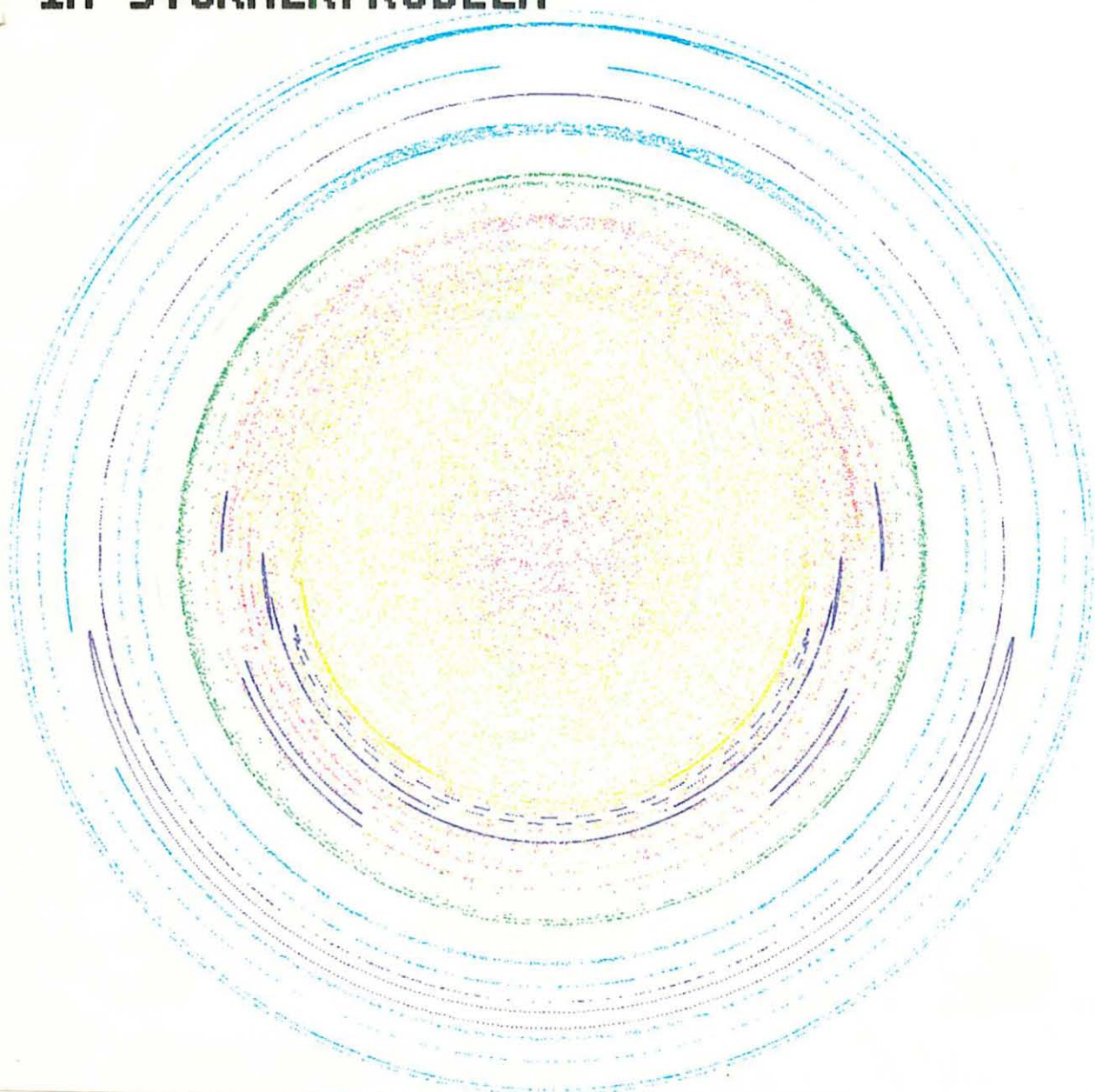


STUDIUM EINER VERKETTETEN TWISTABBILDUNG IM STÖRMERPROBLEM



DIPLOMARBEIT VON
OLIVER KNILL

BETREUT VON PROF. DR. J. MOSER IN DER ZEIT VOM 13.5.-13.9.1987

Inhalt

	Inhalt	S. 1
	Einleitende Übersicht	S. 2
1)	Das Störmerproblem	S. 3
2)	Zur Geschichte des Störmerproblems	S. 8
3)	Vom Störmerproblem zum Modellproblem	S. 15
4)	Das Modellproblem	S. 20
5)	Pesintheorie für glatte dynamische Systeme und ihre Erweiterung durch Katok & Strecyn auf Systeme mit Singularitäten	S. 22
6)	Besuchsfrequenzen, Rückkehrzeiten und Matrix- cozyklen	S. 26
7)	Die Methode von Alekseev und der Satz von Wojtkowski	S. 35
8)	Ein neuer Beweis für den Satz von Wojtkowski	S. 37
9)	Ein spezieller Matrixcozyklus	S. 47
10)	Verkettete Twistabbildungen	S. 51
11)	Ausblick	S. 61
	Referenzen	S. 62

Einleitende Übersicht

Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem magnetischen Dipolfeld wird heute kurz das Störmerproblem genannt. Schon lange hatten sich Physiker und Mathematiker im Zusammenhang mit dem Nordlicht und kosmischer Strahlung dafür interessiert, wie sich geladene Teilchen im Magnetfeld der Erde bewegen. Das Problem erwies sich als hartnäckig. Jahrzehntelange Suche nach einem weiteren Integral der Bewegung neben der Energie und dem Drehimpuls blieben erfolglos, bis es evident wurde, dass man es mit einem nicht-integrablen Problem zu tun hatte. Wir werden in den ersten zwei Abschnitten das Störmerproblem kurz mathematisch und geschichtlich beschreiben. Im dritten Abschnitt zeigen wir auf, wie eine Poincarreschnittabbildung im Störmerproblem konstruiert werden kann, die aus zwei singulären Twistabbildungen zusammengesetzt ist. Stochastische Eigenschaften von solchen Abbildungen können mit Lyapunovexponenten ausgedrückt werden. Diese im letzten Jahrzehnt entwickelte Pesin-Katok-Strecyn-Theorie wird uns im fünften Abschnitt beschäftigen. Die nächsten drei Abschnitte handeln dann von Lyapunovexponenten. Bei der erfolglosen Suche nach neuen Kriterien, um das Nichtverschwinden von Lyapunovexponenten zu zeigen, schaute dabei ein neuer Beweis für einen Satz von Wojtkowski heraus. Zuletzt werden wir das Wissen auf ein paar verkettete Twistabbildungen anwenden.

Some say, that the Northern Lights are the glare
of the Arctic ice and snow,
and some say, that it's electricity,
and nobody seems to know.

Robert W. Service
Ballad of the Northern Lights
1909

1. Das Störmerproblem

Wie bewegt sich ein geladenes Teilchen in einem magnetischen Dipolfeld ?
Das Magnetfeld $\mathbf{B}$ ist gegeben durch :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (1.1)$$

mit rotationssymmetrischem Vektorpotential

$$\mathbf{A} = \mathcal{M} \rho r^{-3} \Phi = (A_z, A_\varphi, A_r) = (0, 0, A_\varphi) \quad (1.2)$$

wobei $\mathcal{M}$ das magnetische Dipolmoment des Feldes, ρ den Abstand von der Dipolachse, r den Abstand vom Dipol und Φ den Einheitsvektor von φ in Zylinderkoordinaten bezeichnen. (Fig.1.1)

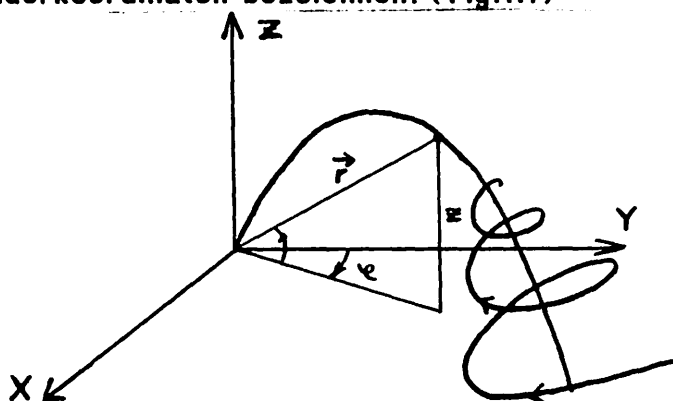


Fig.1.1 Schematische Darstellung der Bewegung eines sich im magnetischen Dipolfeld bewegendes Teilchens

Die Hamiltonfunktion eines Teilchens mit der Ladung q , Masse m und Geschwindigkeit v lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\mathcal{H}_r = \left[m^2 c^4 + c^2 p_z^2 + c^2 p_\rho^2 + c^2 \underbrace{\left(\frac{p_\varphi}{\rho} - q A_\varphi \right)^2}_{\rho^2 \omega^2} \right]^{1/2} = \gamma m c^2 = \text{konstant} \quad (1.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \\ p_z &= \gamma m \dot{z} \\ p_\rho &= \gamma m \dot{\rho} \\ p_\varphi &= \gamma m \dot{\varphi} \rho - q \rho A_\varphi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Wegen der Konstanz von γ ist es möglich, eine neue Hamiltonfunktion einzuführen, die zu (1.3) äquivalent ist und die Form einer nichtrelativistischen Hamiltonfunktion hat :

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \frac{1}{2\gamma m} \left[p_z^2 + p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - q A_\varphi \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \gamma m v^2 = \text{konstant}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Wir werden im folgenden mit $\mathfrak{H}$ statt mit $\mathfrak{H}_r$ arbeiten. Die Äquivalenz der beiden Hamiltonfunktionen erkennt man dadurch, dass die partiellen Ableitungen nach allen dynamischen Variablen übereinstimmen.

Die Invarianz von $\mathfrak{H}$ unter Rotationen um die z-Achse liefert uns ein zweites Integral der Bewegung :

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.6)$$

oder

$$p_\varphi = q M \Gamma \quad (1.7)$$

wobei die Integrationskonstante Γ die Dimension einer reziproken Länge hat. Das dreidimensionale Problem ist nun reduziert auf die Aufgabe, die Bewegung eines Teilchens in der ρ -z-Ebene zu finden, das sich im Potential V bewegt.

$$V = \frac{q^2 M^2}{2\gamma m} \left[\frac{\Gamma}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} \right] \quad (1.8)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Variablen:

$$\begin{aligned}z' &= \Gamma z \\ \rho' &= \Gamma \rho \\ \varphi' &= \varphi \\ t' &= \Gamma^3 q M (\gamma m)^{-1} t\end{aligned}\quad (1.9)$$

hat das Problem (die Apostrophs werden unterdrückt) die Form :

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2} (p_z'^2 + p_\rho'^2) + V = \frac{1}{32\gamma_1^4} = \text{konstant} \quad (1.10)$$

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{\rho'}{r'^3} \right)^2 \quad (1.11)$$

γ_1 ist eine von Störmer eingeführte dimensionslose Konstante :

$$\gamma_1^4 = \frac{1}{16} \left(\frac{q M}{v \gamma m} \right)^2 \Gamma^4 \quad (1.12)$$

φ kann nun bei Kenntnis von $\rho(t)$ und $z(t)$ durch Integration gewonnen werden:

$$\varphi = \int dt \left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^3} \right] \quad (1.13)$$

Eine Betrachtung des Potentials V (Fig 1.2) liefert uns nun ein qualitatives Bild der Bewegung des Teilchens in der ρ - z -Ebene.

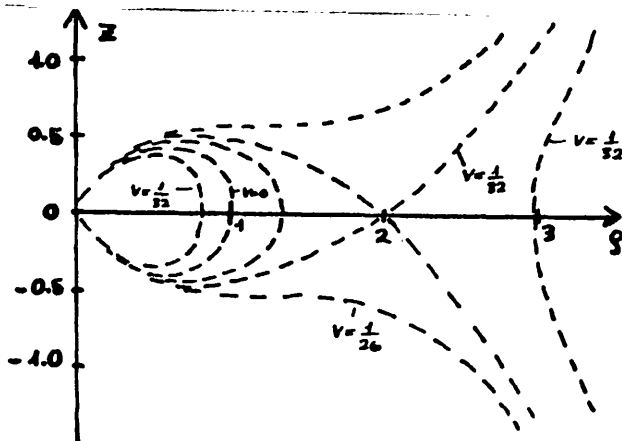


Fig 1.2 Niveaulinien des effektiven Potentials (1.11)

Das Potential (1.11) verschwindet auf dem Weg

$$\rho^2 = r^3 \quad (1.14)$$

der Thalweg genannt wird, weil er am Grund des Potentialtals liegt. Sonst ist das Potential überall positiv. Die Wände des Potentialtals werden immer steiler, wenn man vom Äquator $z=0$ entlang dem Talweg zum Nord oder Südpol marschiert. Falls V den Wert $1/32$ hat, gibt es einen Pass bei $z=0$, $\rho=2$. Aus (1.10) kann man nun sehen, dass für $\gamma_1 > 1$ das Aufenthaltsgebiet des Teilchens unzusammenhängend wird und damit ein Teilchen, das im Tal startet, immer im Tal bleibt, da es nicht die Energie hat, den Pass zu überschreiten. Uns interessiert nun die Bewegung in diesem beschränkten halbmondähnlichen Gebiet. (Fig. 1.3, 1.4)

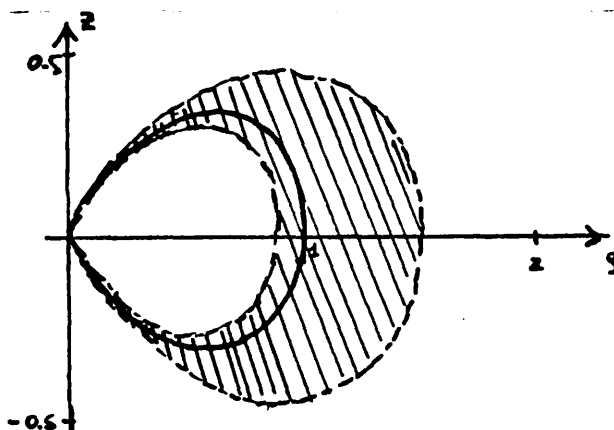


Fig. 1.3 Erlaubtes Gebiet für $V=1/50$ mit Thalweg.

Qualitativ kann man sich nun gut ein Bild vom Verlauf einer gefangenen Teilchenbahn machen. Das Teilchen wird im allgemeinen ständig zwischen den zwei Potentialwänden hin und herpendeln und dabei sich abwechselnd in die untere und obere Spitze des Halbmondes begeben.

Im ursprünglichen Dipolfeld entspricht das einer Kreiselbewegung um eine Magnetfeldlinie verbunden mit einer Bewegung längs der Magnetfeldlinie, sodass der wirkliche Orbit einer Spirale gleicht. In hohen Breitengraden, Gebieten mit starkem Feld, wird das Teilchen zum Äquator zurückreflektiert. Das Resultat ist ein Hin- und Herspiralen durch die Äquatorebene. Schlussendlich wird die Magnetfeldlinie, um die das Teilchen spiralt, langsam um die Erde herumdriften. (Fig.1.5)

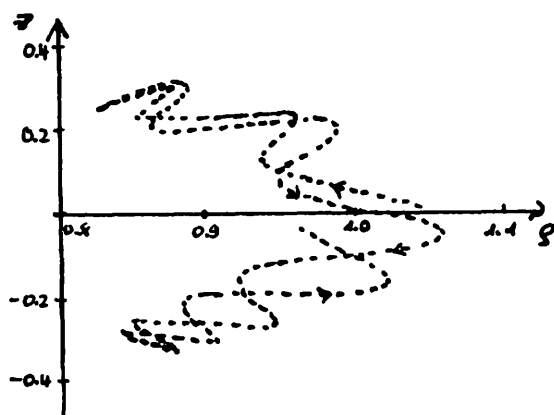


Fig. 1.4 Eine gefangene Bahn in ρ - z Koordinaten mit Anfangsbedingungen $z=0$, $\rho=1.07$, $\dot{\rho}=0$, $\dot{z}=0.0355$ ([Dr 1976]) $\gamma=2.654$

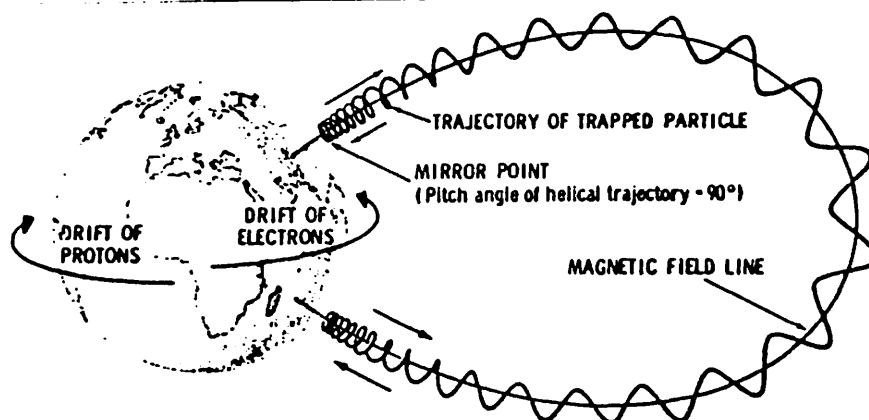


Fig. 1.5 Verlauf der Bahn eines gefangenen Teilchens im Erdmagnetfeld.
(aus [Ea 1980])

Das dynamischen System "elektrisches Teilchen in einem magnetischen Dipolfeld", wird kurz Störmerproblem genannt wird zu Ehren vom norwegischen Physiker Carl Störmer (1874–1957), der sein ganzes Leben diesem Problem gewidmet hat.

Das System heisst immer noch Störmerproblem, weil die Suche nach einem weiteren Integral, das eine genaue Berechnung der gefangenen Bahnen ermöglichen würde, erfolglos geblieben ist. Es sind im Gegenteil numerische Indizien vorhanden, die vermuten lassen, dass das System für $\gamma_1 > 1$ nicht-integrabel ist ([Dr 1976], [Br 1981]). Ein mathematisch sauberer Beweis für diese Behauptung steht noch aus.

Dagegen existieren nach einer Bemerkung von Moser [Mo 1963] drei Integrale in Involution für $\gamma_1 < 1$. Er zeigt, dass in diesem Fall jede Lösung entweicht und die Bahn eine Asymptote hat, deren Richtung zwei weitere Integrale neben der Energie liefert.

Im nächsten Abschnitt geben wir einen kurzen Abriss über die Entwicklung dieses faszinierenden Problems.

"The Eskimos believed that the aurora kill people- a long time ago they used to believe it, but the younger people nowadays don't believe it... even the older people like me don't believe it anymore... but it's true."

Equalaq, Eskimofrau während einem Interview für den Film *Spirits of the Polar Night* 1972

2. Zur Geschichte des Störmerproblems

Zu den faszinierendsten Naturschauspielen gehören die Polarlichter am nächtlichen Firmament. Die Farben des kalten Leuchtens der Luft sind überwiegend gelbgrünlich in zarten, blassen Tönen. Auch rote blaue und violette Farbtöne sind möglich. (Bilder 2.2, 2.5, 2.6 , 2.7)

Das Polarlicht nimmt einen erstaunlich grossen Platz in der Wissenschaft und der Kultur der letzten Jahrhunderte ein. Eine ausführliche Dokumentation ist [Ea 1980].

Erste Deutungen dieser Naturerscheinungen finden sich schon in der Mythologie der Eskimos: Das Polarlicht wird dadurch hervorgerufen, dass die Geister der Verstorbenen am Firmament ein temperamentvolles Ballspiel mit hin- und hergeworfenen Walrossschädeln aufführen.

Kurz vor der Jahrhundertwende vermutete der dänische Meteorologe Adam Poulson, diese Lichteffekte könnten durch Kathodenstrahlen hervorgerufen werden. Die Strahlen stammten seines Erachtens aus den oberen Schichten der Erdatmosphäre. Bereits 1881 hatte der deutsche Physiker Eugen Goldstein, der sich vor allem um die Erforschung der Kanalstrahlen verdient gemacht hatte, den Gedanken geäußert, dass die Sonne elektrische Strahlen zur Erde schicke, die mit der Lufthülle in Wechselwirkung treten.

Der norwegische Physiker Kristian Birkeland (1867-1917) griff diese Vor-



Bild 2.1: Kristian Birkeland 1867 - 1917 , Physikprofessor an der Universität von Oslo

stellung auf und entwickelte einen einfachen Modellversuch:



Bild 2.2 Diese Photographie von Torbjörn Lövgren (Geophysikalisches Institut Kiruna/ Schweden) aus dem Jahre 1979 zeigt Teile eines den Nachthimmel umspannenden Bogens. Polarlichtbögen können sich über 1000 Kilometer erstrecken. Die gewaltigen Ausmasse vom Bogen können in ihrer wahren räumlichen Ausdehnung von Menschaugen jedoch nicht erfasst werden. (Aus [Fa 1983])

Ein evakuiertes Glasgefäß diente als Weltraum. Ein spielballgrosses Modell der Erdkugel war mit Leuchtfarbe bestrichen und mit einem Magneten im Innern versehen. Die Kathode von der die Strahlung ausging, wurde zur Sonne. Die Kathodenstrahlen wurden von der Oberfläche der Kugel wegge-
worfen mit Ausnahme von bestimmten Stellen in der Nähe der Polargegend.

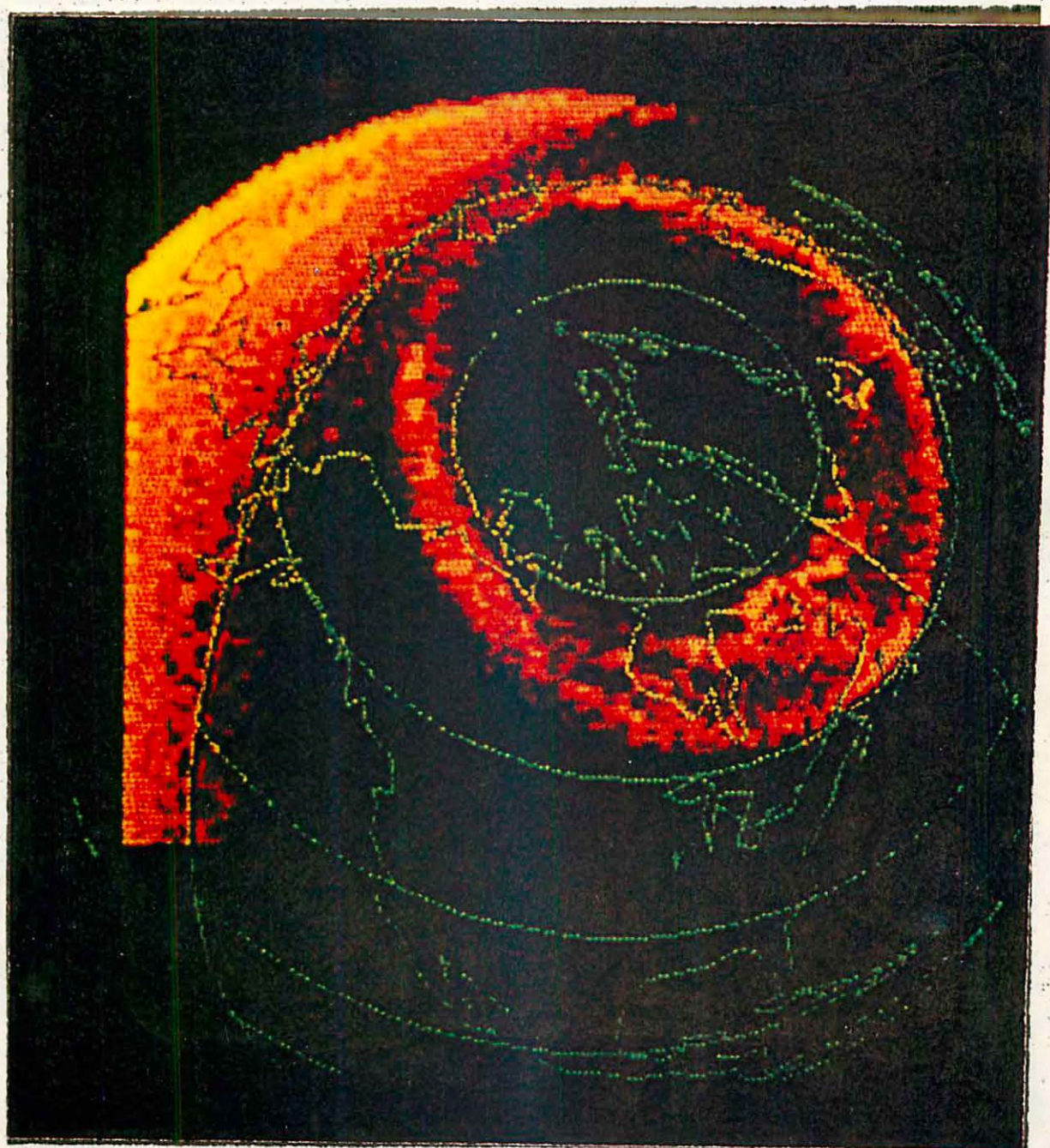


Bild 2.3 Satelliten- Aufnahme vom 8. November 1981 im ultravioletten Licht aus einer Höhe von etwa 20300 km . Das Polarlicht-Oval ist sichtbar auf dem Hintergrund der computer-gezeichneten Umrisse der Kontinente. Vorne befindet sich Nordamerika. Die breiteste Ovalfläche ist über Labrador und Neufundland zur Mitternacht. Nordskandinavien verlässt mit der Erdumdrehung das Gebiet unter dem Oval. Der asiatische Kontinent mit Russland befindet sich im Sonnenlicht.
(Photo: L.A. Frank. Kopiert aus [Fa 1983])

Birkeland war dem Entstehungsmechanismus des Polarlichtes auf die Spur gekommen. Was Birkeland auf seinem Modell der Erdkugel beobachtet hat, kann man heute dank Satellitenaufnahmen in Natura sehen (siehe Bild 2.3).

