

ILLiad TN: 3857095



Scan&Deliver

Borrower: HLS
Lending String: HLS

Call #: WID GEN Math 174.2

Location: HLS

2/18/2012 09:29:26 AM

Patron: Graduate: Amy Koenig

Shipping Address:

Harvard University - Widener Library
Interlibrary Loan
Harvard University
Cambridge, MA 02138

Journal Title: Quellen und Studien zur Geschichte
der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung
B, Studien.

Volume: 3 **Issue:**
Month/Year: 1936 **Pages:** 236-244

Fax:
Ariel:
Odyssey: 206.107.43.109
Email:

Article Author: Becker, O.

MaxCost:

Article Title: Eudoxus-Studien III: Spuren eines
Stetigkeitsaxioms in der Art des Dedekindschen
zur Zeir des Eudoxos

Special Instructions:

ILL Number: 3857078



THIS IS NOT AN INVOICE!

NON-IFM LIBRARIES WILL RECEIVE AN
INVOICE UNDER SEPARATE COVER FOR THIS
TRANSACTION FROM HARVARD UNIVERSITY
ACCOUNTS RECEIVABLE IN 4-6 WEEKS

**PLEASE DO NOT SEND PAYMENT UNTIL YOU
RECEIVE AN INVOICE!**

Widener Library Interlibrary Loan

Eudoxos-Studien III.

Spuren eines Stetigkeitsaxioms in der Art des Dedekind'schen zur Zeit des Eudoxos.

Von Oskar Becker (Bonn).

1.

In unserer II. Eudoxos-Studie (ds. Zts. Bd. II, S. 369 ff.) hatten wir gezeigt, daß bei Philoponos (in Aristotelis Anal. post. p. 112 [Wallis]) ein von Proklos ausgesprochenes Stetigkeitsaxiom überliefert ist, das als Grundlage der eudoxischen Exhaustionsbeweise, insbesondere des dort verwendeten Postulats der Existenz der 4. Proportionalen (in den Fällen, in denen ihre Konstruktion unmöglich ist) anzusehen ist. Dieses Axiom tritt bei Proklos auf in seiner Deutung der Überlieferung über die Kreisquadratur des Bryson, der als (älterer) Zeitgenosse Platons angesehen werden darf¹⁾. Es gelang aber in jener Arbeit nicht, direkte Quellen für die Formulierungen dieses Stetigkeitsprinzips aufzuweisen, die früher als Proklos waren. Inzwischen ist dies gelungen und soll im Folgenden dargestellt werden.

Das in Rede stehende Axiom hat bei Proklos folgenden Wortlaut: „Im Vergleich wozu es Größeres und Kleineres gibt, dazu gibt es auch Gleiches“ (a. a. O., S. 376). Von diesem Prinzip gibt es nun schon bei Platon und Aristoteles ganz entsprechende Fassungen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

A.

I. Plato, Parm. 161 D: ὅτι ἄρα ἔστι μέγεθος καὶ μικρότης, ἔστι καὶ ἰσότης αὐτῶν, μεταξὺ τούτων οὐσα.

II. Aristoteles, Eth. Nic. V, 5 (p. 1113 a 9—12): ὅλον ὅτι καὶ μέσον τί ἐστὶ τοῦ ἀνίσου. τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ ἴσον· ἐν ᾗ οἷα γὰρ πράξει ἐστὶ τὸ πλεόν καὶ τὸ ἔλαττον, ἔστι καὶ τὸ ἴσον.

III. Proclus (Philoponus in Anal. post. p. 112, 22 W): οὐ δὲ ἔστι μείζον καὶ ἔλαττον, τούτου ἔστι καὶ ἴσον.

¹⁾ Im 13. Brief (360 B) erwähnt Platon als Lehrer eines jungen Mannes Helikon (der außerdem ein Eudoxoschüler ist) den Polyxenos (der nach anderen das berühmte τρίτος-ἄνθρωπος-Argument gegen die Ideenlehre erfunden haben soll) und als dessen Lehrer wiederum den Bryson.

B.

