MÉMOIRE

Sur un Système de Formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques;

LU À L'INSTITUT LE 30 NOVEMBRE 1812.

PAR M. J. BINET.

Je me propose dans ce mémoire, d'exposer une série de relations analytiques qui existent entre des quantités dérivées les unes des autres, selon une certaine loi particulière : ces relations sont fondées sur un théorème que je vais énoncer. Je rappellerai pour cela, que M. *Laplace* a nommé *résultantes à deux lettres, à trois lettres, à quatre lettres,* &c. des quantités formées avec quatre lettres, neuf lettres, seize lettres, &c. et qui seraient les dénominateurs des valeurs des inconnues déterminées par des équations linéaires, dans lesquelles ces lettres entreraient comme coëfficiens. (*Voyez* les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1772, II.e partie. Dans ce même volume, on trouve des Recherches de *Vandermonde* sur les propriétés de ces résultantes.) Lorsqu'on a deux systèmes de n lettres chacun, et nous supposerons chaque système écrit avec une seule lettre portant divers accens, qui serviront à ranger dans le même ordre les deux systèmes; on peut former avec ces lettres un nombre $n\frac{n-1}{2}$ de résultantes à deux lettres, en ne prenant dans le second terme de chacune, que des lettres portant les mêmes accens que celles du premier. Si, avec deux autres systèmes de lettres, on forme encore

encore des résultantes à deux lettres, et qu'on les multiplie chacune par sa correspondante obtenue des deux premiers systèmes, c'est-à-dire, par celle dont les lettres portent les mêmes accens; la somme des produits de toutes ces résultantes correspondantes sera elle-même une résultante à deux lettres, dont les termes ou lettres seront des sommes de produits des élémens des deux systèmes portant les mêmes accens. Avec deux groupes de trois systèmes de lettres chacun, on peut former semblablement deux séries de résultantes à trois lettres; faisant ensuite la somme des produits de celles qui se correspondent par les accens de leurs lettres, on aura encore une résultante à trois lettres. Pareille chose ayant lieu pour des résultantes à quatre lettres, &c., on peut conclure ce théorème : Le produit d'un nombre quelconque de sommes de produits de deux résultantes correspondantes de même ordre, est encore une résultante de cet ordre. Ce théorème est susceptible d'extension, mais il convient mieux alors de le lire dans la formule qui l'exprime.

On emploie depuis long-temps dans l'analyse, diverses formules qui sont des cas très-particuliers de ces théorèmes. Dans la V.^e section de ses *Disquisitiones arithmeticæ*, M. *Gauss* en a donné plusieurs; ainsi, au n.° 159 de cette section, il établit que le produit de deux résultantes à deux lettres est une pareille résultante, ce qu'il fait aussi voir pour deux résultantes à trois lettres, au n.° 270. Bien antérieurement, dans un mémoire sur la rotation des corps, et dans un autre sur la pyramide triangulaire, imprimés tous les deux parmi ceux de l'Académie de Berlin, 1773, M. *Lagrange* a prouvé que le carré d'une résultante à trois lettres est lui-même une résultante; mais, dans cette dernière, six des neuf lettres ou termes qui la forment sont égales deux à deux. On sait aussi qu'il en arrive autant pour la somme des carrés d'un nombre quelconque des résultantes que donnent deux systèmes de lettres. Ayant eu dernièrement occasion de parler à M. *Cauchy*, ingénieur des ponts et chaussées, du théorème général que j'ai énoncé ci-dessus, il me dit être parvenu, dans des recherches analogues à celles de M. *Gauss*, à des théorèmes d'analyse qui devaient avoir rapport aux miens. Je m'en suis assuré, en jetant les yeux sur ses formules ; mais j'ignore si elles ont la même généralité que les miennes : nous y sommes arrivés, je crois, par des voies très-différentes.

M. *Lagrange* a donné, dans ce mémoire sur la pyramide, une suite de relations très-remarquables ; elles ont lieu entre des quantités déduites de trois systèmes de trois lettres chacun, et elles conduisent à des équations identiques fort singulières : ce sont des relations de cette espèce qui commencent nos recherches, mais étendues à des quantités dérivées de trois systèmes d'un nombre quelconque de lettres. Il ne me semble pas qu'elles soient comprises dans celles du grand géomètre dont la belle analyse m'a guidé ; elles en sont une généralisation qui peut souvent être utile : plusieurs des formules qui entrent dans le problème de la rotation des corps, par exemple, sont de ce genre. Avec quatre systèmes de lettres, on peut encore former d'autres quantités dérivées, entre lesquelles et les primitives, il existe des relations très-analogues aux précédentes. Plusieurs des expressions dont nous nous occupons entrent encore dans les formules que M. *Laplace* a données pour le *minimum* d'erreur moyenne à craindre sur des élémens déterminés par un grand nombre d'observations, formules qui se trouvent être celles fournies par la méthode des moindres carrés, que MM. *Legendre* et *Gauss* ont fait connaître.

Après l'exposition de ce système de formules analytiques, je me suis occupé des relations des élémens des rhomboïdes ou parallélipipèdes ; lorsqu'on exprime ces relations en fonction des coordonnées des extrémités des arêtes d'un même sommet, l'origine étant en ce point et les axes rectangulaires ou non, elles représentent géométriquement plusieurs des formules que j'ai d'abord exposées, et qui, pour ce cas, rentrent à-peu-près dans celles de M. *Lagrange*. Ces considérations m'ont conduit à observer une espèce d'identité singulière qui a lieu entre les élémens linéaires et les élémens superficiels des rhomboïdes :

par exemple, on connaît la manière dont tous les élémens d'un tel corps se déterminent au moyen des longueurs de trois de ses arêtes contiguës à un même sommet, et des trois angles formés par ces lignes ; en partant des mesures superficielles de trois de ses faces, formant un même angle solide et des angles que comprennent leurs plans, tous les élémens du rhomboïde se trouvent très-simplement déterminés et par des expressions qui ont beaucoup de rapport à celles déduites des arêtes et de leurs angles. La raison de cette analogie se trouve dans des relations assez particulières, qui existent entre les élémens d'un rhomboïde et ceux d'un autre rhomboïde, dont les trois arêtes auraient pour mesures celles de trois faces du rhomboïde proposé, concourant à un même sommet, et dont les angles des arêtes seraient les supplémens à deux droits des angles de ces faces. Toutes ces relations étant exprimées par les coordonnées des extrémités de trois des arêtes d'un même sommet, rapportées à ce point comme origine, fournissent divers résultats qui rentrent dans ceux que M. *Lagrange* a donnés pour la pyramide, et cela tient à ce que quatre points déterminent également une pyramide ou un parallélipipède construit sur trois arêtes contiguës à un même sommet de cette pyramide, et les élémens de l'un de ces corps se déduisent immédiatement de ceux de l'autre. J'ai rencontré encore quelques théorèmes sur les surfaces du second degré, qui se lient à deux anciennement connus : dans leur énoncé, les choses relatives aux parallélipipèdes se présentent assez naturellement.

Plusieurs de ces théorèmes sur les parallélipipèdes sont compris dans d'autres qui servent d'expression géométrique aux formules déduites de trois systèmes d'un nombre quelconque de lettres. Nos recherches sont terminées par ces théorèmes. Trois d'entre eux ont rapport au centre d'inertie des corps ; le premier a été donné par M. *Lagrange*, dans les mémoires de l'Académie de Berlin, 1783. Suivant ce théorème, la somme des produits deux à deux de toutes les molécules d'un corps, chacun multiplié par le carré de la distance de ces deux molécules, égale le produit de la masse entière du corps par la somme des produits de chaque molécule et du carré de sa distance à un point quelconque ; ce produit étant diminué de celui du carré de la masse du corps, par le carré de la distance du centre d'inertie au point donné.

Dans l'énoncé du second théorème, il entre des surfaces au lieu de lignes : La somme des produits trois à trois de toutes les molécules d'un corps, multiplié chacun par le carré de l'aire du triangle, ayant ces points pour sommets, égale la masse du corps, multipliée par la somme des produits deux à deux des molécules, multiplié chacun par le carré de l'aire d'un triangle qui aurait son sommet à un point donné, et pour base la distance des deux molécules employées dans ce produit ; moins le carré de la masse entière du corps multiplié par la somme des produits de chaque molécule, et du carré de l'aire d'un triangle qui a cette molécule pour sommet, sa base étant la distance du centre d'inertie au point donné.

Le troisième théorème s'énonce ainsi : La somme des produits quatre à quatre des molécules d'un corps, chacun multiplié par le carré du volume d'une pyramide ayant ses sommets en ces quatre points, égale la masse du corps, multipliée par la somme des produits trois à trois des molécules, multiplié chacun par le carré du volume de la pyramide, dont les sommets sont en ces trois points et à un point donné ; moins le produit du carré de la masse entière par la somme des produits deux à deux des molécules, chacun de ces produits étant lui-même multiplié par le carré du volume de la pyramide, qui a deux de ses sommets aux deux molécules, et les deux autres au point donné et au centre d'inertie.

[1.] Je représenterai par Σa la somme $a' + a'' + a''' +$ &c., des quantités a', a'', a''', &c. ; par Σab la somme des produits $ab + a'b' + a''b'' +$ &c., dans chacun desquels les lettres a et b ont le même accent ; par $\Sigma ab'$ la somme $a'b'' + b'a'' + a'b''' +$ &c., là tous les produits d'un des a par un des b, portent un accent différent de celui de a ; par $\Sigma ab'c''$ la somme $a'b''c''' + b'c''a''' + c'a''b''' +$ &c., et ainsi de suite. Cela posé, on vérifie aisément les formules suivantes ;

$$\Sigma ab' = \Sigma a \Sigma b - \Sigma ab,$$

$$\Sigma ab'c'' = \Sigma a \Sigma b \Sigma c + 2\,\Sigma abc - \Sigma a \Sigma bc - \Sigma b \Sigma ca - \Sigma c\, \Sigma ab,$$

$$\begin{aligned} \Sigma ab'c''d''' = {} & \Sigma a \Sigma b \Sigma c \Sigma d - 6\,\Sigma abcd \\ & - \Sigma a \Sigma b \Sigma cd - \Sigma a \Sigma c \Sigma bd - \Sigma a \Sigma d \Sigma bc \\ & - \Sigma c \Sigma d \Sigma ab - \Sigma b \Sigma d \Sigma ac - \Sigma b \Sigma c \Sigma ad \\ & + \Sigma ab\, \Sigma cd + \Sigma ac \Sigma bd + \Sigma ab \Sigma bc \\ & + 2\,\Sigma a\, \Sigma bcd + 2\,\Sigma b\, \Sigma cda + 2 \Sigma c\, \Sigma dab + 2 \Sigma d \Sigma abc, \end{aligned}$$

$$\Sigma ab'c''d'''e^{\mathrm{iv}} = \Sigma a \Sigma b \Sigma c \Sigma d \Sigma e + \text{\&c.},$$

&c.

[2.] Nous représenterons encore par le symbole (y', z'') une quantité de la forme $y'z'' - z'y''$;
par $(x', y''\, z''')$, l'expression

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''z''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' ;$$

par $(t', x'', y''', z^{\mathrm{v}})$ une quantité de cette autre forme :

$$\begin{aligned} & t'x''y'''z^{\mathrm{iv}} + x'y''t'''z^{\mathrm{iv}} + y't''x'''z^{\mathrm{iv}} + x't''z'''y^{\mathrm{iv}} + t'z''x'''y^{\mathrm{iv}} + z'x''t'''y^{\mathrm{iv}} \\ & + y'z''t'''x^{\mathrm{iv}} + z't''y'''x^{\mathrm{iv}} + t'y''z'''x^{\mathrm{iv}} + z'y''x'''t^{\mathrm{iv}} + y'x''z'''t^{\mathrm{iv}} + x'z''y'''t^{\mathrm{iv}} \\ & - t'y''x'''z^{\mathrm{iv}} - x't''y'''z^{\mathrm{iv}} - y'x''t'''z^{\mathrm{iv}} - x'z''t'''y^{\mathrm{iv}} - t'x''z'''y^{\mathrm{iv}} - z't''x'''y^{\mathrm{iv}} \\ & - y't''z'''x^{\mathrm{iv}} - z'y''t'''x^{\mathrm{iv}} - t'z''y'''x^{\mathrm{iv}} - z'x''y'''t^{\mathrm{iv}} - y'z''x'''t^{\mathrm{iv}} - x'y''z'''t^{\mathrm{iv}} ; \end{aligned}$$

ces notations diffèrent peu de celles que M. *Laplace* a employées pour le même objet, dans les mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1772, II.[e] partie ; il y nomme résultantes à deux, trois, &c. lettres les quantités (y', z''), (x', y'', z'''), &c. Nous nous servirons dans la suite des mêmes dénominations, ainsi que des propriétés qu'il a reconnues à ces résultantes.

D'après la composition de ces sortes de fonctions;

$$(x', y'', z''') = (x', y'')\, z''' + (z', x'')\, y''' + (y', z'')\, x''',$$
$$(t', x'', y''', z^{\text{iv}}) = (t', x'', y''')\, z^{\text{iv}} - (z', t'', x''')\, y^{\text{iv}} + (y', z'', t''')\, x^{\text{iv}} - (x', y'', z''')\, t^{\text{iv}},$$
$$(s', t'', x''', y^{\text{iv}}, z^{\text{v}}) = (s', t'', x''', y^{\text{iv}})\, z^{\text{v}} + \text{\&c.},$$
$$\text{\&c.}$$

[3.] Il résulte de là,

$$(t', x'', y''', z^{\text{iv}}) = (t', x'')(y''', z^{\text{iv}}) - (t', y'')(x''', z^{\text{iv}}) + (t', z'')(x''', y^{\text{iv}})$$
$$+ (x', y'')(t''', z^{\text{iv}}) - (x', z'')(t''', y^{\text{iv}}) + (y', z'')(t''', x^{\text{iv}}),$$
$$(s', t'', x''', y^{\text{iv}}, z^{\text{v}}) = (s', t'', x''')\,(y^{\text{iv}}, z^{\text{v}}) + \text{\&c.},$$
$$\text{\&c.}$$

Ces propriétés ont été exposées par *Vandermonde*, dans un mémoire qui fait partie du même volume que celui de M. *Laplace*. M. *Monge* m'a communiqué, depuis la lecture de ce mémoire, d'autres théorèmes très-remarquables sur ces résultantes; mais ils ne sont pas du genre de ceux que nous nous proposons de donner ici.

[4.] Avec un nombre n de lettres y', y'', y''', &c. et un même nombre de z', z'', z''', &c. on peut former $n\,\frac{n-1}{2}$ résultantes à deux lettres $(y', z''), (y', z''')$, &c. (y'', z''') &c.; ayant formé pareillement avec les lettres v', v'', v''' &c., $\zeta', \zeta'', \zeta'''$ &c., les résultantes $(v', \zeta''), (v', \zeta''')$, &c., (v'', ζ'''), &c., considérons la somme $\Sigma(y, z')\,(v, \zeta')$ des produits des résultantes qui se correspondent par les accens dans les deux systèmes. On voit, en développant, par la multiplication, chacun des termes de cette somme, qu'elle revient à

$$\Sigma yv\,.\,z'\zeta' - \Sigma zv\,.\,y\,\zeta'.$$

A ces deux dernières intégrales, on peut appliquer la transformation indiquée par la première des formules de l'art. 1; on parvient ainsi à

$$\Sigma(y, z')(v, \zeta') = \Sigma yv\, \Sigma z\zeta - \Sigma zv\, \Sigma y\zeta.$$

Ce dernier membre pouvant être assimilé à la forme (y, z'), il en résulte que le produit d'un nombre quelconque de fonctions, telles que $\Sigma(y, z')(v, \zeta')$, est lui-même de la forme (y, z').

[5.] Avec des x', x'', x''' &c., y', y'', y''' &c., z', z'', z''' &c., ayant formé $n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}$ résultantes à trois lettres, et aussi d'autres résultantes avec des ξ, v, ζ, semblablement accentués, on trouve que la somme des produits des résultantes correspondantes,

$$\begin{aligned}\Sigma(x, y', z'')(\xi, v', \zeta'') = {} & \Sigma x\xi . y'v' . z''\zeta'' + \Sigma y\xi . z'v' . x''\zeta'' + \Sigma z\xi . x'v' . y''\zeta'' \\ & - \Sigma x\xi . z'v' . y''\zeta'' - \Sigma y\xi . x'v' . z''\zeta'' - \Sigma z\xi . y'v' . x''\zeta''.\end{aligned}$$

Les six sommes dont cette expression est composée, peuvent recevoir l'application de la seconde formule de l'art. 1; de cette manière, on parvient, toute réduction faite, à

$$\begin{aligned}\Sigma(x, y', z'')(\xi, v', \zeta'') = {} & \Sigma x\xi\, \Sigma yv\, \Sigma z\zeta + \Sigma y\xi\, \Sigma zv\, \Sigma x\zeta + \Sigma z\xi\, \Sigma xv\, \Sigma y\zeta \\ & - \Sigma x\xi\, \Sigma zv\, \Sigma y\zeta - \Sigma y\xi\, \Sigma xv\, \Sigma z\zeta - \Sigma z\xi\, \Sigma yv\, \Sigma x\zeta.\end{aligned}$$

Ce dernier membre est de la forme (x, y', z''); on en peut donc conclure que le produit d'un nombre quelconque de fonctions, telles que

$$\Sigma(x, y', z'')(\xi, v', \zeta''),$$

est de la forme (x, y', z'').

[6.] Il en sera ainsi de l'intégrale $\Sigma(t, x', y'', z''')(\tau, \xi', v'', \zeta''')$; son expression est composée, au moyen des seize intégrales $\Sigma t\tau$, $\Sigma t\xi$, $\Sigma x\xi$, $\Sigma z\xi$, &c., de la manière suivante :

$$\begin{aligned}& \Sigma t\tau\, \Sigma x\xi\, \Sigma yv\, \Sigma z\zeta + \Sigma x\tau\, \Sigma y\xi\, \Sigma tv\, \Sigma z\zeta + \Sigma y\tau\, \Sigma t\xi\, \Sigma xv\, \Sigma z\zeta \\ & + \Sigma x\tau\, \Sigma t\xi\, \Sigma zv\, \Sigma y\zeta + \Sigma t\tau\, \Sigma z\xi\, \Sigma xv\, \Sigma y\zeta + \Sigma z\tau\, \Sigma x\xi\, \Sigma tv\, \Sigma y\zeta \\ & + \Sigma y\tau\, \Sigma z\xi\, \Sigma tv\, \Sigma x\zeta + \Sigma z\tau\, \Sigma t\xi\, \Sigma yv\, \Sigma x\zeta + \Sigma t\tau\, \Sigma y\xi\, \Sigma zv\, \Sigma x\zeta \\ & + \Sigma z\tau\, \Sigma y\xi\, \Sigma xv\, \Sigma t\zeta + \Sigma y\tau\, \Sigma x\xi\, \Sigma zv\, \Sigma t\zeta + \Sigma x\tau\, \Sigma z\xi\, \Sigma yv\, \Sigma t\zeta\end{aligned}$$

$$- \Sigma t\tau\, \Sigma y\xi\, \Sigma x\upsilon\, \Sigma z\zeta - \Sigma x\tau\, \Sigma t\xi\, \Sigma y\upsilon\, \Sigma z\zeta - \Sigma y\tau\, \Sigma x\xi\, \Sigma t\upsilon\, \Sigma z\zeta$$
$$- \Sigma x\tau\, \Sigma z\xi\, \Sigma t\upsilon\, \Sigma y\zeta - \Sigma t\tau\, \Sigma x\xi\, \Sigma z\upsilon\, \Sigma y\zeta - \Sigma z\tau\, \Sigma t\xi\, \Sigma x\upsilon\, \Sigma y\zeta$$
$$- \Sigma y\tau\, \Sigma t\xi\, \Sigma z\upsilon\, \Sigma x\zeta - \Sigma z\tau\, \Sigma y\xi\, \Sigma t\upsilon\, \Sigma x\zeta - \Sigma t\tau\, \Sigma z\xi\, \Sigma y\upsilon\, \Sigma x\zeta$$
$$- \Sigma z\tau\, \Sigma x\xi\, \Sigma y\upsilon\, \Sigma t\zeta - \Sigma y\tau\, \Sigma z\xi\, \Sigma x\upsilon\, \Sigma t\zeta - \Sigma x\tau\, \Sigma y\xi\, \Sigma z\upsilon\, \Sigma t\zeta.$$

On voit par là, qu'en multipliant entre elles un nombre quelconque de sommes de produits de deux résultantes, on obtient une expression que l'on peut assimiler à une résultante de même espèce que celles qui entrent dans chaque produit.