Birkelands Landsmann, der Mathematiker Carl Störmer (1874-1957) fand schliesslich 1904, dass es ein "fesselndes Problem" sei, die Bahnkurven

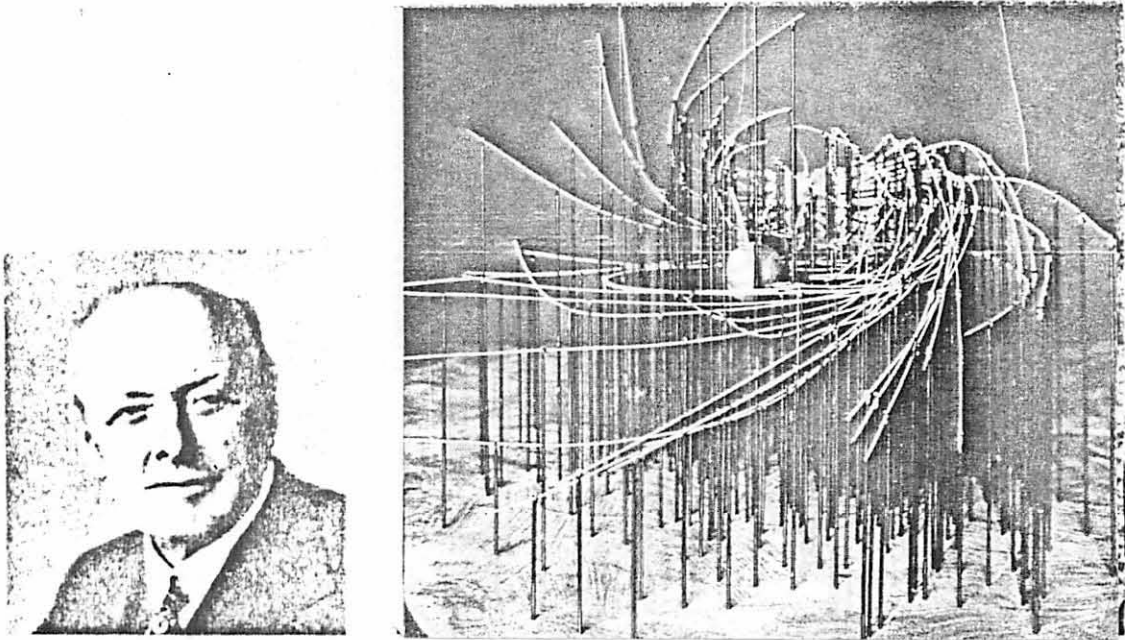


Bild 2.4 Carl Störmer 1874 - 1957, Mathematikprofessor an der Universität von Oslo. Daneben eines der Drahtmodelle, die von Störmer und seinen Studenten konstruiert worden sind, um die berechneten Bahnen der Teilchen anschaulich zu machen.

zu berechnen, auf denen die Elektronen von der Sonne ins Magnetfeld der Erdkugel eintreten. Mit einigen seiner Studenten zusammen berechnete er in rund 5000 Arbeitsstunden ungefähr 120 verschiedene Bahntypen. Mit seiner Idealisierung, das Erdmagnetfeld als Dipolfeld zu betrachten, hat Störmer das physikalische zu einem mathematischen Problem gemacht. Er interessierte sich vor allem für Bahnen, die von weither in den Dipol hineinschiessen und für Bahnen, die im Magnetfeld der Erde gefangen bleiben, da die Kenntnis solcher Bahnen es ermöglichen, die Geheimnisse des Nordlichts zu ergründen. Die Bahnen durch den Ursprung heissen heute Störmerbahnen. Numerische Daten liessen erkennen, dass diese Bahnen etwas von den Feldlinien wegliegen und dass es Bahnkurven gibt, die um diese Störmerbahnen kreisen, statt wie erwartet um die Feldlinien. Störmer hat seine Resultate und sein Wissen in [St 1955] zusammengefasst.

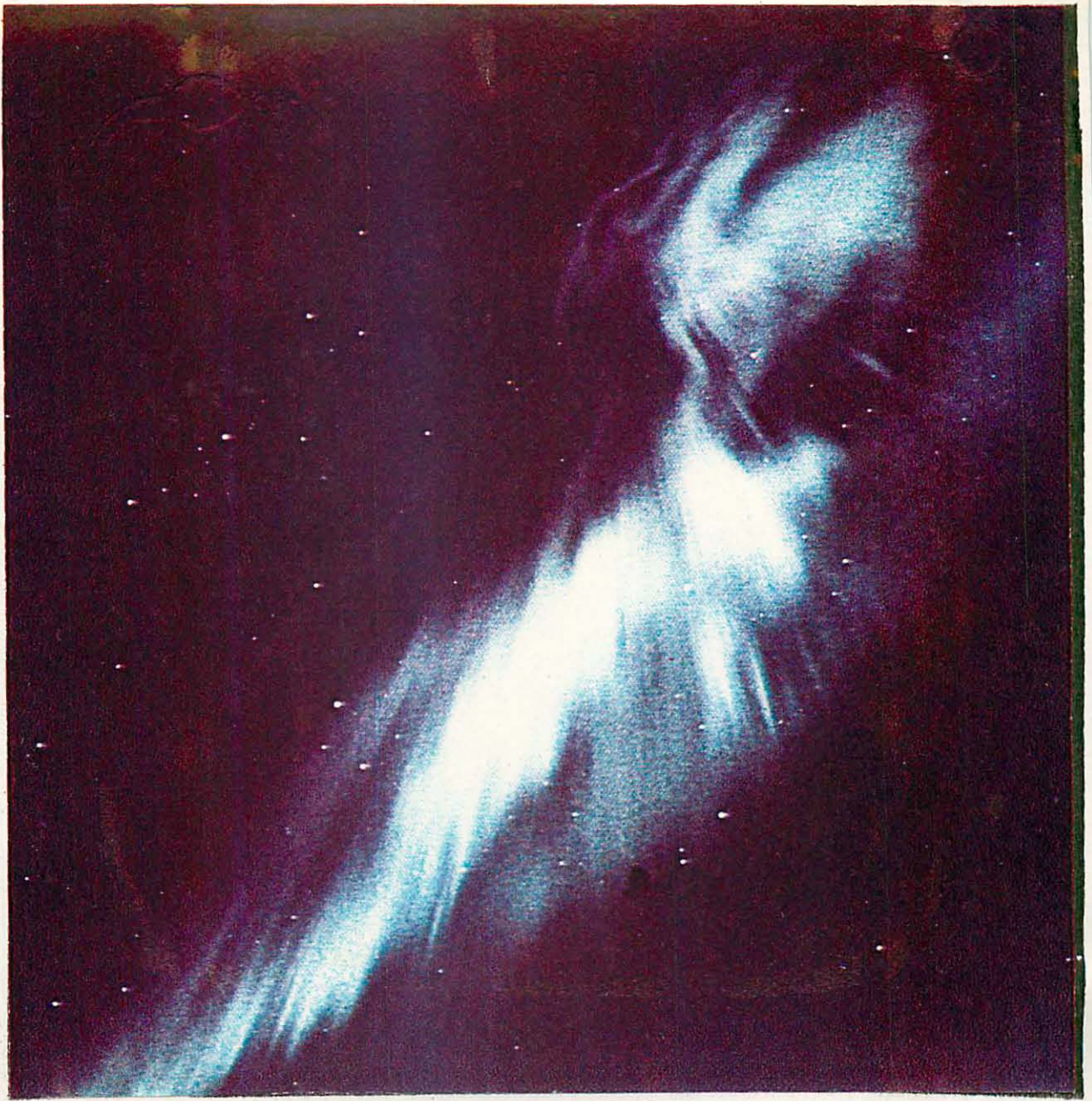


Bild 2.5 Aurora photographiert über Kiruna / Schweden von Torbjörn Lövgren. (Aus [Ea 1980])



Bild 2.6, 2.7 Aurora, photographiert von Robert W. Eather (Aus [Ea 1980])



Carl Störmer erlebte ein wichtiges Datum in der Geschichte seines Problems nicht mehr: den 31. Januar 1958. An diesem Tag wurde der amerikanische Satellit "Explorer 1" mit einem Geigerzähler versehen in eine stark elliptische Umlaufbahn um die Erde geschossen [He 1965]. Die Messdaten zeigten unerwartete Intensitätsmaxima. Die gemessene Strahlung war zeitweise so gross, dass die Messdaten ausfielen, weil der Messbereich zu schmal war.

Der amerikanische Physiker James A. Van Allen (geb. 1914) fand die Deutung dieser Messwerte, die von den Zählvorrichtungen in den Satelliten Explorer III und IV, in den Raumraketen I, III, IV und in den sowjetischen Satelliten Sputnik II und III ergänzt und bestätigt wurden: Die Van Allen Gürtel waren entdeckt worden.

Die Fähigkeit des Erdmagnetfelds, geladene Teilchen über längere Zeit gefangen zu halten, machte auch die U.S. Air Force hellhörig. Könnte nicht ein durch eine nukleare Explosion über Grönland künstlich erzeugter Teilchengürtel das ballistische Frühwarnabwehrsystem stören? Es erfolgten vom August 1958 bis November 1962 insgesamt 7 sowjetische und amerikanische Nuklearexplosionen im Weltraum, die künstliche Strahlungsgürtel um die Erde erzeugten. Noch viele Monate später konnten Teilchen, die aus diesen Explosionen stammten, nachgewiesen werden, eine erstaunliche Tatsache, wenn man bedenkt, dass ein Elektron nur etwa zwei Sekunden braucht, um vom Umkehrpunkt am Nordpol zum Südpol und zurück zu gelangen und dabei noch wie verrückt um die Magnetfeldlinien kreist.

Am mathematische Problem wurde im folgenden viel gearbeitet und gerechnet. Das Interesse galt einerseits den Störmerbahnen, Lösungen, die in den Ursprung des Dipols hineinlaufen, andererseits periodischen und quasiperiodischen Bahnen, im Van Allen-Gürtel.

Zum ersten Problem hatte schon Störmer 1907 eine formale Potenzreihe angegeben, die, falls sie konvergieren würde, eine Lösung durch die Singularität liefern würde [St 1907]. Aus dieser Potenzreihe und aus vielen numerischen Daten vermutete er die Existenz und Eindeutigkeit (bei fester Energie und Drehimpuls) solcher Bahnen. 1944 gelang es dem schwedischen Mathematiker Malmquist, die Existenz zu zeigen [Dr 1965]. Martin Braun erledigte das Problem schliesslich 1970 [Br 1970], indem er in einen neuen Beweis die Existenz und die Eindeutigkeit der Störmerbahnen sicherte.

Auch zum zweiten Problem lieferte Braun bahnbrechende Resultate. 1968 gelang ihm, zwei Regionen im Raum zu finden, wo Teilchen für immer gefangen bleiben [Br 1968].

In einer dieser Regionen bleiben die Teilchen nahe dem Äquator, während sie im zweiten Gebiet beliebig nahe an den Dipol gelangen können. Braun konnte bei seinen Forschungen auf Arbeiten von Dragt und Vogelaere zurückgreifen. Entscheidend war der Gebrauch der KAM Theorie. Zwar sind die betrachteten Gebiete nicht physikalisch relevant, trotzdem sind diese Resultate enorm wichtig, da jetzt zum ersten mal bewiesen war, dass Teilchen theoretisch unendlich lang im Magnetfeld der Erde eingeschlossen sein können. Später spürte Braun zwei weitere Gebiete von der schon entdeckten Art auf, die gross genug sind, um physikalische Bedeutung zu haben. [Br 1981]

Alex J.Dragt hatte schon früher das Störmerproblem mit Computerhilfe untersucht [Dr 1965]. Später hatte er einen wesentlich leistungsfähigere Rechner zur Verfügung, der auch komplizierte formale algebraische Manipulationen durchführen konnte. Zusammen mit John M.Finn zeigte er, dass das Störmerproblem nicht durch Integration gelöst werden kann, indem sie mit topologischen und numerischen Methoden die Existenz von homoklinen Punkten bewiesen [Dr 1976] .

Etwas später entwickelten sie ein einfaches Modellproblem mit zusammengekettenen Twistabbildungen, das qualitativ die Bahnen in der Nähe der Störmerbahnen beschreibt. Martin Braun griff diesen Gedanken 1981 auf und zeigte, dass dieses Modellproblem eine Hufeisenabbildung enthält. Eine Übersicht über alte und neue Resultate im Störmerproblem bis zum Jahre 1981 gibt [Br 1981] .

But, where, O Nature is thy law?

From the midnight lands comes up the dawn!

Is it not the icy seas that are flashing fire?

M.V. Lomonosov, *Rhetoric*, 1747

3. Vom Störmerproblem zum Modellproblem

Wir betrachten ein Teilchen, dass im Magnetfeld der Erde gefangen ist. Zur Bewegung in der ρ - z -Ebene gehört nach (1.10) und (1.11) die Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_z^2 + p_\rho^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{r^3}\right)^2 = \frac{1}{32\gamma_1^4} \quad (3.1)$$

Die Bewegungsgleichungen bestehen aus einem gekoppelten System nichtlinearer Differentialgleichungen:

$$\ddot{\rho} = \left(\frac{\rho}{r^3} - \frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{3\rho^2}{r^5} - \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^3}\right) \quad (3.2)$$

$$\ddot{z} = \left(\frac{\rho}{r^3} - \frac{1}{\rho}\right) \frac{3\rho z}{r^5} \quad (3.3)$$

auf der Energiefläche

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \left(\frac{\rho}{r^3} - \frac{1}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{16\gamma_1^4} \quad (3.4)$$

Die Suche nach einem weiteren Integral der Bewegung ist, wie die numerischen Daten zeigen, aussichtslos. Es ist numerisch sogar evident [Dr 1976], dass für (3.2)–(3.4) kein analytisches Integral existieren kann. Man versucht deshalb, die Bewegung durch numerische Integration zu verstehen, was von Störmer und Dragt auch intensiv gemacht worden ist.

In erster Approximation oszilliert ein Teilchen um die Magnetfeldlinie $\rho^2 = r^3$. Das wird offenbar, wenn man dem Problem besser angepasste dipolare Koordinaten gebraucht: [Dr 1965]

$$a = \frac{r^3}{\rho^2} - 1, \quad b = \frac{z}{r^3} \quad (3.5)$$

Fig 3.1 zeigt die Bahn von Fig.1.4 in dipolaren Koordinaten.

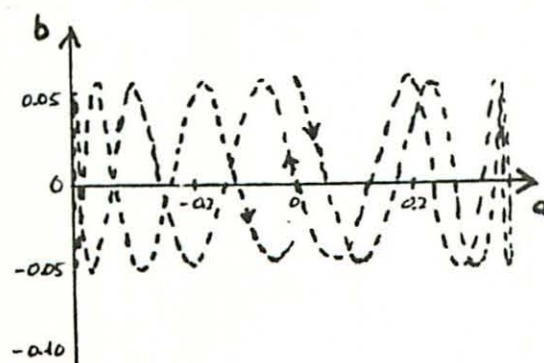


Fig. 3.1. Die Bahn von Fig.1.4 in den dipolaren Koordinaten von Dragt ([Dr 1976])

a =konstant entspricht so einer Dipolfeldlinie und $a=0$ ist der Thalweg am Boden des Potentials. Die Kurven b =konstant liegen orthogonal zu den Dipolfeldlinien. In dipolaren Koordinaten hat Φ nun die Gestalt ([Dr 1976])

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[\frac{p_a^2}{h_a^2} + \frac{p_b^2}{h_b^2} + \frac{a^2}{(a+1)r^3} \right] \quad (3.6)$$

wo

$$h_a^2 = \frac{\rho^6}{r^4(r^2+3z^2)}, \quad h_b^2 = \frac{r^6}{(r^2+3z^2)} \quad (3.7)$$

und r in Termen von a und b zu denken ist. Entwickelt man Φ in eine Potenzreihe nach a und b , erhält man:

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \dots \quad (3.8)$$

mit

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} (a^2 + p_a^2 + p_b^2) \quad (3.9)$$

$$\Phi_3 = -2a^3 - 3ap_b^2 \quad (3.10)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} (6b^2p_a^2 + 21a^2p_b^2 + 10a^4 + 3b^2a^2 + 9b^2p_b^2) \quad (3.11)$$

Die Bewegung bei alleiniger Berücksichtigung von Φ_2 ist nun eine Oszillation um die Magnetfeldlinie, denn in diesen Koordinaten beschreiben die Variablen a und p_a die schnelle Oszillation um den Thalweg herum und für die Bewegung längs des Thalwegs sind die Variablen b und p_b zuständig.

De Vogelaire hat 1954 gezeigt, dass ein im Dipolfeld gefangenes Teilchen, das sich nicht auf der Störerbahn bewegt und nicht in der Äquatorebene liegt, die Äquatorebene $z=0$ immer wieder durchqueren muss ([Vo 1954]). Das ermöglicht einen Poincarréschnitt: Die dreidimensionale Energiehyperfläche (3.4) im Phasenraum wird mit der Ebene $z=0$ geschnitten. Das Resultat von Vogelaire sichert dabei die Transversalität des Schnitts, der nun zweidimensional ist. Als Koordinaten auf dieser Schnittfläche nehmen wir ρ und $\dot{\rho}$. Den Wert von $\dot{z}$ kann in (3.4) bis auf ein Vorzeichen abgelesen werden. Die Wahl des Vorzeichens ist unbedeutend wegen der Symmetrie des Problems bezüglich Spiegelung an der Äquatorebene.

Die Schnittabbildung T , erhält man, wenn man einem Punkt $(\rho, \dot{\rho})$, der zu einem Teilchen gehört, das mit den Werten $(\rho, \dot{\rho}, \dot{z}, 0)$ in der Äquatorebene startet, den Punkt $(\rho_1, \dot{\rho}_1)$ zuordnet, der aus den Koordinaten $(\rho_1, \dot{\rho}_1, \dot{z}_1, 0)$ beim nächsten Durchlaufen dieser Ebene gewonnen wird. Ein Teilchen auf der Störerbahn lassen wir auf dem selben Weg vom Dipol zurückkehren. So ist T^n für Startwerte, die in (3.1) einen γ_1 -Wert grösser als 1 ergeben, wohldefiniert.

Die Kenntnis der Abbildung T , die als Schnittabbildung eines hamiltonschen Systems flächenerhaltend, stetig und invertierbar ist, würde eine Übersicht über das globale Verhalten der Bahn des Teilchens erlauben. So etwa entsprechen Fixpunkten einer Potenz von T periodische Bahnen im Störmerproblem. De Vogelaire (1958) hat durch das Studium von T periodische Bahnen finden und klassifizieren können [Vo 1958].

Die numerische Berechnung der Abbildung T durch numerische Integration ist schwierig und arbeitsaufwendig. Nach [Dr 1965 Anhang] versagen gängige Integrationsverfahren wie Runge-Kutta jämmerlich. Das ist auch nicht weiter erstaunlich, da ein Teilchen, das in die Nähe des Dipols gelangt, unheimlich viele Rotationen um den Thalweg herum macht und ein kleiner Rundungsfehler dort den Wert am Äquator völlig verändern kann. Schon Störmer (1955) musste neue Integrationsmethoden verwenden und Dragt hat ebenfalls ein neues Verfahren entwickelt, das zusammen mit neuen Koordinaten vernünftige Resultate lieferte ([Dr 1965]).

Ein zweiter Weg neben der numerischen Integration zum Verständnis von T wäre die Entwicklung einer Theorie, die approximative Lösungen liefert. Alvén hat 1950 diesen Weg eingeschlagen und Dragt hat diese Alvéntheorie weiterentwickelt. Die Idee ist, die integrable Bewegung in einem homogenen Magnetfeld zu stören, indem ein inhomogenes Feld überlagert wird. In einer solchen Approximation wird die Bewegung aufgespalten in zwei Bewegungen: Ein Kreisen um einen Punkt, der Führungszentrum genannt wird und die Bewegung des Führungszentrums. Diese zwei Bewegungen werden getrennt diskutiert und nachher zur gesamten Lösung zusammengefügt [Dr 1965].

Die Quintessenz dieses Modells, das in [Dr 1965] zu finden sind, ist folgende :

Für $\gamma_1 \gg 1$ bleibt die Grösse

$$\alpha := \rho^3 |\dot{z}| \Big|_{z=0} \quad (3.12)$$

konstant. Für jedes α gibt es eine Mannigfaltigkeit M_α in der $\rho-\dot{\rho}$ -Ebene, die unter T invariant bleibt. M_α ist gegeben durch :

$$M_\alpha: \dot{\rho}^2 + \frac{\alpha^2}{\rho^6} + \frac{(\rho-1)^2}{\rho^4} = \frac{1}{16\gamma_1^4} \quad (3.13)$$

M_α ist approximativ eine Schar konzentrischer Kreise, die für einen Wert

$$\alpha^2 = \alpha_{\max}^2 = \frac{1}{16\gamma_1^4} + \frac{9}{256\gamma_1^8} + \dots \quad (3.14)$$

zu einem Punkt degenerieren, der die Koordinaten

$\dot{\rho}_0 = 0 \quad ; \quad \rho_0 = 1 + \frac{3}{16\gamma_1^2} + \dots$ (3.15)

hat (Fig 3.2) .Dieser Punkt entspricht der Störerbahn.

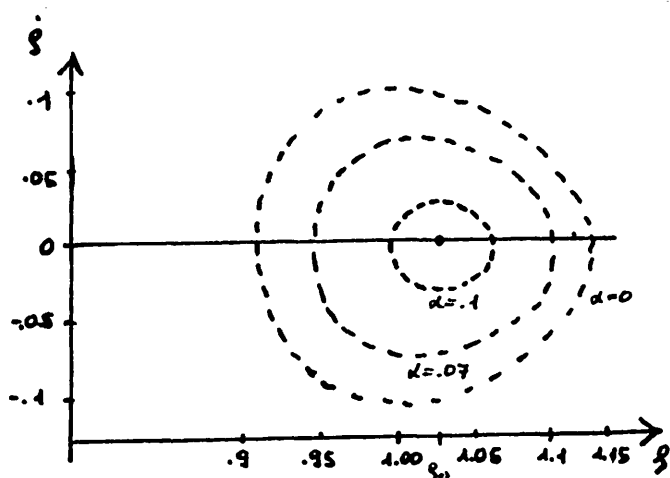


Fig 3.2 Die Mannigfaltigkeit M_α für drei verschiedene Werte von α ([Dr 1965])

Die Abbildung T eingeschränkt auf M_α ist eine Drehung mit Rotationszahl R_α , die sich etwa umgekehrt proportional zum mittleren Radius von M_α verhält. Wir haben also im Wesentlichen einen Twist

$\begin{pmatrix} \rho - \rho_0 \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho - \rho_0 \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}$ (3.16)

$\varphi = 1/\sqrt{(\rho - \rho_0)^2 + \dot{\rho}^2}$ (3.17)

Diese Resultate sind durch numerische Experimente glänzend bestätigt. Dragt erhält z.B für $\gamma_1 = 2$ gute Übereinstimmung mit der Theorie. Dass das Modell für kleinere γ_1 -Werte nicht mehr adäquat sein kann, zeigen schon die Arbeiten von Störmer von 1907 : Ein Teilchen, dass von der Äquator-

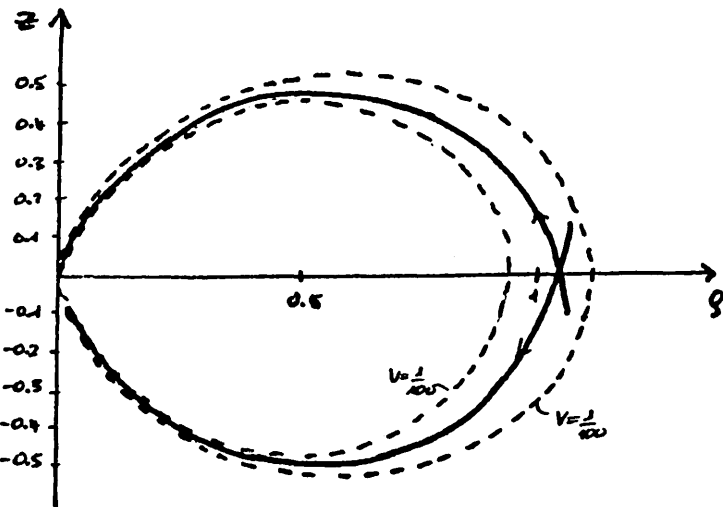


Fig. 3.3 Die zwei Störmerbahnen schneiden sich transversal ([St 1955]).

Ein Teilchen mit einer Bahn in der Nähe der Störmerbahn oszilliert um diese und nicht um die Feldlinie.

ebene zum Dipol aufbricht, startet nicht mit $\dot{\rho} = 0$! (Fig 3.3) Dragt hat das Zusammenbrechen seiner Theorie in Regionen, wo die Teilchen nahe an den Dipol herankommen auch bemerkt und experimentell genau studiert. Er hat auch das weiter unten besprochene Modellproblem eingeführt.

Bevor wir zum eigentlichen Modellproblem kommen, sei noch die Arbeit von Braun aus dem Jahre 1970 erwähnt, wo er zum ersten mal eine mathematisch saubere Analyse der Struktur der Bahnen in der Nähe der Störerbahn und die eindeutige Existenz dieser Dipolbahn beweist [Br 1970]. Braun zeigt dort, dass das Störmerproblem in der Nähe eines integrablen strukturell stabilen Systems liegt und somit gewisse Eigenschaften wie etwa die eindeutige Existenz einer singulären Bahn erbt. Er beweist, dass auf jeder Energiefläche alle Bahnen nahe der Dipolsingularität auf zweidimensionalen invarianten Zylindern liegen, deren Schnitt mit der Äquatorebene $z=0$ geschlossene Kurven herauschneiden, wobei das Zentrum dieser Kurven der Schnittpunkt der Störerbahn mit $z=0$ ist.

Da der Schnittwinkel der Störerbahn mit der Äquatorebene kein rechter Winkel ist und die Situation an der Nordhalbkugel die gleiche wie an der Südhalbkugel ist, treffen sich die Zylinder nicht genau. Es entsteht folgendes Bild:

Sei T_n die Poincaréabbildung der $\dot{\rho}$ - ρ -Ebene, die man erhält, wenn man das Teilchen nach Norden schickt. T_s soll die entsprechende südliche Version sein. Wir nehmen wieder an, dass Teilchen, die auf der Störerbahn davonlaufen, auf der gleichen Bahn zurückkehren. Dabei ändert sich natürlich das Vorzeichen von $\dot{\rho}$. Damit den Störerbahnen Fixpunkten der Abbildungen T_n und T_s entsprechen, ändern wir T_n und T_s etwas ab:

$$\begin{aligned} T_n' &:= \sigma \circ T_n \\ T_s' &:= T_s \circ \sigma \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei σ eine Spiegelung an der ρ -Achse sein soll. So ist

$$T_n \circ T_s = T_n' \circ T_s' \quad (3.19)$$

und T_n' hat nun einen Fixpunkt S_n und T_s' einen Fixpunkt S_s . Nach den numerischen Resultaten von Störmer, De Vogelaire und Dragt und den theoretischen Überlegungen von De Vogelaire, Dragt und Braun ist die Abbildung T_n' im wesentlichen eine Drehung um S_n mit einer Rotationszahl, die wie r^{-1} gegen Unendlich geht, wenn der Abstand r vom Fixpunkt S_n gegen Null strebt. Braun nimmt 1980 aufgrund seiner Resultate ein Anwachsen wie $r^{-4/3}$ als beste Schätzung. ([Br 1980]) Entsprechend ist T_s' eine Drehung um S_s . Was sind nun die Eigenschaften von T ?

$$T := T_n' \circ T_s' \quad (3.20)$$

A theorie has only the alternative of being right or wrong. A model has a third possibility:

It may be right, but irrelevant.