I. Aristoteles, Phys. VII, 4 (p. 248 a 24): ἔσται γὰρ μείζων καὶ ἐλάττων ἢ περιφερὴς τῆς εὐθείας, ὥστε καὶ ἴση.

II. Proclus (Philoponus in Anal. post. p. 112, 23 W): ἔστι δὲ μείζων καὶ ἐλάττων εὐθύγραμμον τοῦ κύκλου · ἔστιν ἄρα αὐτοῦ καὶ ἴσον.

B*.

Kommentar des Simplicius zur Stelle B I (Simpl. in Phys. p. 1048, 13 Diels): ἐν αἷς δὲ τὸ μείζων καὶ τὸ ἐλάττων ἔστιν, ἐν τούτοις οἷον τέ ἐστι καὶ τὸ ἴσον λαβεῖν, ὥστε ἔσται τις περιφερὴς εὐθεία ἴση. τὸ δὲ „ἔσται γὰρ μείζων καὶ ἐλάττων ἢ περιφερὴς τῆς εὐθείας“ εἶναι ἀντὶ τοῦ „ἔσται γὰρ ποτὲ μείζων ποτὲ δὲ ἐλάττων“ . . .

Daß es sich bei A I—III und B I—II um im wesentlichen identische Formulierungen handelt, ist wohl unmittelbar einsichtig. Und eine Betrachtung der Zusammenhänge, in dem die Stellen stehen, bestätigt das.

In der Plato-Stelle A I könnte μέγεθος und μικρότης (Größe und Kleinheit) anstelle des Größer- und Kleiner-Seins auffallen. Doch ist bekannt, daß es sich bei Plato hier, wie so oft, um relative Größe und Kleinheit handelt, wie ja auch das ἄπειρον von ihm als das μέγα καὶ μικρόν bezeichnet wird, was, wie die Erörterung im „Philebos“ 24 A ff. zeigt, auf das Schwanken (Größer- und Kleinerwerden) der unbestimmten Größe hinweist (die Komparative im „Philebos“ und das σφόδρα καὶ ἥρμα). Dazu findet sich außerdem die genaue Parallele bei Aristoteles Met. X, 5 p. 1056 a 12: τὸ μὲν ἴσον μεταξύ φαίνεται μεγάλου καὶ μικροῦ. Vgl. Plato, Parm. 161: ἀλλὰ μέντοι ἀνισότητος γ' ἐστὶ μέγεθος τε καὶ μικρότης. — μέγεθος μὴν καὶ μικρότης αἰεὶ ἀφέστατον ἀλλήλοιν. — μεταξύ ἄρα τε αὐτοῖν αἰεὶ ἐστίν. — ἔχεις οὖν τι ἄλλο εἰπεῖν μεταξύ αὐτοῖν ἢ ἰσότητος (worauf A I folgt). Zugleich ist damit auch die Verbindung mit A II hergestellt.

Denn ebenso wie Plato stellt auch Aristoteles den fraglichen Satz nicht *ad hoc* auf oder bringt ihn als etwas Neues, sondern verweist lediglich auf ihn als etwas Bekanntes. Bei Platon ist der Satz neben vielen anderen ein (mehr oder minder) zufälliges Material, an dem das dialektische Exerzitium (ἡ γυμνασία) vorgenommen wird, in der aristotelischen Nikomachischen Ethik tritt er auf als κοινόν, in etwas spezialisierter Form (πρᾶξις statt πρᾶγμα, wie es allgemeiner gefaßt heißen müßte!) zur Begründung der ethischen Lehre der „mittleren“ Tugend. ἐπεὶ δ' ὁ τ' ἄδικος ἀνίσος καὶ τὸ ἄδικον ἀνίσον (1131 a 9) heißt es unmittelbar vor B I. Das „Ungleiche“ (d. h. Unbillige, wo Anspruch und Erfüllung ungleich sind) ist das Unrechte, also das „Gleiche“ das Rechte. Da nun aber allgemein (nicht etwa nur auf ethischem Gebiet) das Gleiche das Mittlere des Ungleichen ist, folgt als das Rechte das Mittlere des (in beiderlei Sinn einseitigen) Unrechten. Dies geht, wie bekannt, zurück auf die medizinische μεσότης-Lehre der Pythagoreer

(Alkmaion von Kroton), nach der das Gesunde die rechte Mitte zwischen zwei verschiedenen krankhaften Extremen ist, eine Lehre, die auch die aristotelische Psychologie beeinflusst hat (vgl. z. B. *de anima* II, 11; p. 424 a 4 ff.). Auch hier also gehört der Satz A II einer allgemeinen Größenlehre an (wie er ja auch von den späteren Kommentatoren [Philoponos l. c. p. 115, 3—7, Eudox.-Stud. II, a. a. O. S. 376, Anm. 10] ausdrücklich als *κοινόν* bezeichnet wird), auf die bloß als etwas Bekanntes verwiesen wird.