[7.] Désignons par $S(y', z'')$ une somme de résultantes, telle que

$$(y_{,}', z_{,}'') + (y_{,,}', z_{,,}'') + (y_{,,,}', z_{,,,}'') + \&c.;$$

c'est-à-dire,

$$y_{,}' z_{,}'' - z_{,}' y_{,}'' + y_{,,}' z_{,,}'' - z_{,,}' y_{,,}'' + y_{,,,}' z_{,,,}'' - z_{,,,}' y_{,,,}'' + \&c.;$$

et continuons d'employer la caractéristique Σ pour les intégrales relatives aux accens supérieurs des lettres. L'expression $\Sigma[S(y, z').S(\upsilon, \zeta')]$ devient par le développement de chacun de ses termes, et en vertu de la première formule de l'art. 1 ou de celle du n.° 4,

$$\begin{aligned}
&\Sigma y_{,}\upsilon_{,}\, \Sigma z_{,}\zeta_{,} - \Sigma z_{,}\upsilon_{,}\, \Sigma y_{,}\zeta_{,} + \Sigma y_{,,}\upsilon_{,}\, \Sigma z_{,,}\zeta_{,} - \Sigma z_{,,}\upsilon_{,}\, \Sigma y_{,,}\zeta_{,} + \&c.\\
+ &\Sigma y_{,}\upsilon_{,,}\, \Sigma z_{,}\zeta_{,,} - \Sigma z_{,}\upsilon_{,,}\, \Sigma y_{,}\zeta_{,,} + \Sigma y_{,,}\upsilon_{,,}\, \Sigma z_{,,}\zeta_{,,} - \Sigma z_{,,}\upsilon_{,,}\, \Sigma y_{,,}\zeta_{,,} + \&c.\\
+ &\&c.
\end{aligned}$$

En indiquant donc par $S_{,}$ des intégrales qui supposent, dans chaque terme, les mêmes accens inférieurs aux lettres du même alphabet, ces accens pouvant être ou non les mêmes pour celles des alphabets différens, on pourra écrire la précédente suite, en faisant usage de ce signe, ce qui donne

$$\Sigma[S(y, z')\, S(\upsilon, \zeta')] = S_{,}[\Sigma y\upsilon\, \Sigma z\zeta - \Sigma z\upsilon\, \Sigma y\zeta].$$

Cette nouvelle quantité est encore de la forme $S(y', z'')$, en sorte qu'on peut

peut dire que le produit de fonctions, telles que

$$\Sigma\{S(y,\ z')\ S(v,\ \zeta')\},$$

sera lui-même de la forme $S(y',\ z'')$.

Les expressions que MM. *Lagrange* et *Poisson* ont représentées par le symbole $(a,\ b)$ dans leurs recherches sur la variation des constantes arbitraires des problèmes de mécanique, sont du genre de celles que je désigne ici par $S(y',\ z'')$.

On aura encore pour les intégrales

$$\Sigma\{S(x, y', z'')\ S(\xi, v', \zeta'')\},\quad \Sigma\{S(t, x', y'', z''')\ S(\tau, \xi', v'', \zeta''')\},\ \&c.$$

des résultats semblables, savoir,

$$\Sigma\{S(x, y', z'')S(\xi, v', \zeta'')\} = S_{,}\left\{\begin{array}{l} \Sigma x\xi\Sigma yv\Sigma z\zeta + \Sigma y\xi\Sigma zv\Sigma x\zeta + \Sigma z\xi\Sigma xv\Sigma y\zeta \\ -\Sigma x\xi\Sigma zv\Sigma y\zeta - \Sigma y\xi\Sigma xv\Sigma z\zeta - \Sigma z\xi\Sigma yv\Sigma x\zeta \end{array}\right\},$$

$$\Sigma\{S(t, x', y'', z''')S(\tau, \xi', v'', \zeta''')\} = S\{\Sigma t\tau\Sigma x\xi\Sigma yv\Sigma z\zeta + \Sigma x\tau\Sigma y\xi\Sigma tv\Sigma z\zeta + \&c.\},$$

&c.

[8.] Reprenons trois systèmes de n lettres chacun,

$$\begin{array}{l} x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ldots\ x^{(n)}, \\ y',\ y'',\ y''',\ \ldots\ldots\ y^{(n)}, \\ z',\ z'',\ z''',\ \ldots\ldots\ z^{(n)}, \end{array}$$

et formons avec ces quantités trois autres systèmes désignés par les lettres

$$\begin{array}{l} x_{,}',\ x_{,}'',\ x_{,}''',\ \ldots\ldots\ x_{,}^{(n)}, \\ y_{,}',\ y_{,}'',\ y_{,}''',\ \ldots\ldots\ y_{,}^{(n)}, \\ z_{,}',\ z_{,}'',\ z_{,}''',\ \ldots\ldots\ z_{,}^{(n)}, \end{array}$$

dans lesquels $n_{,} = n\, \frac{n-1}{2}$, et

$$\begin{array}{lll}
x_{,}' = (y', z''), & y_{,}' = (z', x''), & z_{,}' = (x', y''), \\
x_{,}'' = (y', z'''), & y_{,}'' = (z', x'''), & z_{,}'' = (x', y'''), \\
x_{,}''' = (y', z^{\text{IV}}), & y_{,}''' = (z', x^{\text{IV}}), & z_{,}''' = (x', y^{\text{IV}}), \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
x_{,}^{(n-1)} = (y', z^{(n)}), & y_{,}^{(n-1)} = (z', x^{(n)}), & z_{,}^{(n-1)} = (x', y^{(n)}), \\
x_{,}^{(n)} = (y'', z'''), & y_{,}^{(n)} = (z'', x'''), & z_{,}^{(n)} = (x'', y'''), \\
x_{,}^{(n+1)} = (y'', z^{\text{IV}}), & y_{,}^{(n+1)} = (z'', x^{\text{IV}}), & z_{,}^{(n+1)} = (x'', y^{\text{IV}}), \\
\&c., & \&c., & \&c.;
\end{array}$$

(y', z'') représentant, comme ci-dessus, une résultante $y'z'' - z'y''$.

[9.] Multiplions respectivement les trois équations de la première ligne par x', y', z', et ajoutons-les; ensuite par x'', y'', z''; x''', y''', z'''; &c., et opérons semblablement sur toutes les lignes, nous arriverons ainsi aux $n \,.\, n_{,}$ équations qui suivent :

$$\begin{array}{l}
x_{,}'\, x' + y_{,}'\, y' + z_{,}'\, z' = (x', y'', z') = 0, \\
x_{,}'\, x'' + y_{,}'\, y'' + z_{,}'\, z'' = (x', y'', z'') = 0, \\
x_{,}'\, x''' + y_{,}'\, y''' + z_{,}'\, z''' = (x', y'', z'''), \\
x_{,}'\, x^{\text{IV}} + y_{,}'\, y^{\text{IV}} + z_{,}'\, z^{\text{IV}} = (x', y'', z^{\text{IV}}), \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&x'_{,}\, x^{(n)} + y'_{,}\, y^{(n)} + z'_{,}\, z^{(n)} = (x', y'', z^{(n)}),\\
&x''_{,}\, x' + y''_{,}\, y' + z''_{,}\, z' = (x', y''', z') = 0,\\
&x''_{,}\, x'' + y''_{,}\, y'' + z''_{,}\, z'' = (x', y''', z'') = -(x', y'', z'''),\\
&x''_{,}\, x''' + y''_{,}\, y''' + z''_{,}\, z''' = (x', y''', z''') = 0,\\
&x''_{,}\, x^{\mathrm{IV}} + y''_{,}\, y^{\mathrm{IV}} + z''_{,}\, z^{\mathrm{IV}} = (x', y''', z^{\mathrm{IV}}),\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&x^{(n)}_{,}\, x' + y^{(n)}_{,}\, y' + z^{(n)}_{,}\, z' = (x'', y''', z') = (x', y'', z'''),
\end{aligned}
$$

&c.

[10.] En multipliant $x'_{,}$, $x''_{,}$, $x^{(n)}_{,}$ respectivement par x''', $-x''$, x', et ajoutant ; ensuite par y''', $-y''$, y', et aussi par z''', $-z''$, z', et ajoutant encore, on trouvera

$$
\begin{aligned}
&x'_{,}\, x''' - x''_{,}\, x'' + x^{(n)}_{,}\, x' = (x', y'', z'''),\\
&x'_{,}\, y''' - x''_{,}\, y'' + x^{(n)}_{,}\, y' = 0,\\
&x'_{,}\, z''' - x''_{,}\, z'' + x^{(n)}_{,}\, z' = 0.
\end{aligned}
$$

On obtiendrait avec $y'_{,}$, $y''_{,}$, $y^{(n)}_{,}$; $z'_{,}$, $z''_{,}$, $z^{(n)}_{,}$ des relations pareilles : on en aurait de semblables avec $x'_{,}$, $x'''_{,}$, $x^{(n+1)}_{,}$; $y'_{,}$, $y'''_{,}$, $y^{(n+1)}_{,}$, &c., &c.

[11.] Il est aisé de voir, si l'on fait la somme des équations de l'art. 9, que chacune des résultantes (x', y'', z''') se trouvera dans le second membre deux fois affectée du signe $+$ et une fois du signe $-$; ainsi

$$\Sigma(x, y', z'') = \Sigma x_{,}\, \Sigma x + \Sigma y_{,}\, \Sigma y + \Sigma z_{,}\, \Sigma z.$$

[12.] Si, au lieu de faire simplement la somme de ces équations, nous en formons la somme des carrés, d'après ce qui vient d'être remarqué, on aura

$$3\,\Sigma(x,\,y',\,z'')^2 = \Sigma x^2\,\Sigma x_{,}^2 + \Sigma y^2\,\Sigma y_{,}^2 + \Sigma z^2\,\Sigma z_{,}^2$$
$$+ 2\,\Sigma yz\Sigma y_{,}z_{,} + 2\Sigma zx\Sigma z_{,}x_{,} + 2\Sigma xy\Sigma x_{,}y_{,}.$$

Mais la formule du n.° 4 fournit les valeurs suivantes:

$$\Sigma x_{,}^2 = \Sigma y^2\,\Sigma z^2 - (\Sigma yz)^2, \quad \Sigma y_{,}z_{,} = \Sigma zx\,\Sigma xy - \Sigma yz\,\Sigma x^2,$$
$$\Sigma y_{,}^2 = \Sigma z^2\,\Sigma x^2 - (\Sigma zx)^2, \quad \Sigma z_{,}x_{,} = \Sigma xy\,\Sigma yz - \Sigma zx\,\Sigma y^2,$$
$$\Sigma z_{,}^2 = \Sigma x^2\,\Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2, \quad \Sigma x_{,}y_{,} = \Sigma yz\,\Sigma zx - \Sigma xy\,\Sigma z^2.$$

Substituant dans la valeur de $\Sigma(x,\,y',\,z'')^2$, on aura

$$\Sigma(x,y',z'')^2 = \Sigma x^2\Sigma y^2\Sigma z^2 + 2\Sigma yz\Sigma zx\Sigma xy - \Sigma x^2(\Sigma yz)^2 - \Sigma y^2(\Sigma zx)^2 - \Sigma z^2(\Sigma xy)^2.$$

expression qu'on obtient plus immédiatement, en mettant dans la première formule du n.° 5 des x, y, z, pour les ξ, υ, ζ.

Il est visible qu'on peut mettre cette dernière valeur de $\Sigma(x,\,y',\,z'')^2$ sous la forme

$$\Sigma y^2\,\{\Sigma z^2\,\Sigma x^2 - (\Sigma zx)^2\} + \Sigma z^2\,\{\Sigma x^2\,\Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2\}$$
$$- \Sigma x^2\,\{\Sigma y^2\,\Sigma z^2 - (\Sigma yz)^2\} + 2\Sigma yz\,\{\Sigma zx\Sigma xy - \Sigma yz\Sigma x^2\},$$

ou bien

$$\Sigma(x,y',z'')^2 = \Sigma y^2\,\Sigma y_{,}^2 + \Sigma z^2\,\Sigma z_{,}^2 - \Sigma x^2\,\Sigma x_{,}^2 + 2\Sigma yz\,\Sigma y_{,}z_{,};$$

et l'on aura encore

$$\Sigma(x,y',z'')^2 = \Sigma z^2\,\Sigma z_{,}^2 + \Sigma x^2\,\Sigma x_{,}^2 - \Sigma y^2\,\Sigma y_{,}^2 + 2\Sigma zx\,\Sigma z_{,}x_{,};$$
$$\Sigma(x,y',z'')^2 = \Sigma x^2\Sigma x_{,}^2 + \Sigma y^2\Sigma y_{,}^2 - \Sigma z^2\Sigma z_{,}^2 + 2\Sigma xy\,\Sigma x_{,}y_{,};$$

en les ajoutant, on retrouve la première formule ci-dessus; et ne faisant leur somme que deux à deux,

$$\Sigma(x,y',z'')^2 = \Sigma x^2 \Sigma x_{,}^2 + \Sigma zx \Sigma z_{,} x_{,} + \Sigma xy \Sigma x_{,} y_{,}$$
$$= \Sigma y^2 \Sigma y_{,}^2 + \Sigma xy \Sigma x_{,} y_{,} + \Sigma yz \Sigma y_{,} z_{,}$$
$$= \Sigma z^2 \Sigma z_{,}^2 + \Sigma yz \Sigma y_{,} z_{,} + \Sigma zx \Sigma z_{,} x_{,}.$$

[13.] Avec les quantités des systèmes $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; x, y, z, on pourra former un nouveau système dont je représente les lettres par

$$x_{,,}', x_{,,}'', x_{,,}''' \ldots\ldots, \quad y_{,,}', y_{,,}'', y_{,,}''' \ldots\ldots, \quad z_{,,}', z_{,,}'', z_{,,}''' \ldots\ldots,$$

et tel que

$$x_{,,}' = y_{,}'(x', y''') + z_{,}'(x', z'''),$$
$$x_{,,}'' = y_{,}'(x', y^{\mathrm{IV}}) + z_{,}'(x', z^{\mathrm{IV}}),$$
$$x_{,,}''' = y_{,}'(x', y^{\mathrm{V}}) + z_{,}'(x', z^{\mathrm{V}}),$$
$$\vdots$$
$$x_{,,}^{(n-2)} = y_{,}'(x', y^{(n)}) + z_{,}'(x', z^{(n)}),$$
$$x_{,,}^{(n-1)} = y_{,}'(x'', y''') + z_{,}'(x'', z'''),$$
$$x_{,,}^{(n)} = y_{,}'(x'', y^{\mathrm{IV}}) + z_{,}'(x'', z^{\mathrm{IV}}),$$
$$\vdots$$
$$x_{,,}^{(n_{,})} = y_{,}''(x', y^{\mathrm{IV}}) + z_{,}''(x', z^{\mathrm{IV}}),$$

&c.;

$$y_{,,}' = z_{,}'(y', z''') + x_{,}'(y', x'''),$$
$$y_{,,}'' = z_{,}'(y', z^{\mathrm{IV}}) + x_{,}'(y', x^{\mathrm{IV}}),$$

&c.;

$$
\begin{aligned}
z_{\prime\prime}{}' &= x_{\prime}{}'\,(z', x''') + y_{\prime}{}'\,(z', y'''),\\
z_{\prime\prime}{}'' &= x_{\prime}{}'\,(z', x^{\text{IV}}) + y_{\prime}{}'\,(z', y^{\text{IV}}),\\
&\&c.\,;
\end{aligned}
$$

les $x_{\prime\prime}$ seront en nombre $n_{\prime} \cdot \frac{n_{\prime} - 1}{2}$, ainsi que les $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$. Si l'on met dans leurs expressions des $z_{\prime}$, $y_{\prime}$, $x_{\prime}$ à la place des résultantes (x, y'), (z, x'), (y, z'), on aura

$$
\begin{array}{lll}
x_{\prime\prime}{}' = y_{\prime}{}' z_{\prime}{}'' - z_{\prime}{}' y_{\prime}{}'', & y_{\prime\prime}{}' = z_{\prime}{}' x_{\prime}{}'' - x_{\prime}{}' z_{\prime}{}'', & z_{\prime\prime}{}' = x_{\prime}{}' y_{\prime}{}'' - y_{\prime}{}' x_{\prime}{}'',\\
x_{\prime\prime}{}' = y_{\prime}{}' z_{\prime}{}''' - z_{\prime}{}' y_{\prime}{}''', & y_{\prime\prime}{}'' = z_{\prime}{}' x_{\prime}{}''' - x_{\prime}{}' z_{\prime}{}''', & z_{\prime\prime}{}'' = x_{\prime}{}' y_{\prime}{}''' - y_{\prime}{}' x_{\prime}{}''',\\
x_{\prime\prime}{}''' = y_{\prime}{}' z_{\prime}{}^{\text{IV}} - z_{\prime}{}' y_{\prime}{}^{\text{IV}}, & y_{\prime\prime}{}''' = z_{\prime}{}' x_{\prime}{}^{\text{IV}} - x_{\prime}{}' z_{\prime}{}^{\text{IV}}, & z_{\prime\prime}{}''' = x_{\prime}{}' y_{\prime}{}^{\text{IV}} - y_{\prime}{}' x_{\prime}{}^{\text{IV}},\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
x_{\prime\prime}{}^{(n_{\prime})} = y_{\prime}{}'' z_{\prime}{}''' - z_{\prime}{}'' y_{\prime}{}''', & y_{\prime\prime}{}^{(n_{\prime})} = z_{\prime}{}'' x_{\prime}{}''' - x_{\prime}{}'' z_{\prime}{}''', & z_{\prime\prime}{}^{(n_{\prime})} = x_{\prime}{}'' y_{\prime}{}''' - y_{\prime}{}'' x_{\prime}{}''',\\
\&c., & \&c., & \&c.\,;
\end{array}
$$

les $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$ seront donc composés en $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, précisément comme le sont ceux-ci avec les x, y, z.