Manfred Eigen

*The Physicist's concept
of Nature 1973*

4. Das Modellproblem

Das Störmerproblem hat uns zu einer flächenerhaltenden Abbildung T der Ebene geführt, die folgenden Aufbau hat:

Wenn

$$R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

mit

$$\varphi = f(r) ; r = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

$$f \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \infty ; \frac{\partial f}{\partial r} < 0 \quad (4.2)$$

eine monotone Twistabbildung auf $\mathbb{R}^2$ mit einer Singularität im Ursprung ist und

$$L_\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \beta \\ y \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

die Translation in x -Richtung um β bezeichnet, so seien

$$\begin{aligned} T_1 &:= L_\beta \cdot R \cdot L_\beta^{-1} \\ T_2 &:= L_\beta^{-1} \cdot R \cdot L_\beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

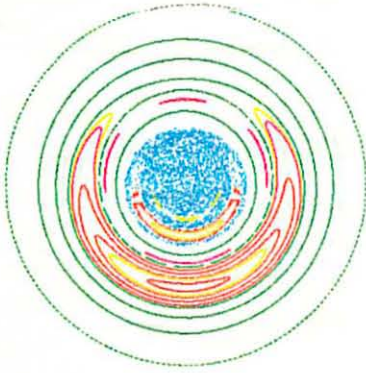
die um β respektive $(-\beta)$ verschobenen Twists. T ist schliesslich die Zusammensetzung von T_1 und T_2 :

$$T := T_2 \cdot T_1 \quad (4.5)$$

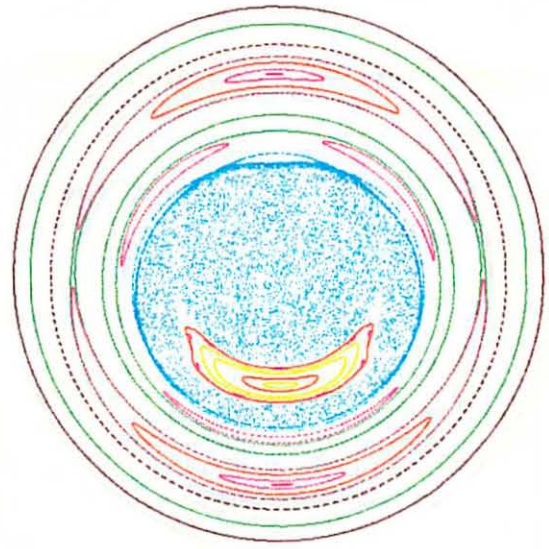
Anstatt die Zusammensetzung von zwei Drehungen zu betrachten, könnte man auch eine Drehung mit einer Verschiebung koppeln.

Sei

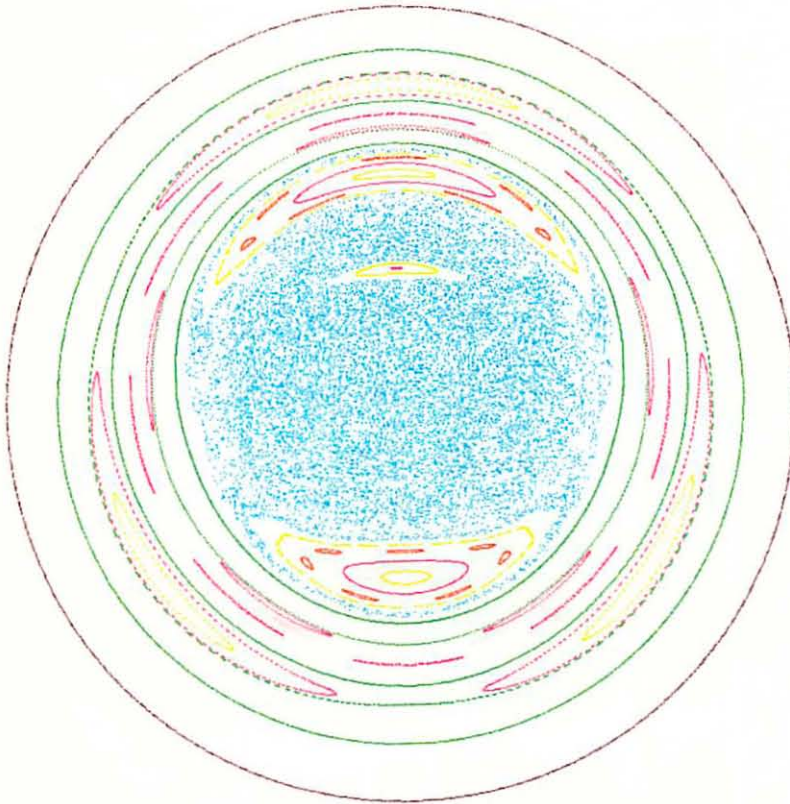
$$R_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad (4.6)$$



a)



b)



c)

Fig. 4.1 Braunabildung mit drei verschiedenen Parametern β . Deutlich sieht man das Wachstum des instabilen Gebiets. a) $\beta = 0.01$, b) $\beta = 0.05$, c) $\beta = 0.1$.

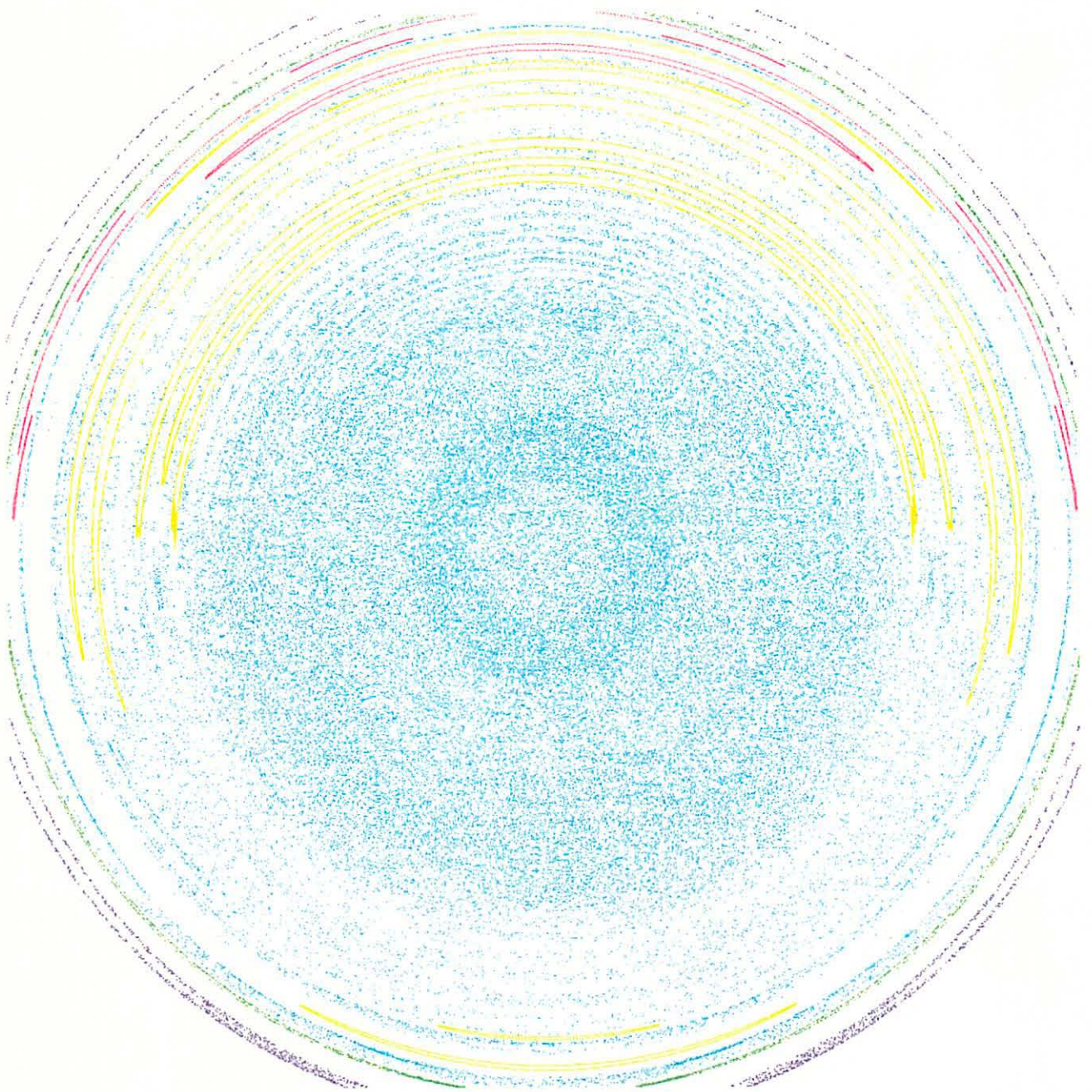


Fig 4.2 Braunabildung mit Parameter $\beta = 1/10000$ bei 100 facher Vergrößerung relativ zu Fig 4.1. Die Inseln um elliptische Fixpunkte sind stark in die Länge gezogen. Der Verlauf der blauen Bahn zeigt eine gewisse Trägheit im Bezug auf Radiusänderungen. Deutlich sieht man dies an einem Ring mit grösserer Aufenthaltsdichte, in dem sich das Teilchen für längere Zeit aufgehalten hat, bevor die Iteration gestoppt wurde.

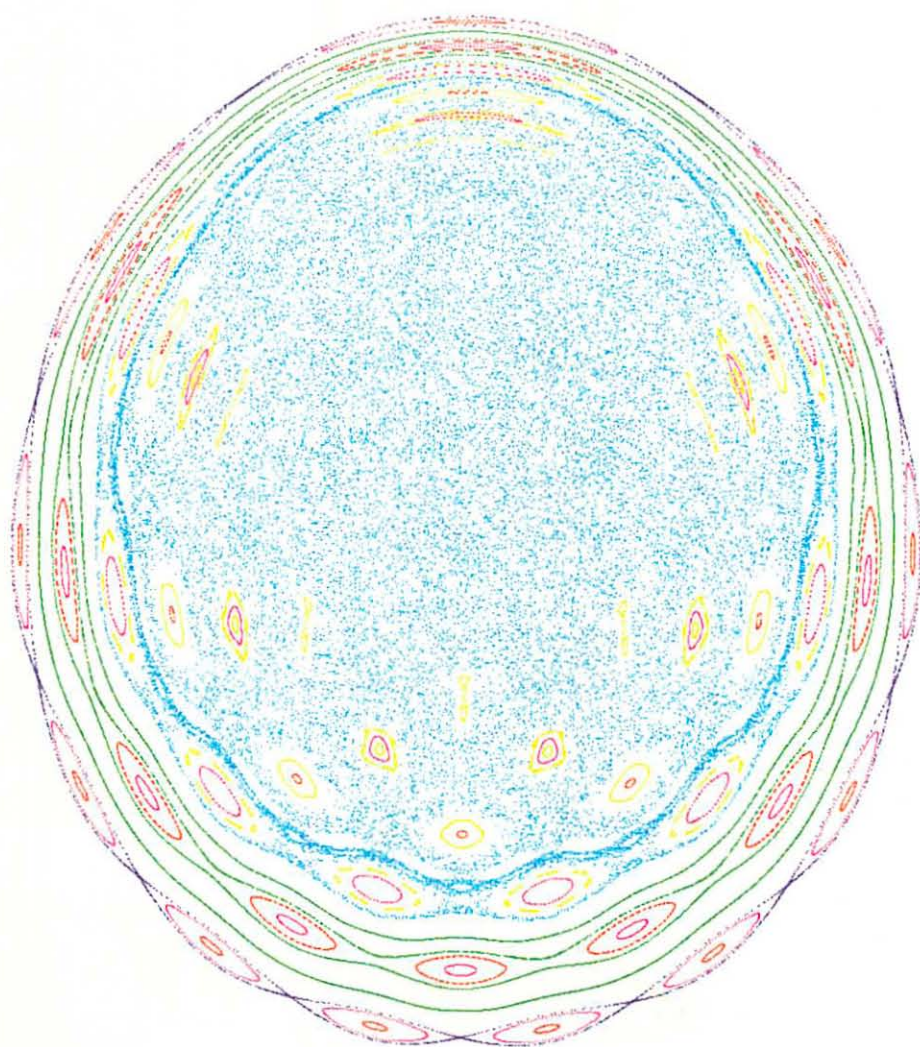


Fig 4.3 Braunabbildung mit Parameter $\beta=0.45$.

eine Drehung um π , d.h. eine Spiegelung am Ursprung und

$$S := R \cdot R_1 \cdot L_\beta^{-2} \quad (4.7)$$

die Verknüpfung einer Drehung mit einer Translation. Es gilt nun:

Proposition 4.1 *T ist topologisch und metrisch äquivalent zu S^2 :*

$$T^n = L_\beta^{-1} \cdot S^2 \cdot L_\beta$$

Beweis: Da $R_1 \cdot L_\beta = L_\beta^{-1} \cdot R_1$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} T &= T_2 \cdot T_1 = T_2 \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot T_1 = \\ &= L_\beta^{-1} \cdot R \cdot L_\beta \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot L_\beta \cdot R \cdot L_\beta^{-1} = \\ &= L_\beta^{-1} \cdot R \cdot R_1 \cdot L_\beta^{-1} \cdot L_\beta^{-1} \cdot R \cdot R_1 \cdot L_\beta^{-1} = \\ &= L_\beta^{-1} \cdot S^2 \cdot L_\beta \end{aligned}$$

Die Abbildung S hat nun also die gleichen Eigenschaften wie T und man kann ohne weiteres S untersuchen, um T zu verstehen.

Komplex geschrieben sieht die Abbildung so aus:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z \cdot e^{i f(|z|)} + w, \quad w \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.8)$$

und ist jetzt ein Generator für ein diskretes dynamisches System auf $\mathbb{C}$. Konkreter werdend, beschränken wir uns auf

$$S : z \mapsto z \cdot e^{i/|z|} + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Die Abbildung S mischt in der Nähe des Nullpunktes ungeheuerlich. Weit aussen werden glatte Kurven invariant gelassen. Wir haben eine Abbildung, die reguläres und chaotisches Verhalten zeigt, (Bild 4.1)

Die Abbildung S soll Braunabbildung heissen.

It is not surprising that, after a long period of searching and erring, some of the concepts and ideas in human thinking should have come gradually closer to the fundamental laws of this world.

Victor Weisskopf, *Knowledge and wonder*, 1966

5. Pesintheorie für glatte dynamische Systeme und ihre Erweiterung durch Katok-Strelcyn auf Systeme mit Singularitäten

Sei M eine glatte m -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $T: M \rightarrow M$ ein C^2 -Diffeomorphismus auf M , der das von der Riemann'schen Metrik ρ induzierte Mass μ invariant lässt. Ein Punkt $x \in M$ heisst regulär, falls k Zahlen $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ und eine Zerlegung

$$T_x M = \bigoplus_{i=1}^k E_i(x) \quad (5.1)$$

des Tangentialraumes von x existieren, sodass

$$\lambda_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|dT^n(x)v|), \forall v \neq 0, v \in E_i(x), i=1..k \quad (5.2)$$

Die $\lambda_i(x)$ heissen charakteristische Lyapunovexponenten und die E_i sind deren Eigenräume. In einem regulären Punkt ist die Zerlegung eindeutig. Der multiplikative Ergodensatz von Oseledec (Siehe auch Satz 6.10) stellt sicher, dass für kompaktes M fast jeder Punkt regulär ist. Die Pesinregion Λ in M besteht aus denjenigen Punkten, wo alle Lyapunovexponenten von Null verschieden sind:

$$\Lambda := \{x \in M \mid \lambda_i(x) \neq 0, i=1, \dots, k\} \quad (5.3)$$

Der Satz von Pesin [Pe 1977] besagt, dass im Falle wo $\mu(\Lambda) > 0$, die Pesinregion als abzählbare disjunkte Vereinigung von messbaren Mengen Λ_n dargestellt werden kann mit $\mu(\Lambda_0) = 0$, $\mu(\Lambda_n) > 0$ für $n > 0$ und dass T jedes Λ_n invariant lässt und auf Λ_n eingeschränkt ergodisch ist. Mehr noch: Eingeschränkt auf Λ , ist T metrisch isomorph zum direkten Produkt eines Bernoullishifts mit einer zyklischen Permutation einer endlichen Menge.

Pesin nennt ein dynamisches System (M, T, μ) , wo $\mu(\Lambda) > 0$ ist, nichtuniform hyperbolisch. Ist $\mu(\Lambda) = \mu(M)$ so heisst das System fast hyperbolisch. (Siehe [Pr 1983] oder [Wo 1981]).

$W^s(x) := \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(x), T^n(y)) = 0\}$ bezeichnet die stabile und

$W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) = 0\}$ die unstabile Mannigfaltigkeit in x .

T heisst ergodisch, falls jede T -invariante Menge Mass 1 oder 0 hat.

T heisst Bernoulli, falls (M, T, μ) metrisch isomorph zu einem Bernoullishift ist.

Satz 5.1 *Ist (M, T, μ) nichtuniform hyperbolisch, so gilt :*

(Pesin)

(1) *Die Pesinregion Λ ist eine endliche oder abzählbare Vereinigung von disjunkten messbaren Mengen $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots$*

(2) *$\mu(\Lambda_0) = 0$, $\mu(\Lambda_n) > 0$ für $n > 0$*

(3) *$T(\Lambda_n) = \Lambda_n$ und T eingeschränkt auf Λ_n ist ergodisch*

(4) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $l_n \in \mathbb{N}$ und messbare Teilmengen $\Lambda_n^{(1)}, \dots, \Lambda_n^{(l_n)}$, sodass $T(\Lambda_n^{(i)}) = \Lambda_n^{(i+1)}$ für $i=1, \dots, l_n-1$ und $T^{l_n} : \Lambda_n^{(1)} \rightarrow \Lambda_n^{(1)}$ ist Bernoulli*

(5) *Für $x \in \Lambda$ sind $W^s(x)$ und $W^u(x)$ Untermannigfaltigkeiten von M*

(6) *$x, y \in \Lambda_n^{(1)}$ impliziert $W^s(x) \cap W^u(y) \subset \Lambda_n^{(1)}$*

(7) *Für jedes $x \in \Lambda_n^{(1)}$ gehört fast jeder Punkt von $W^s(x)$ und $W^u(x)$ zu $\Lambda_n^{(1)}$*

Mit diesem Satz hat man direkt eine relativ einfache Methode, um von einer Abbildung Ergodizität zu zeigen. Diese Methode ist z.B. von Easton ([Ea1979]) oder Przytycki ([Pr1983]) verwendet worden, um Ergodizität von verketteten von Twistabbildungen zu beweisen:

Korollar 5.2: a) *Falls die Lyapunovexponenten fast nirgends auf M verschwinden, und für fast jedes Paar $x, y \in M$ lokale stabile und unstabile Mannigfaltigkeiten $W_{loc}^s(x), W_{loc}^s(y)$ und $m, n \in \mathbb{N}$ angegeben werden können, sodass $T^m(W_{loc}^s(x)) \cap T^{-n}(W_{loc}^u(x)) \neq \emptyset$, so ist T ergodisch.*

b) *Falls die Lyapunovexponenten fast nirgends auf M verschwinden, und für fast jedes Paar $x, y \in M$ lokale stabile und unstabile Mannigfaltigkeiten $W_{loc}^s(x), W_{loc}^s(y)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ angegeben werden können, sodass $T^m(W_{loc}^s(x)) \cap T^{-n}(W_{loc}^u(x)) \neq \emptyset$, für alle $n, m > n_0$, so ist T Bernoulli.*

Ein weiteres wichtiges Resultat von Pesin verknüpft die metrische Entropie h_μ mit den Lyapunovexponenten.

Eine Familie $\alpha = \{A_j\}_{j \in J}$ von messbaren Mengen in M , mit

$$\begin{aligned} \mu(A) &> 0, \\ A_1 \neq A_2 \in \alpha &\Rightarrow \mu(A_1 \cap A_2) = 0, \\ \mu(M \setminus \bigcup_{j \in J} A_j) &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

heisst (messbare) Partition von M . Mit $T(\alpha)$ bezeichnen wir die messbare Partition $\{T(A_j)\}_{j \in J}$. Eine Partition α ist feiner als die Partition β ($\alpha < \beta$) falls jedes Element aus β als Vereinigung von Elementen aus α dargestellt werden kann modulo Nullmengen.

Mit $\alpha \vee \beta$ bezeichnet man die grösste Partition, die feiner ist als α und β :

$$\alpha \vee \beta = \{(A \cap B) \mid A \in \alpha, B \in \beta \text{ und } \mu(A \cap B) > 0\} \quad (5.5)$$

Für jede messbare Partition $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ von M definiert

$$H(\alpha) = \sum_{i \in I} -\mu(A_i) \ln(\mu(A_i)) \quad (5.6)$$

die Entropie der Partition α . Die Entropie von T bezüglich α , $h(\alpha, T)$ ist gegeben durch

$$h(\alpha, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i(\alpha)\right) \quad (5.7)$$

und die Entropie oder auch metrische Entropie von T ist definiert als

$$h_\mu(T) = \sup_\alpha h(\alpha, T) \quad (5.8)$$

Aus der Entropieformel von Pesin (für einen Beweis siehe [Ma 1981], oder [Ma 1987]), kann man aus dem Nichtverschwinden eines positiven Lyapunov-exponenten auf einer Nichtnullmenge auf positive metrische Entropie schliessen.

Satz 5.3 $h_\mu(T) = \int_M \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(x) d\dim(E_j(x)) d\mu$
(Pesin)

Pesin nennt das Nichtverschwinden eines positiven Lyapunovexponenten auf einer Nichtnullmenge partielle nichtuniforme Hyperbolizität.

Neben dieser Pesintheorie für glatte dynamische Systeme existiert eine Erweiterung von Katok - Strelcyn [Ka 1986] für dynamische Systeme mit Singularitäten. Natürlich dürfen die Singularitäten nicht zu schlimm sein. Sie müssen untenstehende Bedingungen von Katok-Strelcyn (K-S) erfüllen.

Sei wieder M eine glatte Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Riemann'scher Metrik ρ . Auf einer offenen Menge $V \subset M$ ist eine injektive C^2 -Abbildung $T: V \rightarrow M$ definiert, die das von ρ induzierte Mass μ invariant lässt.

Mit $S := M \setminus V$ bezeichnen wir die Menge der Singularitäten von T .

Noch einige Notationen:

Für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ bezeichne $B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ die Kugel um x mit Radius ε . Analog ist $B_\varepsilon(A) := \{y \in M \mid \rho(x, A) < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung einer Menge $A \subset M$. Sei $r > 0$ so, dass für jedes $x \in M$ $\exp_x$ eingeschränkt auf $B_r(x)$ injektiv ist. Mit $\|d^2 T(x)\|$ meinen wir $\sup\{\|d^2(\exp_x^{-1} \circ T \circ \exp_y)\| \mid x \in B_r(y), T(x) \in B_r(z)\}$ und $\log^+(T) := \max\{\log(t), 0\}$.

K-S-i) Es existieren positive Konstanten a, C_1 , sodass für jedes $\varepsilon > 0$
 $\mu(B_\varepsilon(S)) < C_1 \varepsilon^a$

K-S-ii) $\int_M \log^+ \|dT(x)\| d\mu(x) < \infty, \int_M \log^+ \|dT^{-1}\| d\mu(x) < \infty$

K-S-iii) Es existieren positive Konstanten b, C_2 , sodass für jedes $x \in V$
 $\|d^2T(x)\| < C_2 \rho(x, S)^{-b}$

K-S-iv) Es existieren positive Konstanten $d > 1, C_3$, sodass für jedes $x \in V$
 $\|dT(x)\| < C_3 \rho(x, S)^{-d}$

Die Bedingung K-S-i) impliziert, dass S eine Nullmenge ist. Die Bedingung K-S-ii) sichert nach Oseledec (Siehe Satz 6.10) fast überall die Existenz der Lyapunovexponenten. Die ersten drei Bedingungen genügen für eine Verallgemeinerung von Pesin's Satz 5.1.

Wie oben bezeichne Λ die Pesinregion auf M . Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [Ka 1986].

Satz 5.4 *Ist $\mu(\Lambda) > 0$ und erfüllt T die Katok-Strelcyn Bedingungen (Katok-Strelcyn) I)-III), so gelten die Aussagen 1)-7) in Satz 5.1.*

Nach einer Bemerkung von Przytycki ([Pr 1983]) gilt Satz 5.4 auch für Abbildungen $T = T_n \circ T_{n-1} \circ \dots \circ T_1$, wo T_i ($i=1, \dots, n$) injektive C^2 -Abbildung sind, die auf einer offenen Teilmenge V_i von M definiert ist: $T_i: V_i \rightarrow M$, $S_i := M \setminus V_i$, μ invariant lässt und T_i für sich die Bedingungen (K-S-i)-(K-S-iii)) erfüllt.

Wir brauchen in diesem Fall nämlich nur n Kopien $M_1, \dots, M_n$ von M zu nehmen, wo $T_i: V_i \subset M_i \rightarrow M_{i+1 \pmod n}$. Die neue Abbildung

$$T: \bigcup_{i=1}^n V_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^n M_i, T|V_i = T_i: V_i \rightarrow M_{i+1 \pmod n} \quad (5.9)$$

ist dann eine injektive C^2 -Abbildung, die alle Forderungen für Satz 5.4 erfüllt.

Auch die Entropieformel von Pesin hat eine Verallgemeinerung: ([Ka 1986])

Satz 5.5 *a) Erfüllt T die Katok-Strelcyn Bedingungen I)-III), so gilt (Katok-Strelcyn)*

$$h_\mu(T) \geq \int_M \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)) d\mu$$

b) Erfüllt T die Katok-Strelcyn Bedingungen I)-IV), so gilt

$$h_\mu(T) = \int_M \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)) d\mu$$

Die Pesin'sche Theorie steigert die Bedeutung der Lyapunovexponenten enorm. Das Interesse gilt nun ihrer Berechnung. Was für Kriterien kennt man, um das Nichtverschwinden von Lyapunovexponenten zu zeigen? Der nächste Abschnitt ist unter anderem ihnen gewidmet.

