschmiegt (*ἐφαρμόζειν τῇ τοῦ κύκλου περιφέρειᾳ*, p. 112 l. 4). Aber dann fiel ja Brysons Quadratur mit der des Antiphon zusammen (*συνέτρεχε τῷ Ἀντιφώντος τετραγωνισμῷ* l. 2). Was Bryson aber eigentlich nach Proklos Ansicht gemeint habe, sei folgendes (*ὁ οὖν Πρόκλος ἔλεγε τετραγωνίζειν τὸν Βρύσωνα τὸν τρόπον τοῦτον* l. 20):

daß in einem Raume, in dem lediglich algebraische Verhältnisse von Streckenlängen auftreten, „trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes... in ihm... alle Konstruktionen, welche in Euklids Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar“ sind, „wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklids Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden“ (a. a. O. S. 339f.).

Diese letzten Äußerungen gehen u. E. zu weit. Das Quadraturproblem des Kreises führt wegen der Transzendenz von π über den Bereich der algebraischen Verhältnisse hinaus. Und es ist in der Tat gerade die Frage der Existenz des einem gegebenen Kreise flächengleichen Quadrates, die auf das Dedekindsche Axiom grundsätzlich führen mußte. Auch Euklid wird in seiner Fassung der Exhaustionsbeweise des XII. Buches, die wieder auf Eudoxos zurückgehen, davon berührt (vgl. den Anfang dieses Aufsatzes S. 369). Allerdings kann der Beweis von XII, 2 usw. auch anders geführt werden: Stolz (Math. Ann. 22, 517 Anm. 3) und Hasse-Scholz (Kantst. 33, 27) haben die Annahme der Existenz der 4. Proportionale, die der eudoxisch-euklidische Beweis benutzt, auszuschalten gewußt, allerdings um den Preis der Zulassung des sog. „transfiniten Prinzips des ausgeschlossenen Dritten“, das der Antike in ihren mathematischen Argumentationen fremd war. In einer späteren Studie dieser Reihe soll gezeigt werden, wie sich dieser Mangel beseitigen läßt.

C.

παντός, φησι, τοῦ ἐγγραφομένου
 εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶ ὁ κύ-
 κλος, τοῦ δὲ περιγραφομένου
 ἐλάττων· οὐ δὲ ἔστι μείζων
 καὶ ἔλαττον, τούτου ἔστι
 καὶ ἴσον· ἔστι δὲ μείζων καὶ
 ἔλαττον εὐθύγραμμον τοῦ κύ-
 κλου· ἔστιν ἄρα αὐτοῦ καὶ ἴσον
 (p. 112, 21–24).

Der Kreis, sagt Bryson, ist größer als jedes eingeschriebene und kleiner als jedes umgeschriebene Polygon. <Im Vergleich> wozu es aber Größeres und Kleineres gibt, dazu gibt es auch Gleiches. Es gibt aber größere und kleinere Polygone als der Kreis, also gibt es auch ein ihm gleiches.

In dem gesperrten Satz ist klar das Dedekindsche Schnittprinzip (Stetigkeitspostulat) enthalten. Das Entscheidende ist das „es gibt“ (ἔστιν)¹⁰⁾.

Daß sich auch Philoponos oder vielmehr schon Ammonios (vgl. p. 112, 30: ὡς ἔλεγεν ὁ ἡμέτερος διδάσκαλος) über diesen entscheidenden Punkt im klaren war, zeigt das Folgende (p. 112, 25–30).

Es heißt da, gegen Proklos könne man einwenden, daß nach seiner Darstellung Bryson die Quadratur nicht wirklich durchgeführt, sondern sich einer petitio principii schuldig gemacht habe (οὐδὲ κατεσκεύαζεν ὁλως ἀλλὰ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἡτεῖτο l. 26s).

οὐδὲ γὰρ οἱ τὸν κύκλον τετρα-
 γωνίζοντες τοῦτο ἐξήτουν, εἰ οἶον
 τέ ἐστι τῷ κύκλῳ ἴσον τετράγω-
 νον εἶναι, ἀλλ' ὡς οἰόμενοι ὅτι
 ἐνδέχεται εἶναι οὕτως ἐπει-
 ρῶντο τετράγωνον ἴσον τῷ κύκλῳ
 γερνᾶν (l. 27–29).

Denn die den Zirkel Quadrierenden forschten nicht danach, ob es möglich sei, daß ein dem Kreise flächengleiches Quadrat existiere, sondern in der Meinung, daß es so sein (existieren?) könne, versuchten sie, ein dem Kreise <flächen>gleiches Quadrat <konstruktiv> zu erzeugen.

Hier stehen wir also vor einer überraschend klaren Scheidung der Begriffe „mathematisch abstrakte Existenz“ und „konstruktive Erzeugung“. Für Ammonios ist also jedenfalls die mathematische Existenz nicht schlechthin durch Konstruktion gegeben, wie das nach H. G. Zeu-

¹⁰⁾ Daß im hervorgehobenen Satz als Subjekt nicht etwa κύκλος zu ergänzen ist, sondern daß es sich um ein κοινόν handelt, sagt Philoponos p. 115, 3–7 ausdrücklich: τὸ γὰρ οὐ ἔστι μείζων καὶ ἔλαττον τούτου εἶναι καὶ ἴσον . . . οὐκ ἴδιον γεωμετρίας ἀλλὰ κοινόν . . . Den Kontrast zu der existentiellen Formel des Proklos gibt die früher unter A zitierte sprachlich eng entsprechende des Themistios: ὡν τὰ αὐτὰ μείζω καὶ ἐλάττω, ἐκεῖνα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις (p. 19, 8/9). Hier hat das εἶναι lediglich den Sinn der Copula; im ersten Satzglied fehlt bezeichnenderweise das Verbum ganz.

thens bekannter These durchgängig die Überzeugung der klassischen und späteren griechischen Mathematik gewesen sein soll¹¹⁾.

