

continu, pourvu que les coefficients de ces substitutions satisfassent à certaines inégalités.

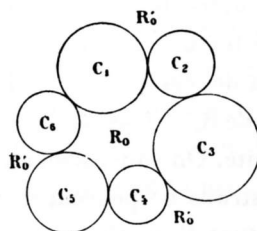
Parmi les groupes de la troisième famille, il en est qui méritent une mention particulière. On peut supposer que le polygone R_0 est symétrique par rapport à un certain cercle C_{n+1} , de telle façon que les cercles conjugués C_i et C'_i soient symétriques l'un de l'autre, et que toutes les substitutions du groupe puissent s'obtenir en combinant les inversions par rapport aux cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$. Nous dirons alors que le groupe est symétrique.

VIII. — Deuxième famille.

Supposons que $2n$ cercles $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$ soient situés de telle sorte : 1° qu'ils soient tous extérieurs les uns aux autres; 2° que le cercle C_i touche extérieurement les cercles C_{i-1} et C_{i+1} ; 3° que le cercle C_{2n} touche extérieurement les cercles C_{2n-1} et C_1 . Appelons A_i le point de contact des cercles C_{i-1} et C_i et A_1 le point de contact des cercles C_{2n} et C_1 . Le plan se trouve divisé en trois parties : 1° le polygone R_0 extérieur à chacun des cercles C et intérieur à la figure formée par l'ensemble de ces cercles; ce sera notre polygone générateur; 2° le polygone R'_0 extérieur à la fois à tous ces cercles et à la figure formée par leur ensemble; 3° enfin l'intérieur des divers cercles C .

Si nous formons le polyèdre générateur P_0 , ce polyèdre présentera $2n$ faces de la première sorte formées par les surfaces des sphères qui ont même centre et même

Fig. 11.



rayon que les cercles C ; deux faces de la deuxième sorte qui seront les polygones R_0 et R'_0 et $2n$ sommets isolés $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Je supposerai que les faces C_i et C_{2n+1-i} sont conjuguées et que le polyèdre admet $n+1$ cycles paraboliques, formés respectivement des sommets A_1, A_2 et $A_{2n}; \dots; A_i$

et $A_{2n+2-i}; \dots; A_n$ et $A_{n+2}; A_{n+1}$. Cela suppose que nous avons entre les sommets A la relation

$$(A_2 - A_1)(A_4 - A_3) \dots (A_{2n} - A_{2n-1}) = - (A_3 - A_2)(A_5 - A_4) \dots (A_1 - A_{2n}).$$

Ici, comme dans le paragraphe précédent, la discontinuité du groupe peut se démontrer directement, sans qu'il soit besoin de recourir à l'artifice du paragraphe V. On voit que le plan se décompose en deux domaines D et D' ; le premier est recouvert par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone R'_0 et ses transformés. Ces deux domaines sont séparés par une ligne L , si l'on peut appeler cela une ligne.

Supposons que l'on ait construit un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \dots, R_n$ et les polygones correspondants $R'_0, R'_1, \dots, R'_n$. On sera certain : 1° que tout point faisant partie de l'un des polygones R appartiendra au domaine D ; 2° que tout point faisant partie de l'un des polygones R' appartiendra au domaine D' ; 3° que tout sommet de l'un des polygones R appartient à la ligne L .

Les sommets des divers polygones R forment une *unendliche Punktmenge* (¹) P , et pour obtenir la ligne L , il faut ajouter à cette *Punktmenge* son *erste Ableitung* P' . On voit que la ligne L est une *perfecte und zusammenhängende Punktmenge*. C'est dans ce sens que c'est une ligne. Mais nous allons voir qu'elle ne jouit pas de toutes les propriétés que nous sommes habitués à attribuer aux lignes.

Cherchons d'abord si cette ligne possède une tangente. A ce point de vue nous devons distinguer les points de la *Punktmenge* P et ceux qui appartiennent à son *Ableitung* P' sans appartenir à P . Envisageons d'abord un point de P ; je dis qu'en ce point il y aura une tangente. D'abord nous pouvons supposer que ce point est un sommet de R_0 , car rien ne distingue R_0 des autres polygones R_i ; nous pouvons supposer que ce point est précisément A_1 , car ce qui distingue A_1 des autres sommets de R_0 , c'est que le cycle dont fait partie A_1 ne contient pas d'autre sommet; or nous avons vu à la fin du paragraphe III que l'on peut toujours supposer qu'un cycle donné ne se compose que d'un seul sommet. Le groupe envisagé contiendra alors une certaine substitution parabo-

(¹) Pour le sens précis des diverses expressions allemandes que je vais employer, voir G. CANTOR : *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig, Teubner, 1883. Voir aussi la traduction française de ce Mémoire : *Acta mathematica*, t. 2, p. 381-408.