6. Besuchsfrequenzen, Rückkehrzeiten und Lyapunovexponenten von Matrix-cozyklen

Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei μ ein Borelmaß auf X mit $\mu(X)=1$ und $\mu(U)>0$ für jede offene Menge U . Weiter sei eine messbare Transformation $T: X \rightarrow X$ gegeben, die μ invariant lässt d.h. $\mu(T(E))=\mu(E)$ für jede Borelmenge E . Für $f \in L^1(X, \mu)$ liegt nach dem Ergodensatz von Birkoff [Si 1976] das Zeitmittel

$$P^+(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^+(f)(x) \quad (6.1)$$

als Grenzwert des Mittels über die ersten n Schritte

$$M_n^+(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m(x)) \quad (6.2)$$

ebenfalls in $L^1(\mu)$ und $\|f\|_1 = \|P^+(f)\|_1$.

Für jede messbare Menge A und jeden Punkt $x \in X$ ist $P^+1_A(x)$ die Besuchsfrequenz des Punktes x in A . (1_A ist die charakteristische Funktion von A). Das folgende Lemma besagt, dass es für jede Nichtnullmenge A eine nichtverschwindende Besuchsfrequenzzahl δ gibt, sodass die Punkte, die die Besuchsfrequenz grösser gleich δ haben, positives Mass haben. Gleichzeitig kriegen wir noch eine Verschärfung des Poincarre-Wiederkehrsatzes: fast jeder Punkt, der A einmal trifft, hat positive Besuchsfrequenz in A .

Lemma 6.1
(Easton)

Für jedes messbare $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$ gilt

- a) $\mu(\{x \in X \mid P^+1_A(x) = 0\} \cap \{x \in X \mid \exists n > 0 \ T^n(x) \in A\}) = 0$
- b) $\exists \delta \in (0, 1]$ mit $\mu(\{x \in X \mid P^+1_A(x) \geq \delta\}) > 0$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $\{x \in X \mid P^+1_A(x) > 0\}$ keine Nullmenge ist (Easton [1980]). Sei $Z := \{x \in X \mid P^+1_A(x) = 0\}$

$$\mu(Z \cap A) = \int_Z 1_A d\mu = \int_Z P^+1_A d\mu = 0 \quad (6.3)$$

wo die mittlere Identität einfach Birkoff-Kinchin ist. Daraus folgt direkt

$$\mu(\{x \in X \mid P^+1_A(x) > 0\}) = \mu(X - Z) > \mu(A) > 0. \quad (6.4)$$

Sei Z_k nun die Menge der Punkte in Z , die A beim k -ten Schritt zum erstenmal treffen: $Z_k := \{x \in Z \mid T^k(x) \in A, T^i(x) \notin A \ 0 \leq i < k\}$.

Da $T^k(Z_k) \subset Z \cap A$, haben wir nach obigem $\mu(T^k(Z_k)) = 0$ und damit auch

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k\right) = 0$$

was die Behauptung a) beweist.

Jetzt nehmen wir an, dass

$$\mu(\{x \in X \mid P^+1_A(x) \geq 1/n\}) = 0 \quad \forall n > 0 \quad (6.5)$$

Daraus folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid P^+1_A(x) \geq 1/n\}\right) = 0 \quad (6.6)$$

$$\mu(\{x \in X \mid P^+1_A(x) > 0\}) = 0 \quad (6.7)$$

im Widerspruch zu (6.4). Also ist (6.5) offensichtlich unsinnig.
Auch b) ist gezeigt. ■

Wir wissen nun also, dass es zu jedem A für eine Nichtnullmenge eine positive Besuchsfrequenz δ gibt. Wie gross kann man dieses δ machen?
Wir bezeichnen mit

$$\delta(A) := \sup\{\delta \in (0,1] \mid \mu\{x \in X \mid P^+1_A(x) \geq \delta\} > 0\} \quad (6.8)$$

den kritischen Frequenzwert, der angibt, bis zu welchem $\delta(A)$ es eine Menge von positivem Mass gibt, die mit dieser Frequenz immer wieder A besucht. Das nächste Lemma zeigt, dass man $\delta(A)$ durch Vergrössern von A beliebig gross machen kann. Das nächste Lemma werden wir unten noch brauchen, wenn wir Lyapunovexponenten behandeln.

Lemma 6.2 *Für jede Folge von messbaren Mengen A_n , für die $\mu(A_n) \rightarrow \mu(X)=1$ für $n \rightarrow \infty$ hat man $\delta(A_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.*

Beweis: Wir geben ein $\delta \in (0,1)$ fest vor und nehmen an, dass

$$\mu\{x \in X \mid P^+1_{A_n}(x) \geq \delta\} = 0 \quad \forall n \quad (6.9)$$

Sei $Z_n := \{x \in X \mid P^+1_{A_n} < \delta\}$. Z_n hat nach Annahme (6.9) volles Mass. Es folgt nun nacheinander

$$\mu(A_n) = \mu(Z_n \cap A_n) = \int_{Z_n} 1_{A_n} d\mu = \int_{Z_n} P^+1_{A_n} d\mu < \int_{Z_n} \delta d\mu = \delta \mu(Z_n) = \delta$$

Es gibt also die Schranke $\mu(A_n) < \delta$.

$\mu(A_n)$ kann aber durch Vergrössern von n beliebig gross gemacht werden. Die Annahme (6.9) ist demnach unsinnig. ■

Die Besuchsfrequenz eines Punktes x bezüglich einer messbaren Menge A bis zum Zeitpunkt n ist gegeben durch $M_n^+1_A(x)$.

Proposition 6.3 *Für jede messbare Menge A und jedes $\delta < \delta(A)$ gibt es ein n_0 , sodass $\mu(\{x \in X \mid \forall n > n_0, M_n^+1_A(x) > \delta\}) > 0$.*

Beweis: Wir fixieren ein δ mit $\frac{\delta+1}{2} < \delta(A)$ und nehmen an, dass

$$\forall n_0 \mu(\{x \in X \mid \forall n > n_0, M_n^+1_A(x) > \delta\}) = 0 \quad (6.10)$$

Das gibt dann

$$\forall n_0 \quad \mu \left(\bigcap_{n \geq n_0} \{x \in X \mid M_n^+ 1_A(x) > \delta\} \right) = 0 \quad (6.11)$$

$$\mu \left(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq n_0} \{x \in X \mid M_n^+ 1_A(x) > \delta\} \right) = 0 \quad (6.12)$$

$$\mu(\{x \in X \mid \exists n_0 \forall n > n_0 \quad M_n^+ 1_A(x) > \delta\}) = 0$$

$$\mu(\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^+ 1_A(x) > \frac{\delta+1}{2}\}) = 0$$

$$\mu(\{x \in X \mid P^+ 1_A(x) > \frac{\delta+1}{2}\}) = 0 \quad (6.13)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(\delta+1)/2 < \delta(A)$. Folglich ist die Annahme (6.10) falsch und wir haben die Behauptung. ■

Die Differenz der Besuchsfrequenzen in A und A^c nennen wir $\rho_n(A)$:

$$\rho_n(A)(x) := M_n^+ 1_A(x) - M_n^+ 1_{A^c}(x) \quad (6.14)$$

Proposition 6.4 *Für jedes messbare A und jedes $\rho < 2\delta(A) - 1$ gibt es ein n_0 , sodass $\mu(\{x \in X \mid \forall n > n_0 \quad \rho_n(A)(x) > \rho\}) > 0$.*

Beweis: Sei $\rho < 2\delta(A) - 1$ fest und $\delta := (\rho+1)/2 < \delta(A)$.

Nach Proposition 6.3 finden wir ein n_0 , sodass

$$\mu(\{x \in X \mid \forall n > n_0 \quad M_n^+ 1_A(x) > \delta\}) > 0 \quad (6.15)$$

Da M_n^+ ein linearer Operator auf $L^1(X, \mu)$ ist und $1_A + 1_{A^c} = 1_X$, gilt

$$M_n^+ 1_A(x) + M_n^+ 1_{A^c}(x) = 1 \quad (6.16)$$

und damit

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid \forall n > n_0 \quad M_n^+ 1_A(x) > \delta\} &= \{x \in X \mid \forall n > n_0 \quad M_n^+ 1_{A^c}(x) < 1 - \delta\} = \\ &= \{x \in X \mid \forall n > n_0 \quad M_n^+ 1_A(x) - M_n^+ 1_{A^c}(x) > 2\delta - 1\} = \{x \in X \mid \forall n > n_0 \quad \rho_n(A)(x) > \rho\} \end{aligned}$$

wegen (6.15) ist nun auch $\{x \in X \mid \rho_n(A)(x) > \rho\}$ keine Nullmenge für $n > n_0$. ■

Proposition 6.5 *Für jedes $\delta \in (0, 1)$ und jedes $n > 0$ und alle messbaren A ist*

$$\mu \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A) \right) > \delta, \text{ falls } \mu(A) > 1 - \frac{(1-\delta)}{n}$$

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus der Beziehung

$$\mu \left(\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A) \right)^c \right) \leq n \mu(A^c) \quad (6.17) \quad \blacksquare$$

Analog zu (6.8) definieren wir noch

$$\rho(A) := \sup(\rho \in (0,1) \mid \mu\{x \in X \mid \rho_n(A) > \rho \ \forall n > 0\} > 0) \quad (6.18)$$

Für jedes $\rho < \rho(A)$ kann man eine Nichtnullmenge finden, sodass ein Punkt aus dieser Menge zu jedem Zeitpunkt die Menge A mit einer um ρ höheren Frequenz besucht hat, als A^c . Ein Höhepunkt dieses Abschnitts ist das folgende Lemma, das besagt, dass man durch Vergrössern von A $\rho(A)$ beliebig gross machen kann:

Lemma 6.6 *Für jede Folge von messbaren Mengen A_n , für die $\mu(A_n) \rightarrow \mu(X) = 1$ monoton für $n \rightarrow \infty$, hat man $\rho(A_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.*

Beweis: Sei $\rho \in (0,1)$ fest und $\delta = (\rho+1)/2$. Nach Lemma 6.2 gibt es ein n_1 , sodass $\delta < \delta(A_n)$ für alle $n > n_1$, was $\rho < 2\delta(A_n) - 1$ für $n > n_1$ ergibt und Proposition 6.4 für A_n anwendbar macht, falls $n > n_1$.

Unser Ziel ist es, ein n_0 zu bekommen, sodass man für x aus einer Nichtnullmenge $\rho(A_n)(x) > \rho$ hat für alle $n > n_0$.

Nach Proposition 6.4 gibt es für alle $m > n_1$ ein n_2 , mit

$$\mu\{x \in X \mid \forall n > n_2 \ \rho_n(A_m)(x) > \rho\} > 0 \quad (6.19)$$

Nach Proposition 6.5 gibt es für alle n_2 ein $n_0 > m$, mit

$$\begin{aligned} & \mu(\{x \in X \mid \forall n > n_2 \ \rho_n(A_{n_0})(x) > \rho\}) + \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n_2} T^{-k}(A_{n_0})\right) > \\ & > \mu(\{x \in X \mid \forall n > n_2 \ \rho_n(A_m)(x) > \rho\}) + \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n_2} T^{-k}(A_{n_0})\right) > 1 \end{aligned}$$

und damit hat der Durchschnitt

$$\{x \in X \mid \forall n > n_2 \ \rho_n(A_{n_0})(x) > \rho\} \cap \bigcap_{k=0}^{n_2} T^{-k}(A_{n_0}) \quad (6.20)$$

$$< \{x \in X \mid \forall n > 0 \ \rho_n(A_{n_0})(x) > \rho\}$$

positives Mass. So hat auch $\{x \in X \mid \forall n > 0 \ \rho_n(A_{n_0})(x) > \rho\}$ positives Mass, was zu zeigen war. ■

Zuletzt wollen wir noch zeigen, dass die Nichtnullmenge, von der wir in Lemma 6.6 die Existenz gezeigt haben, beliebig gross gemacht werden kann. Sei $C_{A_n}(\delta)$ die Menge der Punkte, die A_n zu jedem Zeitpunkt mit einer um mindestens δ höheren Frequenz besucht haben als das Komplement.

Lemma 6.7 *Sei A_n eine Folge von messbaren Mengen, für die $\mu(A_n) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$)
Für ein festes $\delta \in (-1, 1)$ gilt $\mu(C_{A_n}(\delta)) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass das Gesamtmass der invarianten Mengen A für die ein n existiert, mit $A \subset A_n$ Null ist. Liegt dieses Mass nämlich zwischen 0 und 1, arbeiten wir einfach mit dem Komplement dieser Menge als neues X . Ist das Mass aber 1, so ist die Behauptung schon bewiesen.

Wir fixieren ein $\delta \in (-1, 1)$.

Aus Notationsgründen schreiben wir C_n für C_{A_n} . Lemma 6.6 besagt, dass $\mu(C_n(\delta)) > 0$ für n genügend gross. Sei n_0 nun so, dass $\mu(C_{n_0}(\delta)) > 0$.

Jetzt fixieren wir n_0 und vergrössern δ bis zum Wert δ_0 , wo $\mu(C_{n_0}(\delta_0)) = 0$, $\mu(C_{n_0}(\delta')) > 0$ für $\delta' < \delta_0$. Falls der Fall eintritt, dass $\delta_0 = 1$, so bedeutet dies, dass $\mu(C_{n_0}(1)) > 0$ und das heisst, dass in A_{n_0} eine invariante Menge existiert von positivem Mass. Diese Menge haben wir aber nach der Vorbemerkung in X schon weggenommen.

Nach Lemma 6.6 existiert wieder ein n_1 , sodass

$$\mu(C_{n_0}(\delta_0)) = 0, \mu(C_{n_1}(\delta_0)) > 0.$$

Nun wird n_1 festgehalten und δ_0 vergrössert bis zum Wert δ_1 , wo $\mu(C_{n_1}(\delta_1)) = 0$, $\mu(C_{n_1}(\delta')) > 0$ für $\delta' < \delta_1$.

Dieses Vorgehen iterieren wir. Immer gibt das

$$\mu(C_{n_k}(\delta_k)) = 0, \mu(C_{n_{k+1}}(\delta_k)) > 0, \mu(C_{n_k}(\delta')) > 0 \text{ für } \delta' < \delta_k.$$

Sei $C(\delta) := \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n_k}(\delta)$ und $\delta^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_k$. Der Fall $\delta^* < 1$ ist nicht

möglich, da wir sonst $\mu(C_{n_k}(\delta^*)) = 0$ hätten für alle k , was im Widerspruch zu Lemma 6.6 steht.

Die Situation ist folgende:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{n_0}(\delta) & \subset & C_{n_1}(\delta) & \subset & C_{n_2}(\delta) & \subset & C_{n_3}(\delta) & \subset & \dots & \subset & C(\delta) \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
 C_{n_0}(\delta_0) & \subset & C_{n_1}(\delta_0) & \subset & C_{n_2}(\delta_0) & \subset & C_{n_3}(\delta_0) & \subset & \dots & \subset & C(\delta_0) \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
 & & C_{n_1}(\delta_1) & \subset & C_{n_2}(\delta_1) & \subset & C_{n_3}(\delta_1) & \subset & \dots & \subset & C(\delta_1) \\
 & & & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
 & & & & C_{n_2}(\delta_2) & \subset & C_{n_3}(\delta_2) & \subset & \dots & \subset & C(\delta_2) \\
 & & & & & & \cup & & & & \cup \\
 & & & & & & C_{n_3}(\delta_3) & \subset & \dots & \subset & C(\delta_3) \\
 & & & & & & \vdots & & & & \vdots
 \end{array}$$

Nach Konstruktion ist für jedes δ' zwischen δ und δ_0 $C(\delta') = C(\delta)$. Falls sich nun die Mengen $C(\delta)$ und $C(\delta_0)$ um eine Menge C mit positivem Mass unterscheiden würden, so würde C alle A_n mit scharfer Frequenzdifferenz δ_0 mehr treffen als die Komplemente d.h. $M_m^+ 1_{A_n}(x) - M_m^+ 1_{A_n^c}(x) = \delta_0 \quad \forall m, n$ und das ist schon für ein einzelnes n und zwei verschiedene m_1, m_2 , die prim sind, unsinnig.

Wir haben also $C(\delta) = C(\delta_1) = C(\delta_2) = \dots$ modulo Nullmengen und das kann für jedes $\delta \in (-1, 1)$ gezeigt werden. Daher $C(\delta) = C(-1) = X$ modulo Nullmengen. ■

Ist A eine messbare Teilmenge von X mit $\mu(A) > 0$, so ist die Rückkehrzeit $k_A(x)$ für einen Punkt $x \in A$ gegeben durch

$$k_A(x) = \min\{n \geq 1 \mid T^n(x) \in A\}$$

k_A ist μ integrierbar und es existiert für fast alle $x \in A$ die auf A induzierte Abbildung $T_A : A \rightarrow A$

$$T_A(x) = T^{k_A}(x)$$

Das ergodische Mittel der Rückkehrzeit

$$P^+ k_A(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} k_A(T_A^{-k}(x))$$

hängt auf einfache Weise mit der Besuchsfrequenz zusammen:

Proposition 6.8 $P^+ k_A(x) \cdot P^+ 1_A(x) = 1$ für fast alle $x \in A$

Beweis: Sei x_0 ein Punkt aus A , der immer wieder nach A zurückkommt und $x_1 = T_A^1(x_0) \in A$. Nach n Schritten der Abbildung T sei $m(n) := n M_A^+ 1_A(x_0)$ die Anzahl Besuche in A . Es gilt

$$\begin{aligned}
 n &= \sum_{i=0}^{m(n)-1} k_A(x_i) \\
 1 &= \frac{m(n)}{n} \frac{1}{m(n)} \sum_{i=0}^{m(n)-1} k_A(x_i) \rightarrow P^+ 1_A(x_0) P^+ k_A(x_0) \\
 1 &= P^+ 1_A(x_0) P^+ k_A(x_0)
 \end{aligned}$$

■

Sei $\beta(A) := \inf \{ \beta \in [1, \infty) \mid \mu \{ x \in A \mid P^+ k_A(x) \leq \beta \} > 0 \}$.

Korollar 6.9 *Für jede Folge von messbaren Mengen A_n , für die $\mu(A_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, hat man $\beta(A_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.*

Beweis: Wir fixieren ein $\beta \in (1, \infty)$ und zeigen, dass es ein m gibt, sodass $\beta(A_m) \leq \beta$.

Nach Lemma 6.2 gibt es ein m , sodass $\delta(A_m) \geq 1/\beta$. D.h., dass eine Nichtnullmenge A_m mit mindestens Besuchsfrequenz $1/\beta$ besucht. Diese Nichtnullmenge können wir in A_m wählen. Aus Proposition 6.8 wissen wir nun, dass auf dieser Nichtnullmenge $P^+ k_A(x) \leq \beta$.

■

Sei nun $B: X \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ eine messbare Abbildung, sodass $\varphi^+(x) := \log^+(\|B(x)\|)$ μ integrierbar ist ($\log^+(t) = \max(\log(t), 0)$).

Das Paar (T, B) heisst messbarer Matrixcozyklus auf X .

Für jedes $n > 0$ sei $B^n(x) = B(T^{n-1}(x)) \circ B(T^{n-2}(x)) \circ \dots \circ B(x)$.

Für $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, definieren wir die Lyapunovexponenten

$$\lambda(x, v) = \lambda(x, v; T, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \log(|B^n(x)v|)$$

Nach Oseledec's multiplikativem Ergodensatz ([Wa 1982], [Ru 1979]) existieren sie μ fast überall:

Satz 6.10 (Oseledec) *Ist (T, B) ein μ -messbarer Matrixcozyklus mit $\log^+(\|B(x)\|) \in L^1(X, \mu)$, so existiert eine T -invariante Borelmenge $Y \subset X$ mit vollem Mass sodass*

a) $\exists s: Y \rightarrow \mathbb{Z}^+$ messbar, $s \circ T = s$,

b) $\forall x \in Y \exists$ lineare Unterräume

$$\{0\} = V_0(x) \subset V_1(x) \subset \dots \subset V_{s(x)}(x) = \mathbb{R}^k, B(x)(V_i(x)) \subset V_i(T(x))$$

c) $\forall x \in Y \exists \lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \dots < \lambda_{s(x)}(x)$ mit

$$\lambda_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \log |B^n(x)v| \text{ für } v \in V_i(x) \setminus V_{i-1}(x),$$

λ_i messbar und T invariant, $\lambda_i(x) = -\infty$ ist möglich. ■

Sei A nun wieder eine messbare Nichtnullmenge von X . $B_A: A \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ ist definiert als

$$B_A(x) = B^{k_A(x)}(x)$$

Der messbare Cozyklus (T_A, B_A) heisst der auf A induzierte Matrixcozyklus. Wie hängen seine Lyapunovexponenten mit den Lyapunovexponenten des Cozyklus (T, B) zusammen? Das folgende Lemma findet sich in [Wo 1985].

Lemma 6.11 *Ist $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$, so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, und fast jedes $x \in A$: $\lambda(x, v; T_A, B_A) = (P^+ k_A(x)) \lambda(x, v; T, B)$.*
(Wojtkowski)

Beweis: Sei x_0 ein Punkt in A, für den die Lyapunovexponenten existieren und der immer wieder nach A zurückkommt und $m(n) := n M_n^+ 1_A(x_0)$ die Anzahl Besuche von x_0 in A nach n Schritten.

Wie oben haben wir

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{m(n)} k_A(T_A^i(x_0)) \\ \lambda(x, v; T_A, B_A) &= \lim_{m \rightarrow \infty} 1/m \log(|B_A^m(x_0)|) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/m(n) \log(|B_A^{m(n)}(x_0)|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m(n)} 1/n \log(|B^n(x_0)|) = \\ &= (P^+ k_A(x_0)) \lambda(x, v; T, B) \end{aligned}$$

■

Sei $\lambda_{\max}(x) := \max \{ \lambda(x, v) \mid v \in \mathbb{R}^k, v \neq 0 \} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \log(\|B^n(x)\|)$.

Korollar 6.12 *Ist $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$ und $\lambda_{\max}(x; T_A, B_A) > 0$ für fast alle $x \in A$, so ist auch $\lambda_{\max}(x; T, B) > 0$ für fast alle $x \in A$.*

Beweis: Sei $A_n := \{x \in A \mid P^+ 1_A(x) \geq 1/n\}$. Nach Proposition 6.8 ist $A_n = \{x \in A \mid P^+ k_A(x) \leq n\}$ und mit Lemma 6.1 ist

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

Anwendung von Lemma 6.11 liefert für fast jedes $x \in A$

$$\lambda(x, v; T, B) = (1/P^+ k_A(x)) \lambda(x, v; T_A, B_A)$$

und damit für fast jedes $x \in A_n$

$$\lambda(x, v; T, B) \geq 1/n \lambda(x, v; T_A, B_A)$$

Insbesondere haben wir für fast alle $x \in A_n$

$$\lambda_{\max}(x; T, B) \geq 1/n \lambda_{\max}(x; T_A, B_A) > 0$$

und da $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine μ -Nullmenge ist, für fast alle $x \in A$

$$\lambda_{\max}(x; T, B) > 0$$

■

Korollar 6.13 *Existiert eine Folge A_n von messbaren Mengen für die $\mu(A_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gilt und hat man für alle n und fast jedes $x \in A_n$, dass $\lambda_{\max}(x; T_{A_n}, B_{A_n}) > 0$ ist, so bedeutet dies für fast alle $x \in X$: $\lambda_{\max}(x; T, B) > 0$.*

Beweis: Sei $C := \{x \in X \mid \lambda_{\max}(x; T, B) = 0\}$ und $\mu(C) > 0$. Wir wählen n so, dass $\mu(C) + \mu(A_n) = 1 > 0$. Das bedeutet $\mu(A_n \cap C) > 0$.

Nach Korollar 6.12 sind die Lyapunovexponenten auf A_n von Null verschieden, was somit auch auf $A_n \cap C$ gilt. Das ist ein Widerspruch zur obigen Annahme über C . Also ist die Annahme unsinnig. ■

7. Die Methode von Alexseev und der Satz von Wojtkowski

Wir übernehmen in diesem Abschnitt die Notationen von Abschnitt 5. Das Nichtverschwinden von Lyapunovexponenten kann nach der klassischen Methode von Alexseev folgendermassen festgestellt werden ([Wo 1983]) :

AI-i) Existenz eines messbaren Sektorbündels:

Es existiert für fast alle x ein Sektor SM_x :

$$SM_x = \{ (p, q) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \mid \|p\| \geq a(x) \|q\| \} \\ a : M \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ messbar, } r+s = m, \quad (7.1)$$

AI-ii) Invarianz des Sektorbündels:

Für fast alle x gilt

$$dT_x(SM_x) \subset SM_{T(x)} \quad (7.2)$$

AI-iii) Gleichmässige Kontraktion der Sektoren:

Die Tangentialvektoren im Sektorbündel werden fast überall gleichmässig gestreckt: $\exists \eta > 1$, so dass für fast alle $x \in M$ gilt

$$\forall v \in SM_x \mid dT_x(v) \mid \geq \eta \mid v \mid, \quad (7.3)$$

Satz 7.1 *Unter den Bedingungen AI-i) - AI-iii) gilt für fast alle x*
(Alexseev) $0 < \ln(\eta) \leq \lambda_{n-r+1}(x) \leq \lambda_{n-r+2}(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$

Beweis: Sei $X_0 := \{x \in M \mid \exists SM_x \subset TM_x \text{ mit den Eigenschaften AI-i) - AI-iii)}\}$

$X := \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k}(X_0)$ ist invariant unter T und hat volles Mass, da

X_0 volles Mass hat.

Mit vollständiger Induktion erhalten wir für jedes $x \in X$, $v \in SM_x$

$$\mid dT_x^n(v) \mid \geq \eta^n \mid v \mid \\ 1/n \ln \mid dT_x^n(v) \mid \geq \ln(\eta) + 1/n \mid v \mid \quad (7.4)$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \ln \mid dT_x^n(v) \mid \geq \ln(\eta) > 0 \quad (7.5) \quad \blacksquare$$

Wojtkowski [1985] hat gezeigt, dass schon schwächere Bedingungen genügen können, um nichtverschwindende Lyapunovexponenten zu erhalten:

Wo-i) Existenz eines messbaren Sektorbündels SM:

In fast jedem Tangentialraum TM_x existiert eine Basis $e_1(x), \dots, e_m(x)$ und ein Sektor

$$SM_x = \{ w = \sum_{i=1}^m w^i e_i(x) \mid w^i \geq 0 \ \forall i=1..m \text{ oder } w^i \leq 0 \ \forall i=1..m \}$$

Wo-ii) Invarianz des Sektorbündels:

Für fast alle x gilt

$$dT_x(SM_x) \subset SM_{T(x)} \quad (7.6)$$

Wo-iii) Schliessliche strikte Invarianz:

für fast alle $x \in M$ existiert ein $n(x) \in \mathbb{N}$,
sodass der Rand δSM_x ganz ins Innere von $SM_{T^{n(x)}(x)}$ zu liegen kommt

$$dT_x^{n(x)}(\delta SM_x) \subset \text{int}(SM_{T^{n(x)}(x)}) \quad (7.7)$$

Satz 7.2 *Unter den Bedingungen Wo-i)-Wo-iii) sind die Lyapunov-*
(Wojtkowski) *exponenten fast überall von Null verschieden .*

Wojtkowski studiert bei seinem Beweis ([Wo 1985], vereinfacht in [Wo 1986]) Matrizen mit nichtnegativen Koeffizienten, von denen es eine grosse Klasse gibt, deren Produkt den Spektralradius exponentiell wachsen lässt. Wir geben im nächsten Abschnitt einen mehr geometrischen Beweis.