Damit ist der abstrakt-existentielle Sinn des Axioms des Proklos gesichert. Vgl. noch die Fortsetzung, die für sich selbst spricht: τὸ δὲ εἶναι παρὰ τοῦ Προκλου λεχθέν, ὡς ἔλεγε ὁ ἡμέτερος διδάσκαλος (i. e. Ammonius). ὅτι μὲν ἐνδέχεται ἴσον εἶναι τῷ κῆλι τετράγωνον, εἴπερ ἄρα καὶ τοῦτο συγχωρηθῇ (d. h. wenn man das Axiom annimmt). ἔδειξεν· οὐ μὴν δὲ καὶ κατέγραψεν (konstruierte) ἴσον τῷ κῆλι τετράγωνον οὐδὲ πῶς ἂν τοῦτο γένοιτο ἐδίδαξεν . . . (I. 30–33). Auffallend ist bei Ammonios die Formulierung: οἷον τε εἶναι, ἐνδέχεται εἶναι = existieren kann, während doch Proklos selbst klar von Existenz schlechthin, nicht von möglicher Existenz redet. Besonders auffällig in dem letzten Zitat, wo doch das Axiom ausdrücklich zuvor zugegeben wird.

Eine Originalstelle des Proklos selbst (in Euclidem p. 234. 18–19) bestätigt in willkommener Weise das Gesagte.

καὶ ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἔλαττον οὐ πάντως διὰ τοῦ ἴσου γίνεται. Und der (anscheinend) stetige Übergang vom Größeren zum Kleineren geschieht nicht überall durch das Gleiche hindurch.

Die Erwähnung des Stetigkeitsaxioms geschieht hier anlässlich eines Ausnahmefalls (οὐ πάντως), in dem es nicht gilt. Die echte Stetigkeit selbst ist also durch die μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἔλαττον διὰ τοῦ ἴσου positiv gekennzeichnet. Das entspricht etwa unserm modernen Satz, daß jede in einem Intervall (a, b) stetige, monoton abnehmende Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalls jeden Zwischenwert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wirklich annimmt. Man kann in der Tat diesen Satz mittels des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms ableiten¹²⁾. Bemerkenswert ist ferner, daß Johannes Campanus, einer der ersten abendländischen Euklidkommentatoren (im 13. Jahrh.), die genannte Formulierung des Proklos in seinen Bemerkungen zu Euklid, Elem. III. 16 aufnimmt und ausdrücklich mit Bryson in Zusammenhang bringt¹³⁾.

¹¹⁾ Diskutiert wurde der Gegensatz von εἶναι und γένεσθαι bei mathematischen Gebilden in gewissem Sinn schon in dem bekannten Streit zwischen dem Akademiker Speusippos und dem Eudoxoschüler Menaichmos (Proklos, Euklid-Komm. p. 77, 15–79, 2). Aber dort handelt es sich doch wohl nur um die verschiedene philosophische (ontologische) Auffassung der mathematischen Konstruktion, ob es sich um ein wirkliches Erzeugen handelt (πορίσασθαι) oder ob wir τὰς γενέσεις αὐτῶν (der mathematischen Gegenstände) οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν (p. 78, 5). Vgl. auch Theophrast, Metaphysik p. 4a, 21 (Usener).

¹²⁾ Vgl. etwa O. Hölder, Die mathematische Methode (Berlin 1924), §§ 32/33.

¹³⁾ Abgedruckt in: „Euclidis elementorum libri XV . . . editi . . . auctore Christophoro Clavio, Francofurti 1607“, p. 266–267.

„E Campano. Caeterum ex hac propos. (III, 16) perspicuum est, vitiosam esse

In der genannten Formulierung von Proklos wird ausdrücklich auf die Grenzen der Gültigkeit des genannten Stetigkeitssatzes hingewiesen. Und das ist wohl auch für Ammonios der Grund, um von einer „möglichen Existenz“ des dem Kreise flächengleichen Quadrats zu sprechen¹⁴). Damit wird aber ein neues Thema berührt, das eine umfassende Behandlung erfordert.

4.

Die verschiedenen betrachteten Autoren sind bezüglich der Grenzen, innerhalb deren das Axiom des Bryson gilt, verschiedener Meinung. Themistios und wohl auch der echte Alexander äußern gegen seine nichtexistentielle Form (in der es ja bei ihnen ausschließlich auftritt), keinerlei Bedenken. Proklos und Ammonios, bei denen das Postulat den echt existentiellen Charakter der Dedekindschen Stetigkeitsforderung hat (bei Ammonios allerdings in der abgeschwächten Form der „möglichen Existenz“), begrenzen beide seine Gültigkeit, aber in verschiedener Weise. Beide sind sich darüber im klaren, daß das Stetigkeitsaxiom für die Mannigfaltigkeit sämtlicher gemischtliniger wie geradliniger Winkel nicht gilt, die ja an zwei Stellen Lücken enthält¹⁵). (Es

argumentationem hanc, qua usus est Brison in quadrando circulo, ut auctor est Aristoteles. Videlicet:

Transitur a minori ad maius, vel contra, et per omnia media; ergo per aequale. Vel contingit reperire maius hoc, et minus eodem; ergo contingit reperire et aequale.