[14.] Présentement, multiplions la première des équations de l'art. 9, par x', x'', x''', et retranchons les différens produits de la première, de la seconde, de la troisième ..... de la $n.^{\text{me}}$, &c. multipliées par x'; multiplions la seconde par x', x'', x''', &c., et retranchons les produits de la première, de la seconde, de la troisième, &c., de la $n.^{\text{me}}$, multipliées par x''; et après avoir ainsi opéré sur les n premières équations, combinons de la même manière les n suivantes, &c.; nous parviendrons aux relations

$$
\begin{aligned}
y_{\prime}{}'\,(x', y') + z_{\prime}{}'\,(x', z') &= x'\,(x', y'', z') - (x', y'', z')x' = 0,\\
y_{\prime}{}'\,(x', y'') + z_{\prime}{}'\,(x', z'') &= x'\,(x', y'', z'') - (x', y'', z')x'' = 0,
\end{aligned}
$$

$$y_{\prime}'(x',y''') + z_{\prime}'(x',z''') = x'(x',y'',z''') - (x',y'',z')x''' = x_{\prime\prime}',$$
$$y_{\prime}'(x',y^{\text{IV}}) + z_{\prime}'(x',z^{\text{IV}}) = x'(x',y'',z^{\text{IV}}) - (x',y'',z')x^{\text{IV}} = x_{\prime\prime}'',$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_{\prime}'(x',y^{(n)}) + z_{\prime}'(x',z^{(n)}) = x'(x',y'',z^{(n)}) - (x',y'',z')x^{(n)} = x_{\prime\prime}^{(n-2)};$$
$$y_{\prime}'(x'',y') + z_{\prime}'(x'',z') = x''(x',y'',z') - (x',y'',z'')x' = 0,$$
$$y_{\prime}'(x'',y'') + z_{\prime}'(x'',z'') = x''(x',y'',z'') - (x',y'',z'')x'' = 0,$$
$$y_{\prime}'(x'',y''') + z_{\prime}'(x'',z''') = x''(x',y'',z''') - (x',y'',z'')x''' = x_{\prime\prime}^{(n-1)},$$
$$y_{\prime}'(x'',y^{\text{IV}}) + z_{\prime}'(x'',z^{\text{IV}}) = x''(x',y'',z^{\text{IV}}) - (x',y'',z'')x^{\text{IV}} = x_{\prime\prime}^{(n)},$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_{\prime}'(x^{(n-1)},y^{(n)}) + z_{\prime}'(x^{(n-1)},z^{(n)}) = x^{(n-1)}(x',y'',z^{(n)}) - (x',y'',z^{(n-1)})x^{(n)} = x_{\prime\prime}^{(n,-1)},$$
$$y_{\prime}''(x',y') + z_{\prime}''(x',z') = x'(x',y''',z') - (x',y''',z')\,x' = 0,$$
$$y_{\prime}''(x',y'') + z_{\prime}''(x',z'') = x'(x',y''',z'') - (x',y''',z')\,x'' = -x_{\prime\prime}',$$
$$y_{\prime}''(x',y''') + z_{\prime}''(x',z''') = x'(x',y''',z''') - (x',y''',z')\,x''' = 0,$$
$$y_{\prime}''(x',y^{\text{IV}}) + z_{\prime}''(x',z^{\text{IV}}) = x'(x',y''',z^{\text{IV}}) - (x',y''',z')\,x^{\text{IV}} = x_{\prime\prime}^{(n)},$$
$$y_{\prime}''(x',y^{\text{V}}) + z_{\prime}''(x',z^{\text{V}}) = x'(x',y''',z^{\text{V}}) - (x',y''',z')\,x^{\text{V}} = x_{\prime\prime}^{(n+1)},$$

&c.; &c. :

D'après la formation des seconds membres, on voit qu'on peut les regarder comme les résultantes à deux lettres, qu'on obtiendrait,

1.° de x', x'', x''', &c., combinées avec les résultantes (x', y'', z'),

(x', y'', z'), (x', y'', z'''), &c. employées comme de simples lettres;

2.° de x', x'', x''', &c. combinées avec (x', y''', z'), (x', y''', z''), (x', y''', z''') &c.;

3.° de x', x'', x''', &c. combinées avec (x', y^{IV}, z'), (x', y^{IV}, z''), $(x', y^{\text{IV}}, z''')$ &c.;

et ainsi du reste.

Il éxiste de pareilles expressions pour les valeurs des $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ en x, y, z.

[15.] Dans les derniers membres de ces équations, chaque $x_{\prime\prime}$ se trouve une fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$: si donc on forme la somme de leurs carrés, cette somme sera $2\,\Sigma x_{\prime\prime}^2$. En évaluant la somme des premiers membres, chacun élevé au carré, on pourrait obtenir la valeur de $\Sigma x_{\prime\prime}^2$; mais il sera plus simple d'observer que les $x_{\prime\prime}$ étant composés en $x_\prime, y_\prime, z_\prime$, comme le sont les $x_\prime$ en x, y, z, on doit avoir, ainsi qu'au n.° 12,

$$\Sigma x_{\prime\prime}^2 = \Sigma y_\prime^2\, \Sigma z_\prime^2 - (\Sigma y_\prime z_\prime)^2;$$

mettant dans ce dernier membre pour $\Sigma y_\prime^2$, $\Sigma z_\prime^2$, $\Sigma y_\prime z_\prime$, leurs valeurs en Σx^2, Σy^2, Σz^2, Σyz, &c., il vient

$$\Sigma x_{\prime\prime}^2 = \Sigma x^2 \left\{ \begin{array}{l} \Sigma x^2\, \Sigma y^2\, \Sigma z^2 + 2\,\Sigma yz\, \Sigma zx\, \Sigma xy \\ -\Sigma x^2\, (\Sigma yz)^2 - \Sigma y^2\, (\Sigma zx)^2 - \Sigma z^2\, (\Sigma xy)^2 \end{array} \right\};$$

mais le facteur compris entre les accolades est la fonction $\Sigma (x, y', z'')^2$; de sorte que

$$\begin{aligned} \Sigma x_{\prime\prime}^2 &= \Sigma x^2\, \Sigma (x, y', z'')^2, \\ \Sigma y_{\prime\prime}^2 &= \Sigma y^2\, \Sigma (x, y', z'')^2, \\ \Sigma z_{\prime\prime}^2 &= \Sigma z^2\, \Sigma (x, y', z'')^2, \end{aligned}$$

et pareillement, on trouve

$$\begin{aligned} \Sigma y_{\prime\prime} z_{\prime\prime} &= \Sigma yz\, \Sigma (x, y', z'')^2, \\ \Sigma z_{\prime\prime} x_{\prime\prime} &= \Sigma zx\, \Sigma (x, y', z'')^2, \\ \Sigma x_{\prime\prime} y_{\prime\prime} &= \Sigma xy\, \Sigma (x, y', z'')^2. \end{aligned}$$

[16.]

[16.] On a d'ailleurs, par le n.° 12, en mettant des $x_{,}$ et $x_{,,}$, $y_{,}$ et $y_{,,}$, $z_{,}$ et $z_{,,}$, au lieu des x et $x_{,}$, y et $y_{,}$, z et $z_{,}$;

$$3\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2 = \Sigma x_{,,}^2 \, \Sigma x_{,}^2 + \Sigma y_{,,}^2 \, \Sigma y_{,}^2 + \Sigma z_{,,}^2 \, \Sigma z_{,}^2 + 2\Sigma y_{,,}z_{,,}\Sigma y_{,}z_{,} + 2\Sigma z_{,,}x_{,,}\Sigma z_{,}x_{,} + 2\Sigma x_{,,}y_{,,}\Sigma x_{,}y_{,} ;$$

Substituant dans cette formule, aux intégrales $\Sigma x_{,,}^2$, $\Sigma y_{,,}^2$, les valeurs que nous venons de donner, on aura

$$3\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2 = \Sigma(x, y', z'')^2 \left\{ \begin{array}{l} \Sigma x^2 \, \Sigma x_{,}^2 + \Sigma y^2 \, \Sigma y_{,}^2 + \Sigma z^2 \, \Sigma z_{,}^2 \\ + 2\Sigma yz\Sigma y_{,}z_{,} + 2\Sigma zx\Sigma z_{,}x_{,} + 2\Sigma xy\Sigma x_{,}y_{,} \end{array} \right\},$$

et par suite

$$\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2 = [\Sigma(x, y', z'')^2]^2.$$

[17.] Selon la même loi, on pourra de nouveau former avec les $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ et les $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ des quantités $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$, pour lesquelles il existera des relations analogues. Ainsi, pour ces nouvelles quantités, on aura encore

$$\Sigma x_{,,,}^2 = \Sigma x_{,}^2 \, \Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2 = \{\Sigma y^2 \Sigma z^2 - (\Sigma yz)^2\} [\Sigma(x, y', z'')^2]^2, \text{ \&c.,}$$
$$\Sigma y_{,,,}z_{,,,} = \Sigma y_{,}z_{,} \, \Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2 = \{\Sigma zx\Sigma xy - \Sigma yz\Sigma x^2\} [\Sigma(x, y', z'')^2]^2, \text{ \&c.,}$$

et

$$\Sigma(x_{,,}, y_{,,}', z_{,,}'')^2 = [\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]^2 = [\Sigma(x, y', z'')^2]^4;$$
$$\Sigma(x_{,,,}, y_{,,,}', z_{,,,}'')^2 = [\Sigma(x, y', z'')^2]^8.$$
&c.

[18.] Des expressions

$$\Sigma x_{,,}^2 = \Sigma x^2 \, \Sigma(x, y', z'')^2, \; \Sigma y_{,,}^2 = \Sigma y^2 \, \Sigma(x, y', z'')^2 \text{ \&c.,}$$

on tire, en observant que

$$\Sigma x_{,,}^2 = \Sigma y_{,}^2 \, \Sigma z_{,}^2 - (\Sigma y_{,}z_{,})^2, \text{ \&c.}$$

et que

$$\Sigma(x, y', z'')^2 = \sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]},$$

$$\Sigma x^2 = \frac{\Sigma y_{,}^2 \Sigma z_{,}^2 - (\Sigma y_{,} z_{,})^2}{\sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]}}, \quad \Sigma y z = \frac{\Sigma z_{,} x_{,} \Sigma x_{,} y_{,} - \Sigma y_{,} z_{,} \Sigma x_{,}^2}{\sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]}},$$

$$\Sigma y^2 = \frac{\Sigma z_{,}^2 \Sigma x_{,}^2 - (\Sigma z_{,} x_{,})^2}{\sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]}}, \quad \Sigma z x = \frac{\Sigma x_{,} y_{,} \Sigma y_{,} z_{,} - \Sigma z_{,} x_{,} \Sigma y_{,}^2}{\sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]}},$$

$$\Sigma z^2 = \frac{\Sigma x_{,}^2 \Sigma y_{,}^2 - (\Sigma x_{,} y_{,})^2}{\sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]}}, \quad \Sigma x y = \frac{\Sigma y_{,} z_{,} \Sigma z_{,} x_{,} - \Sigma x_{,} y_{,} \Sigma z_{,}^2}{\sqrt{[\Sigma(x_{,}, y_{,}', z_{,}'')^2]}}.$$

Ainsi les quantités que nous venons de considérer,

$$\Sigma x_{,}^2,\ \Sigma y_{,}^2,\ \Sigma z_{,}^2,\ \Sigma y_{,} z_{,},\ \Sigma z_{,} x_{,},\ \Sigma x_{,} y_{,};$$
$$\Sigma x_{,,}^2,\ \Sigma y_{,,}^2,\ \Sigma z_{,,}^2,\ \Sigma y_{,,} z_{,,},\ \Sigma z_{,,} x_{,,},\ \Sigma x_{,,} y_{,,};$$
$$\Sigma x_{,,,}^2,\ \Sigma y_{,,,}^2,\ \&c.;$$
$$\&c.;$$

se forment d'une manière très-régulière au moyen des six intégrales,

$$\Sigma x^2,\ \Sigma y^2,\ \Sigma z^2,\ \Sigma y z,\ \Sigma z x,\ \Sigma x y;$$

et ces dernières sont elles-mêmes composées assez simplement des six intégrales relatives à des résultantes d'un ordre quelconque de dérivation.

[19.] Ces résultats sont les seuls qui doivent être employés dans les considérations géométriques qui suivent; il ne sera peut-être pas déplacé néanmoins de faire connaître ici des relations qui ont lieu entre des quantités dérivées d'une manière très-analogue. Ces relations sont parfaitement semblables aux précédentes, et on sentira par l'exposition que nous en allons faire, que l'on pourrait aller beaucoup plus loin, en suivant la même marche.

Prenons quatre systèmes de n lettres chacun,

$$t',\ t'',\ t''',\ \&c.,\quad x',\ x'',\ x''',\ \&c.,\quad y',\ y'',\ y''',\ \&c.,\quad z',\ z'',\ z''',\ \&c.,$$

et nommons ${}_{,}t_{,}$, ${}_{,}x_{,}$, ${}_{,}y_{,}$, ${}_{,}z$ des quantités qui en soient dérivées, comme il suit :

$$
\begin{array}{llll}
{}_{,}t_{,}' = (x', y'', z'''), & {}_{,}x_{,}' = (y', z'', t'''), & {}_{,}y_{,}' = (z', t'', x'''), & {}_{,}z_{,}' = (t', x'', y'''), \\
{}_{,}t_{,}'' = (x', y'', z^{\text{IV}}), & {}_{,}x_{,}'' = (y', z'', t^{\text{IV}}), & {}_{,}y_{,}'' = (z', t'', x^{\text{IV}}), & {}_{,}z_{,}'' = (t', x'', y^{\text{IV}}), \\
{}_{,}t_{,}''' = (x', y'', z^{\text{V}}), & {}_{,}x_{,}''' = (y', z'', t^{\text{V}}), & {}_{,}y_{,}''' = (z', t'', x^{\text{V}}), & {}_{,}z_{,}''' = (t', x'', y^{\text{V}}), \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
{}_{,}t_{,}^{(n-1)} = (x'', y''', z^{\text{IV}}), & {}_{,}x_{,}^{(n-1)} = (y'', z''', t^{\text{IV}}), & {}_{,}y_{,}^{(n-1)} = (z'', t''', x^{\text{IV}}), & {}_{,}z_{,}^{(n-1)} = (t'', x''', y^{\text{IV}}), \\
\&c., & \&c., & \&c., & \&c.;
\end{array}
$$

où l'on désigne toujours par (t', x'', y''') une résultante à trois lettres.

De ces valeurs, on tire, comme au n.° 9,

$$
\begin{array}{l}
-{}_{,}t_{,}'\,t' + {}_{,}x_{,}'\,x' - {}_{,}y_{,}'\,y' + {}_{,}z_{,}'\,z' = (t', x'', y''', z') = 0, \\
-{}_{,}t_{,}'\,t'' + {}_{,}x_{,}'\,x'' - {}_{,}y_{,}'\,y'' + {}_{,}z_{,}'\,z'' = (t', x'', y''', z'') = 0, \\
-{}_{,}t_{,}'\,t''' + {}_{,}x_{,}'\,x''' - {}_{,}y_{,}'\,y''' + {}_{,}z_{,}'\,z''' = (t', x'', y''', z''') = 0, \\
-{}_{,}t_{,}'\,t^{\text{IV}} + {}_{,}x_{,}'\,x^{\text{IV}} - {}_{,}y_{,}'\,y^{\text{IV}} + {}_{,}z_{,}'\,z^{\text{IV}} = (t', x'', y''', z^{\text{IV}}), \\
-{}_{,}t_{,}'\,t^{\text{V}} + {}_{,}x_{,}'\,x^{\text{V}} - {}_{,}y_{,}'\,y^{\text{V}} + {}_{,}z_{,}'\,z^{\text{V}} = (t', x'', y''', z^{\text{V}}), \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
-{}_{,}t_{,}'\,t^{(n)} + {}_{,}x_{,}'\,x^{(n)} - {}_{,}y_{,}'\,y^{(n)} + {}_{,}z_{,}'\,z^{(n)} = (t', x'', y''', z^{(n)}), \\
\&c.
\end{array}
$$

en représentant par ${}_{,}n_{,}$ le nombre $n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}$, celui des équations précédentes sera ${}_{,}n_{,}.n$. Il sera aisé de trouver d'autres relations correspondantes à celles du n.° 10.

[20.] On voit facilement que, dans les seconds membres de ces équations, chacune des résultantes à quatre lettres y est deux fois avec le signe plus et deux fois avec le signe moins : on aura donc, en les ajoutant toutes,

$$-\Sigma_{,}t_{,}\Sigma t+\Sigma_{,}x_{,}\Sigma x-\Sigma_{,}y_{,}\Sigma y+\Sigma_{,}z_{,}\Sigma z=0.$$

En ajoutant les carrés de ces équations, on aura

$$4\Sigma(t,x',y'',z''')^2=\Sigma_{,}t_{,}^2\Sigma t^2+\Sigma_{,}x_{,}^2\Sigma x^2+\Sigma_{,}y_{,}^2\Sigma y^2+\Sigma_{,}z_{,}^2\Sigma z^2$$
$$-2\left\{\begin{array}{l}\Sigma_{,}t_{,,}x_{,}\Sigma tx-\Sigma_{,}t_{,,}y_{,}\Sigma ty+\Sigma_{,}t_{,,}z_{,}\Sigma tz\\ +\Sigma_{,}y_{,,}z_{,}\Sigma yz-\Sigma_{,}x_{,,}z_{,}\Sigma xz+\Sigma_{,}x_{,,}y_{,}\Sigma xy\end{array}\right\}.$$

Mais, par la formule du n.° 5,

$$\Sigma_{,}t_{,}^2=\Sigma x^2\Sigma y^2\Sigma z^2+2\Sigma yz\Sigma zx\Sigma xy-\Sigma x^2(\Sigma yz)^2-\Sigma y^2(\Sigma zx)^2-\Sigma z^2(\Sigma xy)^2,$$

et on aura des expressions semblables pour $\Sigma_{,}x_{,}^2$, $\Sigma_{,}y_{,}^2$, $\Sigma_{,}z_{,}^2$. Cette même formule donnera encore

$$\Sigma_{,}t_{,,}x_{,}=\Sigma tx(\Sigma yz)^2+\Sigma tz\,\Sigma xz\Sigma y^2+\Sigma ty\,\Sigma xy\,\Sigma z^2$$
$$-\Sigma ty\Sigma xz\Sigma yz-\Sigma tz\Sigma xy\Sigma yz-\Sigma tx\,\Sigma y^2\,\Sigma z^2,$$

et aussi des valeurs pareilles pour

$$\Sigma_{,}t_{,,}y_{,},\ \ \Sigma_{,}t_{,,}z_{,},\ \ \Sigma_{,}y_{,,}z_{,},\ \ \Sigma_{,}x_{,,}z_{,},\ \ \Sigma_{,}x_{,,}y_{,};$$

ces valeurs étant substituées dans la valeur de $\Sigma(t,x',y'',z''')^2$, donneront la suivante,

$$\Sigma(t,x',y'',z''')^2=\Sigma t^2\,\Sigma x^2\,\Sigma y^2\,\Sigma z^2-2\,\Sigma tx\,\Sigma yz\,\Sigma tz\,\Sigma yx$$
$$-2\,\Sigma ty\,\Sigma zx\,\Sigma tx\,\Sigma yz-2\,\Sigma ty\,\Sigma zx\,\Sigma tz\,\Sigma xy$$
$$+(\Sigma tx)^2\,(\Sigma yz)^2+(\Sigma ty)^2(\Sigma zx)^2+(\Sigma tz)^2(\Sigma xy)^2$$
$$+2\Sigma t^2\Sigma xy\Sigma zx\Sigma yz+2\Sigma x^2\Sigma ty\Sigma zt\Sigma yz+2\Sigma y^2\Sigma tx\Sigma zt\Sigma xz+2\Sigma z^2\Sigma tx\Sigma yt\Sigma xy$$
$$-\Sigma t^2\Sigma x^2(\Sigma yz)^2-\Sigma t^2\,\Sigma y^2\,(\Sigma zx)^2-\Sigma t^2\Sigma z^2(\Sigma xy)^2$$
$$-\Sigma y^2\Sigma z^2(\Sigma tx)^2-\Sigma z^2\,\Sigma x^2\,(\Sigma ty)^2-\Sigma x^2\Sigma y^2(\Sigma tz)^2.$$

[21.] Je forme avec les lettres ${}_{,}t_{,}$, ${}_{,}x_{,}$, ${}_{,}y_{,}$, ${}_{,}z_{,}$ un nouveau système de quantités ${}_{,}t_{,,}$, ${}_{,}x_{,,}$, ${}_{,}y_{,,}$, ${}_{,}z_{,,}$, telles que

$$
\begin{array}{ll}
{}_{,}t_{,,}' = {}_{,}x_{,}'(t',x^{\text{IV}}) - {}_{,}y_{,}'(t',y^{\text{IV}}) & {}_{,}x_{,,}' = - {}_{,}y_{,}'(x',y^{\text{IV}}) + {}_{,}z_{,}'(x',z^{\text{IV}}) \\
\qquad + {}_{,}z_{,}'(t',z^{\text{IV}}), & \qquad - {}_{,}t_{,}'(x',t^{\text{IV}}), \\
{}_{,}t_{,,}'' = {}_{,}x_{,}'(t',x^{\text{V}}) - {}_{,}y_{,}'(t',y^{\text{V}}) & {}_{,}x_{,,}'' = - {}_{,}y_{,}'(x',y^{\text{V}}) + {}_{,}z_{,}'(x',z^{\text{V}}) \\
\qquad + {}_{,}z_{,}'(t',z^{\text{V}}), & \qquad - {}_{,}t_{,}'(x',t^{\text{V}}), \\
\text{\&c.}; & \text{\&c.}; \\
{}_{,}y_{,,}' = {}_{,}z_{,}'(y',z^{\text{IV}}) - {}_{,}t_{,}'(y',t^{\text{IV}}) & {}_{,}z_{,,}' = - {}_{,}t_{,}'(z',t^{\text{IV}}) + {}_{,}x_{,}'(z',x^{\text{IV}}) \\
\qquad + {}_{,}x_{,}'(y',x^{\text{IV}}), & \qquad - {}_{,}y_{,}'(z',y^{\text{IV}}), \\
{}_{,}y_{,,}'' = {}_{,}z_{,}'(y',z^{\text{V}}) - {}_{,}t_{,}'(y',t^{\text{V}}) & {}_{,}z_{,,}'' = - {}_{,}t_{,}'(z',t^{\text{V}}) + {}_{,}x_{,}'(z',x^{\text{V}}) \\
\qquad + {}_{,}x_{,}'(y',x^{\text{V}}), & \qquad - {}_{,}y_{,}'(z',y^{\text{V}}), \\
\text{\&c.}; & \text{\&c.}
\end{array}
$$

On voit assez la loi de formation de ces quantités, en rapprochant ceci de ce que l'on a fait au n.° 13. Il sera facile d'avoir leur expression au moyen des t, x, y, z : pour cela, multipliez la première équation du second groupe du n.° 19, par t', t'', t''', t^{IV}, &c., et retranchez respectivement les produits des n premières de ces mêmes équations, multipliées par t'; ensuite multipliez la seconde successivement encore par t', t'', t''', &c., et la retranchez des n mêmes équations multipliées par t'', &c. ; opérez semblablement sur la $n+1.^{\text{me}}$ équation et sur les $n-1$ suivantes, vous aurez

$$
\begin{array}{l}
{}_{,}x_{,}'(t',x') - {}_{,}y_{,}'(t',y') + {}_{,}z_{,}'(t',z') = t'(t',x'',y''',z') - t'(t',x'',y''',z') = 0, \\
{}_{,}x_{,}'(t',x'') - {}_{,}y_{,}'(t',y'') + {}_{,}z_{,}'(t',z'') = t'(t',x'',y''',z'') - t''(t',x'',y''',z') = 0, \\
{}_{,}x_{,}'(t',x''') - {}_{,}y_{,}'(t',y''') + {}_{,}z_{,}'(t',z''') = t'(t',x'',y''',z''') - t'''(t',x'',y''',z') = 0, \\
{}_{,}x_{,}'(t',x^{\text{IV}}) - {}_{,}y_{,}'(t',y^{\text{IV}}) + {}_{,}z_{,}'(t',z^{\text{IV}}) = t'(t',x'',y''',z^{\text{IV}}) - t^{\text{IV}}(t',x'',y''',z') = {}_{,}t_{,,}', \\
{}_{,}x_{,}'(t',x^{\text{V}}) - {}_{,}y_{,}'(t',y^{\text{V}}) + {}_{,}z_{,}'(t',z^{\text{V}}) = t'(t',x'',y''',z^{\text{V}}) - t^{\text{V}}(t',x'',y''',z') = {}_{,}t_{,,}'', \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{\&c.}, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{\&c.},
\end{array}
$$

et l'on trouvera de semblables valeurs pour les ${}_{,}x_{,,}$, ${}_{,,}y_{,,}$, ${}_{,}z_{,,}$.