8. Ein neuer Beweis des Satzes von Wojtkowski

Sei X ein beliebiger kompakter topologischer Raum mit Borelmasse m , $T: X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus, der m invariant lässt und $A: X \rightarrow \text{SI}(2, \mathbb{R})$ stetig. (T, A) ist ein stetiger Matrixcozyklus und es gilt alles im Abschnitt 6 gesagte. Die Lyapunovexponenten nehmen hier höchstens zwei verschiedene Werte λ^+ und λ^- an, wobei $\lambda^+(x) + \lambda^-(x) = 0$:

Satz 8.1 Falls $\log^+(\|A^{-1}(x)\|) \in L^1(m)$, so existieren für fast alle $x \in X$ eine Zerlegung $\mathbb{R}^2 = E^+(x) \oplus E^-(x)$ und die Limits

$$\lambda^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \log(\|A^n(x)u\|) \quad 0 \neq u \in E^+(x)$$

$$\lambda^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \log(\|A^n(x)u\|) \quad 0 \neq u \in E^-(x)$$

Für einen Beweis siehe [Ru 1979].

Wir definieren nun eine Abbildung F auf $X \times \mathbb{P}^1$, wo $\mathbb{P}^1$ der eindimensionale projektive Raum ist.

$$F: X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X \times \mathbb{P}^1 \\ (x, \bar{u}) \mapsto (T(x), \overline{A(x)u})$$

u ist ein Vektor aus der Äquivalenzklasse $\bar{u} \in \mathbb{P}^1$.

F ist eine stetige Abbildung auf dem kompakten Raum $X \times \mathbb{P}^1$.

Es existiert nun ein bezüglich F invariantes Mass μ auf $X \times \mathbb{P}^1$. (z.B. Si [1977], [Ma 1987]) Wir können von μ sogar noch mehr fordern:

Mit $M(X \times \mathbb{P}^1)$ bezeichnen wir den Raum der Borelwahrscheinlichkeitsmasse auf $X \times \mathbb{P}^1$. Sei $M_f(X \times \mathbb{P}^1) \subset M(X \times \mathbb{P}^1)$ die Menge der Borelmassewahrscheinlichkeitsmasse μ auf $X \times \mathbb{P}^1$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) μ ist invariant unter der Abbildung F , d.h. für jede Borelmenge B in $X \times \mathbb{P}^1$ gilt $\mu(B) = \mu(F(B))$.
- 2) $p_1 \mu = m$, falls $p_1: X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ die Projektion auf X ist.

Proposition 8.2 $M_f(X \times \mathbb{P}^1) \neq \emptyset$
(Krylov-Bogoliubov)

Beweis: Der Beweis folgt im Wesentlichen dem üblichen Beweis, wo nur 1) gefordert wird.

Sei $\mu_0 = m \times \nu_0$, das Produktmass von m und ν_0 , wo $\nu_0 \in M(\mathbb{P}^1)$ beliebig. μ_0 erfüllt trivialerweise die Eigenschaft 2).

Wir definieren

$$\mu_n(B) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_0(F^{-i}(B))$$

μ_n ist wieder aus $M(X \times P^1)$, und hat Eigenschaft 2).

Nach Riesz (z.B. [Co 1986]) ist $M(X \times P^1)$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge der Einheitskugel von $C(X \times P^1)^*$. (Mit $C(X \times P^1)^*$ meinen wir den Dualraum von $C(X \times P^1) = \{f: X \times P^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$.)

Die Einheitskugel von $C(X \times P^1)^*$ ist nach Alaoglu schwachsternkompakt (z.B. [Co 1986]) Also hat μ_n eine Teilfolge μ_{n_k} , die schwachstern konvergiert. Sei μ ein solcher Limespunkt $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}$. μ erfüllt nun auch die Eigenschaft 1):

$$\begin{aligned} \mu T &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k} T = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/n_k \sum_{j=0}^{n_k-1} \mu_0 T^{-j} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 1/n_k \sum_{j=0}^{n_k-1} \mu_0 T^{-j} - 1/n_k \mu_0 + 1/n_k \mu_0 T^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k} = \mu \end{aligned}$$

Wir wollen nun einen Zusammenhang herstellen zwischen invarianten Massen auf $X \times P^1$ und den Lyapunovexponenten λ . Die Idee, invariante Masse auf $X \times P^1$ zu studieren, um Aussagen über Lyapunovexponenten zu machen, geht vermutlich zurück auf Fürstenberg [1963, 1983]. Siehe auch Young [1985]. Auf $X \times P^1$ definieren wir die Abbildung $\varphi(x, \bar{u})$, die angibt, wie ein Vektor $u \in \bar{u}$ gestreckt wird durch $A(x)$:

$$\varphi(x, \bar{u}) := \ln(|A(x)u|/|u|)$$

Wir gebrauchen noch die üblichen Notationen

$$\langle f, \mu \rangle := \int f(x, \bar{u}) d\mu(x, \bar{u}) \quad \text{für } f \in C(X \times P^1), \mu \in M(X \times P^1)$$

wobei wir diese Notation auch auf fast überall stetige Funktionen erweitern. Das folgende Lemma ist eine direkte Anwendung des Ergodensatzes von Birkoff:

Lemma 8.3 *Für $\mu \in M_e(X \times P^1)$, gilt*

$$\int_{X \times P^1} \lambda(x, \bar{u}) d\mu = \langle \varphi, \mu \rangle$$

Beweis: $\lambda(x, \bar{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(|A(T^{n-1}(x) \cdot \dots \cdot A(x)u|/|u|) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(x, \bar{u})) =: P^+ \varphi(x, \bar{u})$$

$$\int_{X \times P^1} \lambda(x, \bar{u}) d\mu = \int_{X \times P^1} P^+ \varphi(x, \bar{u}) d\mu = \int_{X \times P^1} \varphi d\mu$$

Korollar 8.4 *Gibt es ein $\mu \in M_e(X \times P^1)$ mit $\langle \varphi, \mu \rangle > 0$ so ist $\lambda^+(x) > 0$ auf einer Nichtnullmenge.*

Beweis: $\lambda^+(x) = 0$ für fast alle x würde bedeuten $\int_{X \times P^1} \lambda(x, \bar{u}) d\mu = 0$

im Widerspruch zu Lemma 8.3.

Sei $\varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi F^k = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(|A^{k+1}(x)u|/|A^k(x)u|) = \ln(|A^n(x)u|/|u|)$.

Korollar 8.5 *Gibt es ein $\mu \in M_r(X \times \mathbb{P}^1)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\langle \varphi_n, \mu \rangle > 0$ so ist $\lambda^+(x) > 0$ auf einer Nichtnullmenge.*

Beweis: Es gilt $\langle \varphi_n, \mu \rangle = n \langle \varphi, \mu \rangle$. ■

Wir formulieren den Satz von Wojtkowski etwas geometrischer:

Sei ν_L das Lebesguemass auf $\mathbb{P}^1$ und $\mu_L := m \times \nu_L$ das Produktmass von m und ν_L auf $X \times \mathbb{P}^1$.

Für jedes $x_0 \in X$ sei $p_{x_0} : \{x_0\} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, (x_0, u) \mapsto u$ der Isomorphismus von $\mathbb{P}^1$ mit dem Schnitt durch $X \times \mathbb{P}^1$ an der Stelle x_0 .

i) Existenz einer messbaren Teilmenge C von $X \times \mathbb{P}^1$:

Sei $C \subset X \times \mathbb{P}^1$ messbar bezüglich dem Mass μ_L , mit

- a) $m(p_1(C)) = m(X)$.
- b) $p_x(C)$ ist zusammenhängend für fast alle $x \in X$

ii) Invarianz von C

$F(C) \subset C$ m fast überall, d.h.

$$p_x(F(C)) \subset p_{T(x)}(C) \text{ für fast alle } x$$

iii) Schliessliche strikte Invarianz von C

Sei $C_\infty := \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(C)$. Wir fordern, dass der Rand von C_∞ , $\delta(C_\infty)$, fast überall im Innern von C , $\text{int}(C)$, liegen soll

$$p_x(\delta(C_\infty)) \subset p_x(\text{int}(C)) \text{ für fast alle } x$$

Die Bedingung iii) impliziert, dass für $D := C \setminus C_\infty$ aus zwei Teilmengen D_1 und D_2 besteht, für die gilt:

$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2, \\ \nu_L(p_x(D_1)) &> 0 \text{ für fast alle } x \in X \\ p_x(C_\infty) &\text{ liegt für fast alle } x \text{ zwischen } p_x(D_1) \text{ und } p_x(D_2) \end{aligned}$$

Satz 8.6 *Unter den Bedingungen i) – iii) sind die Lyapunovexponenten (Wojtkowski) $\lambda^+(x) = -\lambda^-(x)$ m -fast überall von Null verschieden.*

Zuerst wollen wir die Forderung iii) durch eine stärkere Bedingung iv) ersetzen.

In $X \times \mathbb{P}^1$ definieren für jede $m \times v_L$ messbare Menge E ihre wesentliche Dicke $d_{sup}(E)$

$$d_{sup}(E) := \sup \{ d \in [0,1] \mid \exists \text{ messbare Nichtnullmenge } H \subset X \text{ mit } v_L(p_x(E)) \geq d \text{ für } x \in H \}$$

sowie ihre wesentliche Dünne $d_{inf}(E)$

$$d_{inf}(E) := \inf \{ d \in [0,1] \mid \exists \text{ messbare Nichtnullmenge } H \subset X \text{ mit } v_L(p_x(E)) \leq d \text{ für } x \in H \}$$

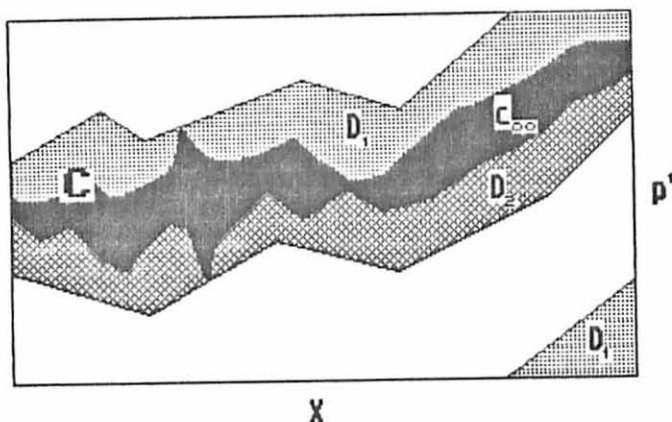


Fig. 8.1 Der Raum $X \times \mathbb{P}^1$. Die invariante messbare Menge C besteht aus dem schraffierten und schwarzen Gebiet.

Bei Zeitumkehr gelten alle obigen Forderungen i)–iii), wenn wir folgende Ersetzungen machen:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T^{-1} \\ F &\rightarrow F^{-1} \\ C &\rightarrow C' = X \times \mathbb{P}^1 \setminus C \\ C_{\infty} &\rightarrow C'_{\infty} = \bigcup_{k>0} F^{-k}(C) = \bigcap_{k>0} F^{-k}(C') \\ D &\rightarrow D' = C' \setminus C'_{\infty} \\ D_i &\rightarrow D'_i \text{ Zusammenhangskomponenten von } D' \\ \varphi &\rightarrow \varphi'(x,u) = \log(|A^{-1}(x)u|/|u|) \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt, dass für die wesentliche Dünne von D_1, D_2, D_1' und D_2' eine untere Schranke existiert:

iv) Wesentliche schliessliche strikte Invarianz von C und C'

$$\exists \varepsilon > 0 \quad d_{inf}(D_i) \geq \varepsilon \text{ und } d_{inf}(D'_i) \geq \varepsilon \quad i=1,2$$

Lemma 8.7 *Unter den Forderungen i), ii) und iv) sind die Lyapunov-exponenten fast überall von Null verschieden.*

Zuerst zur Idee des Beweises: Die Bedingung iv) erlaubt uns die Konstruktion eines Masses δ , mit $p_1 \delta = m$, sodass für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ $\langle \varphi_{n_0}, \delta \rangle > 0$. Aus δ bilden wir dann ein F -invariantes Mass μ , für das immer noch $\langle \varphi_{n_0}, \delta \rangle > 0$. Das erlaubt dann die Anwendung von Korollar 8.4.

Beweis: 1.Schritt: $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{sup}(F^n(D_1)) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{sup}(F^{-n}(D_1')) = 0$

folgt aus den Definitionen:

$$F^n(D) = \bigcap_{k=1}^n F^k(D) = \bigcap_{k=1}^n F^k(C) \setminus C_\infty.$$

$$F^{-n}(D') = \bigcap_{k=1}^n F^{-k}(D') = \bigcap_{k=1}^n F^{-k}(C') \setminus C'_\infty.$$

$$d_{sup}(F^n(D)) \rightarrow 0, \quad d_{sup}(F^{-n}(D')) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

2.Schritt: $m(p_1(E)) d_{inf}(E) \leq \mu_L(E) \leq m(p_1(E)) d_{sup}(E)$

Diese Ungleichungen sind auch direkt aus der Definition ersichtlich.

3.Schritt: falls $\varphi \leq 0$ auf einer μ_L messbaren Menge G , so gilt $\mu_L(F(G)) \geq \mu_L(G)$

Sei $G = H \times I$, wo H eine m -Borelmenge und I eine ν_L Borelmenge ist. Wir haben $|A(x)u| \leq 1$ für $(x, u) \in G$ und damit

$$\begin{aligned} \mu_L(H \times I) &= \int_{T(H)} \int_I d\nu_L dm = \int_{T(H)} \int_{A(x)(I)} |A(T^{-1}(x))u| d\nu_L dm \leq \\ &\leq \int_{T(H)} \int_{A(x)(I)} d\nu_L dm = \mu_L(F(H \times I)) \end{aligned}$$

wobei wir die zweite Gleichung erhalten haben, weil für jedes A aus $Sl(2, \mathbb{R})$ und jedes $I \subset \mathbb{P}^1$ gilt

$$\int_I d\nu_L = \int_{A(I)} |Au| d\nu_L(\bar{u}), \text{ wo } u \text{ ein } \overset{\text{finkais}}{V} \text{Vektor aus der Äquivalenz-klasse von } \bar{u} \in \mathbb{P}^1 \text{ ist.}$$

4.Schritt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $d_{sup}(F^{n_0}(D_1)) < d_{inf}(D_1 \setminus F^{n_0}(D_1))$ und $d_{sup}(F^{-n_0}(D_1')) < d_{inf}(D_1' \setminus F^{-n_0}(D_1'))$ für $i = 1, 2$

Aus dem 1. Schritt und der Forderung iv) folgt

$$d_{\sup}(F^n(D_1)) \rightarrow 0,$$

$$d_{\sup}(F^{-n}(D_1')) \rightarrow 0,$$

$$d_{\inf}(D_1 \setminus F^n(D_1)) \rightarrow \varepsilon_0 \geq \varepsilon,$$

$$d_{\inf}(D_1' \setminus F^{-n}(D_1')) \rightarrow \varepsilon_0' \geq \varepsilon \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

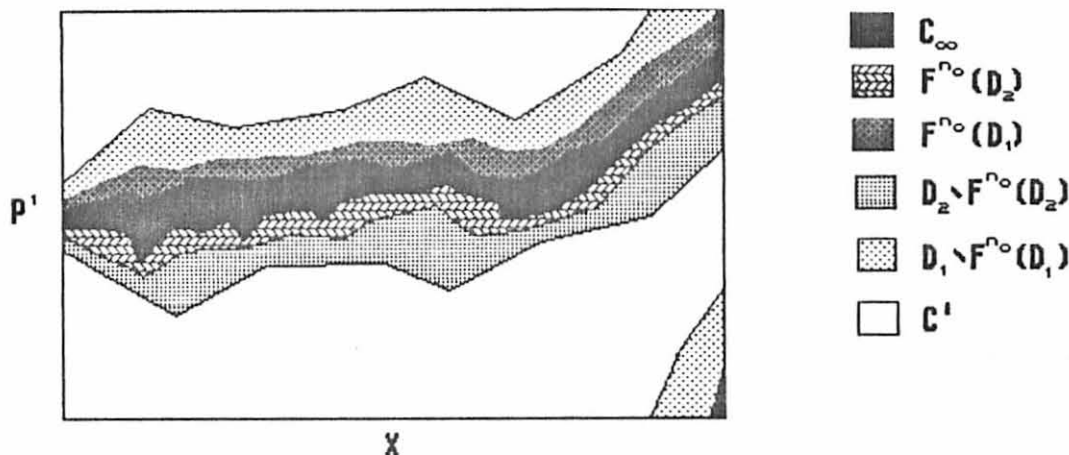


Fig 8.2 Illustration zum 4. Beweisschritt

5. Schritt: $\varphi_n(x, u) = -\varphi_n' F^n(T^{-1}(x), u)$

$$\varphi_n'(x, u) = \ln(|A^{-1}(T^{-(n-1)}(x)) \circ \dots \circ A^{-1}(x)u| / |u|)$$

$$\varphi_n' F^n(T^{-1}(x), u) =$$

$$= \ln(|A^{-1}(x) \circ A^{-1}(T(x)) \circ \dots \circ A^{-1}(T^{n-1}(x)) \circ A^n(x)u| / |A^n(x)u|)$$

$$= \ln(|u| / |A^n(x)u|) = -\ln(|A^n(x)u| / |u|) = -\varphi_n(x, u)$$

6. Schritt: *für fast alle $x \in X$ existieren $v_1(x), v_2(x), v_1'(x)$ und $v_2'(x)$, sodass $(x, v_1(x)) \in D_1 \setminus F^{n_0}(D_1)$ mit $\varphi_{n_0}(x, v_1(x)) > 0$ und $(x, v_1'(x)) \in D_1' \setminus F^{n_0}(D_1')$ mit $\varphi_{n_0}(x, v_1'(x)) < 0$ für $i \in \{1, 2\}$*

Wir nehmen an, dass eine Nichtnullmenge $E \subset X$ existiert, sodass

$$\varphi_{n_0}(x, u) \leq 0 \text{ für } (x, u) \in G := E \times \mathbb{P}^1 \cap D_1 \setminus F^{n_0}(D_1).$$

Nach dem 3. Schritt gilt nun

$$\mu_L(F^{n_0}(G)) \geq \mu_L(G)$$

Der 2. Schritt liefert aber

$$\begin{aligned} \mu_L(F^{n_0}(G)) &\leq m(E) d_{\sup}(F^{n_0}(D_1)) < m(E) d_{\inf}(D_1 \setminus F^{n_0}(D_1)) \leq \\ &\leq m(E) d_{\inf}(G) \leq \mu_L(G) \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Für D_2 gilt das gleiche wie für D_1 .

Bei Zeitumkehr erhalten wir genauso für fast jedes $x \in X$ ein $w_1'(x)$ und ein $w_2'(x)$ mit

$$w_i'(x) \in D_i'$$

$$\varphi_{n_0}'(x, w_i'(x)) > 0$$

Nach dem 5. Schritt bedeutet das aber $\varphi_{n_0} F^{-n_0}(T(x), w_i'(x)) < 0$ d.h. $\varphi_{n_0}(x, A^{-n_0} w_i'(T^{n_0^{-1}}(x))) < 0$ für fast jedes x wir setzen nun $v_i'(x) = A^{-n_0} w_i'(T^{n_0^{-1}}(x)) \in D_i'$.

7. Schritt: Es existieren zwei messbare Funktionen v_1 und $v_2 : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ deren Graphen $M_i = \{(x, v_i(x))\}$ ganz in $D_i \setminus F^{n_0}(D_i)$ liegen, und für die gilt $\varphi_{n_0} > 0$ auf M_i ($i=1,2$).

Ebenso existieren zwei messbare Funktionen

v_1' und $v_2' : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, deren Graphen M_i' ganz in $D_i' \setminus F^{-n_0}(D_i')$ liegen, und für die gilt $\varphi_{n_0} < 0$ auf M_i' ($i=1,2$)

Die Mengen $\{\varphi_{n_0} > 0\} \cap D_i \setminus F^{n_0}(D_i)$ sind messbar und haben auf X projiziert volles Mass. (6. Schritt)

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Auf $p_1(\{\varphi_{n_0} \in [2^n, 2^{n+1})\} \cap (D_i \setminus F^{n_0}(D_i)))$ setzen wir $v_i(x) = u$, für dasjenige u , das $\varphi_{n_0}(x, u) = 2^n$ und $(x, u) \in D_i$ erfüllt und am nächsten bei C_∞ liegt.

Die so konstruierten v_i sind messbar und haben Graphen ganz in $D_i \setminus F^{n_0}(D_i)$, auf denen $\varphi_{n_0} > 0$.

Analog konstruieren wir messbare Funktionen v_i' .

Sei $v(x) := \min\{v_1(x), v_2(x)\}$. v ist ebenfalls messbar.

Auf dem Graphen von v , $M := \{(x, v(x))\}$ ist $\varphi_{n_0} > 0$. Wir definieren nun für jede Borelmenge A auf $X \times \mathbb{P}^1$:

$$\delta(A) = m(p_1(A \cap M))$$

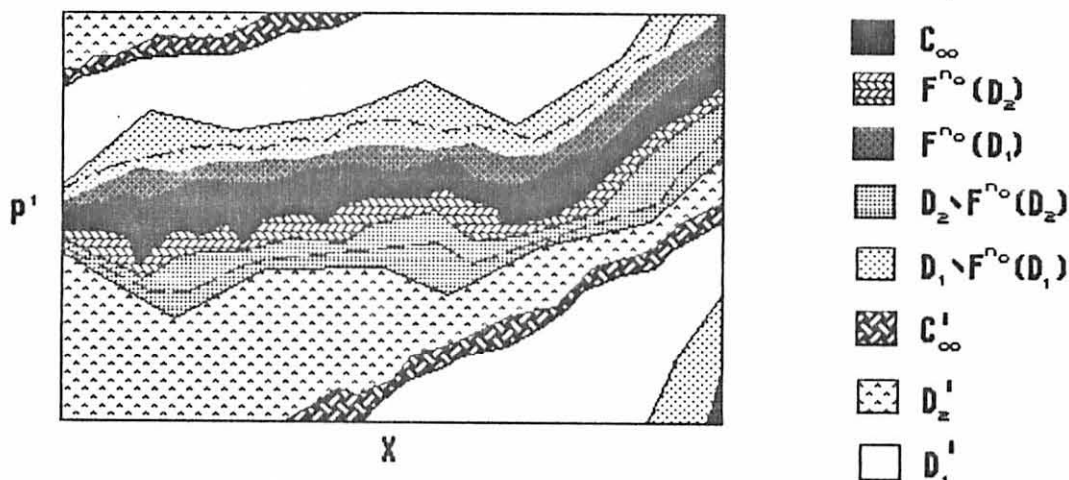


Fig. 8.3 Der Träger vom Mass δ liegt auf $M \subset M_1 \cup M_2$.

8. Schritt: $\delta \in M(X \times \mathbb{P}^1)$ und für

jede δ -Nichtnullmenge A ist $\int_A \varphi_{n_0} d\delta > 0$

Da M eine Borelmenge in $X \times \mathbb{P}^1$ ist, und p_1 stetig, so ist $p_1(A \times M)$ eine Borelmenge in X und δ ist eine positive beschränkte reelle Funktion auf den Borelmengen von $X \times \mathbb{P}^1$. Die σ -Additivität und die Normiertheit sind auch klar. Die zweite Aussage folgt aus der Definition des Masses.

9.Schritt: Für jedes $x_0 \in X$ ist die Funktion $\varphi_{x_0}(x_0, \cdot): \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ entweder konstant gleich Null oder hat genau zwei Nullstellen und genau ein lokales Maximum und genau ein lokales Minimum.

Für jedes $A \in \text{SI}(2, \mathbb{R})$ hat die Funktion $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u} \mapsto \ln(|Au|/|u|)$ die obigen Eigenschaften. Am einfachsten sieht man das, wenn man das Bild des Einheitskreises unter A betrachtet, eine Ellipse mit gleicher Fläche wie der Einheitskreis. Falls die Ellipse nicht mit dem Einheitskreis zusammenfällt, entsprechen die vier Schnittpunkte der Ellipse mit dem Einheitskreis den zwei Nullstellen von φ in $\mathbb{P}^1$, die Richtung des maximalen Durchmessers dem einzigen Maximum von φ und die Richtung des minimalen Durchmessers dem einzigen Minimum von φ .

10. Schritt: Für jedes $(x, u) \in M$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_{x_0} F^k(x, u) \geq \varphi_{x_0}(x, u)$

$M \subset D \setminus F^0(D)$ (7. Schritt) und $F^0(M) \subset F^0(D)$.

d.h. dass $p_x(F^0(M))$ fast überall zwischen $p_x(M_1)$ und $p_x(M_2)$ auf der Seite von $p_x(C_\infty)$ liegt.

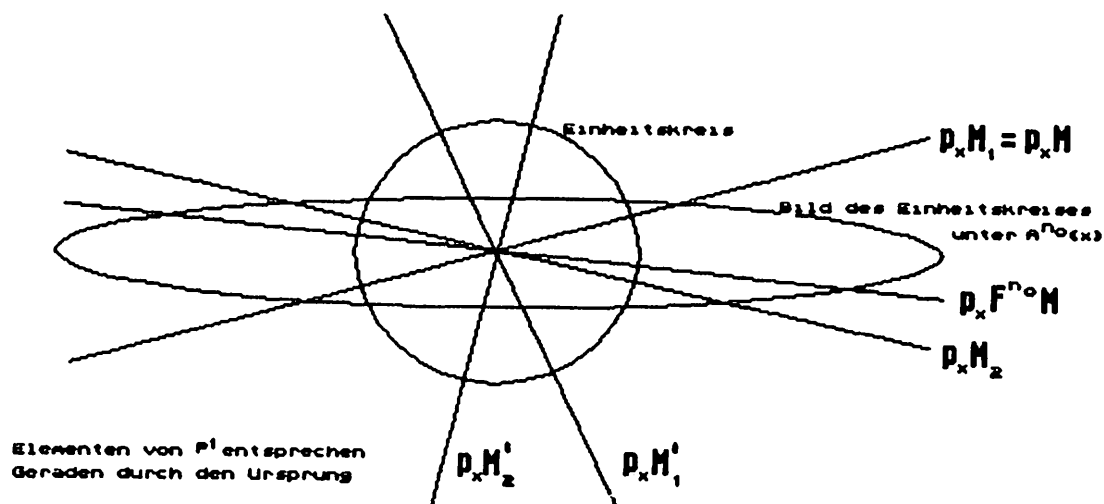


Fig. 8.4 Illustration des 10. Beweisschrittes Für fast alle x trifft man in $p_x(X \times \mathbb{P}^1)$ diese Situation an: $p_x(F^0(M))$ liegt zwischen $p_x M_1$ und $p_x M_2$ auf der anderen Seite wie das Minimum von $\varphi^{n_0}(x, \cdot)$. Den Wert der Funktion $\varphi^{n_0}(x, \cdot)$ an der Stelle $\bar{u}$ kann man ablesen als die Hälfte des Logarithmus der Länge, die $\bar{u}$ (repräsentiert als Gerade durch den Ursprung), aus der Ellipse herauschneidet.