Describitur enim circulus ABC, cuius diameter AC moveri intelligatur circum extremum punctum A fixum per puncta D, E, F, donec circulum contingit in A. Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta AC secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus aequaliter reperitur angulo semicirculi. (Rectus enim vel obtusus maior est et acutus minor), constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.“

¹⁴) Vgl. die merkwürdige Anmerkung von Robert Simson (*Euclidis elementorum libri priores sex item undecimus et duodecimus. Glasguae 1756*) zu XII, 2 (p. 405), in der es heißt: „de quibus observandum est, demonstrationi Theorematis sufficere in hisce et similibus casibus, ut res quaedam possit existere, dummodo hoc perspicuum fuerit, quamvis non possit eadem Geometrice inveniri seu exhiberi.“

¹⁵) Eine Lücke ist eine Einteilung (Zerlegung der geordneten Menge μ in α und β , so daß im ordinalen Sinn $\mu = \alpha + \beta$) im Sinne eines Dedekindschen Schnittes, bei der die erste (untere) Klasse α kein letztes Element (Maximum) und die zweite (obere) Klasse β kein erstes Element (Minimum) hat. Die Bezeichnungen „untere“, „obere“ Klasse, „Maximum“, „Minimum“ sind streng genommen nur dann berechtigt, wenn die Elemente der Menge ihrer Größe nach geordnet sind, was für den rein ordinalen Begriff der Lücke an sich nicht erforderlich ist.

Ein Sprung liegt vor, wenn sowohl die erste Klasse α ein letztes, als auch die zweite β ein erstes Element hat.

Eine geordnete Menge, die weder Lücken noch Sprünge enthält, heißt stetig.

liegen nämlich sämtliche geradlinigen spitzen Winkel ihrer Größe nach über sämtlichen äußeren Halbkreiswinkeln [den sog. „hornförmigen“ oder Kontingenzwinkeln] und unter sämtlichen inneren Halbkreiswinkeln, die ihrerseits wieder alle kleiner als der rechte Winkel sind. Auch die Mannigfaltigkeit aller Halbkreiswinkel [ohne die geradlinigen Winkel] enthält zwischen den äußeren und den inneren Halbkreiswinkeln offenbar eine Lücke. Gerade dieser Fall wurde im späten Altertum ausführlich behandelt.) Aber während Ammonios geneigt ist, auch im Fall der einem Kreise um- und eingeschriebenen Polygone (bzw. deren Flächeninhalte) eine Lücke anzunehmen, ist das allem Anschein nach nicht die Meinung des Proklos gewesen. Die beiden Enkelschüler des Proklos und Schüler des Ammonios, Johannes Philoponos und Simplicios, stehen einander auch in diesem wie in manchem anderen Punkte feindlich gegenüber. Während Philoponos dem Ammonios recht gibt, widerspricht ihm Simplicios und stellt sich damit auf die Seite des Proklos.

Die ganze Diskussion ist schon deshalb von Interesse, weil in ihr ganz offen die Frage nach der grundsätzlichen Möglichkeit der Kreisquadratur aufgeworfen wird. Für unser besonderes Problem, die Frage, warum die Griechen die Existenz der 4. Proportionale annehmen, ist aber die Betrachtung der Gründe von entscheidender Wichtigkeit, die für und gegen die Annahme des Proklosschen Existenzaxioms vorgebracht wurden.

Der formale Entscheidungsgrund ist nun, trotz der verschiedenen materiellen Ergebnisse, zu denen er bei den beiden Parteien führt, derselbe: die Gleichartigkeit („Homogenität“) oder Ungleichartigkeit („Anhomogenität“) der das fragliche Größengebiet aufbauenden Elemente. Das Axiom wird für wahr gehalten im „homogenen“ Fall, für falsch im „anhomogenen“.

Materiell ist dann freilich noch die Frage zu entscheiden, wann denn zwei Größen homogen sind, und hier scheiden sich die Geister.

Proklos (und mit ihm Simplicios) legen die 3. bzw. 4. Definition des V. Buches der Elemente, d. i. das sog. „archimedische“, besser „eudoxische“ Axiom zugrunde: *λόγος* ist das Sich-Verhalten (*σχέσις*) zweier homogener Größen (das ist die formale Bestimmung) und in materieller Hinsicht haben Größen zueinander einen *λόγος*, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen. Proklos reproduziert in der Tat (p. 121, 24–25; 122, 3–4) diese Definitionen fast wörtlich¹⁶).

Für Ammonios und Philoponos dagegen ist der Begriff weniger

¹⁶) πάντα τὰ ὁμογενῆ μεγέθη πεπερασμένα ὄντα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλα. — τὰ δὲ λόγον ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα δύναται ἀλλήλων ἐπερίχειν.

präzis und bedeutet ungefähr soviel wie „gleichartig“¹⁷⁾ (*ὁμοιος*). Für sie sind also etwa die geradlinigen Figuren untereinander gleichartig, gegenüber den krummlinigen verschiedenartig, ebenso die Halbkreiswinkel unter sich gleichartig, gegenüber den geradlinigen Winkeln aber verschiedenartig (dafür finden sich die Ausdrücke: *ἀνόμοιος*, *ἀνομογενής*, *ἀνομοιογενής*, *ἐτερογενής*).

Daraus ergibt sich nun, daß Proklos und Simplikios die Brysonische Argumentation in der existentiellen Fassung akzeptieren, Ammonios und Philoponos dagegen nicht.

Dies ist das übersichtliche Ergebnis, das sich aus einem weitschichtigen und wenig übersichtlichen Material nicht ohne Mühe ergibt. Dies ganze Material kann hier nicht ausgebreitet werden, doch werden die folgenden Andeutungen den Leser wenigstens zu den Texten hinführen können.

Die Schwierigkeit liegt vor allem in der schwankenden Terminologie schon bei Proklos, die dann ihre Unsicherheit auf die Nachfolger überträgt.

Neben dem oben gekennzeichneten engeren Sinn hat *ὁμογενής* bei ihm noch einen weiteren (= *ὅμοιος*)¹⁸⁾. Diesen laxeren Sprachgebrauch übernehmen dann alle Späteren: Ammonios, Philoponos und auch Simplikios, obwohl letzterer in der Sache mit Proklos geht.

Über Ammonios haben wir zwei Berichte, von Simplikios und Philoponos.

Simplikios über Ammonios
(p. 42, 14. 22, Rudio)¹⁹⁾.