Es wäre hier aber noch immerhin ein Zweifel möglich, ob die Stellen A I, A II im mathematischen Sinn zu verstehen sind. Bei Plato könnte man an Intensitäten (qualitative „Stärken“ wie: „wärmer“, „kälter“; vgl. das *ἄπειρον* im „Philebos“ 24 A ff.) denken; in der Nikomachischen Ethik an Maßlosigkeit und Maßhalten im moralischen Sinn. Aber B I zeigt, daß fast genau dasselbe geometrische Problem mit unter die Herrschaft dieses Prinzips fällt wie das von Proklos behandelte: nämlich hier Rektifikation, dort Quadratur, was, wie wir a. a. O., S. 380 ff. zeigten, auch für Proklos, Ammonios und Simplicios nahe zusammen gehörte.

An dem existentiellen Sinne des Axioms könnte man nur bei der Fassung B I zweifeln, für A I, II ist er unmittelbar klar. Aber auch bei B I zeigt der Zusammenhang (was der Simplicios-Kommentar B* bestätigt), daß es sich um die Existenz eines Kreisbogens, der einer gegebenen geraden Strecke gleich ist, handelt. (Vgl. Aristot. *Phys.* VII, 4 (p. 248 a 12 f.): *ἔσται περιφερὴς τις ἴση εὐθείᾳ, καὶ μείζων δὴ καὶ ἐλάττω.* — cf. a 15: *ἔσται ἄρα ἴσον πάθος μήκει.* — a 17: *ὥς οὐκ ἔστιν ἀλλοίωσις πορὰ ἴση οὐδ' ἐλάττω.*) Auch, daß der Satz B I lediglich eine kurze Verweisung auf Bekanntes darstellt, kann nicht bestritten werden. Es ist freilich richtig, daß im Folgenden (p. 248 a 25—b 6) eine Erläuterung folgt, die infolge des *γάρ* (248 a 25) als eine Begründung von B I aufgefaßt werden könnte. Die Nachprüfung zeigt aber, daß eine stichhaltige Begründung keineswegs gegeben wird, sondern nur eine auf das Gesamtproblem des Vergleichs von krummer und gerader Bahn bei synchronen Bewegungen bezügliche Betrachtung, die die Möglichkeit der Gleichheit von Bogen und Strecke erklärt. Übrigens wird zum Schluß die Rektifikation für unmöglich erklärt, d. h. ebenso wie das Gleichsein auch das Größer- oder Kleinersein von *περιφερὴς* und *εὐθεία* geleugnet.

So kann man also sagen: das Stetigkeitsaxiom im existentiellen („Dedekind'schen“) Sinn²⁾ findet sich schon beim späteren Platon und ebenso bei Aristoteles, wo es als akademisches Gut zu werten ist, besonders wo es in dem nach Jaeger³⁾ frühen Buch VII der Physik auftritt.

²⁾ Vgl. Eudoxos-Studie II; ds. Zts. Bd. II, S. 374, Anm. 9.

³⁾ s. „Aristoteles, Grundlegung einer Geschichte seiner Entwicklung“ (Berlin 1923), S. 312, bes. Anm. 2, 313, bes. Anm. 1.