Ebenfalls für fast alle x liegen M_1' und M_2' zwischen M_1 und M_2 , aber auf der anderen Seite wie C_∞ .

Das bedeutet nun, dass die zwei Nullstellen und das lokale Minimum von $\varphi_{n_0}(x, \cdot)$ für fast alle x auf der anderen Seite zwischen $p_x(M_1)$ und $p_x(M_2)$ liegen als $p_x(F^{n_0}(M))$.

Daraus schliessen wir, dass $\varphi_{n_0}(x, p_x(F^{n_0}(M))) \geq \varphi_{n_0}(x, p_x(M))$, da das Minimum von φ_{n_0} auf dem Intervall $[p_x(M_1), p_x(M_2)]$ (gemeint ist die Seite, wo $p_x(F^{n_0}(M))$ liegt) in $p_x(M_1)$ oder $p_x(M_2)$ angenommen wird.

Sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ $\delta_k := \delta F^{-k}$. D.h. $\delta_k(A) := \delta(F^{-k}(A))$ für jede Borelmenge A .

11. Schritt: $\delta_k \in M(X \times P')$ und für jede Borelmenge A gilt

$$\int_A \varphi_{n_0} d\delta_k \geq \int_A \varphi_{n_0} d\delta$$

Vom 10. Schritt erhalten wir sofort:

$$\int_A \varphi_{n_0} d\delta_k = \int_{F^{-k}(A)} \varphi_{n_0} d\delta = \int_A \varphi_{n_0} F^k d\delta \geq \int_A \varphi_{n_0} d\delta$$

Nun basteln wir aus δ ein F invariantes Mass μ .

$$\mu_n(A) := 1/n \sum_{k=0}^{n-1} \delta(F^{-k}(A))$$

μ soll nun ein schwacher Limespunkt von μ_n sein.

12. Schritt: $\mu \in M_F(X \times P')$ und $\langle \varphi_{n_0}, \mu \rangle > 0$

Nach der Theorie von Bogoliubov [Si 1976] existiert ein obiger schwacher Limes μ und μ ist ein F invariantes Borelwahrscheinlichkeitsmass auf $X \times P'$.

Es gilt nach dem 11. Schritt für jedes $k \geq 0$

$$\langle \varphi_{n_0}, \mu_k \rangle \geq \langle \varphi_{n_0}, \delta \rangle > 0$$

und damit

$$\langle \varphi_{n_0}, \mu \rangle \geq \langle \varphi_{n_0}, \delta \rangle > 0$$

13. Schritt: **die Lyapunovexponenten sind auf einer Nichtnullmenge von Null verschieden.**

Wir haben nach Korollar 8.5: $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle \varphi_{n_0}, \mu \rangle > 0$. D.h., dass die Lyapunovexponenten auf einer Nichtnullmenge von Null verschieden sind.

14. Schritt: **die Lyapunovexponenten sind fast überall von Null verschieden**

Sei $Y \subset X$ eine unter T invariante Nichtnullmenge. Was wir bis zum 13. Schritt für $X \times \mathbb{P}^1$ bewiesen haben, können wir auch für $Y \times \mathbb{P}^1$ zeigen, wo wir auf Y einfach das Mass m_Y , $m_Y(A) = m(A \cap Y) / m(Y)$ nehmen und C ersetzen durch $C_Y = Y \times \mathbb{P}^1 \cap C$.

Also sind die Lyapunovexponenten auch auf Y auf einer Nichtnullmenge verschieden von Null. ■

Nun zum Beweis vom Satz von Wojtkowski:

Beweis: Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n := \{x \in X \mid v_L(p_x(C)) - v_L(p_x(C_\infty)) \geq 1/n\}$$

Es gilt $m(Y_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, da nach Voraussetzung iii) $v_L(p_x(C)) - v_L(p_x(C_\infty)) > 0$ für fast alle x .

Weiter ist $d_{inf}(Y_n \times \mathbb{P}^1 \cap D) \geq 1/n$, da $v_L(p_x(Y_n \times \mathbb{P}^1 \cap D)) \geq 1/n$ für fast alle x .

Der Matrixcozyklus (T_{Y_n}, A_{Y_n}) auf Y_n erfüllt alle Voraussetzungen i), ii), iv), wobei wir C ersetzen durch $C \cap (Y_n \times \mathbb{P}^1)$. Nach Lemma 8.7 ist

$$\lambda^+(x; T_{Y_n}, A_{Y_n}) > 0 \quad \forall n \text{ und fast alle } x$$

und mit Korollar 6.13 erhalten wir auch

$$\lambda^+(x; T, A) > 0 \quad \text{für fast alle } x \quad \blacksquare$$

Der Satz 8.6 geht auch noch durch, wenn wir den als stetig vorausgesetzten Matrixcozyklus (T, A) ersetzen durch einen messbaren, der auf einer offenen Menge $Y \subset X$ mit vollem Mass stetig ist und die Bedingung $\log^+(||A(\cdot)||) \in L^1(X, \mu)$ erfüllt. Wir schöpfen in diesem Fall Y einfach aus durch eine Folge kompakter Mengen $Y_n \subset Y$ mit $\mu(Y_n) \rightarrow \mu(Y) = 1$. Erfüllt (T, A) die Bedingungen i), ii), iii), so werden sie auch von (T_{Y_n}, A_{Y_n}) erfüllt. Mit Satz 8.6 erhalten wir das Nichtverschwinden der Lyapunovexponenten $\lambda^+(x; T_{Y_n}, A_{Y_n})$ μ fast überall. Wieder gewährleistet dann 6.13 das Nichtverschwinden von $\lambda^+(x; T, A)$.

Korollar 8.8

Ein messbarer Matrixcozyklus (T, A) auf X , mit

a) (T, A) erfüllt die Bedingungen i)-iii)

b) $\log^+(||A(\cdot)||) \in L^1$,

c) (T, A) ist stetig auf einer offenen Menge $Y \subset X$ mit $\mu(Y) = 1$

hat μ fast überall von Null verschiedene Lyapunovexponenten.

9. Ein spezieller Matrixcozyklus

Sei X ein topologischer Raum mit Borelwahrscheinlichkeitsmass μ , und T eine μ invariant lassende messbare Abbildung auf X . Sei Y eine unter T invariante offene Teilmenge von X , die volles Mass hat auf der T ein Homöomorphismus ist. Seien $\alpha, a : Y \rightarrow \mathbb{R}$ zwei auf X messbare und auf Y stetige Abbildungen und bezeichne

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

eine Drehung um den Winkel β auf $\mathbb{R}^2$ und

$$L(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

eine Scherung mit Parameter b auf $\mathbb{R}^2$.
Wir kriegen durch

$$\begin{aligned} R : X &\rightarrow SO(2, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto R(x) := R(\alpha(x)) \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} L : X &\rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto L(x) := L(a(x)) \end{aligned}$$

zwei auf X messbare und auf Y stetige Abbildungen nach $SL(2, \mathbb{R})$. Wir interessieren uns für

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto L \circ R(x) \end{aligned} \quad (9.4)$$

und den messbaren Matrixcozyklus (T, A) , der auf Y stetig ist.

Problem: Man gebe hinreichende und notwendige Bedingungen dafür an, dass die Lyapunovexponenten $\lambda(T, A; x, \nu)$ μ fast überall nicht verschwinden.

Trivial ist die Frage für $\alpha = \alpha_0 = \text{const.}$ und $a = a_0 = \text{const.}$. In diesem Fall ist A konstant und die Lyapunovexponenten stimmen bei hyperbolischem A mit den Eigenwerten von A überein. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn $\alpha_0 \neq 0$ und $a_0 > 2(1 - \cos(\alpha_0)) / \sin(\alpha_0)$. Ist A elliptisch oder parabolisch, so sind die Lyapunovexponenten Null.

Mit Wojtkowski (Satz 8.8) können wir den Fall, wo α aus einer Umgebung von $0 \pmod{\pi}$ verbannt ist und a genügend gross ist, behandeln:

Lemma 9.1 *Ist für fast alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ $|\alpha(x) - k\pi| > \alpha_0 > 0$ und für fast alle $x \in X$ $a(x) \geq a_0 = 2 \cot(\alpha_0/2)$, so sind die Lyapunovexponenten $\lambda^\pm(x; T, A)$ fast überall von Null verschieden.*

Beweis: Wir arbeiten im Raum $X \times \mathbb{P}^1$ und zeigen, dass es eine Menge C in $X \times \mathbb{P}^1$ gibt, die die Bedingungen i) bis iii) von Wojtkowski erfüllt. $\mathbb{P}^1$ sei mit $\mathbb{R}/\pi$ identifiziert und $[a, b] \subset \mathbb{P}^1$ bezeichne das Intervall in $\mathbb{R}/\pi$, sodass $0 \notin [a, b]$. Wenn die andere Seite gemeint ist, schreiben wir $[a, 0, b]$.

Auf $X \times \mathbb{P}^1$ definieren wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_1, F_2: X \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \\ F_1(x, \bar{u}) &= (x, \overline{R(x)u}) \\ F_2(x, \bar{u}) &= (T(x), \overline{L(x)u}) \end{aligned} \quad (9.5)$$

wobei u ein Vektor aus der Äquivalenzklasse von $\bar{u}$ ist.

$F := F_2 \circ F_1$ ist die in Abschnitt 8 definierte Abbildung F auf $X \times \mathbb{P}^1$:

$$F(x, \bar{u}) = (T(x), \overline{A(x)u}) \quad (9.6)$$

Sei $C := X \times [0, \alpha_0/2]$, $G := X \times [-\alpha/2, 0, \alpha/2]$ und $G' := X \times [-\alpha/2, \alpha/2]$. Nach Voraussetzung ist $F_1(C) \subset G'$ für fast alle x . Wir zeigen, dass die Abbildung $F_2: F_1(C)$ wieder in C hineinschleudert und zwar strikt: Wir behaupten, dass fast überall $F_2(G') \subset C$, denn damit hätten wir $F(C) \subset C$ und $\delta(F(C)) \subset \text{int}(C)$ fast überall und wir wären mit Korollar 8.8 fertig.

Beh: $F_2(G') \subset C$.

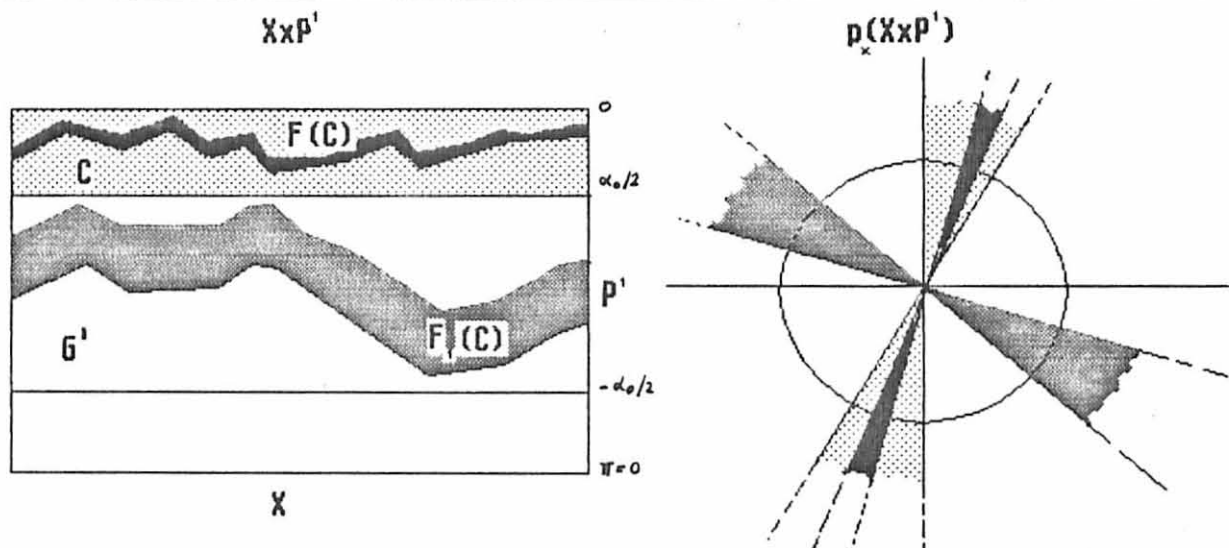


Fig. 9.1 Die Situation im Beweis von Lemma 9.1. Links die globale Situation. Rechts das alte Bild der Sektoren bei einem Schnitt durch $X \times \mathbb{P}^1$.

Die Abbildung

$$F_3(x, u) := (T(x), L(a_0)u) \quad (9.7)$$

bildet die Menge $X \times \{-\alpha/2\}$ in die Menge $X \times \{\alpha/2\}$ ab. Also gilt $F_3(G') \subset C$. Da der Scherparameter von F_2 grösser und gleich a_0 ist, erhalten wir deshalb auch $F_2(G') \subset C$. ■

Für die Behandlung von verketteten Twistabbildungen brauchen wir noch folgende Situation:

Gegeben sind zwei oben beschriebene Matrixkozyklen (T_i, A_i) $i=1,2$. Wir interessieren uns für die Zusammensetzung $(T, A) := (T_2 \circ T_1, A_2 \circ A_1)$. Seien a_i und α_i die für A_i verantwortlichen Funktionen.

Lemma 9.2 *Ist für fast alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ $|\alpha_i(x) - k\pi| > \alpha_0 > 0$ und für fast alle $x \in X$ $a_1(x) \geq a_0 = 2 \cot(\alpha_0)$ und $a_2(x) \leq -a_0$, so sind die Lyapunovexponenten $\lambda^\pm(x; T, A)$ fast überall von Null verschieden.*

Beweis: Der Beweis geht analog dem Beweis für Lemma 9.1:

Sei $C_1 := X \times [0, \alpha_0]$ und $C_2 := X \times [-\alpha_0, 0]$.

$F_1 := T_1 \times A_1$ bildet C_2 strikt ab in C_1 und $F_2 := T_2 \times A_2$ bildet C_1 strikt ab in C_2 . ■

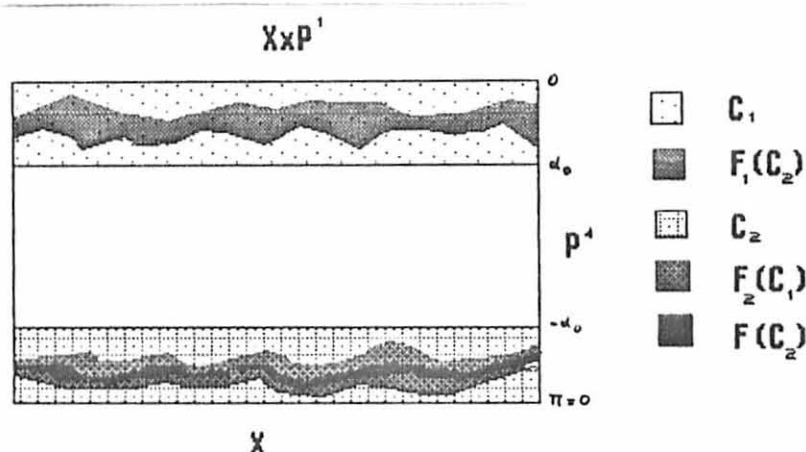


Fig. 9.2 Die Situation zum Beweis von Lemma 9.2.

Beliebige messbare Matrixkozyklen (T, A) sind stabil unter kleinen zufälligen Perturbationen von A nach einem Satz von Young [Yo 1985]:

Sei $\varepsilon > 0$ und $[-\varepsilon, \varepsilon]^{\mathbb{Z}}$ mit dem Shiftoperator σ versehen, der das Produktmass $\nu_\varepsilon^{\mathbb{Z}}$ invariant lässt, wobei ν_ε das normierte Lebesquemass auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ist. Die Abbildung $T_\varepsilon := T \times \sigma$ auf $X_\varepsilon := X \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{\mathbb{Z}}$ lässt das Produktmass $\mu_\varepsilon := \mu \times \nu_\varepsilon^{\mathbb{Z}}$ invariant. Wir definieren

$$\begin{aligned} A_\varepsilon : X_\varepsilon &\rightarrow \text{SI}(2, \mathbb{R}) \\ (x, w) &\mapsto A(x) \circ R(w_0) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Das gibt einen messbaren Matrixkozyklus $(T_\varepsilon, A_\varepsilon)$, für den die Lyapunovexponenten μ_ε fast überall existieren.

Satz 9.3 *Ist der Lyapunovexponent $\lambda^+(x; T, A)$ μ -fast überall von Null verschieden, so existiert ein ε_0 , sodass für alle ε in $(0, \varepsilon_0)$ der Lyapunovexponent $\lambda^+(x, \underline{w}); T_\varepsilon, A_\varepsilon)$ μ_ε -fast überall von Null verschieden ist.*

Für einen Beweis siehe [Yo 1985].

Für uns ist die Tatsache interessant, dass die in Lemma 1 und 2 betrachteten Matrixcozyklen stabil sind unter zufälligen Perturbationen der Funktion α .

Kann man ähnliche Aussagen für deterministische Störungen machen? Wir treffen nämlich bei der Braunabbildung auf Matrixcozyklen, wo die Funktion α alle möglichen Werte (mod 2π) annimmt und in diesem Fall finden wir keine invariante Menge C , wie für eine Anwendung von Wojtkowski gefordert.

Trotzdem lassen die Computerexperimente vermuten, dass die Lyapunovexponenten von Null verschieden sind.

Bild 9.3 zeigt zum Beispiel das logarithmische Anwachsen der Lyapunovexponenten bei verketteten Twistabbildungen auf der Kugel, die wir im nächsten Abschnitt antreffen werden.

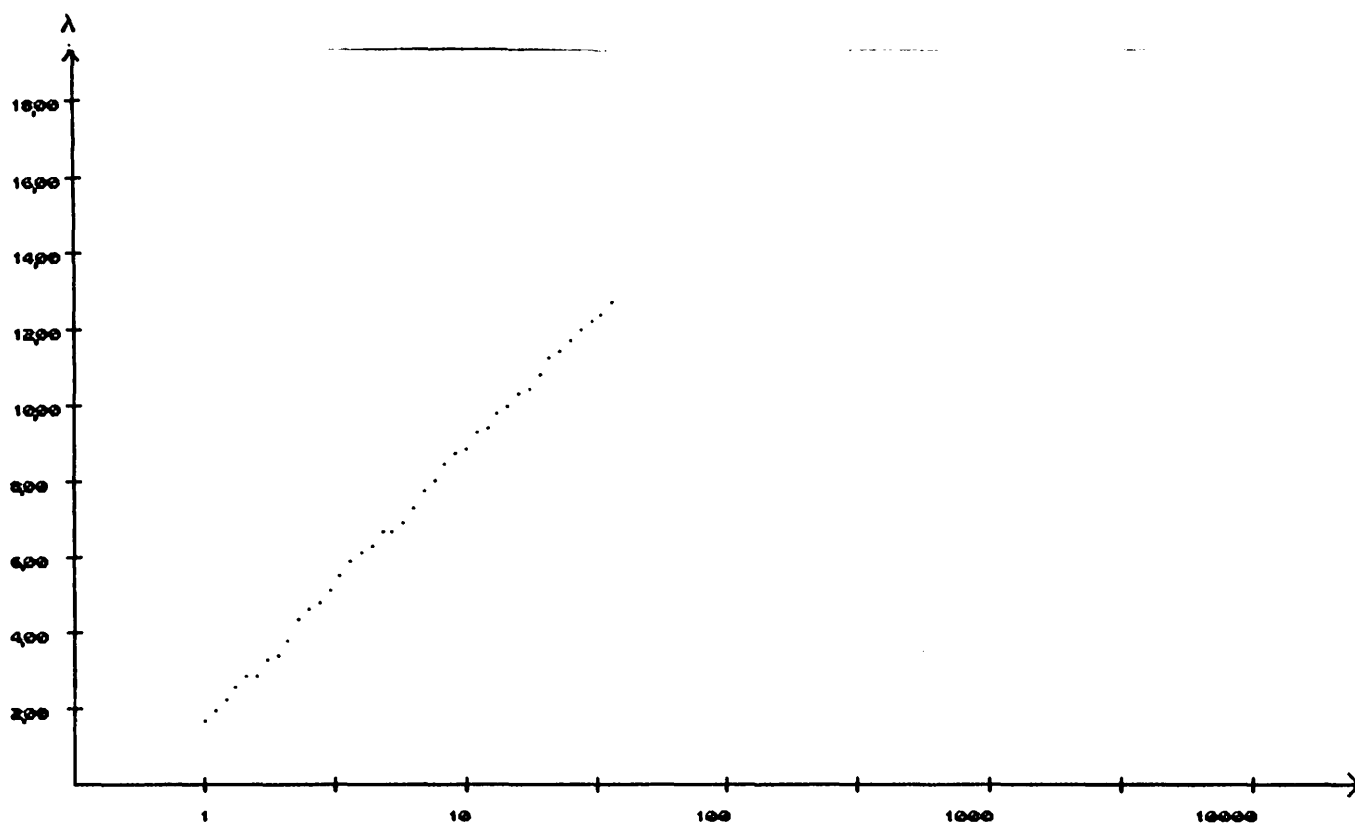


Fig. 9.3 Logarithmisches Wachstum der Lyapunovexponenten bei verketteten Twistabbildungen auf der Kugel. Der Parameter c gibt die minimale Twiststärke der Twists. Es wurde jeweils, zufällig ein Punkt in einer "stochastischen Region" ausgewählt.

Give me to learn each secret cause;
 Let number's, figure's motion's laws
 Revealed before me stand;
 These to great Nature's scene apply,
 and round the Globe and through the sky,
 disclose her working hand.

Mark Akenside, *Hymn to Science*,
 1779

10. Verkettete Twistabbildungen

Braun ist der einzige, der die singulären verketteten Twists 4.5 studiert hat. Devaney, Burton, Easton, Wojtkowski und Przytycky haben ähnliche Abbildungen unter die Lupe genommen. Da sind einmal ganz nahe Verwandte:

a) Verkettete Ringtwists:

Etwas einfacher zu überschauen sind die Bahnen bei den verketteten Ringtwists, die im wesentlichen aufzeigen, wie Vermischung in der Nähe der Drehzentren stattfinden kann. Wie der Name sagt, werden die einzelnen Twists einfach eingeschränkt auf Kreisringe und zwar so, dass sich die zwei Ringe in zwei rombusähnlichen Gebieten schneiden.

Sei L ein Kreisring mit Polarkoordinaten (ρ, ψ)

$$L := \{(\rho, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in [\rho_1, \rho_2], \rho_1 > 1, \rho_2 < 3\}$$

Betrachte zwei Abbildungen $M_1, M_2 : L \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$M_1 : (\rho, \psi) \mapsto (-1 + \rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi))$$

$$M_2 : (\rho, \psi) \mapsto (1 + \rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi))$$

$R_1 := M_1(L)$ und $R_2 := M_2(L)$ sind nun symmetrische Kreisringe mit Zentren in $P_1 = (-1, 0)$ und $P_2 = (1, 0)$ und jeder Kreis des Randes $\partial(R_1)$ schneidet jeden Kreis von $\partial(R_2)$ transversal. Die zwei rombusähnlichen Komponenten von $R_1 \cap R_2$ sollen K^+ und K^- heißen.

Betrachte zwei monotone Twistabbildungen F_i von L

$$F_i : L \rightarrow L, \\ (\rho, \psi) \mapsto (\rho, \psi + f_i(\rho))$$

wo

$$f_i : [\rho_1, \rho_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_i \in C^2([\rho_1, \rho_2])$$

$$f_i(\rho_1) = f_i(\rho_2) = 0 \bmod 2\pi$$

$$\rho \frac{df_i}{d\rho}(\rho) \geq c_i > 0 \quad \text{für } \rho \in [\rho_1, \rho_2]$$

Wir nehmen die Twists nun von L auf R_1 , nämlich

$$T_1: R_1 \cup R_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} M_1 \circ F_1 \circ M_1^{-1}(x,y) & \text{für } (x,y) \in R_1 \\ (x,y) & \text{für } (x,y) \in R_2 \setminus R_1 \end{cases}$$

Für einen Punkt $P \in K^+ \cup K^-$ definieren wir den Winkel $\alpha(P)$

$$\alpha(P) := \angle P_1 P P_2$$

wobei der Winkel in K^+ positiv und in K^- negativ genommen werden soll.

Sei $\alpha_{\inf} := \inf\{|\alpha(P)| \mid P \in K_1 \cup K_2\}$ das Infimum der möglichen Schnittwinkel von einem Kreis in R_1 und einem Kreis in R_2 .

Die Abbildungen $T^+ := T_2 \circ T_1$ und $T^- := T_2^{-1} \circ T_1$ heißen "verkettete Ringtwists".