[22.] Si l'on ajoute les carrés de ces équations, on trouvera au dernier membre $3\,\Sigma\,{}_{,}t_{,,}{}^{2}$; ainsi

$$3\,\Sigma\,{}_{,}t_{,,}{}^{2} = \Sigma\,{}_{,}x_{,}{}^{2}\,\Sigma(t,x')^{2} + \Sigma\,{}_{,,}y_{,}{}^{2}\,\Sigma(t,y')^{2} + \Sigma_{,}z_{,}{}^{2}\,\Sigma(t,z')^{2}$$
$$-2\Sigma\,{}_{,}x_{,}\,{}_{,,}y_{,}\Sigma(t,x')(t,y') + 2\Sigma\,{}_{,}x_{,}z_{,}\,\Sigma(t,z')(t,x') - 2\Sigma\,{}_{,,}y_{,}\,{}_{,}z_{,}\Sigma(t,y')(t,z');$$

mettant dans cette valeur, à la place de

$$\Sigma\,{}_{,}x_{,}{}^{2},\quad \Sigma\,{}_{,,}y_{,}{}^{2},\quad \Sigma\,{}_{,}z_{,}{}^{2},\quad \Sigma\,{}_{,}x_{,}\,{}_{,,}y_{,},\quad \&c.,$$

et de

$$\Sigma\,(t\,,x')^{2},\quad \Sigma\,(t\,,y')^{2},\quad \&c.,$$

leurs valeurs exprimées en

$$\Sigma\,x^{2},\ \Sigma\,y^{2},\ \Sigma\,z^{2},\ \Sigma\,yz,\ \&c.,$$

on trouvera

$$\Sigma\,{}_{,}t_{,,}{}^{2} = \Sigma\,t^{2}\,\Sigma\,(t,\,x',\,y'',\,z''')^{2},$$

et de la même manière

$$\Sigma\,{}_{,}x_{,,}{}^{2} = \Sigma\,x^{2}\,\Sigma\,(t,x',y'',z''')^{2},$$
$$\Sigma\,{}_{,,}y_{,,}{}^{2} = \Sigma\,y^{2}\,\Sigma\,(t,x',y'',z''')^{2},$$
$$\Sigma\,{}_{,}z_{,,}{}^{2} = \Sigma\,z^{2}\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2};$$

et encore

$$\Sigma\,{}_{,}t_{,,}\,{}_{,}x_{,,} = \Sigma\,t\,x\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2},\qquad \Sigma\,{}_{,}t_{,,}\,{}_{,,}y_{,,} = \Sigma\,t\,y\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2},$$
$$\Sigma\,{}_{,}t_{,,}\,{}_{,}z_{,,} = \Sigma\,t\,z\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2},\qquad \Sigma\,{}_{,,}y_{,,}\,{}_{,}z_{,,} = \Sigma\,y\,z\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2},$$
$$\Sigma\,{}_{,}z_{,,}\,{}_{,}x_{,,} = \Sigma\,z\,x\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2},\qquad \Sigma\,{}_{,}x_{,,}\,{}_{,,}y_{,,} = \Sigma\,x\,y\,\Sigma(t,x',y'',z''')^{2}.$$

On voit assez, sans qu'il soit nécessaire de continuer cette analyse, comment l'analogie se soutient entre ces formules et celles que nous avons exposées plus haut, et qui dérivent de trois systèmes de lettres.

Considérations géométriques.

[23.] Soit A *(pl. 1, fig. 7)* l'un des sommets d'un rhomboïde ou parallélipipède quelconque, et A' le sommet diagonalement opposé; D', C', B', les sommets auxquels se terminent les arêtes de l'angle trièdre A, et D, C, B ceux qui leur sont opposés; a, b, c les longueurs des arêtes AD', AC', AB' de l'angle A. Je représenterai, suivant la notation de M. *Carnot*, par $\widehat{bc}, \widehat{ca}, \widehat{ab}$ les angles compris par ces arêtes. Je nomme encore $a_{,}, b_{,}, c_{,}$ les mesures des surfaces des parallélogrammes ou rhombes $AB'DC', AB'CD', AC'BD'$, formés sur les arêtes b,c; c,a; a,b comme côtés contigus : en sorte que

$$a_{,} = bc \sin.\widehat{bc}, \quad b_{,} = ca \sin.\widehat{ca}, \quad c_{,} = ab \sin.\widehat{ab}.$$

Nous nous servirons encore des lettres $a_{,}, b_{,}, c_{,}$ pour désigner les plans des faces où se trouvent ces mêmes parallélogrammes; et alors les angles d'inclinaison des faces du parallélipipède seront

$$\widehat{b_{,}c_{,}}, \quad \widehat{c_{,}a_{,}}, \quad \widehat{a_{,}b_{,}}:$$

entre ces angles et ceux compris par les arêtes, on aura, comme on sait,

$$\cos.\widehat{bc} = \cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab} + \sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}},$$
$$\cos.\widehat{ca} = \cos.\widehat{ab}\cos.\widehat{bc} + \sin.\widehat{ab}\sin.\widehat{bc}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}},$$
$$\cos.\widehat{ab} = \cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca} + \sin.\widehat{bc}\sin.\widehat{ca}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}};$$

on en déduira pour l'angle $\widehat{aa_{,}}$ que forme l'arête a avec le plan $a_{,,}$,

$$\sin.\widehat{aa_{,}} = \sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\,\frac{\sin.\widehat{b_{,}c_{,}}}{\sin.\widehat{bc}}$$
$$= \frac{1}{\sin.\widehat{bc}}\sqrt{[1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^2\widehat{bc}-\cos.^2\widehat{ca}-\cos.^2\widehat{ab}]},$$

[24.] Les diagonales AD, AC, AB des rhombes $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ étant nommées d, e, f, on a

$$d^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos.\widehat{bc},$$
$$e^2 = c^2 + a^2 + 2ca \cos.\widehat{ca},$$
$$f^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos.\widehat{ab};$$

et les trois autres diagonales ${}_{,}d$, ${}_{,}e$, ${}_{,}f$ des mêmes faces, auront pour expression de leurs carrés,

$${}_{,}d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos.\widehat{bc},$$
$${}_{,}e^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos.\widehat{ca},$$
$${}_{,}f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos.\widehat{ab}.$$

[25.] La diagonale d forme, avec les côtés b, c, des angles pour lesquels

$$\cos.\widehat{db} = \frac{b + c\cos.\widehat{bc}}{d}, \quad \sin.\widehat{db} = \frac{c}{d}\sin.\widehat{bc};$$
$$\cos.\widehat{dc} = \frac{c + b\cos.\widehat{bc}}{d}, \quad \sin.\widehat{dc} = \frac{b}{d}\sin.\widehat{bc}:$$

mais on a

$$\cos.\widehat{ad} = \cos.\widehat{ab}\cos.\widehat{bd} + \sin.\widehat{ab}\sin.\widehat{bd}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}},$$

et après les substitutions,

$$\cos.\widehat{ad} = \frac{b\cos.\widehat{ab} + c\cos.\widehat{ca}}{d}.$$

Dans le rhombe $ADA'D'$, dont les côtés adjacens sont AD', $A'D$, ou a, d, la diagonale AA' qui est l'une de celles du rhomboïde étant nommée g, on aura

$$g^2 = a^2 + d^2 + 2ad\cos.\widehat{ad},$$

et

et par suite,

$$g^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos.\widehat{bc} + 2ca\cos.\widehat{ca} + 2ab\cos.\widehat{ab}.$$

On aura pareillement pour les trois autres diagonales h, i, k, qui représenteront BB', CC', DD',

$$h^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos.\widehat{bc} - 2ca\cos.\widehat{ca} + 2ab\cos.\widehat{ab},$$

$$i^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos.\widehat{bc} + 2ca\cos.\widehat{ca} - 2ab\cos.\widehat{ab},$$

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos.\widehat{bc} - 2ca\cos.\widehat{ca} - 2ab\cos.\widehat{ab}.$$

[26.] Nous appellerons ${}_{,}d_{,}$ la surface du rhombe diagonal dièdre $ADA'D'$: elle égale ad sin. $\widehat{ad}$; mais de l'expression de cos. $\widehat{ad}$, on tire

$$\sin.^2\widehat{ad} = \frac{c^2\sin.^2\widehat{ca} + b^2\sin.^2\widehat{ab} + 2bc[\cos.\widehat{bc} - \cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}]}{d^2};$$

donc $a^2 d^2$ sin.^{2} $\widehat{ad}$, ou

$${}_{,}d_{,}^2 = c^2a^2\sin.^2\widehat{ca} + a^2b^2\sin.^2\widehat{ab} + 2ca.ab.\sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}};$$

et substituant pour ab sin. $\widehat{ab}$, $c_{,}$, pour ca sin. $\widehat{ca}$, $b_{,}$,

$${}_{,}d_{,}^2 = b_{,}^2 + c_{,}^2 + 2\,b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}.$$

On aura pour les autres rhombes diagonaux dièdres

$$ACA'C',\quad ABA'B';\quad BCB'C',\quad BDB'D',\quad CDC'D',$$

respectivement désignés par ${}_{,}e_{,}$, ${}_{,}f_{,}$; $d_{,}$, $e_{,}$, $f_{,}$,

$${}_{,}e_{,}^2 = c_{,}^2 + a_{,}^2 + 2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}},$$

$${}_{,}f_{,}^2 = a_{,}^2 + b_{,}^2 + 2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}};$$

$$d_{,}^{2} = b_{,}^{2} + c_{,}^{2} - 2b_{,}c_{,} \cos. \widehat{b_{,}c_{,}},$$

$$e_{,}^{2} = c_{,}^{2} + a_{,}^{2} - 2c_{,}a_{,} \cos. \widehat{c_{,}a_{,}},$$

$$f_{,}^{2} = a_{,}^{2} + b_{,}^{2} - 2a_{,}b_{,} \cos. \widehat{a_{,}b_{,}}.$$

Chacune de ces six équations fournit le théorème suivant : le carré de l'une des faces latérales d'un prisme triangulaire, égale la somme des carrés des deux autres, moins le double de leur produit par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

[27.] Concevons par le centre du rhomboïde un plan conduit parallèlement au plan des points $B'C'D'$ ou des points BCD, il résulte de cette situation, que les six arêtes

$$B'D, \quad DC', \quad C'B, \quad BD', \quad D'C, \quad CB',$$

seront rencontrées par ce plan, chacune en son milieu; et que les six autres arêtes,

$$AB', \quad AC', \quad AD', \quad A'B, \quad A'C, \quad A'D,$$

le seront, chacune en un point sur son prolongement, et distant de l'extrémité de l'arête d'une quantité égale à la moitié de sa longueur.

Ce plan coupe les six faces du rhomboïde selon les droites parallèles deux à deux. De ces trois couples, deux quelconques comprennent un parallélogramme, et les trois parallélogrammes que l'on pourra ainsi former seront équivalens en surface. Considérons celui dont les côtés sont dans les plans des faces $a_{,}$, $b_{,}$ et de leurs parallèles; on verra aisément qu'on le peut regarder comme la troisième face latérale d'un prisme triangulaire, dont les deux autres sont équivalentes et parallèles aux rhombes désignés par $a_{,}$ et $d_{,}$; si donc on représente l'aire du rhombe en question par $g_{,}$, on aura

$$g_{,}^{2} = a_{,}^{2} + d_{,}^{2} - 2a_{,}d_{,} \cos. \widehat{a_{,}d_{,}};$$

en observant que l'angle $\widehat{a_,d_,}$ employé ici fait partie d'un angle solide triangulaire, dont les deux autres angles d'inclinaison sont $\widehat{b_,d_,}$, $200^\circ - \widehat{a_,b_,}$, et que la face opposée à l'inclinaison $\widehat{a_,d_,}$, est $\widehat{ca}$; on aura cos. $a_,d_,$ par l'équation,

$$\cos.\widehat{a_,d_,} = \cos.\widehat{a_,b_,}\cos.\widehat{b_,d_,} + \sin.\widehat{a_,b_,}\sin.\widehat{b_,d_,}\cos.\widehat{ca}.$$

Mais, par l'article précédent,

$$\cos.\widehat{b_,d_,} = \frac{b_,^2 + d_,^2 - c_,^2}{2b_,d_,} = \frac{b_, - c_,\cos.\widehat{b_,c_,}}{d_,},$$

et

$$\sin.\widehat{b_,d_,} = \frac{c_,}{d_,}\sin.\widehat{b_,c_,};$$

donc

$$\cos.\widehat{a_,d_,} = \frac{b_,}{d_,}\cos.\widehat{a_,b_,} + \frac{c_,}{d_,}\left[-\cos.\widehat{a_,b_,}\cos.\widehat{b_,c_,} + \sin.\widehat{a_,b_,}\sin.\widehat{b_,c_,}\cos.\widehat{ca}\right];$$

et puisque la quantité renfermée entre crochets est cos. $\widehat{c_,a_,}$,

$$\cos.\widehat{a_,d_,} = \frac{c_,\cos.\widehat{c_,a_,} + b_,\cos.\widehat{a_,b_,}}{d_,};$$

substituant cette valeur dans celle de $g_,$, on aura enfin

$$g_,^2 = a_,^2 + b_,^2 + c_,^2 - 2b_,c_,\cos.\widehat{b_,c_,} - 2c_,a_,\cos.\widehat{c_,a_,} - 2a_,b_,\cos.\widehat{a_,b_,}.$$

On obtiendra plus simplement cette expression, en remarquant que ce rhombe a pour côtés des lignes égales et parallèles à celles que nous avons nommées $_,d$, $_,e$; mais

$$\cos.\widehat{_,d_,e} = \frac{_,d^2 + _,e^2 - _,f^2}{2_,d_,e} = \frac{c^2 - bc\cos.\widehat{bc} - ca\cos.\widehat{ca} + ab\cos.\widehat{ab}}{_,d_,e},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
_,d^2\,_,e^2\sin.^2\widehat{_,d_,e} = {} & b^2c^2\sin.^2\widehat{bc} - 2ca.ab\left[\cos.\widehat{bc} - \cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}\right] \\
& + c^2a^2\sin.^2\widehat{ca} - 2ab.bc\left[\cos.\widehat{ca} - \cos.\widehat{ab}\cos.\widehat{bc}\right] \\
& + a^2b^2\sin.^2\widehat{ab} - 2bc.ca\left[\cos.\widehat{ab} - \cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\right].
\end{aligned}$$

C'est l'expression même de $g_{,}^{2}$. On pouvait encore arriver à cette valeur, en partant d'un théorème donné par M. *Carnot*, art. 262 de sa *Géométrie de position*. Il eût suffi pour cela, de remarquer que le rhombe $g_{,}$ est double de la surface du triangle $B'C'D'$, que l'on peut considérer comme la quatrième face d'une pyramide triangulaire dont les trois autres seraient $\frac{1}{2}a_{,}$, $\frac{1}{2}b_{,}$, $\frac{1}{2}c_{,}$. Nous nommerons le rhombe $g_{,}$, rhombe diagonal correspondant aux sommets A, A'. Cette dénomination nous a semblé convenable, à raison de l'analogie de l'expression de ce rhombe avec celle de la diagonale répondant à ces sommets. La suite la justifiera peut-être mieux encore.

$h_{,}$, $i_{,}$, $k_{,}$ étant les rhombes diagonaux correspondans aux sommets BB', CC', DD'; on aura pareillement

$$h_{,}^{2}=a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}+2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}+2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}-2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$

$$i_{,}^{2}=a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}+2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}-2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}+2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$

$$k_{,}^{2}=a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}-2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}+2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}+2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}.$$

[28.] L'analogie qui règne entre les relations des arêtes avec les diagonales, et celles des faces du parallélipipède avec ses rhombes diagonaux, va nous conduire à plusieurs théorèmes concernant ces derniers, qui correspondent à ceux que l'on connaît sur les diagonales et les arêtes.

On tire des équations du n.° 24,

$$d^2+{}_{,}d^2=2(b^2+c^2),\qquad d^2-{}_{,}d^2=4bc\cos.\widehat{bc};$$

$$e^2+{}_{,}e^2=2(c^2+a^2),\qquad e^2-{}_{,}e^2=4ca\cos.\widehat{ca};$$

$$f^2+{}_{,}f^2=2(a^2+b^2),\qquad f^2-{}_{,}f^2=4ab\cos.\widehat{ab};$$

et partant,

$$d^2+{}_{,}d^2+e^2+{}_{,}e^2+f^2+{}_{,}f^2=4(a^2+b^2+c^2).$$

On forme semblablement avec les équations du n.° 26 celles-ci :

$$ {}_{,}d_{,}^2 + d_{,}^2 = 2(b_{,}^2 + c_{,}^2), \qquad {}_{,}d_{,}^2 - d_{,}^2 = 4\, b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}}\,; $$

$$ {}_{,}e_{,}^2 + e_{,}^2 = 2(c_{,}^2 + a_{,}^2), \qquad {}_{,}e_{,}^2 - e_{,}^2 = 4\, c_{,}a_{,} \cos.\widehat{c_{,}a_{,}}\,; $$

$$ {}_{,}f_{,}^2 + f_{,}^2 = 2(a_{,}^2 + b_{,}^2), \qquad {}_{,}f_{,}^2 - f_{,}^2 = 4\, a_{,}b_{,} \cos.\widehat{a_{,}b_{,}}\,; $$

desquelles on tire

$$ {}_{,}d_{,}^2 + d_{,}^2 + {}_{,}e_{,}^2 + e_{,}^2 + {}_{,}f_{,}^2 + f_{,}^2 = 4(a_{,}^2 + b_{,}^2 + c_{,}^2). $$

Ainsi, de même que la somme des carrés des quatre côtés d'une des faces du rhomboïde, égale la somme des carrés de ses deux diagonales; et que la somme des carrés des trois couples de diagonales de trois faces adjacentes à un même sommet, égale le quadruple de la somme des carrés des trois arêtes contiguës à ce sommet, ou encore la somme des carrés de toutes les arêtes du parallélipipède ;

De même aussi la somme des carrés de deux rhombes diagonaux dièdres, dont les plans passent par les diagonales d'une même face, égale celle des carrés des quatre faces qui forment ces angles dièdres; et la somme des carrés des trois couples de tels rhombes diagonaux dièdres, égale le quadruple de la somme des trois faces répondant à un même sommet.