*ἀνομογενῇ γὰρ μεγέθει ἐστὶν
ἐνθῆναι καὶ περιτρεῖα. „καὶ
οὐδέν“, φησι (Ammonius), „θω-
μαστὸν μὴ εὐρεθῆναι κῆκλον
ἐνθηνγράμμῳ ἴσον, εἴτερ καὶ ἐπὶ
τῶν γωνιῶν εὐρίσκομεν τοῦτο.
οὔτε γὰρ τῇ τοῦ ἡμικυκλίου γω-
νία οὔτε τῇ λοιπῇ εἰς τὴν ὀρθὴν
τῇ περαιοειδῇ λεγομένη γένοιτο
ἂν ἐνθηνγράμμος ἴση γωνία. καὶ*

Philoponos über oder im Anschluß an
Ammonios (p. 113, 1—4, 6—13; p. 114,
13—17).

*... ὅτι ἐπὶ μὲν τῶν ὁμογενῶν ἀληθὴς
ἐστὶν ὁ λόγος (ὅτι οὐ ἔστι μείζον καὶ ἑλατ-
τον, τούτου ἔστι καὶ ἴσον), ἐπὶ μέντοι τῶν
ἀνομοιογενῶν οὐκέτι ἀληθὲς τοῦτο.
... τῶν δὲ δύο γωνιῶν τῶν γινομένων ὑπὸ
τῆς περιτρεῖας καὶ τῆς διαμέτρου ... ἡ
μὲν ἐκτὸς πάσης ὀξείας γωνίας ἐνθηνγράμ-
μον ἐλάττων ἐστίν, ἡ δὲ ἐντὸς ... μείζων
ἐστί. καὶ ἰδοῦ ἐνταῦθα τῆς αὐτῆς ὀξείας*

¹⁷⁾ Für *ὅμοιος* bei Proklos vgl. p. 8, 8—12; 39, 19; 105, 8, 25; 106, 3; 122, 17; 144, 6ss; 159, 13, 22.

¹⁸⁾ Z. B. in Euklidem, p. 296, 5, 8: ταῦτα ... ἐφεξῆς, ὧν μηδὲν ἐστὶν ὅμοιον μεταξύ. z. B. κίονες (Säulen), ὧν μὴ ἐστὶν ἄλλη κίων ἐν μέσῳ· καίτοι γε ἅη ἐστι πάντως μέσος, ἀλλ' οὐδὲν ὁμογενὲς μεταξύ.

¹⁹⁾ In „Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates“. Leipzig 1907. (= Simplicius in Phys. p. 59 Diels.)

διὰ τοῦτο ἴσως“, φησί, „καὶ ὑπὸ
οὕτως κλεινῶν ἀνδρῶν ζητηθὲν
τὸ θεώρημα ἄχρι νῦν οὐχ εὐρέθη
οὐδὲ ἐπ’ αὐτοῦ τοῦ Ἀρχιμήδους“.

εὐθυγράμμων γωνίας μείζονα καὶ ἐλάττονα
δεδειχότες ἴσην εὐρεῖν οὐκ ἂν δυνησώμεθα
διὰ τὸ ἀνομοιογενῆ εἶναι τὰ μεγέθη...
κακῶς ἄρα ὁ Βρύσων ἐλάμβανεν ὅτι...
(folgt das Axiom, ausgesprochen für die
Polygone und den Kreis) ... ἀνόμοια
γὰρ κατὰυθα τὰ μεγέθη, λέγω δὴ τὸ
εὐθύγραμμον τῷ κύκλῳ, ὥστε οὐδὲν ἴσα
ἔσται²⁰).

Simplikios wendet sich in der Fortsetzung der Stelle gegen Ammonios mit dem Argument, auch gewisse Mündchen (μηνίσκοι) seien quadrierbar und doch, weil aus Kreisbögen zusammengesetzt, dem Kreise verwandt (ὁμογενής δὲ ὁ μηνίσκος τῷ κύκλῳ ἐκ περιφερειῶν συγκείμενος). Hielte man aber seine Fläche dem Kreise für unähnlich wegen der Hörner (ἀνόμοιον τὸ τοῦ μηνίσκου ἐπίπεδον τῷ τοῦ κύκλου διὰ τὰ κέρατα), so wäre anderseits der Meniskos auch der geradlinigen Figur unähnlich (ἀνόμοιος) und könnte trotzdem quadriert werden. Bei den geraden und gemischtlinigen Winkeln freilich sei es anders, aber diese „sind nicht nur ungleichartig dem geradlinigen, sondern auch unvergleichbar“ (οὐ μόνον ἀνομογενεῖς εἰσὶ τῇ εὐθυγράμμῳ ἀλλὰ καὶ ἀσύμβλητοι).

Der Sprachgebrauch des Simplikios ist also so:

1. ὁμογενής opp. ἀνομο(οι)γενής = ἀνόμοιος (Gegensatz).
2. ἀνομο(οι)γενής dist. ἀσύμβλητος (Unterschied).

Was ist nun aber der sachliche Unterschied zwischen ἀνομο(οι)γενής und ἀσύμβλητος? Er ist nichts anderes als der zwischen der weiteren und engeren Bedeutung von μὴ ὁμογενής, nämlich „ungleichartig im allgemeinen Sinn“, und „keinen λόγος zueinander habend“ (im Sinne von Euklid, El. V, def. 4).

²⁰) Weitere Philoponos-Stellen, in denen der Gültigkeitsbereich des Proklosschen Axioms auf die homogenen Größen beschränkt wird; p. 149, 11—14: καὶ τοῦτον (scil. τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν) Ἀντιφῶν μὲν καὶ Βρύσων ἔδοξαν εὐρεῖν, κακῶς αἰτοῦντες δοθῆναι αὐτοῖς οἷς μὴ συγγωρήσαιεν ἂν γεωμέτραι. ... ὁ δὲ (Bryson) οὐ ἔστι μείζον καὶ ἐλάττον ἀνομογενές, τοῦτον εἶναι καὶ ἴσον.