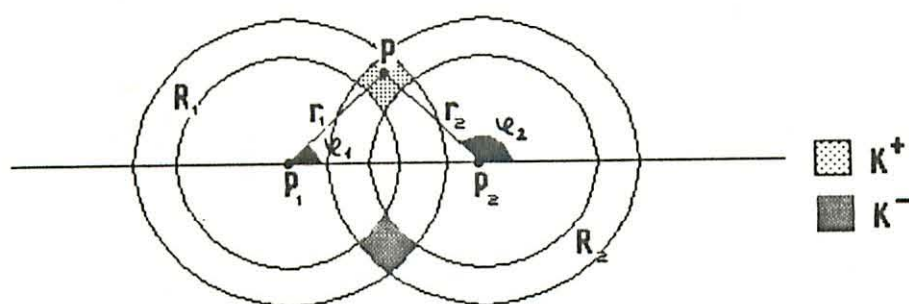


Fig. 10.1. Verkettete Ringtwists

Die Computersimulation zeigt, dass bei dieser Abbildung ziemlich homogen gemischt wird. Es sind keine Inselchen zu erkennen, die dem nun in enge Bahnen gelenkten Orkan standhalten könnten. (Bild 10.2)

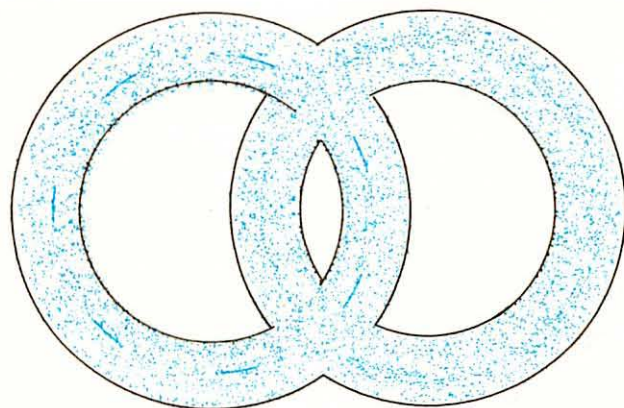


Fig. 10.2 Eine Bahn für verkettete Ringtwists

Tatsächlich konnte Wojtkowski zeigen, dass diese Abbildung Bernoulli-Komponenten von positivem Mass besitzt, falls genug stark getwistet wird :

Satz 10.1 (Wojtkowski) *a) Falls $\min(c_1, c_2) > 2 \cot(\alpha_{int}/2)$, so ist T^+ fast hyperbolisch .*
b) Falls $\min(c_1, c_2) > 2 \cot(\alpha_{int})$, so ist T^- fast hyperbolisch .

Wojtkowski brauchte bei seinem Beweis [Wo 1980] keine Pesintheorie. Ausgestattet mit der Katok-Strelcyn Theorie von Abschnitt 5) und der Bemerkungen im letzten Abschnitt können wir den Satz aber sofort beweisen:

Beweis: Sei $X := R_1 \cup R_2 \subset \mathbb{R}^2$, $M := V := \text{int}(X)$. $S = \delta(X)$.

T^+ und T^- sind invertierbare C^2 -Abbildungen auf M die das Lebesguemass μ auf X invariant lassen.

T^+ und T^- erfüllen die Bedingungen K-S-i) bis K-S-iv):

Die Bedingung K-S-i) ist offensichtlich erfüllt.

Da X kompakt ist, und $f \in C^2$ nehmen $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ auf X ein Maximum

an. Das impliziert sofort K-S-ii) bis K-S-iv)

Nach Satz 5.4 müssen wir nur noch zeigen, dass die Lyapunovexponenten fast überall von Null verschieden sind, falls die Voraussetzungen von a) resp. b) erfüllt sind.

Auf R_i wählen wir Polarkoordinaten (r_i, φ_i) mit Zentren P_i . In jedem Tangentialraum von $R_i \cap M$ können wir so lokale Koordinaten $(dr_i, r_i d\varphi_i)$ einführen. Für einen Punkt $P \in A := (K^+ \cup K^-) \cap M$, wo jeder Tangentialraum mit zwei Koordinatensystemen ausgestattet wurde, ist die Koordinatentransformation gegeben durch eine Drehung um den Winkel $\alpha = \alpha(P)$:

$$\begin{pmatrix} dr_1 \\ r_1 d\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr_2 \\ r_2 d\varphi_2 \end{pmatrix} =: R(\alpha(P)) \begin{pmatrix} dr_2 \\ r_2 d\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben auch kurz $R(P)$ für $R(\alpha(P))$

T_i beschreibt sich einfach in den Koordinaten (r_i, φ_i) :

$$T_i \begin{pmatrix} r_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ \varphi_i + f_i(r_i) \end{pmatrix}$$

und auf dem Tangentialbündel TM lautet die linearisierte Abbildung

$$dT_i \begin{pmatrix} dr_i \\ r_i d\varphi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_i(P) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr_i \\ r_i d\varphi_i \end{pmatrix} =: L(a_i(P)) \begin{pmatrix} dr_i \\ r_i d\varphi_i \end{pmatrix}$$

$$a_i(P) = r_i \frac{\partial f_i}{\partial r_i}(r_i) \geq c_i > 0$$

Auch hier schreiben wir kurz für die Scherung $L_i(P)$ für $L(a_i(P))$.

Damit sehen die auf A induzierten Abbildungen dT_A^+ und dT_A^- in den Koordinaten $(dr_2, r_2 d\varphi_2)$ für einen Punkt $P \in A$ so aus:

$$(dT_A^+)_P = L_{2,A}(T_{1,A}(P)) \circ R(T_{1,A}(P)) \circ L_{1,A}(P) \circ R^{-1}(P)$$
$$(dT_A^-)_P = L_{2,A}^{-1}(T_{1,A}(P)) \circ R(T_{1,A}(P)) \circ L_{1,A}(P) \circ R^{-1}(P)$$

wo $T_{1,A}$ die auf A induzierte Abbildung für A ist, und $L_{1,A}$ wie in Abschnitt 6 definiert ist.
Aus Lemma 9.1 folgt nun sofort, dass die Lyapunovexponenten von (T_A, dT_A^+) nicht verschwinden und aus Lemma 9.2, dasselbe für (T_A, dT_A^-) . Da nur Punkte $x \in R_1 \setminus A$ die Menge A nie treffen, wenn $f_1(x)/\pi$ rational ist, kehrt nach Lemma 6.1 fast jeder Punkt mit positiver Frequenz immer wieder nach A zurück. Mit Lemma 6.11 erhalten wir damit die Behauptungen von a) und b). ■

b) Verkettete torale Twists:

Verkettete Twistabbildungen auf dem Torus sind intensiv untersucht worden ([Bu 1979],[De 1978,1979,1980],[Ea 1979],[Pr 1982,1983,1986],[Wo 1979, 1981,1982]). Easton([Bu 1980]) und Wojtkowski ([Wo 1980]) haben unabhängig voneinander die von [Bo 1977] vermutete Ergodizität der toralen verketteten Twistabbildungen zeigen können.

Sei $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ der Standardtorus und P, Q zwei geschlossene Ringe in T^2 definiert durch

$$P = \{(x,y) \in T^2 \mid y_1 \leq y \leq y_2\} \quad |y_2 - y_1| \leq 1$$
$$Q = \{(x,y) \in T^2 \mid x_1 \leq x \leq x_2\} \quad |x_2 - x_1| \leq 1$$

Seien $f: [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}, g: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei C^2 -Funktionen mit

$$f(y_1) = g(x_1) = 0$$
$$f(y_2) = m, g(x_2) = n \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{Z}$$

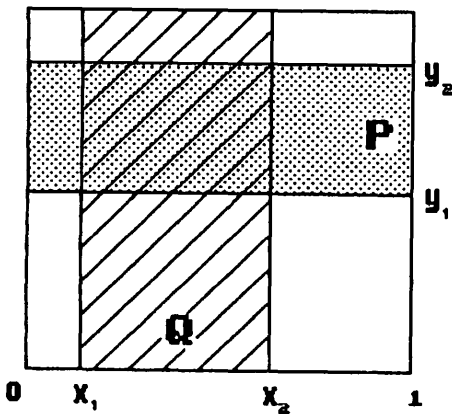


Fig. 10.3 Verkettete torale Twists

Wir definieren $F: P \cup Q \rightarrow P \cup Q$, $G: P \cup Q \rightarrow P \cup Q$ durch

$$F(x,y) = \begin{cases} (x+f(y), y) & \text{für } (x,y) \in P \\ (x,y) & \text{für } (x,y) \in Q \setminus P \end{cases}$$

$$G(x,y) = \begin{cases} (x, y+g(x)) & \text{für } (x,y) \in Q \\ (x,y) & \text{für } (x,y) \in P \setminus Q \end{cases}$$

F und G lassen das Lebesguemass μ invariant. Wir nehmen an, dass

$$\frac{df(y)}{dy} \neq 0 \quad \text{für } y \in [y_1, y_2]$$

$$\frac{dg(x)}{dx} \neq 0 \quad \text{für } x \in [x_1, x_2]$$

und nennen

$$\alpha := \begin{cases} \sup \left\{ \frac{df}{dy} \mid y \in [y_1, y_2] \right\} & \text{falls } \frac{df}{dy} < 0 \\ \inf \left\{ \frac{df}{dy} \mid y \in [y_1, y_2] \right\} & \text{falls } \frac{df}{dy} > 0 \end{cases}$$

$$\beta := \begin{cases} \sup \left\{ \frac{dg}{dx} \mid x \in [x_1, x_2] \right\} & \text{falls } \frac{dg}{dx} < 0 \\ \inf \left\{ \frac{dg}{dx} \mid x \in [x_1, x_2] \right\} & \text{falls } \frac{dg}{dx} > 0 \end{cases}$$

F heisst dann (m, α) -Twist, G ein (n, β) -Twist und $H := G \circ F$ nennt man verketteter toraler Twist.

Satz 10.2

(Burton-Easton-
Wojtkowski-
Przytycki)

Sei H eine torale verkettete Twistabbildung zusammengesetzt aus einem (m, α) -Twist mit einem (n, β) -Twist.

- a) Falls $\alpha\beta > 0$, so ist H Bernoulli
- b) Falls $\alpha\beta < -4$ so ist H fast hyperbolisch
- c) Falls $\alpha\beta < -C_0 \approx 17.24445$ und $|m|, |n| \geq 2$, dann ist H Bernoulli.

Für einen Beweis von a) siehe [Bu1979], [Wo 1979], b) ist ebenfalls in [Wo 1979] erledigt und c) findet sich schliesslich in [Pr1983].

c) Verallgemeinerte verkettete torale Twists

Eine Verallgemeinerung der obigen Konstruktion erhält man, indem man eine ganze Schar von horizontalen und vertikalen Bändern auf den Torus legt, auf denen dann Twists laufengelassen werden. Devaney [1979] und Przytycki [1983] erwähnen solche Verallgemeinerungen, und merken an, dass die erhaltenen Resultate leicht auf solche Abbildungen übertragen werden könnten, falls alle Twists in die gleiche Richtung scheren. Es gibt aber auch interessante Abbildungen, wo das nicht der Fall ist.

So studierte Wojtkowski [1981] ein Beispiel, wo ein horizontaler linearer Twist mit zwei vertikalen linearen Twists verknüpft wird. Interessant an Wojtkowski's Beispiel ist, dass er Fasthyperbolizität bei gleichzeitiger Existenz von elliptischen Fixpunkten beweisen kann.

Sei

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, y_2 = 1 \text{ und } f(y) = \alpha y \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \\ x_1 &= 0, x_2 = 1 \text{ und } g(x) = \beta(|x - 1/2| - 1/2) \text{ für } \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$g(x)$ erfüllt nicht mehr die obigen Forderungen. Für $x = 0, 1/2$, ist g nämlich nicht differenzierbar.

F und G seien wie oben definiert und $H := G \circ F$. Wir nennen H Wojtkowski-Abbildung. Sie ist verwandt mit der Standardabbildung, die man für $g(x) = \beta \sin(2\pi x)$ erhält. Die glatte Sinusfunktion ist einfach ersetzt durch eine Sägezahnfunktion. Die Wojtkowskiabbildung ist eine linearisierte Version der Standardabbildung, die selbst schon in vielen Arbeiten erwähnt worden ist. (z.B. [Ma 1983], [Be 1984], [Mk 1983])

Nach der Koordinatentransformation

$$(x', y') = (x, x + \alpha y)$$

wird H zu T .

$$T : (x, y) \mapsto (y, 2y - x + \alpha \beta f(y))$$

wobei die Apostrophs wieder weggelassen worden sind. Der Beweis des folgenden Satzes befindet sich in [Wo 1981].

Satz 10.3

(Wojtkowski)

a) Falls $\alpha\beta > 4$, so ist T fast hyperbolisch

b) Falls $\alpha\beta > C$, ≈ 4.0329 , so ist T Bernoulli

c) Falls $\alpha\beta = 2(\cos(\pi/k) + 1)$, $k=2,3,\dots$, so existiert ein konvexes Polygon $D_{2k} \subset T^2$ mit $2k$ Kanten, sodass T fast hyperbolisch ist auf $T^2 \setminus D_{2k}$ und T in D_{2k} Periode k für ungerades k und Periode $2k$ für gerades k hat.

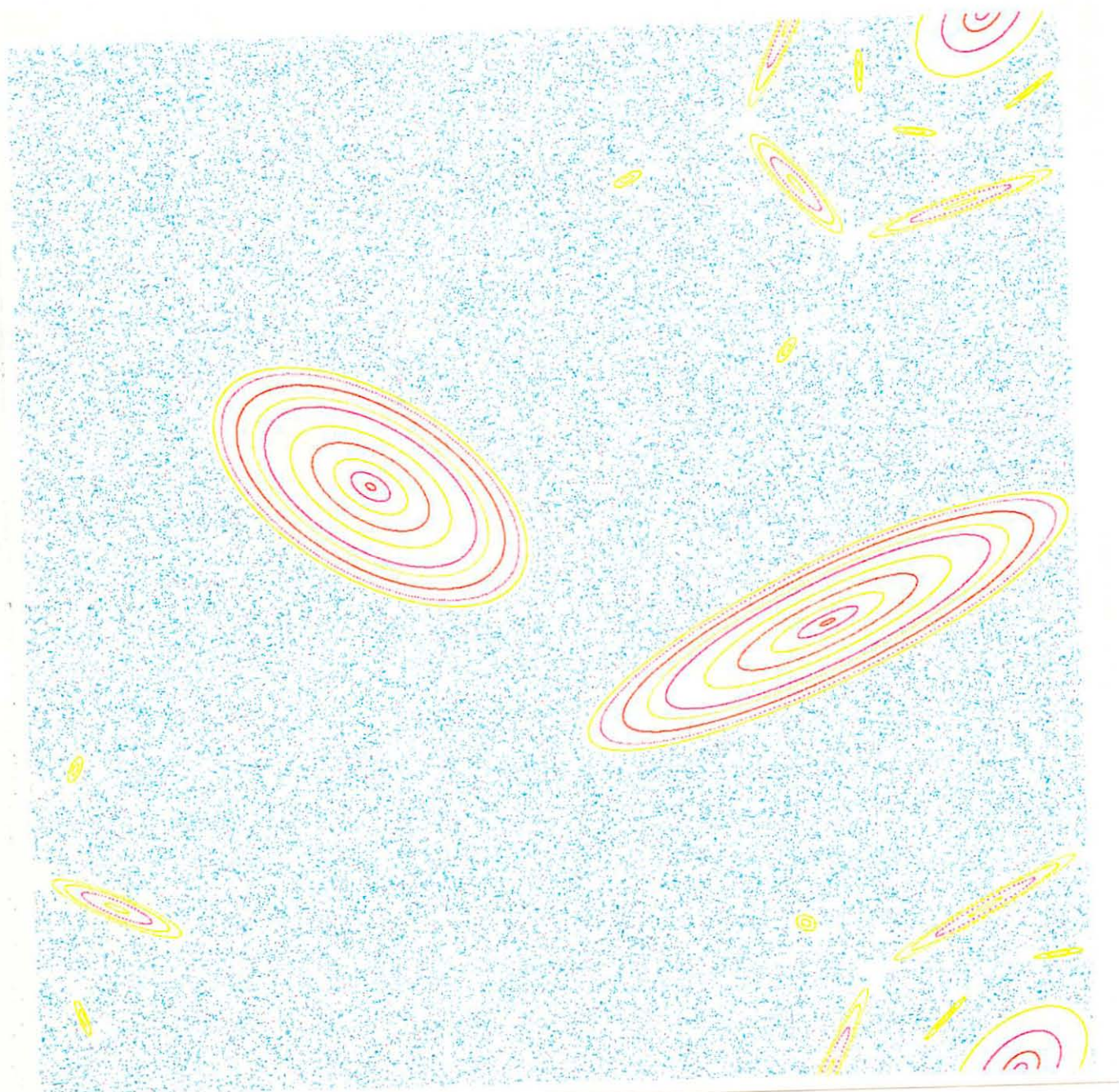


Fig. 10.4 Ein paar Bahnen in der Wojtkowskiabbildung von Satz 10.3. mit Parameter $\alpha\beta = 0.9$. Typisch ist die scharfe Trennung zwischen Gebieten mit stabilem Verhalten und dem stochastischen See. Der blaue See besteht aus einer Bahn. Die Graphikauflösung ist 1200 x 1200 Punkte.

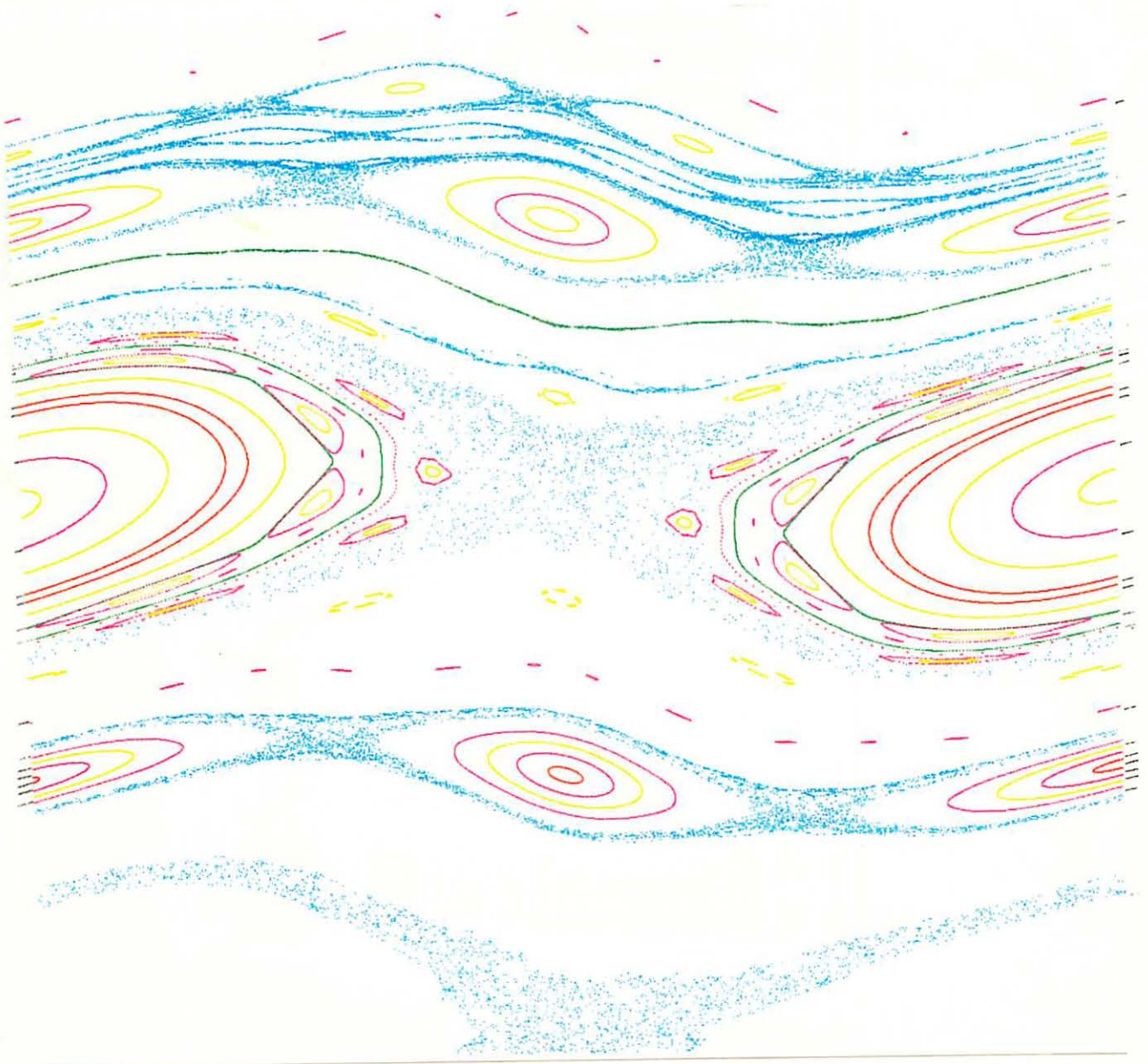


Fig 10.5 Das wohlbekannte Bild der Standardabbildung beim kritischen Parameter um 0.97163, wo der letzte KAM-Torus verschwindet. Mather [Ma 1983] hat gezeigt, dass für Parameter grösser als $4/3$ keine Invarianten Tori existieren können.

d) Sphärische verkettete Twists

Sei M die zweidimensionale Einheitssphäre mit üblichem Borelmaß m_1 , das durch die Kugelmetrik d gegeben ist. Auf M fixieren wir zwei Punkte P_1 und P_2 , die verschieden und nicht diametral liegen sollen: $d(P_1, P_2) =: \beta \neq 0, \pi$. Wir führen zwei polare Koordinatensysteme ein: Das erste hat P_1 als Ursprung und ein Punkt P auf M wird durch die zwei Größen $r := d(P, P_1)$ und $\varphi := \angle(P, P_1, P_2)$ bestimmt. Das zweite Koordinatensystem hat P_2 zum Zentrum und $\bar{r} := d(P, P_2)$, $\bar{\varphi} := \angle(P, P_2, P_1)$ setzen einen Punkt P fest. Weiter bezeichne $\alpha := \angle(P_1, P, P_2)$ den dritten Winkel im Kugeldreieck $P_1 P_2 P$ und P' den diametral gegenüberliegenden Punkt von P .

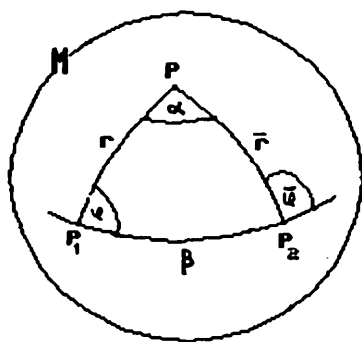


Fig 10.6 Verkettete sphärische Twists

Seien (siehe die Notationen von Abschnitt 5) $S_1 := \{P_1, P_1'\}$ und $S_2 := \{P_2, P_2'\}$. Die offenen Mengen $V_1 := M \setminus S_1 \subset M$ sind homöomorph einem offenen Kreisring. Wir interessieren uns für die Zusammensetzung von zwei Twistabbildungen. T_1 ist ein Drehtwist um P_1 , T_2 einer um P_2 .

Sei $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2((0, \pi))$,

$$T_1: V_1 \rightarrow M$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \varphi - f(r) \end{pmatrix}$$

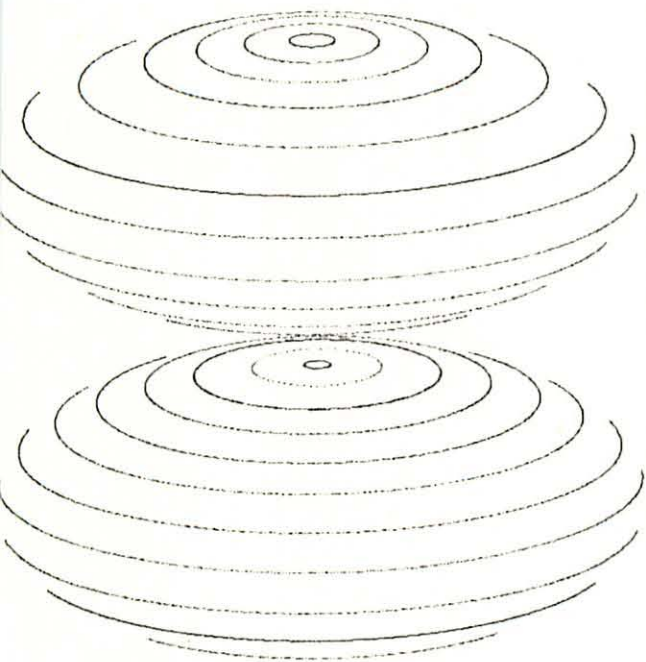
$$T_2: V_2 \rightarrow M$$

$$\begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{\varphi} - f(\bar{r}) \end{pmatrix}$$

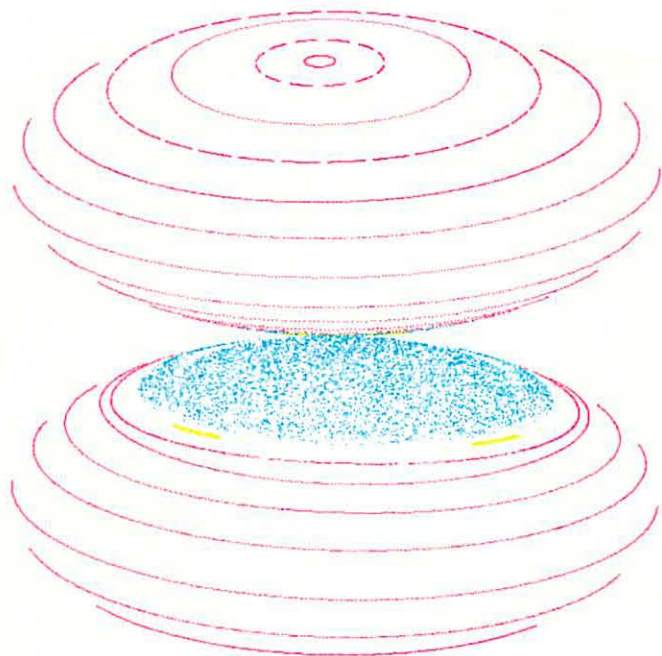
und

- 1) Es existieren positive Konstanten c_1 und c_2 , sodass gilt

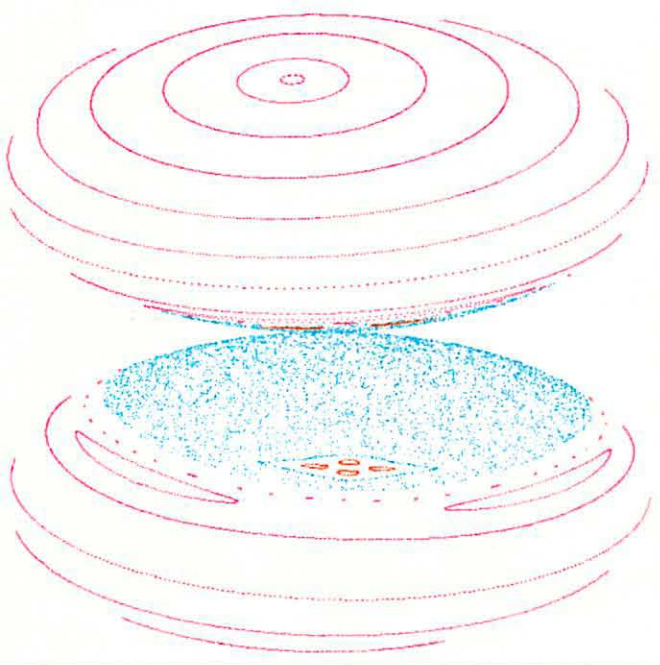
$$-c_2 < \sin(r) \frac{\partial}{\partial r} f(r) < -c_1 < 0 \quad \text{für } r \in (0, \pi)$$