On déduit des équations du n.° 25,

$$ g^2 + h^2 + i^2 + k^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2), $$

$$ 3g^2 - h^2 - i^2 - k^2 = 8(bc \cos.\widehat{bc} + ca \cos.\widehat{ca} + ab \cos.\widehat{ab}); $$

et de celles du n.° 27,

$$ g_{,}^2 + h_{,}^2 + i_{,}^2 + k_{,}^2 = 4(a_{,}^2 + b_{,}^2 + c_{,}^2) $$

$$ -3g_{,}^2 + h_{,}^2 + i_{,}^2 + k_{,}^2 = 8(b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}} + c_{,}a_{,} \cos.\widehat{c_{,}a_{,}} + a_{,}b_{,} \cos.\widehat{a_{,}b_{,}}). $$

On sait que la première de ces quatre équations exprime un théorème donné par M. *Legendre* : La somme des carrés des quatre diagonales d'un rhomboïde, égale la somme des carrés de ses douze arêtes, ou le quadruple de la somme des carrés des trois arêtes d'un même sommet.

La troisième donne ce théorème correspondant : La somme des carrés des quatre rhombes diagonaux du parallélipipède, égale le quadruple de la somme des carrés des trois faces qui forment un angle solide.

De là il suit que la somme des carrés des trois couples de diagonales de ces trois faces, égale celle des carrés des quatre diagonales du rhomboïde ; et aussi que la somme des carrés des trois couples de rhombes diagonaux dièdres, égale la somme des carrés des quatre rhombes diagonaux.

La diagonale de deux sommets opposés d'un parallélipipède est la ligne qui reçoit la plus grande somme de projections des trois arêtes de l'un des sommets de cette diagonale, et, de plus, elle est égale à cette plus grande somme de projections.

Le plan du rhombe diagonal est aussi celui qui reçoit la plus grande projection des trois faces du parallélipipède qui répondent à l'un des sommets que nous avons nommés correspondans du rhombe diagonal, et l'aire de ce rhombe égale cette plus grande somme.

[29.] Considérons présentement le volume du parallélipipède. La perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arête a sur la face $a_{,}$, égale a sin. $\widehat{aa_{,}}$; en la multipliant par la face $a_{,}$, on aura le volume du rhomboïde qui sera donc

$$\frac{a\,a_{,}}{\sin.\widehat{bc}}\sqrt{[1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^2\widehat{bc}-\cos.^2\widehat{ca}-\cos.^2\widehat{ab}]},$$

ou bien, en le nommant p, on aura

$$p^2=a^2b^2c^2\,(1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^2\widehat{bc}-\cos.^2\widehat{ca}-\cos.^2\widehat{ab}).$$

On a par les formules trigonométriques rapportées art. 23,

$$\cos.\widehat{bc} = \cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab} + \sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}};$$

multipliant par $\cos.\widehat{bc}$, on en pourra tirer

$$\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab} = \cos.^2\widehat{bc} - \sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}.$$

Substituant dans le dernier facteur de p^2, ce facteur deviendra

$$1 + \cos.^2\widehat{bc} - \cos.^2\widehat{ca} - \cos.^2\widehat{ab} - 2\sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}};$$

et remplaçant les $\cos.^2$ par des $\sin.^2$,

$$\sin.^2\widehat{ca} + \sin.^2\widehat{ab} - \sin.^2\widehat{bc} - 2\sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}.$$

multipliant par $a^2 b^2 c^2$,

$$\begin{aligned} p^2 = {} & b^2.c^2a^2\sin.^2\widehat{ca} + c^2.a^2b^2\sin.^2\widehat{ab} - a^2.b^2c^2\sin.^2\widehat{bc} \\ & - 2\,bc.ca\sin.\widehat{ca}.ab\sin.\widehat{ab}.\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}, \end{aligned}$$

ou bien

$$p^2 = b^2 b_{,}^2 + c^2 c_{,}^2 - a^2 a_{,}^2 - 2\,bc\cos.\widehat{bc}\,b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}:$$

on aura pareillement

$$p^2 = c^2 c_{,}^2 + a^2 a_{,}^2 - b^2 b_{,}^2 - 2\,ca\cos.\widehat{ca}\,c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}},$$

$$p^2 = a^2 a_{,}^2 + b^2 b_{,}^2 - c^2 c_{,}^2 - 2\,ab\cos.\widehat{ab}\,a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}.$$

Si l'on ajoute ces trois équations, il vient

$$\begin{aligned} 3p^2 = {} & a^2 a_{,}^2 - 2\,bc\cos.\widehat{bc}\,b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} \\ & + b^2 b_{,}^2 - 2\,ca\cos.\widehat{ca}\,c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}} \\ & + c^2 c_{,}^2 - 2\,ab\cos.\widehat{ab}\,a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}, \end{aligned}$$

expression assez remarquable en ce qu'on y voit les arêtes et les faces du parallélipipède entrer de la même manière (*).

En ajoutant deux à deux les trois équations ci-dessus, on déduira encore celles-ci,

$$p^2 = a^2 a_{,}^2 - ca \cos.\widehat{ca}\, c_{,}a_{,} \cos.\widehat{c_{,}a_{,}} - ab \cos.\widehat{ab}\, a_{,}b_{,} \cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$

$$p^2 = b^2 b_{,}^2 - ab \cos.\widehat{ab}\, a_{,}b_{,} \cos.\widehat{a_{,}b_{,}} - bc \cos.\widehat{bc}\, b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}},$$

$$p^2 = c^2 c_{,}^2 - bc \cos.\widehat{bc}\, b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}} - ca \cos.\widehat{ca}\, c_{,}a_{,} \cos.\widehat{c_{,}a_{,}}.$$

On pourra, dans les précédentes expressions, remplacer

$$bc \cos.\widehat{bc}, \quad b_{,}c_{,} \cos.\widehat{b_{,}c_{,}}, \text{ \&c.}$$

par leurs valeurs du n.° 28, données au moyen des diagonales des faces et des rhombes diagonaux dièdres; on aura ainsi, par exemple,

$$3p^2 = a^2 a_{,}^2 + b^2 b_{,}^2 + c^2 c_{,}^2$$
$$- \tfrac{1}{8}\left\{(d^2 - {}_{,}d^2)({}_{,}d_{,}^2 - d_{,}^2) + (e^2 - {}_{,}e^2)({}_{,}e_{,}^2 - e_{,}^2) + (f^2 - {}_{,}f^2)({}_{,}f_{,}^2 - f_{,}^2)\right\}.$$

(*) La sphère passant par les quatre points A, B', C', D', a pour le carré de son diamètre,

$$\frac{a^2\sin.^2\widehat{bc} + b^2\sin.^2\widehat{ca} + c^2\sin.^2\widehat{ab} - 2bc\sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} - 2ca\sin.\widehat{ab}\sin.\widehat{bc}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}} - 2ab\sin.\widehat{bc}\sin.\widehat{ca}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}}{1 + 2\cos\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab} - \cos.^2\widehat{bc} - \cos.^2\widehat{ca} - \cos.^2\widehat{ab}}$$

(*Voyez* les Élémens de Géométrie de M. *Legendre*, note 8.) Si on multiplie les deux termes de cette expression par $a^2 b^2 c^2$, et qu'on introduise les quantités $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, comme on l'a fait ci-dessus, cette valeur deviendra

$$3.\frac{a^4 a_{,}^2 + b^4 b_{,}^2 + c^4 c_{,}^2 - 2b^2c^2 b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} - 2c^2a^2 c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}} - 2a^2b^2 a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}}{a^2a_{,}^2 + b^2b_{,}^2 + c^2c_{,}^2 - 2bc\cos.bc\, b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} - 2ca\cos.\widehat{ca}\, c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}} - 2ab\cos.\widehat{ab}\, a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}}.$$

On voit que, sous cette forme, le numérateur est l'expression du carré d'un rhombe diagonal dans un parallélipipède de même direction d'arêtes que le proposé, mais dont les faces auraient pour mesures $a^2a_{,}$, $b^2b_{,}$, $c^2c_{,}$. Les arêtes d'un tel rhomboïde seraient bc, ca, ab, respectivement dirigées dans le sens de a, b, c. Ainsi le diamètre de la sphère sera le rapport de ce rhombe au volume du parallélipipède construit sur a, b, c.

[30.]

[30.] Imaginons que l'on construise un nouveau rhomboïde dont les angles des arêtes soient les supplémens à deux droits des inclinaisons des faces du parallélipipède primitif, et qui ait pour mesures de ses arêtes les quantités $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, mesures des faces de l'ancien. Les directions des arêtes du nouveau rhomboïde que nous allons considérer seront, si l'on veut, trois perpendiculaires conduites d'un point de l'espace sur les trois faces $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ de l'ancien, et l'on sait par les propriétés des triangles sphériques polaires ou supplémentaires, que les angles d'inclinaison des plans de ces perpendiculaires, qui sont ceux compris par les faces du nouveau parallélipipède, seront les supplémens à deux droits des angles $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$, $\widehat{ab}$ des arêtes de l'ancien. On pourra nommer ce nouveau rhomboïde le supplémentaire des faces du parallélipipède proposé, pour rappeler son origine.

Nous désignerons par $A_{,}$, $A'_{,}$, $B_{,}$, $B'_{,}$, $C_{,}$, $C'_{,}$, $D_{,}$, $D'_{,}$ les sommets de ce rhomboïde supplémentaire.

En conservant $\widehat{b_{,}c_{,}}$, $\widehat{c_{,}a_{,}}$, $\widehat{a_{,}b_{,}}$ pour indiquer les inclinaisons des faces du premier parallélipipède, les diagonales des faces du supplémentaire auront pour leurs carrés,

$$b_{,}^2 + c_{,}^2 - 2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}, \qquad b_{,}^2 + c_{,}^2 + 2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}},$$
$$c_{,}^2 + a_{,}^2 - 2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}, \qquad c_{,}^2 + a_{,}^2 + 2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}},$$
$$a_{,}^2 + b_{,}^2 - 2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}, \qquad a_{,}^2 + b_{,}^2 + 2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}};$$

c'est-à-dire, que les diagonales seront respectivement

$$d_{,}, \quad {}_{,}d_{,}; \qquad e_{,}, \quad {}_{,}e_{,}; \qquad f_{,}, \quad {}_{,}f_{,};$$

ou bien les rhombes diagonaux du parallélipipède proposé. Ces rhombes sont tels que celui dont le plan passait par le sommet A, répond à la diagonale du rhomboïde supplémentaire qui ne passe pas par $A_{,}$.

Les diagonales de notre rhomboïde supplémentaire auront pour leurs carrés,

$$a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}-2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}-2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}-2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$
$$a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}+2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}+2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}-2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$
$$a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}+2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}-2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}+2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}},$$
$$a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+c_{,}^{2}-2b_{,}c_{,}\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}+2c_{,}a_{,}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}+2a_{,}b_{,}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}.$$

Les mesures de ces diagonales sont donc les mêmes que celles des rhombes $g_{,}$, $h_{,}$, $i_{,}$, $k_{,}$, que nous avons nommés diagonaux du rhomboïde proposé. La diagonale $A_{,}A_{,}'$ est celle qui répond au rhombe dont le plan était rencontré par la diagonale AA', et conduit parallèlement aux plans des sommets $B'C'D'$, BCD.

[31.] Les faces de ce rhomboïde supplémentaire ont pour expression

$$b_{,}c_{,}\sin.\widehat{b_{,}c_{,}},\quad c_{,}a_{,}\sin.\widehat{c_{,}a_{,}},\quad a_{,}b_{,}\sin.\widehat{a_{,}b_{,}};$$

je nomme $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ ces quantités : si, au lieu de $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ et des sinus de $\widehat{b_{,}c_{,}}$, $\widehat{c_{,}a_{,}}$, $\widehat{a_{,}b_{,}}$, on met leurs valeurs en a, b, c, et $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$, $\widehat{ab}$; on aura

$$a_{,,}=a.abc\sqrt{[1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^{2}\widehat{bc}-\cos.^{2}\widehat{ca}-\cos.^{2}\widehat{ab}]},$$
$$b_{,,}=b.abc\sqrt{[1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^{2}\widehat{bc}-\cos.^{2}\widehat{ca}-\cos.^{2}\widehat{ab}]},$$
$$c_{,,}=c.abc\sqrt{[1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^{2}\widehat{bc}-\cos.^{2}\widehat{ca}-\cos.^{2}\widehat{ab}]}.$$

Mais l'expression du volume du parallélipipède proposé est

$$abc\sqrt{[1+2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab}-\cos.^{2}\widehat{bc}-\cos.^{2}\widehat{ca}-\cos.^{2}\widehat{ab}]},$$

et, pour abréger, je l'ai déjà remplacée ci-dessus par p; on aura donc

$$a_{,,}=a.p,\quad b_{,,}=b.p,\quad c_{,,}=c.p.$$

Les rhombes diagonaux dièdres pourront être désignés par

$$_{\prime}d_{\prime\prime},\quad _{\prime}e_{\prime\prime},\quad _{\prime}f_{\prime\prime};\quad d_{\prime\prime},\quad e_{\prime\prime},\quad f_{\prime\prime},$$

et en observant que

$$\cos.\widehat{b_{\prime\prime}c_{\prime\prime}} = -\cos.\widehat{bc},\quad \cos.\widehat{c_{\prime\prime}a_{\prime\prime}} = -\cos.\widehat{ca},\quad \cos.\widehat{a_{\prime\prime}b_{\prime\prime}} = -\cos.\widehat{ab},$$

on doit avoir par le n.° 26,

$$_{\prime}d_{\prime\prime}^2 = b_{\prime\prime}^2 + c_{\prime\prime}^2 - 2b_{\prime\prime}c_{\prime\prime}\cos.\widehat{bc},\quad d_{\prime\prime}^2 = b_{\prime\prime}^2 + c_{\prime\prime}^2 + 2b_{\prime\prime}c_{\prime\prime}\cos.\widehat{bc};$$

et en substituant à $b_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime}$ leurs valeurs,

$$_{\prime}d_{\prime\prime}^2 = {_{\prime}d^2}.p^2,\quad d_{\prime\prime}^2 = d^2.p^2;$$

il en résulte donc

$$_{\prime}d_{\prime\prime} = {_{\prime}d}.p,\ d_{\prime\prime} = d.p;\quad _{\prime}e_{\prime\prime} = {_{\prime}e}.p,\ e_{\prime\prime} = e.p;\quad _{\prime}f_{\prime\prime} = {_{\prime}f}.p,\ f_{\prime\prime} = f.p.$$

Si l'on désigne encore les quatre rhombes diagonaux de ce rhomboïde par

$$g_{\prime\prime},\quad h_{\prime\prime},\quad i_{\prime\prime},\quad k_{\prime\prime},$$

on aura aussi

$$g_{\prime\prime} = g.p,\quad h_{\prime\prime} = h.p,\quad i_{\prime\prime} = i.p,\quad k_{\prime\prime} = k.p;$$

ainsi, tous les élémens linéaires de notre nouveau rhomboïde sont respectivement égaux aux élémens superficiels du parallélipipède proposé; et tous les élémens superficiels du nouveau sont égaux aux élémens linéaires de l'ancien, multipliés par son volume.

[32.] Ce rhomboïde supplémentaire a pour expression de son volume

$$a_{\prime}b_{\prime}c_{\prime}\sqrt{[1 - 2\cos.\widehat{b_{\prime}c_{\prime}}\cos.\widehat{c_{\prime}a_{\prime}}\cos.\widehat{a_{\prime}b_{\prime}} - \cos.^2\widehat{b_{\prime}c_{\prime}} - \cos.^2\widehat{c_{\prime}a_{\prime}} - \cos.^2\widehat{a_{\prime}b_{\prime}}]};$$

par la substitution des valeurs de $a_{\prime}$, $b_{\prime}$, $c_{\prime}$, elle devient

$$a^2b^2c^2\sin.\widehat{bc}\sin.\widehat{ca}\sin.\widehat{ab}\sqrt{[1 - 2\cos.\widehat{b_{\prime}c_{\prime}}\cos.\widehat{c_{\prime}a_{\prime}}\cos.\widehat{a_{\prime}b_{\prime}} - \&c.]};$$

et par celle des valeurs des angles

$$\widehat{b_,c_,}\,,\quad \widehat{c_,a_,}\,,\quad \widehat{a_,b_,}\quad \text{en}\quad \widehat{bc}\,,\quad \widehat{ca}\,,\quad \widehat{ab}\,,$$

cette expression du volume du parallélipipède supplémentaire, que je nomme $p_,$, devient enfin

$$p_, = a^2 b^2 c^2 \left[1 + 2\cos.\widehat{bc}\cos.\widehat{ca}\cos.\widehat{ab} - \cos.^2\widehat{bc} - \cos.^2\widehat{ca} - \cos.^2\widehat{ab}\right];$$

ainsi l'on a $p_, = p^2$. On voit donc que la quantité ci-dessus,

$$a_,b_,c_,\sqrt{\left[1 - 2\cos.\widehat{b_,c_,}\cos.\widehat{c_,a_,}\cos.\widehat{a_,b_,} - \cos.^2\widehat{b_,c_,} - \cos.^2\widehat{c_,a_,} - \cos.^2\widehat{a_,b_,}\right]},$$

est une fonction des faces du rhomboïde proposé, et de leurs angles, qui exprime le carré de son volume.

Cette relation des volumes du rhomboïde proposé et de son supplémentaire, résulte bien simplement des expressions données au n.° 29. On a par l'une de ces formules

$$3p_,^2 = a_,^2 a_{,,}^2 + b_,^2 b_{,,}^2 + c_,^2 c_{,,}^2 - 2 b_, c_, \cos.\widehat{b_,c_,}\, b_{,,} c_{,,} \cos.\widehat{bc} - 2 c_, a_, \text{ \&c.};$$

et si l'on y substitue aux $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ leurs valeurs ap, bp, cp,

$$3p_,^2 = p^2 \left\{a_,^2 a^2 + b_,^2 b^2 + c_,^2 c^2 - 2 b_, c_, \cos.\widehat{b_,c_,}\, bc \cos.\widehat{bc} - \text{\&c.}\right\};$$

dans le second membre, on retrouve l'expression même donnée au n.° 29, pour $3p^2$; ainsi $p_,^2 = p^4$.

[33.] Si, de la même manière, on conçoit le rhomboïde supplémentaire du premier rhomboïde supplémentaire que nous venons de considérer, on le pourra nommer rhomboïde supplémentaire dérivé du second ordre; il aura pour angles de ses arêtes et de ses faces précisément ceux du parallélipipède proposé.

Ses arêtes seront

$$ap\,,\quad bp\,,\quad cp\,;$$

les diagonales de ses faces,

$$dp\,,\quad {}_{,}dp\,;\quad ep\,,\quad {}_{,}ep\,;\quad fp\,,\quad {}_{,}fp\,;$$

les diagonales de ses sommets opposés seront

$$gp\,,\quad hp\,,\quad ip\,,\quad kp:$$

les trois faces de ce parallélipipède adjacentes au sommet $A_{\prime\prime}$ seront

$$a_{,}p^2\,,\quad b_{,}p^2\,,\quad c_{,}p^2\,;$$

les surfaces de ses rhombes diagonaux dièdres et de ses quatre rhombes diagonaux,

$${}_{,}d_{,}p^2\,,\quad d_{,}p^2\,;\quad {}_{,}e_{,}p^2\,;\quad e_{,}p^2\,;\quad {}_{,}f_{,}p^2\,,\quad f_{,}p^2\,;$$
$$g_{,}p^2\,,\quad h_{,}p^2\,,\quad i_{,}p^2\,;\quad k_{,}p^2\,;$$

son volume,

$$p_{\prime\prime} = p_{,}^{2} = p^4.$$

On voit que ce parallélipipède est parfaitement semblable au rhomboïde primitif. Le rhomboïde supplémentaire du troisième ordre sera pareillement semblable à celui du premier.