Der Zusammenhang mit der pythagoreischen μεσότης-Lehre macht es nicht unwahrscheinlich, daß es noch älter als Platon ist, wofür vor allem auch die ganze Art seiner Verwendung im „Parmenides“ spricht. Auch kann man wohl auf die ἐναντιότης-Lehre des „Protagoras“ (also eines frühen Dialoges) hinweisen: p. 331 D: καὶ γὰρ ὁτιοῦν ἀμῇ γε πῇ προσέοικε· τὸ γὰρ λευκὸν τῷ μέλανι ἔστιν ὅπῃ προσέοικε, καὶ τὸ σκληρὸν τῷ μαλακῷ καὶ τὰλλα ἃ δοκεῖ ἐναντιώτατα εἶναι ἀλλήλοις.

Hier wird gerade von den Gegensätzen (Schwarz-Weiß, Hart-Weich) gesagt, daß sie sich „irgendwie“ ähneln; im Hintergrund steht offenbar auch hier der Gedanke einer zwischen (μεταξύ) den Extremen (ἄκρα) liegenden Mannigfaltigkeit (die „Mitte“ μεσότης), die alle unter sich ähnlichen Glieder einer bestimmten Gattung (γένος) umfaßt.

2.

Es ist bei Proklos (in Euclid. p. 234, 18—19; vgl. Eud.-Stud. II, a. a. O. S. 377 ff.) noch eine etwas andere Fassung des Stetigkeitsaxioms überliefert, bei der der stetige Übergang vom Größeren zum Kleineren durch das Gleiche hindurch in den Vordergrund tritt. (ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἑλάττω διὰ τοῦ ἴσου γίνεται.) Auch dazu gibt es eine frühere Parallele, wenn auch nicht in derselben Schärfe wie die unter A und B angeführten.

Ferner aber wird bei den späten Kommentatoren auch die Frage der Gültigkeitsgrenze des Axioms erörtert: es gilt nach der allgemeinen Meinung lediglich für homogene Größen, wobei allerdings die nähere Erläuterung für diesen Begriff nicht eindeutig erfolgt (Eud.-Stud. II, a. a. O. S. 378 ff.). Auch diese Betrachtungen sind in ihrem Kern alt, d. h. zum mindestens aristotelisch.

Beides (der Übergang und seine Bedingungen) werden im 5. Kapitel des 10. Buches der arist. Metaphysik erörtert:

Es wird dort nach dem eigentümlichen Gegensatz gefragt, der zwischen dem „Gleichen“ (ἴσον) und dem „Ungleichen“ (ἄνισον) besteht. Das letztere ist nicht einfach das Nicht-Gleiche, sondern das „Große und Kleine“ (μέγα καὶ μικρόν bzw. μείζον καὶ ἑλάττω, „mehr oder weniger“, welche Ausdrücke abwechselnd gebraucht werden). Das Gleiche ist dementsprechend das, was „weder groß noch klein ist, aber fähig entweder groß oder klein zu sein“ (τὸ ἴσον τὸ μήτε μέγα μήτε μικρόν, πεφυκὸς δὲ ἢ μέγα ἢ μικρόν εἶναι. 1056 a 22—23)⁴). Gegenüber dem Ungleichen ist das Gleiche gekennzeichnet als eine Art Privation, weil es zwischen (μεταξύ) den beiden Polen des Ungleichen (das gewisser-

⁴) Vgl. de anima II, 11 (p. 424 a 7—9): καὶ δεῖ ὥσπερ τὸ μέλλον αἰσθῆσθαι λευκοῦ καὶ μέλανος μηδέτερον αὐτῶν εἶναι ἐνεργεῖα, δυνάμει δὲ ἄμφω. Met. X, 4 (p. 1055 b 10—11): ἴσον μὲν γὰρ ἢ οὐκ ἴσον πᾶν, ἴσον ἢ ἄνισον οὐ πᾶν, ἀλλ' εἴπερ, μόνον ἐν τῷ δεκτικῷ τοῦ ἴσου.

maßen eine δῶς ist [a 10]) liegt. Ähnlich verhält es sich mit dem weder Guten noch Schlechten, das, ohne Namen (ἄνῳνον) und seiner Kategorie nach nicht bestimmt, zwischen beiden liegt; ähnlicher noch mit dem, was weder Schwarz noch Weiß, aber dazwischen ist. Auch dieses ist nämlich nicht Eines (wie das Gleiche zwischen Groß und Klein) aber immerhin sind die Farben zwischen Schwarz und Weiß begrenzt; sie sind grau oder weißlich (blaß), d. h. nicht bunt (ἀλλ' ὀρισμένα πως τὰ χρώματα ἐφ' ὧν λέγεται στερητικῶς ἡ ἀπόφασις αὐτῇ. ἀνάγκη γὰρ ἢ φαῖδν ἢ ὠχρὸν εἶναι ἢ τοιοῦτόν τι ἄλλο. a 28—30).