lique S qui aura A_1 pour point double. Soit

$$\left(\frac{1}{z-A_1}, \frac{1}{z-A_1} + h \right)$$

cette substitution. Soit N un tel point que

$$\arg(N - A_1) = -\arg h.$$

Joignons A_1N , je dis que A_1N sera tangente à notre ligne L . Voici ce que j'entends par là. Supposons que ρ et ω soient les coordonnées polaires d'un point de L en prenant A_1 pour pôle et A_1N pour axe polaire; je dis que, quand ρ tendra vers zéro, ω tendra vers zéro, de telle façon que A_1N sera la limite d'une sécante A_1B_1 de la ligne L , lorsque le point B_1 se rapprochera indéfiniment de A_1 .

Pour démontrer cela, je vais construire deux cercles K et K' se touchant extérieurement en A_1 et tangents tous deux à A_1N . Je choisirai le cercle K de telle façon qu'il coupe les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R_0 et ne coupe aucun autre côté de ce polygone. De même, le cercle K' devra couper les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R'_0 et ne couper aucun autre côté de ce polygone. Soient r_0 la partie de R_0 qui est intérieure à K et r'_0 la partie de R'_0 qui est intérieure à K' . Il est clair que les transformés successifs de r_0 par les puissances positives et négatives de la substitution S rempliront tout ce cercle K , de sorte que ce cercle fait tout entier partie du domaine D . De même le cercle K' fera tout entier partie du domaine D' . Il en résulte que la ligne L est tout entière dans la portion du plan extérieure à la fois aux deux cercles K et K' . Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Toutefois, la ligne A_1N ne jouit pas des mêmes propriétés que les tangentes aux lignes ordinaires. On voit aisément, en effet, que si l'on joint par une droite BC deux points B et C de la *Punktmenge* P , et que l'on fasse tendre B et C simultanément vers le point A_1 , la limite de la droite BC n'est pas en général la tangente A_1N . Considérons, en effet, deux points B_0 et C_0 de la *Punktmenge* P , choisis de telle sorte que le cercle $A_1B_0C_0$ ne soit pas tangent à A_1N . Considérons les transformés successifs $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$ de B_0C_0 par les puissances positives de S . Quand n croîtra indéfiniment, B_n et C_n se rapprocheront de A_1 et l'angle de B_nC_n avec A_1N tendra vers une limite finie. De plus, j'ai tout lieu de croire qu'il n'y a pas de tangente aux points de L qui ne font pas partie de P .

Je dis maintenant que la ligne L n'a pas de cercle osculateur. Je dis que si l'on mène un cercle k tangent en A_1 à la droite A_1N et passant par un point B_1 de L , ce cercle ne tendra pas vers une limite déterminée lorsque le point B_1 se rapprochera du point A_1 . Menons, en effet, deux cercles k' et k'' tangents tous deux en A_1 à la droite A_1N et passant respectivement par deux points B'_0 et B''_0 de la ligne L . Soient $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$ les transformés successifs de B'_0 par les puissances de S . Ils seront tous sur k' et deviendront infiniment rapprochés de A_1 quand n deviendra infini.

Donc si le cercle osculateur existait, ce devrait être le cercle k' . Mais ce devrait être en même temps le cercle k'' . Donc le cercle osculateur n'existe pas.

J'en ai dit assez, je pense, pour faire comprendre à quel point la ligne L diffère d'une ligne analytique.

IX. — Groupes symétriques.

Considérons un polygone Π_0 limité par $n+1$ arcs de cercles $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$ se coupant en $n+1$ points $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ qui sont les sommets de ce polygone. Construisons les polygones Π symétriques de Π_0 par rapport à ses divers côtés, puis les polygones symétriques des $n+1$ polygones Π par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Si les divers polygones ainsi construits ne se recouvrent pas mutuellement, on aura un groupe kleinéen.

Soit Π'_0 le polygone symétrique de Π_0 par rapport au côté $A_{n+1}A_1$; le polygone $\Pi_0 + \Pi'_0 = R_0$ sera le polygone générateur du groupe; il admettra $2n$ côtés, à savoir les n côtés $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ de Π_0 et les côtés symétriques de Π'_0 . Deux côtés symétriques seront d'ailleurs conjugués.

La première condition évidemment nécessaire pour que le groupe soit discontinu, c'est que tous les angles $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ du polygone Π_0 soient nuls ou soient des parties aliquotes de π ; ils sont donc tous droits ou aigus.

Supposons cette condition remplie et construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe. Pour cela, construisons les sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n+1}$ qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n+1}A_1$. Ces sphères limiteront un certain polyèdre K_0 . On construira ensuite le polyèdre K'_0