Le numéro de l'ordre de dérivation d'un rhomboïde étant $2n$, ce corps sera semblable au primitif; en sorte que tous les rhomboïdes supplémentaires d'ordre pair seront semblables entre eux. Les lignes de ce rhomboïde de l'ordre $2n$, seront égales à celles du primitif, multipliées par $p^{\frac{2^{2n}-1}{3}}$; ses faces, rhombes ou figures superficielles quelconques, seront égales à leurs homologues dans le primitif, multipliées par $p^{2\frac{2^{2n}-1}{3}}$; et son volume sera $p^{2^{2n}}$.

Si le numéro d'ordre de dérivation d'un parallélipipède supplémentaire est impair et marqué par $2n+1$, il sera semblable au premier et à tous ceux d'ordres impairs; ses arêtes seront égales aux faces correspondantes du rhomboïde proposé, multipliées par $p^{2\frac{2^{2n}-1}{3}}$, et il en sera ainsi des diagonales des faces et des diagonales des sommets opposés, à l'égard des rhombes diagonaux dièdres et des quatre rhombes diagonaux; ses faces, rhombes, &c. seront égaux aux lignes qui leur correspondent dans le parallélipipède proposé, multipliées par $p^{\frac{2^{2(n+1)}-1}{3}}$, et son volume sera $p^{2^{2n+1}}$.

Le rhomboïde proposé pourrait être lui-même regardé comme le dérivé d'un ordre quelconque d'un rhomboïde antérieur, et qui ferait partie de la série précédente prolongée en sens opposé.

[34.] Ce que nous venons d'exposer rend facile la solution du problème où l'on demanderait tous les élémens d'un rhomboïde dont on ferait connaître les mesures de trois faces adjacentes à un sommet, et les angles compris par leurs plans.

$a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, étant ces mesures des faces, et $\widehat{b_{,}c_{,}}$, $\widehat{c_{,}a_{,}}$, $\widehat{a_{,}b_{,}}$ les angles de leurs plans; les angles $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$, $\widehat{ab}$, des arêtes seraient calculés par les formules connues de la trigonométrie sphérique; pour $\widehat{bc}$, par exemple, on aurait

$$\cos.\widehat{bc} = \frac{\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} + \cos.\widehat{c_{,}a_{,}}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}}}{\sin.\widehat{c_{,}a_{,}}\sin.\widehat{a_{,}b_{,}}};$$

En désignant par $p_{,}$ la quantité

$$a_{,}b_{,}c_{,}\sqrt{[1 - 2\cos.\widehat{b_{,}c_{,}}\cos.\widehat{c_{,}a_{,}}\cos.\widehat{a_{,}b_{,}} - \cos.^2\widehat{b_{,}c_{,}} - \cos.^2\widehat{c_{,}a_{,}} - \cos.^2\widehat{a_{,}b_{,}}]};$$

les arêtes a, b, c auront pour valeurs

$$a = \frac{b_{,}c_{,}}{\sqrt{(p_{,})}}\sin.\widehat{b_{,}c_{,}},\quad b = \frac{c_{,}a_{,}}{\sqrt{(p_{,})}}\sin.\widehat{c_{,}a_{,}},\quad c = \frac{a_{,}b_{,}}{\sqrt{(p_{,})}}\sin.\widehat{a_{,}b_{,}}.$$

On voit assez, par les formules rapportées ci-dessus, comment les autres élémens se détermineront; le volume sera $\sqrt{(p_{,})}$.

[35.] Nous allons établir ici quelques propriétés des surfaces du second ordre, dans l'énoncé desquelles plusieurs des résultats précédens se présentent assez naturellement, et qui d'ailleurs peuvent être utiles.

Représentons l'équation d'une telle surface rapportée à des coordonnées, comprenant des angles $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$, par

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy \\ + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0. \end{aligned}$$

Si le centre de cette surface se trouve à une distance finie de l'origine, on pourra prendre ce point pour origine d'un nouveau système de coordonnées parallèles aux anciennes, et si l'on nomme L la quantité

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} G^2[BC-D^2]+H^2[CA-E^2]+I^2\,[AB-F^2] \\ +2HI[EF-AD]+2IG[FD-BE]+2GH[DE-CF] \end{array}\right\}}{ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2}-K,$$

l'équation de la surface, en employant encore x, y, z pour représenter les nouvelles coordonnées, sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = L.$$

Cette surface a trois axes principaux, et chacun d'eux jouit de la propriété d'être perpendiculaire au plan des deux autres, qui est diamétral du système de cordes de la surface parallèles à l'axe en question. D'après cette propriété, ou d'après celle dont jouissent encore ces axes d'être des *maximum* ou *minimum* entre tous les diamètres qui aboutissent du centre à la surface, on trouvera facilement que les carrés des longueurs de ces demi-axes sont les racines de l'équation

$$(q)\left\{\begin{array}{l} 0=q^3\left\{ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2\right\} \\ -q^2L\left\{\begin{array}{c} BC-D^2+CA-E^2+AB-F^2 \\ +2[EF-AD]\cos.\widehat{yz}+2[FD-BE]\cos.\widehat{zx}+2[DE-CF]\cos.\widehat{xy}\end{array}\right\} \\ +qL^2\left\{\begin{array}{l} A\sin.^2\widehat{yz}-2D[\cos.\widehat{yz}-\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}] \\ +B\sin.^2\widehat{zx}-2E[\cos.\widehat{zx}-\cos.\widehat{xy}\cos.\widehat{yz}] \\ +C\sin.^2\widehat{xy}-2F[\cos.\widehat{xy}-\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}]\end{array}\right\} \\ -L^3\left[1+2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}-\cos.^2\widehat{yz}-\cos.^2\widehat{zx}-\cos.^2\widehat{xy}\right].\end{array}\right.$$

Par un changement dans la direction des axes, il est toujours possible, et d'une infinité de manières, de ramener l'équation de la surface à la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=\frac{1}{4};$$

les quantités a'^2, b'^2, c'^2 étant positives pour l'ellipsoïde; la dernière devenant $-c'^2$ pour l'hyperboloïde à une nappe, et b'^2, c'^2 se changeant en $-b'^2$, $-c'^2$ pour l'hyperboloïde à deux nappes; alors l'équation précédente (q) devient pour l'ellipsoïde

$$0=q^3-\tfrac{1}{4}q^2\{a'^2+b'^2+c'^2\}+\tfrac{1}{16}q\{b'^2c'^2\sin.^2\widehat{yz}+c'^2a'^2\sin.^2\widehat{zx}+a'^2b'^2\sin.^2\widehat{xy}\}$$
$$-\tfrac{1}{64}a'^2b'^2c'^2[1+2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}-\cos.^2\widehat{yz}-\cos.^2\widehat{zx}-\cos.^2\widehat{xy}].$$

a', b', c' étant trois axes conjugués, cette équation fait voir que les quantités

$$a'^2+b'^2+c'^2,$$
$$b'^2c'^2\sin.^2\widehat{yz}+c'^2a'^2\sin.^2\widehat{zx}+a'^2b'^2\sin.^2\widehat{xy},$$
$$a'^2b'^2c'^2[1+2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}-\cos.^2\widehat{yz}-\cos.^2\widehat{zx}-\cos.^2\widehat{xy}],$$

sont trois constantes pour un même ellipsoïde, et ces trois constantes exprimées

exprimées en fonction des coëfficiens de l'équation, rapportée aux axes des coordonnées primitives, et des angles de ces coordonnées, sont respectivement égales aux trois coëfficiens de l'équation (q), quand on a divisé tous ses termes par le coëfficient du premier, et qu'on les a multipliés par les nombres 4, 16, 64.

Si, par les points situés sur les axes des x, y, z à des distances de l'origine, égales à

$$\pm \frac{a'}{2}, \quad \pm \frac{b'}{2}, \quad \pm \frac{c'}{2};$$

c'est-à-dire, par les six points où la surface rencontre ces axes, on fait passer six plans parallèles deux à deux à ceux des coordonnées, on formera un parallélipipède, dont quatre des arêtes seront égales à a', et auront la direction de l'axe des x; quatre autres seront égales à b' et parallèles aux y; et les quatre dernières seront égales à c', et parallèles à l'axe des z. Les trois équations ci-dessus pourront, d'après cela, être ainsi écrites :

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \text{const.};$$

$$b'^2 c'^2 \sin.^2 \widehat{b'c'} + c'^2 a'^2 \sin.^2 \widehat{c'a'} + a'^2 b'^2 \sin.^2 \widehat{a'b'} = \text{const.};$$

$$a'^2 b'^2 c'^2 \{1 + 2\cos.\widehat{b'c'}\cos.\widehat{c'a'}\cos.\widehat{a'b'} - \cos.^2\widehat{b'c'} - \cos.^2\widehat{c'a'} - \cos.^2\widehat{a'b'}\} = \text{const.}$$

Alors il n'y entre plus que des élémens relatifs au parallélipipède que nous venons de décrire, auquel on donne communément le nom de *conjugué circonscrit* à l'ellipsoïde.

La première de ces équations indique que la somme des carrés des arêtes de ces rhomboïdes est la même pour tous ceux circonscrits à un même ellipsoïde ;

La deuxième, que la somme des carrés de leurs faces est pareillement constante ;

La troisième, que le volume de ces corps est constant.

On obtient d'une manière semblable des relations entre les a', b', c', qui se rapportent aux deux autres surfaces : nous nous proposons, avant de les exposer, de faire connaître une nouvelle forme dont les équations de ces surfaces sont susceptibles, et qui nous donnera d'autres propriétés du même genre. On peut toujours ramener, d'une infinité de manières, l'équation de l'hyperboloïde, à une ou à deux nappes, à la forme

$$\frac{yz}{\beta\gamma}+\frac{zx}{\gamma\beta}+\frac{xy}{\alpha\beta}\pm\frac{1}{4}=0;$$

α, β, γ étant regardés comme positifs, et le signe $+$ ayant lieu pour la première espèce d'hyperboloïde, le signe $-$ pour la deuxième. On s'assure bien simplement de cela, en observant que ces surfaces ont chacune un cône asymptote dont le sommet est situé à leur centre. Si, sur le cône, on prend trois quelconques de ses génératrices, et qu'on les emploie comme axes coordonnés pour y rapporter les surfaces, leurs équations ne pourront admettre que la forme

$$Myz+Nzx+Oxy+1=0,$$

puisque ces surfaces d'hyperboloïdes étant coupées par les plans des nouvelles coordonnées, doivent fournir des hyperboles dont les nouveaux axes sont les asymptotes; et que tout plan parallèle à l'un de ces plans détermine encore dans les surfaces des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles à celles des premières.

Ayant construit sur les axes conjugués, auxquels l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=\frac{1}{4}$$

de l'hyperboloïde à une nappe est rapportée, un parallélipipède, comme nous l'avons indiqué pour l'ellipsoïde, et que l'on appelle encore *rhomboïde conjugué circonscrit ;* et représentant par a_i', b_i', c_i' ses faces et par p' son volume, l'équation (q) relative à cette surface, c'est-à-dire, celle qui a pour ses racines les carrés des trois axes principaux, pourra s'écrire ainsi,

$$q^3 - \tfrac{1}{4} q^2 \{a'^2 + b'^2 - c'^2\} + \tfrac{1}{16} q \{c_,'^2 - b_,'^2 - a_,'^2\} + \tfrac{1}{64} p'^2 = 0.$$

Construisons avec les lignes α, β, γ un parallélipipède analogue, et désignons par $\alpha_,$, $\beta_,$, $\gamma_,$ ses faces, et par ϖ son volume; l'équation (q) relative à l'équation

$$\frac{yz}{\beta\gamma} + \frac{zx}{\gamma\alpha} + \frac{xy}{\alpha\beta} + \frac{1}{4} = 0$$

de la même surface d'hyperboloïde, devient

$$q^3 - \tfrac{1}{4} q^2 \{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos.\widehat{\beta\gamma} - 2\gamma\alpha \cos.\widehat{\gamma\alpha} - 2\alpha\beta \cos.\widehat{\alpha\beta}\}$$
$$- \tfrac{1}{4} q \{\beta_,\gamma_, \cos.\widehat{\beta_,\gamma_,} + \gamma_,\alpha_, \cos.\widehat{\gamma_,\alpha_,} + \alpha_,\beta_, \cos.\widehat{\alpha_,\beta_,}\} + \tfrac{1}{16} \varpi^2 = 0.$$

la comparaison de ces équations donne

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos.\widehat{\beta\gamma} - 2\alpha\gamma \cos.\widehat{\alpha\gamma} - 2\alpha\beta \cos.\widehat{\alpha\beta},$$
$$a_,'^2 + b_,'^2 - c_,'^2 = 4\{\beta_,\gamma_, \cos.\widehat{\beta_,\gamma_,} + \gamma_,\beta_, \cos.\widehat{\gamma_,\beta_,} + \alpha_,\beta_, \cos.\widehat{\alpha_,\beta_,}\},$$
$$p'^2 = 4\varpi^2.$$

Je crois inutile de m'arrêter à décrire la situation de ces rhomboïdes à l'égard de la surface, et à énoncer les théorèmes renfermés dans ces équations, comme aussi dans celles que fournirait la surface de l'hyperboloïde à deux nappes.

La manière dont nous sommes parvenus à ces résultats, nous permet de conclure les relations qui doivent exister entre les élémens de divers rhomboïdes, pour qu'ils soient circonscriptibles à une même surface du deuxième ordre, comme le sont ceux que nous venons d'examiner. Par exemple, si, par le centre d'un parallélipipède, on fait passer trois droites parallèles à ses arêtes, et terminées à ses faces; que sur ces parties de droites comme axes conjugués, on construise un ellipsoïde qui touchera les six faces du rhomboïde aux points où les trois axes les rencontrent; que pour un autre parallélipipède on en fasse autant, les deux ellipsoïdes ne pourront être égaux et superposables qu'autant que les sommes des carrés de leurs arêtes, ou, en d'autres termes, que celles des carrés de leurs diagonales seront égales; que les sommes des carrés de leurs faces, ou encore celles des carrés de leurs rhombes diagonaux seront les mêmes; qu'enfin leurs volumes seront égaux. Lorsque ces trois conditions seront remplies, les équations (q), dont les racines sont les carrés des axes principaux rectangulaires des ellipsoïdes inscrits aux deux parallélipipèdes, seront identiques, et par suite les ellipsoïdes seront superposables. On pourrait semblablement énoncer les conditions relatives aux deux autres surfaces; mais en voilà beaucoup sur ce sujet.

[36.] Nous allons présentement exprimer plusieurs élémens des rhomboïdes en fonction des coordonnées de leurs sommets; et pour plus de généralité, nous supposerons ces coordonnées parallèles à des axes qui forment les angles $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$. Soient toujours

$$A,\ A',\ B,\ B',\ C,\ C',\ D,\ D'$$

les sommets d'un parallélipipède dont le sommet A se trouve à l'origine des coordonnées. x', y', z' les coordonnées de l'extrémité D' du côté a; x'', y'', z'' celles de C', extrémité de b; et x''', y''', z''' celles de B', extrémité de c. Les coordonnées du sommet

$$\begin{array}{lll} D \text{ seront} & x''+x''', & y''+y''', \quad z''+z'''; \\ \text{de } C & x'''+x', & y'''+y', \quad z'''+z'; \\ \text{de } B & x'+x'', & y'+y'', \quad z'+z''; \\ \text{de } A' & x'+x''+x''', & y'+y''+y''', \quad z'+z''+z'''. \end{array}$$

L'arête a peut être considérée comme la diagonale d'un rhomboïde construit sur les arêtes x', y', z', comprenant les angles $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$ des axes des coordonnées, ou encore comme une droite qui a pour projections sur les trois axes, les lignes x', y', z'; ces projections étant faites par des plans conduits par les extrémités de la ligne parallèlement à ceux des coordonnées. D'après cela, on aura

$$a^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos.\widehat{yz} + 2z'x'\cos.\widehat{zx} + 2x'y'\cos.\widehat{xy},$$

et aussi

$$b^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 + 2y''z''\cos.\widehat{yz} + 2z''x''\cos.\widehat{zx} + 2x''y''\cos.\widehat{xy},$$

$$c^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 + 2y'''z'''\cos.\widehat{yz} + 2z'''x'''\cos.\widehat{zx} + 2x'''y'''\cos.\widehat{xy}.$$

On trouvera également pour les diagonales des faces du rhomboïde,

$$d^2 = (x''+x''')^2 + (y''+y''')^2 + (z''+z''')^2 + 2(y''+y''')(z''+z''')\cos.\widehat{yz}$$
$$+ 2(z''+z''')(x''+x''')\cos.\widehat{zx} + 2(x''+x''')(y''+y''')\cos.\widehat{xy},$$

$${}_{,}d^2 = (x''-x''')^2 + (y''-y''')^2 + (z''-z''')^2 + 2(y''-y''')(z''-z''')\cos.\widehat{yz}$$
$$+ 2(z''-z''')(x''-x''')\cos.\widehat{zx} + 2(x''-x''')(y''-y''')\cos.\widehat{xy};$$

e^2, ${}_{,}e^2$; f^2, ${}_{,}f^2$ auront de semblables expressions, mais en

$$x''',\ x',\ y''',\ y',\ z''',\ z';\quad x',\ x'',\ y',\ y'',\ z',\ z''.$$

Quant aux diagonales des sommets opposés, on aura

$$g^2 = (x'+x''+x''')^2 + 2(y'+y''+y''')(z'+z''+z''')\cos.\widehat{yz}$$
$$+ (y'+y''+y''')^2 + 2(z'+z''+z''')(x'+x''+x''')\cos.\widehat{zx}$$
$$+ (z'+z''+z''')^2 + 2(x'+x''+x''')(y'+y''+y''')\cos.\widehat{xy};$$

$$h^2 = (x'+x''-x''')^2 + 2(y'+y''-y''')(z'+z''-z''')\cos.\widehat{yz}$$
$$+ (y'+y''-y''')^2 + 2(z'+z''-z''')(x'+x''-x''')\cos.\widehat{zx}$$
$$+ (z'+z''-z''')^2 + 2(x'+x''-x''')(y'+y''-y''')\cos.\widehat{xy};$$

$$i^2 = (x' - x'' + x''')^2 + 2(y' - y'' + y''')(z' - z'' + z''')\cos.\widehat{yz}$$
$$+ (y' - y'' + y''')^2 + 2(z' - z'' + z''')(x' - x'' + x''')\cos.\widehat{zx}$$
$$+ (z' - z'' + z''')^2 + 2(x' - x'' + x''')(y' - y'' + y''')\cos.\widehat{xy},$$

$$k^2 = (-x' + x'' + x''')^2 + 2(-y' + y'' + y''')(-z' + z'' + z''')\cos.\widehat{yz}$$
$$+ (-y' + y'' + y''')^2 + 2(-z' + z'' + z''')(-x' + x'' + x''')\cos.\widehat{zx}$$
$$+ (-z' + z'' + z''')^2 + 2(-x' + x'' + x''')(-y' + y'' + y''')\cos.\widehat{xy}.$$

[37.] Pour avoir l'expression des faces du rhomboïde, on observera que l'angle $\widehat{ab}$, par exemple, a pour cosinus

$$\cos.\widehat{ab} = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab},$$

et en substituant aux quantités qui entrent au numérateur leurs valeurs en fonction des coordonnées

$$\cos.\widehat{ab} = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z'' + [y'z'' + z'y'']\cos.\widehat{yz} + [z'x'' + x'z'']\cos.\widehat{zx} + [x'y'' + y'x'']\cos.\widehat{xy}}{ab};$$

de cette valeur de $\cos.\widehat{ab}$, on tire $a^2 b^2 \sin.^2 \widehat{ab}$, ou bien

$$c_i^2 = \{x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos.\widehat{yz} + 2z'x'\cos.\widehat{zx} + 2x'y'\cos.\widehat{xy}\}$$
$$\times \{x''^2 + y''^2 + z''^2 + 2y''z''\cos.\widehat{yz} + 2z''x''\cos.\widehat{zx} + 2x''y''\cos.\widehat{xy}\}$$
$$-\{x'x'' + y'y'' + z'z'' + [y'z'' + z'y'']\cos.\widehat{yz} + [z'x'' + x'z'']\cos.\widehat{zx} + [x'y'' + y'x'']\cos.\widehat{xy}\}^2.$$