(Ein anderer Gedanke wird dagegen in der nur in Sa¹ erhaltenen, von Wallies nur unter dem Strich abgedruckten Stelle p. 114—115 erörtert: ὡς ἐπὶ μὲν τῶν ὁμογενῶν τὸ δεικνύμενον, μήτε μείζον εἶναι τινος μήτε ἐλάττον ἴσον εἶναι ἐκείνῳ, πάντως ἀληθές. ἐπὶ μέντοι τῶν ἑτερογενῶν οὐκ ἔχει οὕτως. — Hier weiterhin ein Beweis dafür, daß auch bei Winkeln u. U. ἑτερογενῆ μὲν τινα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, μὴ ὅμοια δέ. In gewissem Sinn ist nämlich der aus zwei kongruenten und mit ihren Durchmesser um 90° gegeneinander gestellten Halbkreisbögen zu bildende Winkel gleich einem rechten Winkel [vgl. die Figur in der Ausgabe von Wallies, p. 115]. Dieser Gedanke wird übrigens im 14. Jahrh. von Nicole Oresme [vgl. Wieleitner, Biblioth. Mathematica, XIV. S. 217f.] benutzt und weiter entwickelt.)

Der Beleg findet sich bei Proklos, p. 124, 10—13:

οὐκ ἀναγκάζεται (sc. ἡ γωνία) δὲ τὸν λόγον ἐπιδέχεσθαι τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν διὰ τὸ καὶ ποιότητα ἰδιάζουσιν ἔχειν, καθ' ἣν ἀσύμβλητοι πολλάκις γωνίαι ἄλλαι ἄλλαις.

Der Winkel ²¹⁾ ist nicht genötigt, den Begriff (das Verhältnis?) der homogenen Größen zu erfüllen, da er auch eine Eigenheit schaffende Qualität besitzt, gemäß welcher oft die Winkel miteinander unvergleichbar sind.

Die hier gebrauchte Wendung *ὁ λόγος τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν* weist deutlich zurück auf den Gebrauch von *ὁμογενής* an den vorhin zitierten Stellen (p. 131, 24—25; 122, 3—4) und dementsprechend Euklid, El. V, def. 3 u. 4. Man braucht dabei an der jetzigen Stelle *λόγος* nicht als Verhältnis zu interpretieren²²⁾.

Während so Proklos und Simplikios die beiden Bedeutungen von Homogenität, die weitere und die engere („archimedische“) streng trennen — in der Sache, leider nicht unmißverständlich in der Terminologie —, verwischen sich die Unterschiede für Ammonios und Philoponos. Simplikios weist mit Recht den übereilten Schluß des Ammonios (den Philoponos unbedenklich mitmacht) von der Unvergleichbarkeit der gemischtlinigen und geradlinigen Winkel auf die Unvergleichbarkeit von Kreis und geradliniger Figur zurück. Denn im ersten Fall handelt es sich — in unserer heutigen Sprache ausgedrückt — um ein nicht-archimedisches, im zweiten um ein archimedisches Größensystem (das von allen, krummlinig wie geradlinig begrenzten Flächenstücken gebildet wird). Vergleichbar (*σύμβλητος*) heißt also soviel wie durcheinander meßbar.

Die Diskussion von Ammonios und Simplikios erörtert also bereits das interessante Problem des Zusammenhangs von Dedekindscher Stetigkeit (bzw. der ihr zugrunde liegenden rein ordinalen Stetigkeit, vgl. o. S. 378, Anm. 15) und archimedischem Axiom. Wie weit hat das Altertum diesen merkwürdigen Zusammenhang bereits durchschaut?

²¹⁾ Der zerlegbar ist und gemäß der in ihm liegenden Qualität die Gleichheit und Ungleichheit annimmt (*διαίρετή ... ἰσότητος δεκτική καὶ ἀνισότητος κατὰ τὸ ἐν αὐτῇ ποσόν* ... p. 124, 8—9). Der ganze Zusammenhang der Stelle wird erst aus dem vorhergehenden Satzteil begreiflich, wo gesagt wird: *ἡ γωνία πάντως μὲν δεῖται τῆς ἐν τῇ μεγέθει ποσότητος, δεῖται δὲ καὶ ποιότητος, ... δεῖται δὲ καὶ τῆς σχέσεως* ... (124, 2—7). Der Winkel „bedarf“ also der Qualität, Qualität und Relation.

²²⁾ Dagegen spricht nämlich p. 122, 20: *πᾶσα γὰρ γωνία τὸν αὐτὸν λόγον* (Begriff!) *ἐπιδέχεται καὶ οὐχὶ ἢ μὲν ἐστὶ γωνία μᾶλλον, ἢ δὲ ἴσσον* (d. h. „nicht ist der eine Winkel mehr, der andere weniger Winkel“ [?]).

5.

Die moderne axiomatische Forschung hat gezeigt, daß wir dem Stetigkeitsaxiom Dedekinds das Axiom des Messens (Archimedes', besser Eudoxos' Axiom) gefolgert werden kann (Stolz, Pasch, Hölder²³), Hilbert). Der moderne Beweis beruht wesentlich mit auf einem bestimmten Kongruenzaxiom²⁴), das für gemischtlinige Winkel nicht immer erfüllt ist. Einen anderen Beweis scheint es nicht zu geben, jedenfalls hat die Antike, soweit wir wissen, keinen besessen.

Aber die griechische Mathematik hat sogar allem Anschein nach die oben genannte Beziehung zwischen den Axiomen gar nicht gekannt. Dieser Beziehung ist offenbar, vermöge einer rein logischen Umkehrung (*ἀντιστοφῇ*) die folgende äquivalent: Aus der Ungültigkeit des archimedischen Satzes folgt die Unstetigkeit im Sinne Dedekinds, d. h. das Auftreten von „Lücken“ in der fraglichen Mannigfaltigkeit.