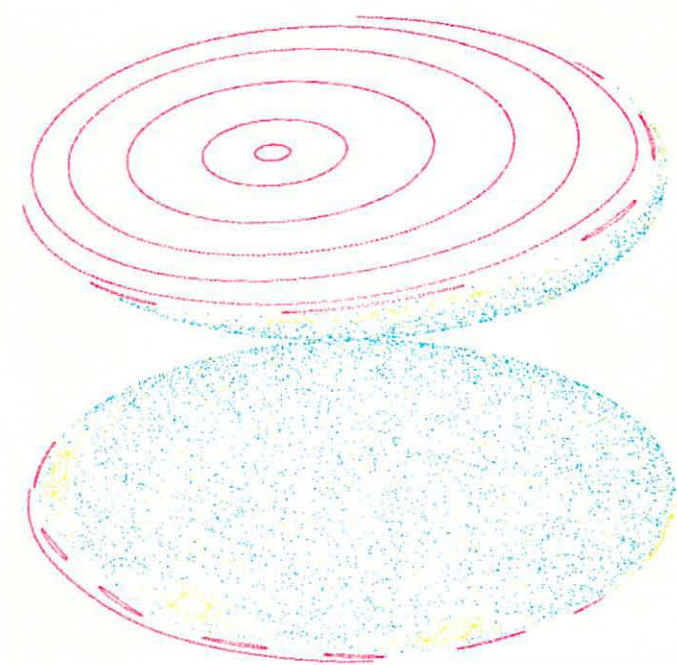
a)



b)

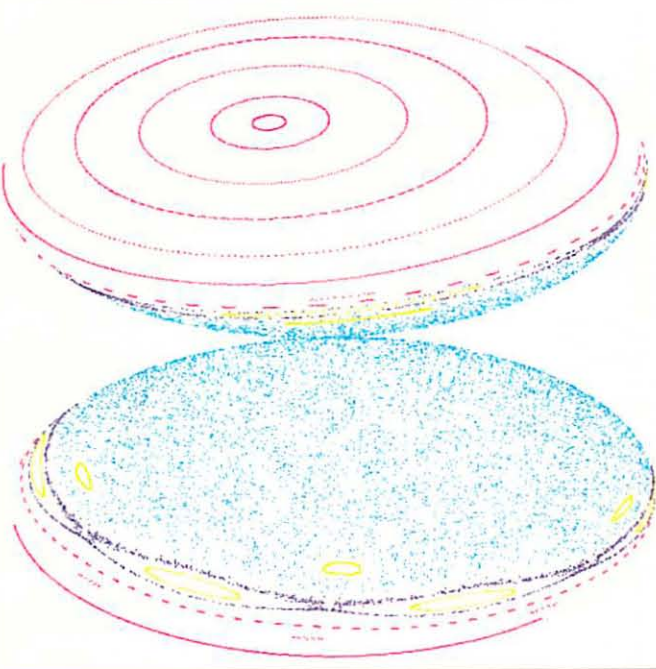


c)

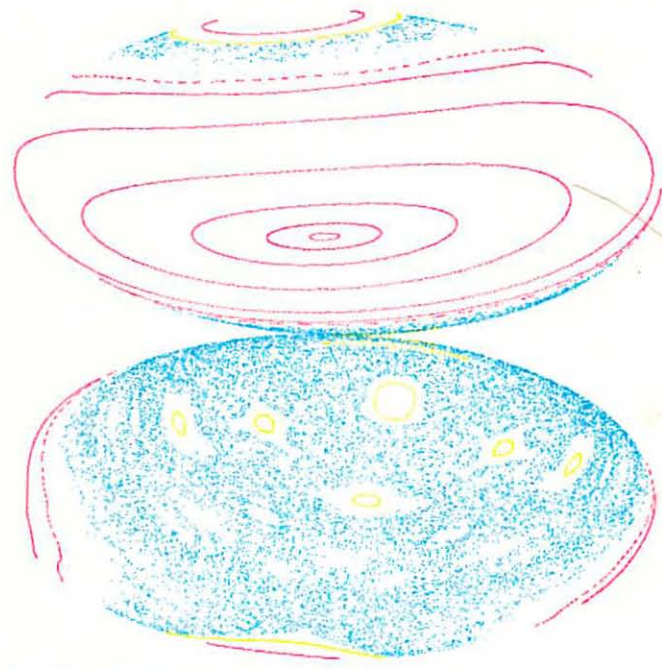


d)

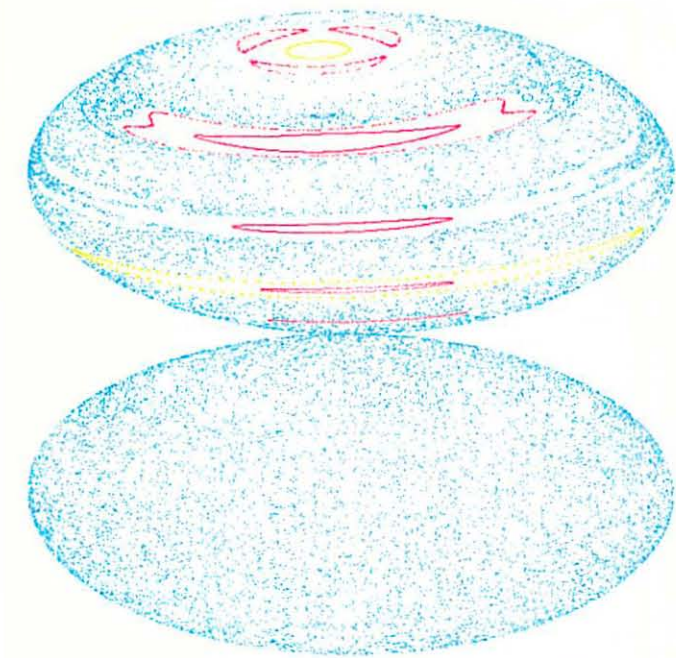
Fig 10.7 Bahnen von verketteten sphärischen Twists. Bild a) zeigt den integrablen Fall für $\beta=0$. Oben sehen wir die Kugel von oben, unterhalb die Kugel von unten. Im Zentrum der invarianten Kreise ist unten P_1 , oben der Diametralpunkt von P_1 . In Bild b) hat der Abstand β von P_1 und P_2 den Wert 0.1. In c) ist $\beta=0.2$ und in d) $\beta=0.4$. Der wachsende blaue See besteht jeweils aus einer Bahn..



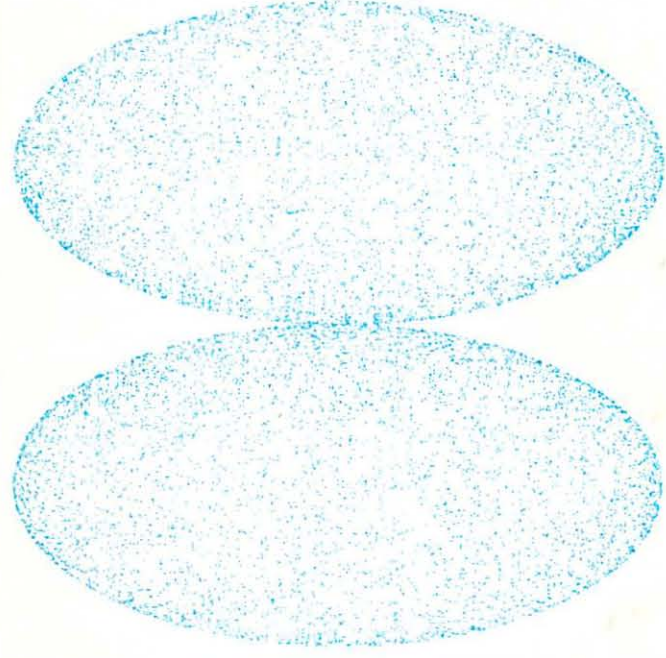
e)



f)



g)



h)

Fig. 10.8. Fortsetzung von Bild 10.7. In e) ist der Abstand $\beta = 0.6$. Von nun an ändert das Szenario. Die Bilder f), g) h) sind mit einem Wert $\beta = 0.2$ aufgenommen, dafür wurde die Twiststärke c_1 vergrößert. In f) ist $c_1 = c_2 = 3$, in g) ist $c_1 = c_2 = 10$ und in h) $c_1 = c_2 = 100$. Für so grosse Twiststärken erhalten wir auch für andere Funktionen f das gleiche Bild : eine Bahn füllt den ganzen stochastischen See und eventuell vorhandene Inselchen sind so klein, dass sie nicht mehr gesehen werden können.

2) Es existieren positive Konstanten c_3 und b , sodass gilt

$$|[\sin(r)]^b \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r)| < c_3 \quad \text{für } r \in (0, \pi)$$

T_1 und T_2 lassen das durch die Kugelmetrik d induzierte Mass m_i invariant und auf V_i können wir die Tangentialbündel TV_i definieren.

In TV_1 soll ein Vektor die Koordinaten $(dr, \sin(r)d\varphi)$ haben, in TV_2 wird er mit Koordinaten $(d\bar{r}, \sin(\bar{r})d\bar{r})$ beschrieben werden.

Im ersten Koordinatensystem lässt sich dT_1 leicht beschreiben, im zweiten System ist dT_2 einfach. Die Koordinatentransformation im Punkt P vom ersten ins zweite System in einem Punkt $P \in V := V_1 \cap V_2$ ist einfach gegeben durch eine Drehung $R(\alpha(P))$ um den Winkel $\alpha(P)$. Die Funktion $\alpha: V \rightarrow [0, 2\pi)$ ist stetig.

Wir vermuten, dass $T := T_2 \cdot T_1$ für genügend grosses c_i positive metrische Entropie auf der Kugel hat.

Um die K-S-Theorie verwenden zu können, müssen wir zeigen, dass jedes $T_i: V_i \rightarrow M$ die K-S-Bedingungen i)-iv) erfüllt für $i=1,2$. (Siehe Abschnitt 5.) K-S-i) ist klar, da wir nur zwei Punkte in S_i haben. Die Abbildungen dT_i sind auf TV definiert und haben dort in den jeweiligen Koordinaten die Form

$$dT_i(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_i(P) & 1 \end{pmatrix}$$

wo

$$a_1(P) = -\sin(r) \frac{\partial}{\partial r} f(r) \in (c_1, c_2)$$

$$a_2(P) = -\sin(\bar{r}) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} f(\bar{r}) \in (c_1, c_2)$$

denn es gilt z.B für $i=1$

$$dT_1(P) : \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} \mapsto \left(d\varphi - \frac{\partial}{\partial r} f_c(P) dr \right),$$

$$\begin{pmatrix} dr \\ \sin(r)d\varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} dr \\ \sin(r)d\varphi - \sin(r) \frac{\partial}{\partial r} f_c(P) dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1(P) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ \sin(r)d\varphi \end{pmatrix}$$

Damit haben wir auch die Bedingungen K-S-ii) und K-S-iv) verifiziert, denn

$$\|dT_1\| < c_1$$

Die Bedingung K-S-iii) folgt schliesslich aus der Forderung 2) an die Funktion f .

Damit reduziert sich die Vermutung, dass die Abbildung T für genügend grosse Twiststärken positive metrische Entropie und Bernoullikomponenten von positivem Mass hat, auf die Vermutung, dass für genügend grosse Twiststärke eine Pesinregion von positivem Mass entsteht.

Sei $U := \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T^k(V)$. U hat volles Mass in M und auf U ist dT^n für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert.

Vertikale Scherungen in $Sl(2, \mathbb{R})$ bezeichnen wir mit L , Rotationen mit R

$$L(a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Weiter taufen wir noch die Twiststärken am Punkt $P=(r, \varphi)=(\bar{r}, \bar{\varphi})$:

$$a(P) := -\sin(r) \frac{\partial}{\partial r} f(r), \quad \bar{a}(P) := -\sin(\bar{r}) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} f(\bar{r})$$

Die Abbildung dT auf dem Tangentialbündel TU hat in den Koordinaten $(d\bar{r}, \sin(\bar{r})d\bar{\varphi})$ für $P \in U$ die Form:

$$dT(P) = L(\bar{a}(T_1(P))) \circ R(\alpha(T_1(P))) \circ L(a(P)) \circ R(-\alpha(P))$$

Beweis: $L(a(P))$ ist die Jacobische von T_1 im Punkt $P \in U$ in den Koordinaten $(dr, \sin(r)d\varphi)$:

$$\begin{aligned} dT_1 : \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi - \frac{\partial}{\partial r} f_c dr \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} dr \\ \sin(r)d\varphi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} dr \\ \sin(r)d\varphi - \sin(r) \frac{\partial}{\partial r} f_c dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ \sin(r)d\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{wo } a = -\sin(r) \frac{\partial}{\partial r} f_c(r).$$

Entsprechend ist $L(\bar{a}(T_1(P)))$ die Jacobische von T_2 im Punkt $T_1(P)$ in den Koordinaten $(d\bar{r}, \bar{r}d\bar{\varphi})$. $R^{-1}(\alpha(P))$ vermittelt die Koordinatentransformation am Punkt P und $R(\alpha(T_1(P)))$ bringt uns am Punkt $T_1(P)$ wieder ins ursprüngliche "Balken"-System.

Dass $R(\alpha(P))$ die Transformation der Koordinatensysteme vermittelt, ist direkt geometrisch evident. Direkte Rechnung sichert uns ab. Mit sphärischen Trigonometrie erhalten wir z.B

$$\begin{aligned} \bar{\cos} r &= \cos r \cos \beta + \sin r \sin \beta \cos \varphi \quad (\text{cos-Satz}) \\ -\sin \bar{r} d\bar{r} &= -\sin r \cos \beta dr + \cos r \sin \beta \cos \varphi dr - \sin r \sin \beta \sin \varphi d\varphi \\ \frac{d\bar{r}}{dr} &= \frac{\sin r \cos \beta}{\sin \bar{r}} - \frac{\cos r \sin \beta \cos \varphi}{\sin \bar{r}} = \cos \alpha \end{aligned}$$

wobei die letzte Identität erreicht wird, indem mit dem sin-Satz und dem cot-Satz $\sin \bar{r}$ resp. $\tan \beta$ so ersetzt werden:

$$\sin \bar{r} = \sin \varphi \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \tan \beta = \frac{\sin r}{\sin \varphi \cot \alpha + \cos \varphi \cos r}$$

Ebenso

$$\frac{dr}{\sin r d\varphi} = \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\sin \bar{r}} = \sin \alpha$$

wo die letzte Identität einfach der sin-Satz ist. u.s.w.

Die Forderung $-\sin(r)\frac{\partial f}{\partial r}(r) \in (c_1, c_2)$ für $r \in (0, \pi)$ wird z.B. erfüllt von der

Funktion $f(r) = -2c \log(\tan(r/4))$, wo $c \in (c_1, c_2)$. Mit ihr sind die Computersimulationen gemacht worden.

e) Braunabbildung

Die Braunabbildung in der Form (4.5) beschreibt sich genausgleich wie die vorher besprochenen Abbildungen auf der Kugel. Wir können die Notationen in d) wortwörtlich übernehmen ausser dass wir $r \frac{\partial f}{\partial r}$ schreiben statt $\sin(r) \frac{\partial f}{\partial r}$.

Hier erfüllt zum Beispiel $f(r) = -c \log(r)$ die Forderungen, die für die Verwendung der Katok-Strelcyn Theorie nötig sind.

11. Ausblick

Das gestellte Problem bleibt: Gibt es ergodische Komponenten im Störmerproblem? Dieses Problem wäre anpackbar, wenn man für eine allgemeinere Klasse von verketteten Twistabbildungen eine Pesinregion von positivem Mass nachweisen könnte. In allen Fällen, wo man das bis jetzt kann, kann man das Nichtverschwinden der Lyapunovexponenten mit den im Abschnitt 7) beschriebenen Methoden beweisen und die sind im Falle von verketteten Twistabbildungen dann anwendbar, wenn sich die invarianten Kurven der einzelnen Twists unter Winkeln schneiden, die von 0 verschieden sind. Die Computersimulationen lassen vermuten, dass auch in allgemeineren Fällen verkettete Twistabbildungen positive metrische Entropie haben:

Vermutung: Auf einer zweidimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeit M versehen mit einem durch die Riemann'schen Metrik induzierten Mass μ seinen zwei μ invariant lassende, auf offenen Teilmengen $V_i \subset M$ definierte, injektive, integrierbare C^2 -Abbildungen

$$T_i : V_i \rightarrow M \quad (i=1,2)$$

gegeben, die K-S-i) bis K-S-iii) erfüllen. Die Funktion

$$\alpha : V_1 \cap V_2 \rightarrow \mathbb{R}/\pi$$

die einem Punkt $P \in V_1 \cap V_2$ den Schnittwinkel der beiden unter T_i invarianten, durch P laufenden Kurven zuordnet, soll die Bedingung

$$\mu\{P \in V \mid \alpha(P) \neq 0\} > 0$$

erfüllen. **Vermutung:** Es existiert für die Abbildung $T := T_2 \circ T_1$ eine Pesinregion von positivem Mass für genügend starke Twiststärken von T_1 .

Die (K-S)Theorie reduziert die Vermutung zu einer Vermutung über Lyapunovexponenten des im Abschnitt 9 definierten Matrixkozyklus (T, A) , wo A bestimmt ist durch die Funktionen α, a . $\text{Im}(a) \subset [c, \infty)$.

Vermutung: Es existiert ein c_0 , sodass für alle $c > c_0$ der in Abschnitt 9 definierte Matrixkozyklus unter der Bedingung

$$\int_M |\alpha| d\mu > 0$$

positive Lyapunovexponenten auf einer Nichtnullmenge hat.

Referenzen

a) Zum Störmerproblem

- [Ar 1963] V.I. Arnold; *Small divisor and stability problems in classical and celestial mechanics*, Uspekhi Mat. Nauk.18(6)(1963) pp. 85-191
- [Br 1970] Martin Braun; *Particle Motions in a Magnetic Field*; J.Diff. Equ., 8 (1979), pp.294-332
- [Br 1970a] —————; *Structural Stability and the Störmer Problem*; Indiana Univ. Math. J.,20 (1970),pp. 469-497
- [Br 1979] —————; *The Stability of the Van Allen Radiation Belt*; SIAM J.Appl. Math. 37(3), pp.664-668
- [Br 1981] —————; *Mathematical Remarks on the Van Allen Radiation Belt*; SIAM Rev.,23 (1981) ,pp.61-94
- [Br 1981a] —————; *Invariant Curves, Homoclinic Points, and Ergodicity in Area-Preserving Mappings*; SIAM J. Math. Anal.,12(4) (1981),pp.630-638
- [Dr 1965] Alex Dragt; *Trapped orbits in a magnetic dipole field*; Rev. of Geophys.3(2) (1965),pp.255-298
- [Dr 1976] Alex Dragt & John M.Finn; *Insolubility of Trapped Particle Motion in a Magnetic Dipole Field*; J. Geophys. Res. 81,(1976) pp. 2327
- [Dr 1978] ————— ; *Normal Form for Mirror Machine Hamiltonians*; J.Math. Phys. 20(12) (1979) pp.2649-2660
- [Ea 1980] Robert Eather; *Majestic Lights*;
- [Fa 1983] Harald Falck-Ytter; *Das Polarlicht*; Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1983
- [He 1965] W.N.Hess, G.D.Mead & M.P.Nakada; *Advances in Particle and Field Research in the Satellite Era*; Rev. of Geophys 3(4) (1965) pp. 521-575
- [Mo 1963] Jürgen Moser; *Integrals of the Störmer Problem*; unpubliziert
- [St 1907] Carl Störmer; *Sur les trajectoires des corpuscles électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre*; Arch. Sci. Phys. Nat.24, (1907)
- [St 1955] —————; *The Polar Aurora*; Clarendon Press, Oxford, 1955
- [Vo 1954] Rene de Vogelaere; *Surface de section dans le problème de Störmer*; Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 40(5) (1954) pp. 705-714
- [Vo 1958] —————; *On the structure of symmetric periodic solutions of conservative systems with applications*; Ann. of Math. Studies, no 41, Princeton University Press, Princeton N.J., 1958, pp. 53-84

b) Verkettete Twistabbildungen

- [Bo 1977] Rufus Bowen; *On Axiom A Diffeomorphisms*; Proc. C.B.M.S. Regional Conf. Ser. Math.No. 35, Amer. Math. Soc., Providence R.I.
- [Be 1984] David Bensimon & Leo Kadanoff; *Extended Chaos and Disappearance of KAM Trajectories*; Physica 13D, (1984) pp.82-89
- [Bu 1979] Robert Burton & Robert Easton; *Ergodicity of Linked Twist Mappings*; Lecture Notes in Math., No. 819, pp. 35-49
- [Br 1981a] Martin Braun; *Invariant Curves, Homoclinic Points, and Ergodicity in Area-Preserving Mappings*; SIAM J. Math. Anal., 12(4) (1981), pp.630-638
- [De 1978] Robert L. Devaney; *Subshifts of Finite Type in Linked Twist Mappings*; Proc. of the Amer. Math. Soc., 71(2) (1978) pp. 334-338
- [De 1979] —————; *Linked Twist Mappings are Almost Anosov*; Lecture Notes in Math., No. 819, pp. 121-145
- [De 1980] —————; *Three Area Preserving Mappings Exhibiting Stochastic Behavior*; Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 70, New York 1981
- [De 1981] —————; *The Baker Transformation and a Mapping Associated to the Restricted Three Body Problem*; Commun. Math. Phys. 80 (1981) pp. 465-476
- [Ea 1979] Robert Easton; *Chain Transitivity and the Domain of Influence of an Invariant Set*; Lecture Notes in Math. No. 668 pp. 95-102
- [Go 1984] Daniel L. Goroff; *Hyperbolic Sets for Twist Maps*; Ergod. Th. & Dyn. Sys. 5 (1985), pp.337-339
- [Ka 1979] Anatol Katok; *Bernoulli Diffeomorphisms on Surfaces*; Annals of Math. 110 (1979) pp. 529-547
- [Ma 1983] John N. Mather; *Non-existence of Invariant Circles*; Ergod. Th. & Dyn. Sys. 3(1983), pp. 301-309
- [Mc 1983] R.S. Mackay; *A Renormalisation Approach to Invariant Circles in Area-preserving Maps*; Physica 7D, (1983), pp. 283-300
- [Pr 1983] Feliks Przytycki; *Ergodicity of Toral Linked Twist Mappings*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4(1) (1983), pp. 345-354
- [Pr 1982] —————; *Examples of Conservative Diffeomorphisms of the two-dimensional Torus with Coexistence of Elliptic and Stochastic Behaviour*; Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2 (1982) pp. 439-463
- [Pr 1986] —————; *Periodic Points of Linked Twist Mappings*; Studia Mathematica, 83 (1986)
- [Wo 1979] Marcel Wojtkowski; *Linked Twist Mappings have the K-Property*; Nonlinear Dynamics, International Conference, New York 1979, pp 66-76
- [Wo 1981] —————; *A Model Problem with Coexistence of Stochastic and Integrable Behaviour*; Comm. Math. Phys. 80(4) (1981), pp. 453-464
- [Wo 1982] —————; *On the Ergodic Properties of Piecewise Linear Perturbations of the Twist Map*; Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2 (1982); pp. 525-542

c) Lyapunovexponenten

- [Be 1984] Giancarlo Benettin; *Power-Law Behaviour of Lyapunov Exponents in some Conservative Systems*; *Physica D* 13 (1984) pp. 211-220
- [Cw 1985] John B. Conway; *A Course in Functional Analysis*; *Graduated Texts in Math.*, Springer, New York 1985
- [Co 1984] Eric Cornelis & Maciej Wojtkowski; *A Criterion for the Positivity of the Liapunov Characteristic Exponent*; *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 4 (1984) pp. 527-539
- [Fu 1983] H. Furstenberg & Y. Kifer; *Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces*; *Israel J. of Math.* 46(1) (1983) pp.12-36
- [Pe 1977] Ya.B. Pesin; *Lyapunov Characteristic Exponents and Smooth Ergodic Theorie*; *Russ. math. Surveys* 32(4) (1977), pp.55-114
- [Sl 1980] Eric V. Slud; *Products of Independent Randomly Perturbed Matrices*; in *Ergodic Theorie and Dynamical Systems II*, *Proceedings, Special Year, Maryland 1979-1980*, Birkhäuser pp. 185-192
- [Wo 1985] Maciej Wojtkowski; *Invariant Families of Cones and Lyapunov exponents*; *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 5(1985) pp. 145-161
- [Wo 1976] —————; *Principles for the Design of Billards with Nonvanishing Lyapunov Exponents*; *Comm. Math. Phys.* 105 (1986), pp. 391-414
- [Yo 1986] L.-S. Young; *Random Perturbations of Matrix Cocycles*; *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 6 (1986) pp. 627-637

d) Numerische Studien

- [Bi 1986] Philippe M. Binder & Roderick V. Jensen; *Simulating chaotic Behavior with Finite-State Machines*; *Phys. Rev. A* 34(5) (1976) pp. 4460-4463
- [Br 1971] A. Brahic; *Numerical Study of a Simple Dynamical System*; *Astron. & Astrophys.* 12 (1971), pp. 98-110
- [Fo 1977] Joseph Ford; *Relevance of Computer Experiments to the Pure Mathematics of Integrable and Ergodic Dynamical Systems*; *Soc. Math. de France, Asterisque* 49 (1977) pp. 75-92
- [He 1964] Michel Henon & Carl Heiles; *The Applicability of the Third Integral of Motion*; *Astron. J.* 69(1) (1964), pp. 73-80
- [Ra 1973] F. Rannou; *Numerical Study of Discrete Plane Area-preserving Mappings*; *Astron & Astrophys.* 31 (1974), pp. 289-301

e) Ergodentheorie

- [Ar 1967] V.I. Arnold & A.Avez; *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Paris 1967
- [Ka 1975] Anatol B. Katok, Ya. G. Sinai & A.M. Stepin ; *Theorie of Dynamical Systems and General Transformation Groups with Invariant Measure*; Math. Anal. 13 (1975) pp. 129-262
- [Ka 1986] Anatol Katok & Jean-Marie Strelcyn; *Invariant Manifolds, Entropy and Billards: Smooth Maps with Singularities*; Lecture Notes in Mathematics No. 1222, Springer 1986
- [Kr 1985] Ulrich Krengel; *Ergodic Theorems*; New York, De Gruyter 1985
- [Ma 1987] Ricardo Mané; *Ergodic Theorie and Differentiable Dynamics*; Springer EM, 3.Folge Bd.8, Berlin 1987
- [Si 1976] Ya.G.Sinai; *Introduction to Ergodic Theorie.*; Math. notes 18, Princeton University Press 1976;
- [Wa 1982] Peter Walters; *Introduction to Ergodic Theorie*; Graduated Texts in Math. 79, Springer 1982