Cette quantité est susceptible d'une transformation à laquelle on va être conduit, si l'on nomme $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$ les différences partielles

$$\frac{d.a^2}{dx'}, \quad \frac{d.a^2}{dy'}, \quad \frac{d.a^2}{dz'},$$

et $2\alpha''$, $2\beta''$, $2\gamma''$ les différences partielles,

$$\frac{d.b^2}{dx''},\quad \frac{d.b^2}{dy''},\quad \frac{d.b^2}{dz''};$$

en vertu de la propriété des fonctions homogènes, on aura

$$a^2 = x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma',\quad b^2 = x''\alpha'' + y''\beta'' + z''\gamma'',$$

et d'ailleurs,

$$x'x''+y'y''+z'z''+[y'z''+z'y'']\cos.\widehat{yz}+[z'x''+x'z'']\cos.\widehat{zx}+[x'y''+y'x'']\cos.\widehat{xy}$$
$$= x'\alpha''+y'\beta''+z'\gamma'' = x''\alpha'+y''\beta'+z''\gamma'.$$

D'après tout cela,

$$c_i^2 = (x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma')(x''\alpha'' + y''\beta'' + z''\gamma'')$$
$$-(x''\alpha' + y''\beta' + z''\gamma')(x'\alpha'' + y'\beta'' + z'\gamma''),$$

quantité qui revient, selon la formule du n.° 4, à la suivante:

$$(y'z'' - z'y'')(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + (z'x'' - x'z'')(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')$$
$$+(x'y'' - y'x'')(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'');$$

mais,

$$\beta' = y' + z'\cos.\widehat{yz} + x'\cos.\widehat{xy},\quad \gamma' = z' + y'\cos.\widehat{yz} + x'\cos.\widehat{zx};$$
$$\beta'' = y'' + z''\cos.\widehat{yz} + x''\cos.\widehat{xy},\quad \gamma'' = z'' + y''\cos.\widehat{yz} + x''\cos.\widehat{zx};$$

donc,

$$\beta'\gamma''-\gamma'\beta'' = (x'\cos.\widehat{xy}+y'+z'\cos.\widehat{yz})(x''\cos.\widehat{zx}+y''\cos.\widehat{yz}+z'')$$
$$-(x'\cos.\widehat{zx}+y'\cos.\widehat{yz}+z')(x''\cos.\widehat{xy}+y''+z''\cos.\widehat{yz}).$$

Cette dernière quantité est précisément de la forme que nous avons donnée à la valeur de c_i^2; substituant donc dans celle-ci

$\cos.\widehat{xy}$, 1, $\cos.\widehat{yz}$ pour α', β', γ' et $\cos.\widehat{zx}$, $\cos.\widehat{yz}$, 1 pour α'', β'', γ'', on aura

$$\beta'\gamma''-\gamma'\beta''=(y'z''-z'y'')\,(1-\cos.^2\widehat{yz})+(z'x''-x'z'')\,(\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}-\cos.\widehat{xy})$$
$$+(x'y''-y'x'')\,(\cos.\widehat{xy}\cos.\widehat{yz}-\cos.\widehat{zx})\,;$$

et de la même manière, on aura encore

$$\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''=(y'z''-z'y'')\,(\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}-\cos.\widehat{xy})$$
$$+(z'x''-x'z'')\,(1-\cos.^2\widehat{zx})+(x'y''-y'x'')(\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}-\cos.\widehat{yz}),$$
$$\alpha'\beta''-\beta'\alpha''=(y'z''-z'y'')\,(\cos.\widehat{xy}\cos.\widehat{yz}-\cos.\widehat{zx})$$
$$+(z'x''-x'z'')\,(\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}-\cos.\widehat{yz})+(x'y''-y'x'')\,(1-\cos.^2\widehat{xy}).$$

Multipliant ces trois quantités respectivement par

$$y'z''-z'y'',\quad z'x''-x'z'',\quad x'y''-y'x'',$$

et les ajoutant, on trouvera, ayant égard aux formules de la trigonométrie,

$$c_,^2=(y'z''-z'y'')^2\sin.^2\widehat{yz}-2(z'x''-x'z'')\,(x'y''-y'x'')\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\cos.\widehat{y_,z_,}$$
$$+(z'x''-x'z'')^2\sin.^2\widehat{zx}-2(x'y''-y'x'')\,(y'z''-z'y'')\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\cos.\widehat{z_,x_,}$$
$$+(x'y''-y'x'')^2\sin.^2\widehat{xy}-2(y'z''-z'y'')\,(z'x''-x'z'')\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\cos.\widehat{x_,y_,}.$$

On a désigné ici, selon ce qu'on a fait plus haut, par $\widehat{y_,z_,}$, $\widehat{z_,x_,}$, $\widehat{x_,y_,}$ les angles que forment les plans des coordonnées.

Nous poserons

$$x_,'=(y'z''-z'y'')\sin.\widehat{yz},\quad y_,'=(z'x''-x'z'')\sin.\widehat{zx},\quad z_,'=(x'y''-y'x'')\sin.\widehat{xy}\,;$$

ces quantités sont les projections de la face $c_,$ du parallélipipède, sur les plans des coordonnées yz, zx, xy. Cette notation donnera donc à $c_,^2$ la forme

$$c_,^2 = x_,'^2 + y_,'^2 + z_,'^2 - 2y_,'z_,'\cos.\widehat{y_,z_,} - 2z_,'x_,'\cos.\widehat{z_,x_,} - 2z_,'y_,'\cos.\widehat{x_,y_,},$$

et en représentant semblablement par

$$x_,'',\quad y_,'',\quad z_,'';\quad x_,''',\quad y_,''',\quad z_,''';$$

les projections des faces $b_,$, $a_,$; c'est-à-dire,

$$(y'''z' - z'''y')\sin.\widehat{yz},\quad (z'''x' - x'''z')\sin.\widehat{zx},\quad (x'''y' - y'''x')\sin.\widehat{xy};$$
$$(y''z''' - z''y''')\sin.\widehat{yz},\quad (z''x''' - x''z''')\sin.\widehat{zx},\quad (x''y''' - y''x''')\sin.\widehat{xy};$$

on aura aussi

$$b_,^2 = x_,''^2 + y_,''^2 + z_,''^2 - 2y_,''z_,''\cos.\widehat{y_,z_,} - 2z_,''x_,''\cos.\widehat{z_,x_,} - 2x_,''y_,''\cos.\widehat{x_,y_,},$$
$$a_,^2 = x_,'''^2 + y_,'''^2 + z_,'''^2 - 2y_,'''z_,'''\cos.\widehat{y_,z_,} - 2z_,'''x_,'''\cos.\widehat{z_,x_,} - 2x_,'''y_,'''\cos.\widehat{x_,y_,}.$$

[38.] Pour trouver l'expression des rhombes diagonaux dièdres, on pourra remarquer que ${}_,d_,$, par exemple, est ce que devient la face $c_,$, dont les sommets sont en $AC'BD'$, lorsque les C' et B se changent en D et A'. Ce changement répondant à celui de

$$x'',\ y'',\ z''\quad \text{en}\quad x''+x''',\ y''+y''',\ z''+z''';$$

il s'ensuit qu'en conservant dans la valeur de $c_,^2$ les x', y', z', si on remplace ainsi les x'', y'', z'', cette valeur donnera celle de ${}_,d_,^2$. Mais le remplacement de

$$x'',\ y'',\ z''\quad \text{par}\quad x''+x''',\ y''+y''',\ z''+z''',$$

change

$$x_,',\ y_,',\ z_,'\quad \text{en}\quad x_,'-x_,'',\ y_,'-y_,'',\ z_,'-z_,'';$$

on aura donc

$${}_,d_,^2 = (x_,'-x_,'')^2 + (y_,'-y_,'')^2 + (z_,'-z_,'')^2 - 2(y_,'-y_,'')(z_,'-z_,'')\cos.\widehat{y_,z_,}$$
$$-2(z_,'-z_,'')(x_,'-x_,'')\cos.\widehat{z_,x_,} - 2(x_,'-x_,'')(y_,'-y_,'')\cos.\widehat{x_,y_,}.$$

Le rhombe diagonal dièdre $d_{,}$ ou $BCB'C'$ équivaut à un autre rhombe dont deux sommets seraient en AD', et les deux autres aux points où un plan parallèle à celui de $d_{,}$ rencontre les droites DC', AB'. Or, il est facile de voir que ce dernier rhombe se déduit du précédent par le changement des signes de x''', y''', z'''; c'est-à-dire, par le changement des signes de $x_{,}''$, $y_{,}''$, $z_{,}''$. Il en résulte donc

$$\begin{aligned}d_{,}^2 = {}&(x_{,}'+x_{,}'')^2+(y_{,}'+y_{,}'')^2+(z_{,}'+z_{,}'')^2-2(y_{,}'+y_{,}'')(z_{,}'+z_{,}'')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}\\ &-2(z_{,}'+z_{,}'')(x_{,}'+x_{,}'')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-2(x_{,}'+x_{,}'')(y_{,}'+y_{,}'')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}};\end{aligned}$$

et encore par des changemens d'accens,

$$\begin{aligned}{}_{,}e_{,}^2 = {}&(x_{,}'''-x_{,}')^2+(y_{,}'''-y_{,}')^2+(z_{,}'''-z_{,}')^2-2(y_{,}'''-y_{,}')(z_{,}'''-z_{,}')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}\\ &-2(z_{,}'''-z_{,}')(x_{,}'''-x_{,}')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-2(x_{,}'''-x_{,}')(y_{,}'''-y_{,}')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}},\\ e_{,}^2 = {}&(x_{,}'''+x_{,}')^2+(y_{,}'''+y_{,}')^2+(z_{,}'''+z_{,}')^2-2(y_{,}'''+y_{,}')(z_{,}'''+z_{,}')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}\\ &-2(z_{,}'''+z_{,}')(x_{,}'''+x_{,}')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-2(x_{,}'''+x_{,}')(y_{,}'''+y_{,}')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}};\\ {}_{,}f_{,}^2 = {}&(x_{,}''-x_{,}''')^2+(y_{,}''-y_{,}''')^2+(z_{,}''-z_{,}''')^2-2(y_{,}''-y_{,}''')(z_{,}''-z_{,}''')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}\\ &-2(z_{,}''-z_{,}''')(x_{,}''-x_{,}''')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-2(x_{,}''-x_{,}''')(y_{,}''-y_{,}''')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}},\\ f_{,}^2 = {}&(x_{,}''+x_{,}''')^2+(y_{,}''+y_{,}''')^2+(z_{,}''+z_{,}''')^2-2(y_{,}''+y_{,}''')(z_{,}''+z_{,}''')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}\\ &-2(z_{,}''+z_{,}''')(x_{,}''+x_{,}''')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-2(x_{,}''+x_{,}''')(y_{,}''+y_{,}''')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}.\end{aligned}$$

D'après ce que nous avons trouvé au n.° 26,

$$\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} = \frac{b_{,}^2+c_{,}^2-d_{,}^2}{2b_{,}c_{,}};$$

si, dans cette formule, on met au numérateur pour $b_{,}$, $c_{,}$, $d_{,}$ leurs valeurs données ci-dessus,

$$\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} =$$

$$-\frac{x_{,}'x_{,}''+y_{,}'y_{,}''+z_{,}'z_{,}''-[y_{,}'z_{,}''+z_{,}'y_{,}'']\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}-[z_{,}'x_{,}''+x_{,}'z_{,}'']\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-[x_{,}'y_{,}''+y_{,}'x_{,}'']\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}}{b_{,}c_{,}}.$$

[39.] On aura enfin les rhombes diagonaux $g_{,}$, $h_{,}$, $i_{,}$, $k_{,}$, en observant pour $g_{,}$, par exemple, qu'il est égal à un rhombe que l'on obtiendrait, en coupant les quatre faces, dont les diagonales sont

$$AD,\quad A'D',\quad BD,\quad B'D',$$

par un plan conduit au point A parallèlement à celui des points B', C', D'; mais ce nouveau plan rencontrerait les arêtes $D'C$, DC', en des points qui auraient pour coordonnées

$$x'-x''',\ y'-y''',\ z'-z''';\quad x''-x''',\ y''-y''',\ z''-z''':$$

substituant ces quantités à la place de x', y', z'; x'', y'', z'' dans la valeur de c', on la changera évidemment en celle de $g_{,}$; mais ces substitutions changent $x_{,}'$, $y_{,}'$, $z_{,}'$ en

$$x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''',\quad y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''',\quad z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''';$$

on aura donc

$$\begin{aligned} g_{,}^2 = {} & (x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''')^2 - 2(y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''')(z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} \\ & + (y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''')^2 - 2(z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''')(x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} \\ & + (z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''')^2 - 2(x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''')(y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}; \end{aligned}$$

et l'on trouvera pareillement, par des considérations qui reviennent, comme la précédente, à des transpositions de l'origine des coordonnées,

$$\begin{aligned} h_{,}^2 = {} & (-x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''')^2 - 2(-y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''')(-z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} \\ & + (-y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''')^2 - 2(-z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''')(-x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} \\ & + (-z_{,}'+z_{,}''+z_{,}''')^2 - 2(-x_{,}'+x_{,}''+x_{,}''')(-y_{,}'+y_{,}''+y_{,}''')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{,}^2 = {} & (x_{,}'-x_{,}''+x_{,}''')^2 - 2(y_{,}'-y_{,}''+y_{,}''')(z_{,}'-z_{,}''+z_{,}''')\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} \\ & + (y_{,}'-y_{,}''+y_{,}''')^2 - 2(z_{,}'-z_{,}''+z_{,}''')(x_{,}'-x_{,}''+x_{,}''')\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} \\ & + (z_{,}'-z_{,}''+z_{,}''')^2 - 2(x_{,}'-x_{,}''+x_{,}''')(y_{,}'-y_{,}''+y_{,}''')\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_{,}^{2} = {} & (x_{,}' + x_{,}'' - x_{,}''')^{2} - 2(y_{,}' + y_{,}'' - y_{,}''')(z_{,}' + z_{,}'' - z_{,}''') \cos.\widehat{y_{,}z_{,}} \\
& + (y_{,}' + y_{,}'' - y_{,}''')^{2} - 2(z_{,}' + z_{,}'' - z_{,}''')(x_{,}' + x_{,}'' - x_{,}''') \cos.\widehat{z_{,}x_{,}} \\
& + (z_{,}' + z_{,}'' - z_{,}''')^{2} - 2(x_{,}' + x_{,}'' - x_{,}''')(y_{,}' + y_{,}'' - y_{,}''') \cos.\widehat{x_{,}y_{,}}.
\end{aligned}
$$

[40.] Le carré du volume du parallélipipède a pour expression

$$p^{2} = a^{2} b^{2} c^{2} \{ 1 + 2 \cos.\widehat{bc} \cos.\widehat{ca} \cos.\widehat{ab} - \cos.^{2}\widehat{bc} - \cos.^{2}\widehat{ca} - \cos.^{2}\widehat{ab} \}.$$

Si, dans cette formule, on substitue à a, b, c, et aux cosinus des angles $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$, $\widehat{ab}$ leurs valeurs en fonction des coordonnées

$$x', y', z', \quad x'', y'', z'', \quad x''', y''', z''',$$

on aura

$$
\begin{aligned}
p^{2} = {} & (x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} + 2y'z' \cos.\widehat{yz} + 2z'x' \cos.\widehat{zx} + 2x'y' \cos.\widehat{xy}) \\
\times & (x''^{2} + y''^{2} + z''^{2} + 2y''z'' \cos.\widehat{yz} + 2z''x'' \cos.\widehat{zx} + 2x''y'' \cos.\widehat{xy}) \\
\times & (x'''^{2} + y'''^{2} + z'''^{2} + 2y'''z''' \cos.\widehat{yz} + 2z'''x''' \cos.\widehat{zx} + 2x'''y''' \cos.\widehat{xy}) \\
+ 2 & \left\{ \begin{array}{c} x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ + [y''z''' + z''y'''] \cos.\widehat{yz} + [z''x''' + x''z'''] \cos.\widehat{zx} + [x''y''' + y''x'''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\} \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} x'''x' + y'''y' + z'''z' \\ + [y'''z' + z'''y'] \cos.\widehat{yz} + [z'''x' + x'''z'] \cos.\widehat{zx} + [x'''y' + y'''x'] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\} \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ + [y'z'' + z'y''] \cos.\widehat{yz} + [z'x'' + x'z''] \cos.\widehat{zx} + [x'y'' + y'x''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\} \\
- & (x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} + 2y'z' \cos.\widehat{yz} + 2z'x' \cos.\widehat{zx} + 2x'y' \cos.\widehat{xy}) \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ + [y''z''' + z''y'''] \cos.\widehat{yz} + [z''x''' + x''z'''] \cos.\widehat{zx} + [x''y''' + y''x'''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\}^{2}
\end{aligned}
$$

$$- (x''^2 + y''^2 + z''^2 + 2y''z''\cos.\widehat{yz} + 2z''x''\cos.\widehat{zx} + 2x''y''\cos.\widehat{xy})$$

$$\times \left\{ \begin{array}{c} x'''x' + y'''y' + z'''z' \\ +[y'''z'+z'''y']\cos.\widehat{yz}+[z'''x'+x'''z']\cos.\widehat{zx}+[x'''y'+y'''x']\cos.\widehat{xy} \end{array} \right\}^2$$

$$- (x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 + 2y'''z'''\cos.\widehat{yz} + 2z'''x'''\cos.\widehat{zx} + 2x'''y'''\cos.\widehat{xy})$$

$$\times \left\{ \begin{array}{c} x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ +[y'z''+z'y'']\cos.\widehat{yz}+[z'x''+x'z'']\cos.\widehat{zx}+[x'y''+y'x'']\cos.\widehat{xy} \end{array} \right\}^2.$$

Cette expression, un peu compliquée, est susceptible d'une simplification de forme remarquable ; on y arrive par un moyen semblable à celui que nous avons employé au n.° 36, à l'aide des quantités

$$\alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''; \quad \alpha''', \beta''', \gamma''':$$

elle se changera en

$$\begin{aligned}
&(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma')(x''\alpha'' + y''\beta'' + z''\gamma'')(x'''\alpha''' + y'''\beta''' + z'''\gamma''') \\
&+ (x''\alpha' + y''\beta' + z''\gamma')(x'''\alpha'' + y'''\beta'' + z'''\gamma'')(x'\alpha''' + y'\beta''' + z'\gamma''') \\
&+ (x'''\alpha' + y'''\beta' + z'''\gamma')(x'\alpha'' + y'\beta'' + z'\gamma'')(x''\alpha''' + y''\beta''' + z''\gamma''') \\
&- (x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma')(x'''\alpha'' + y'''\beta'' + z'''\gamma'')(x''\alpha''' + y''\beta''' + z''\gamma''') \\
&- (x''\alpha' + y''\beta' + z''\gamma')(x'\alpha'' + y'\beta'' + z'\gamma'')(x'''\alpha''' + y'''\beta''' + z'''\gamma''') \\
&- (x'''\alpha' + y'''\beta' + z'''\gamma')(x''\alpha'' + y''\beta'' + z''\gamma'')(x'\alpha''' + y'\beta''' + z'\gamma''').
\end{aligned}$$

Mais il est facile de voir qu'en vertu de la formule du n.° 5, réduite à son premier terme, on peut substituer à cette quantité celle qui suit :

$$\begin{aligned}
&(x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''') \\
&\times (\alpha'\beta''\gamma''' + \beta'\gamma''\alpha''' + \gamma'\alpha''\beta''' - \alpha'\gamma''\beta''' - \beta'\alpha''\gamma''' - \gamma'\beta''\alpha''').
\end{aligned}$$

Ce dernier facteur devient lui-même, en remplaçant les lettres α', β', γ'; α'', &c. par leurs valeurs en x', y', &c.