So wird die Sache aber in unseren Texten keineswegs dargestellt. Dort wird die Mannigfaltigkeit der Winkel betrachtet, und auf Grund von Euklid, El. III, 16 wird das Vorhandensein von Lücken (im mengentheoretischen, rein ordinalen Sinn) festgestellt, ohne daß metrische Überlegungen überhaupt angestellt werden.

Die konkreten Betrachtungen über die Mannigfaltigkeit gemischtliniger Winkel finden sich am ausführlichsten bei Philoponos (p. 113, 4 bis 114, 11). Zwar gehen, wie soeben erwähnt, alle solche Untersuchungen bei Späteren auf das Theorem Euklid III, 16 zurück, dessen letzter Satz lautet: *καὶ μὴν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου γωνία* (d. i. der spätere „innere“ Winkel, *ἡ ἐντὸς γωνία*) *ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἢ δὲ λυγῆς* (später: *ἡ ἐκτὸς γωνία*) *ἐλάττω*.

Bei Euklid treten also beide Lücken, zwischen den „äußeren“ und den spitzen Winkeln und zwischen den spitzen und den „inneren“ Winkeln (des Halbkreises) hervor. Bei Philoponos aber, in seiner zitierten

²³) O. Hölder, Die mathematische Methode, §§ 29/30.

²⁴) Ebd. § 2, Axiom II (S. 19) „Ist eine Strecke MN und auf der Geraden a ein Punkt A gegeben, so existieren auf a gerade zwei Punkte B und B' so, daß $AB = AB' = MN$ ist; dabei liegt A zwischen B und B' .“

Für die eindimensionale Mannigfaltigkeit sämtlicher gemischtliniger und geradliniger Winkel ist dieses Axiom nicht durchweg erfüllt, wenigstens wenn man verlangt, daß die Schenkel der Winkel sich nicht kreuzen.

Deshalb ist die Konstruktion im Hölderschen „Beweis des archimedischen Satzes“ (a. a. O. S. 90, Abb. 76) im entsprechenden Sinne für Winkel nicht ausführbar und der Beweis versagt.

Eine gewisse Kenntnis dieser Verhältnisse scheint die spätere Antike besessen zu haben: Proklos nennt ja die *γωνία: ἐφ' ἑν διαστάς* (in einer Hinsicht ausgedehnt), aber zugleich ein *μέγεθος ὁ γραμμικόν* (eine „nichtlineare“ Größe).

Darstellung, wird nur die aus den beiden genannten folgende Lücke zwischen den äußeren und inneren Halbkreiswinkeln (unter Weglassung der spitzen Winkel) benutzt²⁵).

Der Vergleich mit dem Fall der Polygone und des Kreises wird dann so durchgeführt, daß sich entspricht:

Umgeschriebene Polygone: innere Halbkreiswinkel.

Eingeschriebene Polygone: äußere Halbkreiswinkel.

Der Kreis: ein beliebiger spitzer Winkel.

Das heißt also: die krummlinigen Winkel entsprechen den geradlinig begrenzten Figuren und ein geradliniger Winkel dem Kreise²⁶).

In der ganzen ausführlichen Darstellung bei Philoponos ist nun merkwürdigerweise von einer Metrik der gemischtlinigen Winkel, von einem *πολλαπλασιασμός* oder einer Halbierung, gar nicht die Rede. Ebenso wenig bei Ammonios nach dem Bericht des Simplicios. In der Antwort

²⁵) Wenn man scharf hinblickt, kann man das aus allen mir bekannten Texten übereinstimmend schließen. Diese sind nämlich:

1. Proklos selbst: p. 234, 14 ff: *μαθησόμεθα γοῦν, ὅτι ἡ κερατοειδὴς (scil. γωνία) αἰεὶ ἀρίστος τῇ ὀξείᾳ καὶ οὐδ' ἐποτε ἴση καὶ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου ὡσαύτως· καὶ ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἔλαττον οὐ πάντως διὰ τοῦ ἴσου γίγνεται*. Offenbar ist der Übergang vom (inneren) Halbkreiswinkel durch den wider Erwarten niemals „gleichen“ spitzen geradlinigen Winkel zum hornförmigen Winkel gemeint. Das *αἰεὶ* und *οὐδέποτε* deutet unverkennbar den unendlichen Prozeß der Erzeugung der sämtlichen Halbkreiswinkel (und ebenso der hornförmigen) an, während der spitze Winkel, ein beliebig herausgegriffener offenbar, nur als Vergleichsobjekt dient.

2. Simplicios: p. 42, 17—20 (Rudio): *οὔτε γὰρ τῇ τοῦ ἡμικυκλίου γωνίᾳ οὔτε τῇ λοιπῇ εἰς τὴν ὀρθὴν τῇ κερατοειδῇ λεγομένη γένοιτο ἂν εὐθυγράμμος ἴση γωνία*. Entsprechend darauf: *οὐδὲν θαυμαστὸν μὴ εὐρεθῆναι κύκλον εὐθυγράμμῳ ἴσον*. Korrelation mittels der Kasus; Dativ zu Dativ, Nominativ zu Akkusativ (c. inf.).

²⁶) Für unser Gefühl würde eher das Umgekehrte näher liegen: man könnte sich die stumpfen und die rechten Winkel den umgeschriebenen Polygonen, die spitzen Winkel den eingeschriebenen homolog denken, während dem Kreis ein beliebiger innerer Halbkreiswinkel entsprechen würde. Auch Johannes Campanus, der den Gedanken der *μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἔλαττον διὰ τοῦ ἴσου* von Proklos übernimmt, deutet ihn als Durchgang von einem rechten zu einem spitzen Winkel (s. o. S. 378, Anm. 13). Das ist aber in den antiken Texten anders. Der Grund ist wahrscheinlich, daß nur die Einteilung innere — äußere Halbkreiswinkel eine solche ohne Minimum der oberen und ohne Maximum der unteren Klasse ist, während im Fall des Campanus der rechte Winkel das Minimum der oberen Klasse (der stumpfen geradlinigen Winkel) darstellt und hier demgemäß gar keine Lücke vorliegt. Bei den um- und eingeschriebenen Polygonen gibt es aber in keiner Klasse ein Minimum bzw. Maximum, also, wenn nicht ein sie „ausfüllendes“ Polygon *μεταξύ* angenommen wird, — eine Lücke!