Diesen Punkt führt Ps.-Alexander in seinem Kommentar (p. 600, 21 ss. Bz.) näher aus: es seien nicht Farben wie Purpur und Grün gemeint, die ja auch weder Schwarz noch Weiß sind, sondern solche die μετῶ οὐ πάντοτε πολλῶ ἀλλὰ βραχεὶ ὑποκίπτουσιν, die gewissermaßen die die kürzeste Verbindung zwischen Schwarz und Weiß darstellen (wie noch in dem Farbenoktaeder unserer heutigen Psychologie).

Nicht immer gibt es ein solches Zwischen. So z. B. nicht zwischen Schuh und Hand; es sei nicht zutreffend, wenn manche meinten: ἐσσεσθαι ὑποδήματος καὶ χειρὸς μεταξὺ τὸ μήτε ὑπόδημα μήτε χεῖρα (a 31—32). Denn eine gemeinsame Privation (συναπόφασις) gegenüber zwei entgegengesetzten extremen Termen findet nur bei dem statt, wo es seinem Wesen nach ein Zwischen gibt und einen Zwischenraum (διάστημα): ἡ μὲν γὰρ ἀντικείμενων συναπόφασις ἐστὶν ὧν ἐστὶ μεταξὺ τι καὶ διάστημα τι πέφυκεν εἶναι (a 35—36). Im andern Fall gibt es keine Differenz (innerhalb eines Genus, also „spezifischer“ Art); in einer anderen Gattung sind die beiden Begriffe, die vereint werden, so daß das, was vorliegt, nicht einheitlich ist (wie im Falle „Schuh—Hand“): τῶν δ' οὐκ ἐστὶ διαφορά. ἐν ἄλλῃ γὰρ γένει ὧν αἱ συναποφάσεις, ὥστ' οὐχ' ἐν τὸ ὑποκείμενον.

Dazu gibt Ps.-Alexander folgende klare Erläuterung: p. 601, 3 ss: ἡ μὲν δὴ συναπόφασις τῶν ὁμολογουμένως ἀντικείμενων ἐστὶ καὶ ὧν ἐστὶ μεταξὺ καὶ διάστημα, δι' οὐ γίνεται ἡ μεταβολὴ ἐκ τοῦδε εἰς τόδε· οἷον ἐκ τοῦ κακοῦ εἰς τὸ ἀγαθὸν καὶ ἔμπαιον. ἡ δὲ χεῖρ καὶ τὸ ὑπόδημα ὁμολογουμένως μὴ ὄντα ἀντικείμενα, πῶς ἂν εἴη τούτων συναπόφασις; οὔτε γὰρ ἀντικείμενά εἰσιν, οὔτε ἐστὶν αὐτῶν διαφορά· ἐν ἄλλῃ δὲ γένει· ὧν ἐστὶ συναπόφασις, ταῦτα ὁμογενῆ ἐστίν.

Es folgt also: die συναπόφασις, der Zwischenraum (μεταξὺ καὶ διάστημα) durch die der Umschlag von einem Gegensatz zum andern erfolgt, findet sich nur bei homogenen Wesenheiten; die allein besitzen eine (spezifische) Differenz⁵⁾.

Genau dies meint Proklos, wenn er sagt: ἡ μετάβασις οὐ πάντως διὰ τοῦ ἴσου γίνεται, nämlich dann nicht, wenn das Zugrundeliegende (τὸ ὑποκείμενον) nicht homogen, also nicht einheitlich ist.

⁵⁾ Vgl. de anima II, 4 (p. 416 a 34): ἡ δὲ μεταβολὴ πᾶσιν εἰς τὸ ἀντικείμενον ἢ τὸ μεταξὺ.