Vielleicht ist aber auch einfach die sozusagen „mechanische“ Übertragung der Ausdrücke *μείζων* — *ἐλάττω* von den krummlinigen Winkeln auf die Polygone aus dem Text von Euklid III, 16 von Bedeutung gewesen.

des Simplikios an Ammonios findet sich indessen eine Hindeutung auf das archimedische Axiom in dem Wort $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\beta\lambda\eta\tau\omicron\varsigma$ = (s. o. S. 381 f.). Bei Proklos dagegen ist das $\pi\omicron\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\epsilon\upsilon\upsilon$ ausdrücklich erwähnt (p. 122): $\tau\acute{\alpha}\ \delta\epsilon\ \lambda\omicron\gamma\omicron\nu\ \epsilon\chi\omicron\nu\tau\alpha\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha\ \delta\acute{\omicron}\nu\alpha\tau\alpha\iota\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\eta}\lambda\omega\nu\ \acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota\nu\ \pi\omicron\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\alpha\text{-}\zeta\acute{\omicron}\mu\epsilon\nu\alpha$. $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\acute{\epsilon}\xi\epsilon\iota\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \pi\omicron\tau\acute{\epsilon}\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\eta}\ \kappa\epsilon\rho\alpha\tau\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\eta}\varsigma\ \tau\acute{\eta}\nu\ \epsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\gamma\rho\alpha\mu\mu\omicron\nu$, $\delta\pi\epsilon\rho\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu$. Das $\pi\omicron\tau\acute{\epsilon}$ kann im Zusammenhang mit dem vorhergehenden Satz nur heißen: „einmal“, d. h., wenn genügend vervielfacht worden ist, wird der hornförmige Winkel den geradlinigen schließlich übertreffen. Wie aber die Vervielfachung gedacht ist, wird nicht gesagt.

Eine andere Proklos-Stelle zeigt, daß über die Möglichkeit einer Halbierung einer $\kappa\epsilon\rho\alpha\tau\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\eta}\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ eine Aporie bestand (p. 271, 15–19, wo es heißt: $\tau\acute{\eta}\nu\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \kappa\epsilon\rho\alpha\tau\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\nu\ \epsilon\iota\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omicron}\nu\ \delta\acute{\iota}\chi\alpha\ \delta\iota\epsilon\lambda\epsilon\acute{\iota}\nu\ \acute{\alpha}\pi\omicron\rho\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota\alpha\varsigma\ \acute{\alpha}\nu$).

Daß man die genaueren Vorschriften der Vervielfachung im Dunkel lassen konnte, mag zunächst sonderbar erscheinen. Man braucht aber, um das zu verstehen, nur den auf den vorhin zitierten folgenden Satz des Proklos zu lesen (p. 122, 6–7): $\delta\epsilon\acute{\iota}\kappa\nu\tau\alpha\iota\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ (nämlich im Euklid III, 16) $\delta\tau\iota\ \pi\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu\ \acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\omega\nu\ \epsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu\omicron\nu$ (scil. $\acute{\eta}\ \kappa\epsilon\rho\alpha\tau\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\eta}\varsigma$), d. h. Euklid hat gezeigt, daß überhaupt jeder denkbare hornförmige Winkel kleiner als jeder spitze ist. Man kann also die Vervielfachung der hornförmigen Winkel definieren wie man will – solange dabei nur das Prinzip gewahrt bleibt, daß alle Vielfache eines hornförmigen Winkels wiederum hornförmige Winkel, und alle Teile eines inneren Halbkreiswinkels wieder innere Halbkreiswinkel sind, wird gegenüber den spitzen Winkeln weder der archimedische Satz (Euklid, El. V, def. 4) durch die äußeren (hornförmigen), noch das Theorem X, 1 durch die inneren Halbkreiswinkel erfüllt sein. Die erwähnte Bedingung ist aber wahrscheinlich den Griechen als selbstverständlich erschienen.

Genau dieselbe Auffassung hat Philoponos bei der Definition seiner $\alpha\acute{\upsilon}\xi\eta\sigma\iota\varsigma$ und $\mu\epsilon\acute{\iota}\omega\sigma\iota\varsigma$ der Halbkreiswinkel, diese vollzieht sich immer durch Vermehrung oder Verminderung des Radius r des Halbkreises. Modern ausgedrückt ist also das Maß des inneren Halbkreiswinkels:

$$\eta = f(r) \quad \text{wo } f \text{ monoton wachsend,}$$

des äußeren Halbkreiswinkels:

$$\epsilon = \varphi(r) \quad \text{wo } \varphi \text{ monoton abnehmend ist}^{27}).$$

Umgekehrt bedeutet die Nichtmeßbarkeit der Winkel, wenn sie für jede beliebige Wahl der Funktionen $f(r)$, $\varphi(r)$ besteht, soviel

²⁷⁾ Die einfachste Wahl von f und φ ist wohl gegeben durch:

$$\eta = \text{const. } r, \quad \varphi = \text{const. } 1/r.$$

Diese Wahl der Funktion findet sich (soweit mir bekannt) zum ersten Male bei Nicole Oresme (um 1370) in seinem Werke „de figuratiōe potentiarum“ pars. I, cap. 21 (vgl. die [teilweise] Ausgabe von Wieleitner [nach einer Abschrift von

wie das Auftreten einer Lücke. Allerdings — in diesem Zusammenhang — nur dann, wenn diese Nichtmeßbarkeit gilt sowohl für die *αὔξεις* der äußeren Halbkreiswinkel durch den unbegrenzten *πολλαπλασιασμός*, als auch für die *μείωσις* der inneren Halbkreiswinkel durch fortgesetztes *δίχα τέμνειν* (oder irgendeine andere Form unbegrenzter Zerlegung: griechisch: *διαίρεσις* oder *ἀφαίρεσις*, vgl. Aristoteles, Physik 6, p. 206 b 4: *τὸ ἄπειρον κατὰ διαίρεσιν* cf. b 24; 207 a 23). Dem entsprechen die beiden Formulierungen der Meßbarkeit bei Euklid: El. V, def. 4 und X, theor. 1.

Dagegen würde die einseitige Nichtmeßbarkeit (wenn das oben genannte Kongruenzaxiom nicht anwendbar ist) eine Lückenhaftigkeit nicht immer bedingen. Z. B. erreichen die inneren Halbkreiswinkel durch Vervielfachung niemals den rechten geradlinigen Winkel. Trotzdem besteht zwischen den inneren Halbkreiswinkeln als Unterklasse und dem rechten bzw. den stumpfen geradlinigen Winkeln als Oberklasse keine Lücke, sondern der dem Dedekindschen Axiom genügende Schnitt. Der rechte Winkel nämlich trennt die stumpfen Winkel von den inneren Halbkreiswinkeln im Sinne Dedekinds.

Hier scheint nun der tiefere Grund zutage zu treten, weshalb die oben gekennzeichnete Zuordnung zum Quadraturproblem so und nicht wie bei Campanus erfolgt. Bei dem Vergleichsmodus des Campanus würde man gerade auf die soeben gekennzeichnete Eigentümlichkeit des rechten Winkels stoßen.

Worauf es also eigentlich ankommt, ist die Nichtmeßbarkeit in doppelter Richtung, von unten her durch Vervielfachung, von oben her durch Teilung. Dem steht im Falle der Polygone die Meßbarkeit in doppelter Richtung gegenüber. Jedes eingeschriebene Polygon übertrifft, genügend oft vervielfacht, jedes umgeschriebene (Euklid V, def. 4). Und jedes umgeschriebene unterschreitet, genügend oft geteilt, jedes eingeschriebene (Euklid X, 1).

6.

Warum also, so fragen wir zum Schluß, haben die Griechen an die Existenz eines dem Kreise flächengleichen Quadrates geglaubt? Und wir erhalten die Antwort: weil die dem Kreis eingeschriebenen und

P. Duhem], Bibliotheca Mathematica XIV; unsere Stelle S. 219). Aber es ist nach den erwähnten Andeutungen von Proklos sehr wahrscheinlich, daß der Oresmesche Gedanke schon in der Antike gefaßt worden ist. Oresme sagt dort u. a.: „*sit circulus major cujus semidiameter sit AB et circulus minor cujus semidiameter sit AC, tunc si sit semidiameter AB dupla ad semidiametrem AC, curvitas minoris circuli erit duplo intensior curvitate majoris et ita <de aliis> proportionibus et curvitatibus.*“

umgeschriebenen Polygone ein „in doppelter Richtung“ archimedisches System bilden.

Die Griechen waren der Meinung, daß solche archimedischen Systeme auch im Dedekindschen Sinne stetig seien, d. h. daß jeder Dedekindsche „Schnitt“ in ihnen durch ein (und nur ein) trennendes Element hervor-gebracht würde.

Daß ein dem Kreise flächengleiches Polygon existiert, ergibt sich dann aus der Existenz und Eindeutigkeit des die Einteilung sämtlicher Kreispolygone in um- und eingeschriebene erzeugenden Elementes. Dieses „Element“ ist eben das Polygon, das wie der Kreis den gemeinten „Schnitt“ hervorbringt, also mit ihm dem Flächeninhalt nach zusammenfällt.

Wir sehen die Sache heute anders an. Denn erstens setzen wir für ein von uns betrachtetes „lineares“ System ein gewisses Kongruenzaxiom voraus, das für das „nicht lineare“ (*οὐ γραμμικόν*), für die Griechen paradigmatische System der Halbkreiswinkel gerade nicht gilt. Und zweitens nimmt der Grieche stillschweigend ein bestimmtes „Homogenitätsprinzip“ an für die Vervielfachung und Teilung (nach dem jede Größenart innerhalb ihrer *ποιότης ἰδιόζουσα* ihrer *οἰκεῖα μορφή*, ihrem *χαρακτήρ ὑπάρξεως* verbleibt)²⁸), das uns wiederum fremd ist. Daß der Grieche so verfährt, scheint mir durch die gestaltliche Struktur seines „nichtarchimedischen“ Paradigma bedingt, die gerade seine Annahme nahelegt und unsere in der Tat ausschließt. Und so scheint mir, daß den antiken Mathematikern ein legitimer Vorwurf nicht gemacht werden darf²⁹).

Wenn ich es wage, den Kern all der geschilderten Gedankengänge schon dem Eudoxos zuzuschreiben, so folge ich mehr einem Gefühl als strengen Belegen. Daß sie aber in der Spätantike vorlagen, das glaube ich aus den Dokumenten bewiesen zu haben.

²⁸) Proklos, in Eucl., p. 124, 4/5. 10—13.

²⁹) Es sei noch bemerkt, daß unser altbekanntes Beispiel eines archimedischen Systems ohne Stetigkeit, die rationalen Zahlen, nicht den Voraussetzungen des griechischen Homogenitätsprinzips genügt. Es gibt in ihm überhaupt keine zwei Klassen mit je einer *ποιότης ἰδιόζουσα*. Und deshalb verliert das genannte Prinzip seine Bedeutung, denn die Mitrechnung gänzlich trivialer Fälle ist dem Griechen fremd.