Proklos und die späteren Kommentatoren begrenzen die Geltung des Stetigkeitsaxioms (und dementsprechend die Existenz eines stetigen Übergangs, μεταβάσις, μεταβολή) auf den homogenen Fall, in welchem die Wesenheiten vergleichbar (συμβλητά) sind.

Ebenso heißt es bei Aristoteles (Met. X, 4; p. 1055 a 6—7): τὰ μὲν γένει διαφέροντα (also τὰ ἀνομογενή!) οὐκ ἔχει ὁδὸν εἰς ἄλληλα, ἀλλ' ἀπέχει πλέον καὶ. (scil. ἐστὶ) ἀσύμβλητα. (Das Inhomogene hat keinen Weg zu einander, steht sich ferner und ist unvergleichbar.) Und auch die oben als B I bezeichnete Stelle steht im VII. Buch der Physik in dem größeren Zusammenhang der Frage, ob jede „Bewegung“ (Veränderungsweise) mit der anderen vergleichbar sei oder nicht (VII, 4; p. 248 a 10: πότερόν ἐστι πᾶσα κίνησις πάσῃ συμβλητῇ ἢ οὐ;), eine Frage, die verneint wird, sogar für die Bewegungen auf kreisförmiger gegenüber denen auf gerader Bahn, die als verschiedenen γένῃ angehörig angesehen werden.

Es wurde nun in der II. Eudoxos-Studie (a. a. O. S. 379f.) festgestellt, daß zwar der formale Entscheidungsgrund der Geltung des Stetigkeitsprinzips, die „Homogenität“, für alle späteren Kommentatoren derselbe sei, dagegen nicht die materielle Interpretation. Wann zwei geometrische Gebilde homogen sind, diese Frage wird von Proklos und Simplicios anders beantwortet als von Ammonios und Philoponos. Die erste Gruppe wendet das „archimedische“ oder vielmehr „eudoxische“ Kriterium an, d. h. zwei Größen sind homogen, wenn sie ein „Verhältnis“ (λόγος) zu einander haben, und dies ist wiederum der Fall, wenn die kleinere, genügend oft vervielfältigt, die größere übertrifft (Euklid, Elem. V, def. 3 u. 4). Die zweite Gruppe begnügt sich mit mathematisch vagen gestaltlichen Kriterien (wie gerade und krumm).

Es fragt sich: wie ist hier die Stellung der Quellen aus eudoxischer Zeit, insbesondere der aristotelischen Schriften?

3.

Über den Zusammenhang von ὁμογενές, συμβλητόν und λόγον ἔχον gibt eine Stelle aus de generatione et corruptione II, 6 (p. 333 a 19 ff.) gut Aufschluß: ἀνάγκη ταὐτό τι εἶναι ὑπάρχον ἅπασιν τοῖς συμβλητοῖς ὃ μετροῦνται und weiter a 34 f.: τὸ γὰρ αὐτὸ πλεῖον τῷ ὁμογενές εἶναι τοιοῦτον ἔξει τὸν λόγον. Der Zusammenhang zeigt, daß das Homogene in einem Zahlenverhältnis steht, während es beim Inhomogenen schwierig ist, z. B. durch „Analogie“ ein Intensitätenverhältnis oder dgl. herzustellen. Ferner wird in dem Kapitel 4 des VII. Buches der Physik in ausführlicher Weise die Vergleichbarkeit von der Gleichartigkeit (bezogen auf γένος und εἶδος) abhängig gemacht, und im folgenden Kapitel 5 werden viele Beispiele von Proportionen (ἀνάλογον, ἀναλογία) in einem Bereich von homogenen, vergleichbaren Größen aufgestellt.

So ist der Sache nach die Def. 3 des V. Buches der Elemente in Geltung: λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις; cf. Proclus in Euclid, p. 121, 24: πάντα τὰ ὁμογενῆ μεγέθη πεπερασμένα ὄντα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα.

Die Bedingung der Endlichkeit für die Existenz des λόγος findet sich ebenfalls öfter ausgesprochen: z. B. Arist. de coelo I, 7 (p. 275 a 13): τὸ γὰρ ἄπειρον πρὸς τὸ πεπερασμένον ἐν οὐδενὶ λόγῳ ἐστίν. — I, 6 (p. 274 a 7): λόγος δ' οὐδεὶς ἐστὶ τοῦ ἀπείρου πρὸς τὸ πεπερασμένον. — Andererseits Phys. IV, 8 (p. 215 b 13): μηδὲν οὐκ ἔχει λόγον πρὸς ἀριθμόν. — τὸ κενὸν πρὸς τὸ πληρὲς οὐδένα οἶόν τε ἔχειν λόγον (b 19).

Aber es bleibt noch eine Frage übrig: Ist das λόγον ἔχειν bei Aristoteles schon wie bei Euklid (V, def. 4) und Proklos (in Euclid. p. 122 a) durch das multiplikative Axiom des Messens definiert (τὰ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δύνανται ἀλλήλων ὑπερέχειν)?

Man kann dies nach den erhaltenen Stellen nicht direkt bejahen. Zwar findet sich ein deutlicher Hinweis auf das eudoxische Axiom: Phys. III, 6 (206 b 11): διὰ τὸ πᾶν τὸ πεπερασμένον ἀναρρεῖσθαι ὁτιοῦν ὠρισμένῳ, „weil jedes Begrenzte erschöpft wird durch ein beliebiges abgegrenztes (Stück, falls dieses genügend oft vervielfältigt wird)“. Vgl. auch Phys. VIII, 10 (266 b 2—4): πρὸς πεπερασμένον γὰρ ἀεὶ προστιθεὶς ὑπερβαλὼ παντὸς ὠρισμένου καὶ ἀφαιρῶν ἐλλείψω ὡσαύτως. (Hier sogar das Entsprechende zu Elem. V, def. 4 u. X, 1.) Aber der Begriff des λόγος wird nirgends im Zusammenhang mit dem Maßaxiom erwähnt. Auch scheint dieser Begriff wesentlich am rationalen Verhältnis (ὡς ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν) zu hängen. cf. de sensu 3 (p. 439 b 78 ff.): . . . καὶ κατ' ἄλλους ἀριθμοὺς ἐστὶ παρ' ἄλληλα κείσθαι (scil. τὰ χρώματα), τὰ δὲ ὅλως κατὰ μὲν λόγον μηδένα, καθ' ὑπεροχὴν δὲ τινα καὶ ἔλλειψιν ἀσύμμετρον, welcher Stelle man allerdings die von Stenzel ausführlich behandelte⁶⁾ Met. Δ 15 (p. 1021 a 3 ff.): „τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμόν(!) λέγονται“ entgegensetzen müßte, wenn man es nicht doch mit Zeller (gegen Stenzel) vorzieht, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν oder <κατ'> ἀριθμόν (und dann mit Cod A^b vorher ἀριθμὸς σύμμετρον) zu schreiben, was wohl das Richtigere sein dürfte. — Allerdings ist in der bekannten, in der Eudoxos-Studie I behandelten Topik-Stelle (VIII, 3; p. 158 b 29—35) sicher von einem allgemeinen, eventuell auch irrationalen λόγος ausdrücklich die Rede⁷⁾.

Wenn auch hier vorläufig zu keiner Klarheit zu kommen ist, so ist doch die Stellung zur Lösbarkeit des Quadratur- und Rektifikationsproblems bei Aristoteles höchstwahrscheinlich negativ. Das ergibt

⁶⁾ s. „Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles“, 2. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1933), X. Logos aoristos S. 162 ff., bes. 163 und ferner in ds. Zts. Bd. I, S. 34 ff. „Zur Theorie des Logos bei Aristoteles“, insb. S. 57 ff.

⁷⁾ Vgl. Eudoxos-Studie I, ds. Zts. Bd. II, S. 311 ff.

sich aus seiner Stellung zu Brysons Versuch⁸⁾ (Soph. El. [= Top. VIII], cap. 11; p. 171 b 16 ff.) Analyt. post. I, 9 (p. 75 b 40 ff.) und entsprechend zur Rektifikation (s. o. zu Phys. VII, 4).

Die Zeilen p. 75 b 40—76 a 3 sind vielleicht so zu deuten: κατὰ κοινόν τε γὰρ δεικνύουσιν οἱ τοιοῦτοι λόγοι, ὃ καὶ ἑτέρῳ ὑπάρξει: „Argumente wie das Brysons (vermittels des Stetigkeitsprinzips) beweisen in allgemeiner Weise (Hinsicht) das, was auch anderen Gebilden (als den bei der Quadratur des Kreises auftretenden) zukommt“. διὸ καὶ ἐπ' ἄλλων ἐφαρμόττουσιν οἱ λόγοι οὐ συγγενῶν: „Deshalb passen diese Argumente auch auf andere nicht gleichartige Dinge“, — wie z. B. auf die hornförmigen Winkel zwischen den gradlinigen. Sie beziehen sich also nur zufällig oder mitfolgend (κατὰ συμβεβηχός) aber nicht mit innerer Notwendigkeit auf das spezifische (Quadratur-)Problem.

D. h. also: Es wird hier anscheinend das Argument des Ammonios vorweggenommen, über das Simplicios kritisch berichtet und dem Philoponos vorbehaltlos zustimmt (Eud.-Stud. II, a. a. O. S. 380 f.), daß die Unvergleichbarkeit der krummlinigen und gradlinigen Winkel auch die Unvergleichbarkeit der krummlinigen und gradlinigen Figuren beweise. Aristoteles' Stellung ist bezüglich der Quadratur wohl nicht so entschieden wie bezüglich der Rektifikation (vgl. noch die anscheinend zweifelnde Stellung *cat.* 6 p. 7 b 31), aber jedenfalls hält er wohl das Argument Brysons für nicht hinreichend, weil ihm die scharfe Unterscheidung der Fälle, in denen das Stetigkeitsaxiom anzuwenden ist oder nicht, fehlt.

Es fehlt also der Gedanke des Simplicios, dieses Kriterium in der „archimedischen“ Struktur des fraglichen „stetigen“ Systems zu finden. Ein Gedanke, den wohl wenigstens schon Proklos besessen hat.

Es ist nicht anzunehmen, daß Proklos einen so entscheidenden Gedanken selbst gefunden hat, und die archimedische Tradition, die das eudoxische multiplikative Axiom des Messens so sehr heraushebt (Vorrede zu quadr. parab.), spricht dafür, daß Eudoxos selbst dieses Axiom als entscheidendes Kriterium für „stetige“, d. h. homogene Systeme, in den je zwei Glieder einen λόγος zu einander haben, aufstellte. Dies war eine zu Aristoteles' (Früh-)Zeit noch ganz neue Errungenschaft, die nicht völlig in das Bewußtsein des mathematischen Laien Aristoteles und der durchschnittlichen Mitglieder der Akademie drang.

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis:

1. Das Stetigkeitsaxiom selbst, gerade in seiner existentiellen Form ist so alt oder sogar älter als der spätere Platon.
2. Auch die allgemeine Bedingung seiner Gültigkeit, die in der Homogenität des „stetigen“ Größensystems (die seine Vergleich-

⁸⁾ Vgl. Eudoxos-Studie II, ds. Zts. Bd. II, S. 372 ff.

barkeit bedingt) gefunden wird, ist mindestens so alt wie der frühe Aristoteles.

3. Dagegen ist die scharfe Fassung der „Homogenität“ durch das multiplikative Axiom des Messens erst dem Eudoxos zuzuschreiben und zur Zeit des jüngeren und mittleren Aristoteles noch nicht allgemein verstanden.

Genauer ist zum letzten Punkt zu sagen: Folgende beiden Sätze sind aristotelisch:

- a) Nur endliche und homogene Größen besitzen einen Logos zueinander.
- b) Endliche (und selbstverständlich „vergleichbare“, also „homogene“) Größen unterliegen dem „eudoxisch-archimedischen“ Axiom des Messens in seinen beiden Formen, der multiplikativen und der divisiven.

Aber es wird, obwohl es sachlich nahe läge, in einem aristotelischen Text unseres Wissens niemals versucht, den Begriff der „Homogenität“ durch die Tatsache des Unterworfenseins unter das Axiom des Messens zu definieren, also eine Umkehrung von (b) zu formulieren: „Was dem Axiom genügt, ist homogen und endlich“; was dann später Proklos und Simplikios wirklich tun.