$$\begin{aligned}
&(x' + y'\cos.\widehat{xy} + z'\cos.\widehat{zx})\,(x''\cos.\widehat{xy} + y'' + z''\cos.\widehat{yz})\,(x'''\cos.\widehat{zx} + y'''\cos.\widehat{yz} + z''') \\
&+(x'' + y''\cos.\widehat{xy} + z''\cos.\widehat{zx})\,(x'''\cos.\widehat{xy} + y'''\cos.\widehat{yz} + z''')\,(x'\cos.\widehat{zx} + y'\cos.\widehat{yz} + z') \\
&+(x''' + y'''\cos.\widehat{xy} + z'''\cos.\widehat{zx})\,(x'\cos.\widehat{xy} + y' + z'\cos.\widehat{yz})\,(x''\cos.\widehat{zx} + y''\cos.\widehat{yz} + z'') \\
&-(x' + y'\cos.\widehat{xy} + z'\cos.\widehat{zx})\,(x'''\cos.\widehat{xy} + y''' + z'''\cos.\widehat{yz})\,(x''\cos.\widehat{zx} + y''\cos.\widehat{yz} + z'') \\
&-(x'' + y''\cos.\widehat{xy} + z''\cos.\widehat{zx})\,(x'\cos.\widehat{xy} + y' + z'\cos.\widehat{yz})\,(x'''\cos.\widehat{zx} + y'''\cos.\widehat{yz} + z''') \\
&-(x''' + y'''\cos.\widehat{xy} + z'''\cos.\widehat{zx})\,(x''\cos.\widehat{xy} + y'' + z''\cos.\widehat{yz})\,(x'\cos.\widehat{zx} + y'\cos.\widehat{yz} + z').
\end{aligned}$$

Il est évident que cette quantité peut elle-même recevoir l'application de la transformation précédente ; il suffit pour cela de remplacer

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma';\quad \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'';\quad \alpha''',\ \beta''',\ \gamma''',$$

respectivement par

$$1,\ \cos.\widehat{xy},\ \cos.\widehat{zx};\ \cos.\widehat{xy},\ 1,\ \cos.\widehat{yz};\ \cos.\widehat{zx},\ \cos.\widehat{yz},\ 1;$$

ce qui fournit pour la valeur du second facteur en question

$$\begin{aligned}
&(x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''') \\
&\times(1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy}),
\end{aligned}$$

et en le multipliant par $(x'y''z''' + y'z''x''' + \&c.)$, on aura enfin

$$\begin{aligned}
p^2 = {} &(x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''')^2 \\
&\times(1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy}).
\end{aligned}$$

Sur cette expression, on peut remarquer qu'on n'opère aucun changement, lorsqu'on permute réciproquement y', z', z'' en x'', x''', y'''; on aura donc encore

$$
\begin{aligned}
p^2 = {} & (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + 2x''x''' \cos.\widehat{yz} + 2x'''x' \cos.\widehat{zx} + 2x'x'' \cos.\widehat{xy}) \\
\times {} & (y'^2 + y''^2 + y'''^2 + 2y''y''' \cos.\widehat{yz} + 2y'''y' \cos.\widehat{zx} + 2y'y'' \cos.\widehat{xy}) \\
\times {} & (z'^2 + z''^2 + z'''^2 + 2z''z''' \cos.\widehat{yz} + 2z'''z' \cos.\widehat{zx} + 2z'z'' \cos.\widehat{xy}) \\
+ 2 & \left\{ \begin{array}{c} y'z' + y''z'' + y'''z''' \\ + [y''z''' + z''y'''] \cos.\widehat{yz} + [y'''z' + z'''y'] \cos.\widehat{zx} + [y'z'' + z'y''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\} \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} z'x' + z''x'' + z'''x''' \\ + [z''x''' + x''z'''] \cos.\widehat{yz} + [z'''x' + x'''z'] \cos.\widehat{zx} + [z'x'' + x'z''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\} \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} x'y' + x''y'' + x'''y''' \\ + [x''y''' + y''x'''] \cos.\widehat{yz} + [x'''y' + y'''x'] \cos.\widehat{zx} + [x'y'' + y'x''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\} \\
- {} & (x'^2 + x''^2 + x'''^2 + 2x''x''' \cos.\widehat{yz} + 2x'''x' \cos.\widehat{zx} + 2x'x'' \cos.\widehat{xy}) \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} y'z' + y''z'' + y'''z''' \\ + [y''z''' + z''y'''] \cos.\widehat{yz} + [y'''z' + z'''y'] \cos.\widehat{zx} + [y'z'' + z'x''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\}^2 \\
- {} & (y'^2 + y''^2 + y'''^2 + 2y''y''' \cos.\widehat{yz} + 2y'''y' \cos.\widehat{zx} + 2y'y'' \cos.\widehat{xy}) \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} z'x' + z''x'' + z'''x''' \\ + [z''x''' + x''z'''] \cos.\widehat{yz} + [z'''x' + x'''z'] \cos.\widehat{zx} + [z'x'' + x'z''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\}^2 \\
- {} & (z'^2 + z''^2 + z'''^2 + 2z''z''' \cos.\widehat{yz} + 2z'''z' \cos.\widehat{zx} + 2z'z'' \cos.\widehat{xy}) \\
\times & \left\{ \begin{array}{c} x'y' + x''y'' + x'''y''' \\ + [x''y''' + y''x'''] \cos.\widehat{yz} + [x'''y' + y'''x'] \cos.\widehat{zx} + [x'y'' + y'x''] \cos.\widehat{xy} \end{array} \right\}^2.
\end{aligned}
$$

On peut conclure de ce résultat, qu'un nouveau parallélipipède déterminé, comme l'a été celui que nous venons de considérer, de manière que l'extrémité de sa première arête ait pour coordonnées x', x'', x''' dans le sens de l'axe des x, des y, des z; la deuxième, y', y'', y'''; la troisième, z', z'', z'''; ce nouveau parallélipipède, dis-je, aurait le même volume que l'ancien.

L'observation que nous venons de faire de la possibilité de permuter dans une résultante à trois lettres (x', y'', z'''),

$$y',\ z',\ z'',\quad \text{en}\quad x'',\ x''',\ y''',$$

et réciproquement, permet de présenter le produit de deux résultantes

$$(x', y'', z''')\,(\alpha', \beta'', \gamma''')$$

sous quatre formes différentes; le produit de trois résultantes sous huit formes, &c. Pareille chose a lieu pour les produits des résultantes à un nombre quelconque de lettres.

[41.] Concevons à l'origine trois nouvelles droites respectivement perpendiculaires aux plans des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, ou des anciennes coordonnées; nous allons employer ces lignes comme un nouveau système d'axes. Les angles qu'elles comprennent sont les supplémens à deux droits de ceux que nous avons désignés par $\widehat{y_{,}z_{,}}$, $\widehat{z_{,}x_{,}}$, $\widehat{x_{,}y_{,}}$, formés par les anciens plans coordonnés; et réciproquement, les angles compris par les plans de ces nouvelles droites, sont les supplémens à deux droits de ceux que comprennent les anciens axes, ou des angles désignés par $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$: ces anciens axes sont eux-mêmes respectivement perpendiculaires aux plans des nouveaux.

Soient pris trois points déterminés de position à l'égard des nouveaux axes par les coordonnées $x_{,}'$, $y_{,}'$, $z_{,}'$ pour le premier, et $x_{,}''$, $y_{,}''$, $z_{,}''$; $x_{,}'''$, $y_{,}'''$, $z_{,}'''$ pour les deux autres (n.° 37), et construisons un rhomboïde sur les droites qui joignent ces trois points à l'origine comme arêtes contiguës. Les carrés de ces arêtes seront

$$x_{,}'^2 + y_{,}'^2 + z_{,}'^2 - 2y_{,}'z_{,}'\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z_{,}'x_{,}'\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x_{,}'y_{,}'\cos.\widehat{x_{,}y_{,}};$$

$$x_{,}''^2 + y_{,}''^2 + z_{,}''^2 - 2y_{,}''z_{,}''\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z_{,}''x_{,}''\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x_{,}''y_{,}''\cos.\widehat{x_{,}y_{,}},$$

$$x_{,}'''^2 + y_{,}'''^2 + z_{,}'''^2 - 2y_{,}'''z_{,}'''\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z_{,}'''x_{,}'''\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x_{,}'''y_{,}'''\cos.\widehat{x_{,}y_{,}};$$

on

on conserve dans ces valeurs les symboles $\widehat{y_{,}z_{,}}$, $\widehat{z_{,}x_{,}}$, $\widehat{x_{,}y_{,}}$, pour les angles d'inclinaison des anciens plans coordonnés. Ces valeurs sont celles que nous avons trouvées au n.° 37 pour $c_{,}^{2}$, $b_{,}^{2}$, $a_{,}^{2}$; ainsi les arêtes de ce rhomboïde seront équivalentes aux faces de l'ancien.

L'angle compris par les arêtes $b_{,}$, $c_{,}$ du nouveau rhomboïde aura pour son cosinus,

$$\cos.\widehat{b_{,}c_{,}} = \frac{x_{,}'x_{,}''+y_{,}'y_{,}''+z_{,}'z''-[y_{,}'z_{,}''+z_{,}'y_{,}'']\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}-[z_{,}'x_{,}''+x_{,}'z_{,}'']\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-[x_{,}'y_{,}''+y_{,}'x_{,}'']\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}}{b_{,}c_{,}}$$

quantité de signe contraire à celle que nous avons eue au n.° 37 pour l'inclinaison des faces $b_{,}$, $c_{,}$ de l'ancien parallélipipède. On voit ainsi que le nouveau rhomboïde est celui que nous avons appelé supplémentaire de l'ancien.

Les six diagonales des faces de ce rhomboïde, et ses quatre diagonales des sommets opposés, auront donc pour expression les valeurs données aux n.os 38 et 39 pour les quantités

$$d_{,},\ {}_{,}d_{,},\ e_{,},\ {}_{,}e_{,},\ f_{,},\ {}_{,}f_{,};\ g_{,},\ h_{,},\ i_{,},\ k_{,};$$

ce qui résulte d'ailleurs de la recherche directe de ces valeurs, en partant des coordonnées des sommets de ce parallélipipède, et cela peut être regardé comme la raison de l'analogie remarquable des valeurs des arêtes en fonction des x, y, z, et des faces en fonction des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$.

Les plans des nouveaux axes forment des angles qui sont les supplémens à deux droits de ceux compris par les anciens axes : leurs sinus et cosinus seront donc

$$\sin.\widehat{yz},\ \sin.\widehat{zx},\ \sin.\widehat{xy};\ -\cos.\widehat{yz},\ -\cos.\widehat{zx},\ -\cos.\widehat{xy}.$$

Représentant par

$$x_{''}',\ y_{''}',\ z_{''}';\ \ x_{''}'',\ y_{''}'',\ z_{''}'';\ \ x_{''}''',\ y_{''}''',\ z_{''}''';$$

les projections des trois faces de ce parallélipipède sur les trois nouveaux plans coordonnés ; c'est-à-dire,

$$(y_{\prime}'z_{\prime}''-z_{\prime}'y_{\prime}'')\sin.\widehat{y_{\prime}z_{\prime}},\quad (z_{\prime}'x_{\prime}''-x_{\prime}'z_{\prime}'')\sin.\widehat{z_{\prime}x_{\prime}},\quad (x_{\prime}'y_{\prime}''-y_{\prime}'x_{\prime}'')\sin.\widehat{x_{\prime}y_{\prime}};$$
$$(y_{\prime}'''z_{\prime}'-z_{\prime}'''y_{\prime}')\sin.\widehat{y_{\prime}z_{\prime}},\quad (z_{\prime}'''x_{\prime}'-x_{\prime}'''z_{\prime}')\sin.\widehat{z_{\prime}x_{\prime}},\quad (x_{\prime}'''y_{\prime}'-y_{\prime}'''x_{\prime}')\sin.\widehat{x_{\prime}y_{\prime}};$$
$$(y_{\prime}''z_{\prime}'''-z_{\prime}''y_{\prime}''')\sin.\widehat{y_{\prime}z_{\prime}},\quad (z_{\prime}''x_{\prime}'''-x_{\prime}''z_{\prime}''')\sin.\widehat{z_{\prime}x_{\prime}},\quad (x_{\prime}''y'''-y_{\prime}''x_{\prime}''')\sin.\widehat{x_{\prime}y_{\prime}};$$

les carrés des faces du rhomboïde supplémentaire seront .

$$a_{\prime\prime}^2 = x_{\prime\prime}'^2 + y_{\prime\prime}'^2 + z_{\prime\prime}'^2 + 2y_{\prime\prime}'z_{\prime\prime}'\cos.\widehat{yz} + 2z_{\prime\prime}'x_{\prime\prime}'\cos.\widehat{zx} + 2x_{\prime\prime}'y_{\prime\prime}'\cos.\widehat{xy},$$
$$b_{\prime\prime}^2 = x_{\prime\prime}''^2 + y_{\prime\prime}''^2 + z_{\prime\prime}''^2 + 2y_{\prime\prime}''z_{\prime\prime}''\cos.\widehat{yz} + 2z_{\prime\prime}''x_{\prime\prime}''\cos.\widehat{zx} + 2x_{\prime\prime}''y_{\prime\prime}''\cos.\widehat{xy},$$
$$c_{\prime\prime}^2 = x_{\prime\prime}'''^2 + y_{\prime\prime}'''^2 + z_{\prime\prime}'''^2 + 2y_{\prime\prime}'''z_{\prime\prime}'''\cos.\widehat{yz} + 2z_{\prime\prime}'''x_{\prime\prime}'''\cos.\widehat{zx} + 2x_{\prime\prime}'''y_{\prime\prime}'''\cos.\widehat{xy}.$$

Mais, d'après les propriétés trouvées au n.° 15, on déduit facilement

$$x_{\prime\prime}'^2 = p^2 x'^2,\quad y_{\prime\prime}'^2 = p^2 y'^2,\quad z_{\prime\prime}'^2 = p^2 z'^2,$$
$$y_{\prime\prime}'z_{\prime\prime}' = p^2 y'z',\quad z_{\prime\prime}'x_{\prime\prime}' = p^2 z'x',\quad x_{\prime\prime}'y_{\prime\prime}' = p^2 x'y';$$

et de même pour $x_{\prime\prime}''$, $y_{\prime\prime}''$, $z_{\prime\prime}''$; $x_{\prime\prime}'''$, $y_{\prime\prime}'''$, $z_{\prime\prime}'''$; on aura donc

$$a_{\prime\prime}^2 = p^2(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos.\widehat{yz} + 2z'x'\cos.\widehat{zx} + 2x'y'\cos.\widehat{xy}),$$
$$b_{\prime\prime}^2 = p^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 + 2y''z''\cos.\widehat{yz} + 2z''x''\cos.\widehat{zx} + 2x''y''\cos.\widehat{xy}),$$
$$c_{\prime\prime}^2 = p^2(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 + 2y'''z'''\cos.\widehat{yz} + 2z'''x'''\cos.\widehat{zx} + 2x'''y'''\cos.\widehat{xy}),$$

ce qui ne fait que présenter de nouveau les propriétés des faces du rhomboïde supplémentaire, lorsqu'on les compare aux arêtes du rhomboïde primitif. On voit comment on arriverait aux relations semblables qui existent entre les rhombes diagonaux du supplémentaire et les diagonales du parallélipipède proposé.

Enfin le carré du volume du rhomboïde supplémentaire aura encore pour expression

$$
\begin{aligned}
&\left(x'^{2}_{,} + y'^{2}_{,} + z'^{2}_{,} - 2y'_{,}z'_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z'_{,}x'_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x'_{,}y'_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}\right)\\
\times &\left(x''^{2}_{,} + y''^{2}_{,} + z''^{2}_{,} - 2y''_{,}z''_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z''_{,}x''_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x''_{,}y''_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}\right)\\
\times &\left(x'''^{2}_{,} + y'''^{2}_{,} + z'''^{2}_{,} - 2y'''_{,}z'''_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z'''_{,}x'''_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x'''_{,}y'''_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}\right)\\
+2 &\left\{\begin{array}{c} x''_{,}x'''_{,} + y''_{,}y'''_{,} + z''_{,}z'''_{,} \\ -[y''_{,}z'''_{,}+z''_{,}y'''_{,}]\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - [z''_{,}x'''_{,}+x''_{,}z'''_{,}]\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - [x''_{,}y'''_{,}+y''_{,}x'''_{,}]\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} \end{array}\right\}\\
\times &\left\{\begin{array}{c} x'''_{,}x'_{,} + y'''_{,}y'_{,} + z'''_{,}z'_{,} \\ -[y'''_{,}z'_{,}+z'''_{,}y'_{,}]\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - [z'''_{,}x'_{,}+x'''_{,}z'_{,}]\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - [x'''_{,}y'_{,}+y'''_{,}x'_{,}]\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} \end{array}\right\}\\
\times &\left\{\begin{array}{c} x'_{,}x''_{,} + y'_{,}y''_{,} + z'_{,}z''_{,} \\ -[y'_{,}z''_{,}+z'_{,}y''_{,}]\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - [z'_{,}x''_{,}+x'_{,}z''_{,}]\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - [x'_{,}y''_{,}+y'_{,}x''_{,}]\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} \end{array}\right\}\\
- &\left(x'^{2}_{,} + y'^{2}_{,} + z'^{2}_{,} - 2y'_{,}z'_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z'_{,}x'_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x'_{,}y'_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}\right)\\
\times &\left\{\begin{array}{c} x''_{,}x'''_{,} + y''_{,}y'''_{,} + z''_{,}z'''_{,} \\ -[y''_{,}z'''_{,}+z''_{,}y'''_{,}]\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - [z''_{,}x'''_{,}+x''_{,}z'''_{,}]\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - [x''_{,}y'''_{,}+y''_{,}x'''_{,}]\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} \end{array}\right\}^{2}\\
- &\left(x''^{2}_{,} + y''^{2}_{,} + z''^{2}_{,} - 2y''_{,}z''_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z''_{,}x''_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x''_{,}y''_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}\right)\\
\times &\left\{\begin{array}{c} x'''_{,}x'_{,} + y'''_{,}y'_{,} + z'''_{,}z'_{,} \\ -[y'''_{,}z'_{,}+z'''_{,}y'_{,}]\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - [z'''_{,}x'_{,}+x'''_{,}z'_{,}]\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - [x'''_{,}y'_{,}+y'''_{,}x'_{,}]\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} \end{array}\right\}^{2}\\
- &\left(x'''^{2}_{,} + y'''^{2}_{,} + z'''^{2}_{,} - 2y'''_{,}z'''_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - 2z'''_{,}x'''_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - 2x'''_{,}y'''_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}}\right)\\
\times &\left\{\begin{array}{c} x'_{,}x''_{,} + y'_{,}y''_{,} + z'_{,}z''_{,} \\ -[y'_{,}z''_{,}+z'_{,}y''_{,}]\cos.\widehat{y_{,}z_{,}} - [z'_{,}x''_{,}+x'_{,}z''_{,}]\cos.\widehat{z_{,}x_{,}} - [x'_{,}y''_{,}+y'_{,}x''_{,}]\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} \end{array}\right\}^{2}.
\end{aligned}
$$

Cette quantité peut être changée en la suivante :

$$
\begin{aligned}
&\left(x'_{,}y''_{,}z'''_{,} + y'_{,}z''_{,}x'''_{,} + z'_{,}x''_{,}y'''_{,} - x'_{,}z''_{,}y'''_{,} - y'_{,}x''_{,}z'''_{,} - z'_{,}y''_{,}x'''_{,}\right)^{2}\\
\times &\left(1 - 2\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}} - \cos.^{2}\widehat{y_{,}z_{,}} - \cos.^{2}\widehat{z_{,}x_{,}} - \cos.^{2}\widehat{x_{,}y_{,}}\right)
\end{aligned}
$$

et en vertu des propriétés des résultantes à trois lettres, ou de celles des rhomboïdes supplémentaires, elle peut être transformée en

$$(x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''')^4$$
$$\times (1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy})^2.$$

On retrouverait ainsi facilement toutes les propriétés des rhomboïdes supplémentaires dérivés d'ordres successifs ; mais elles sont comprises dans des considérations plus générales qui vont suivre, ce qui dispense de les écrire ici.

[42.] Trois points B', C', D', joints à une origine A par trois droites, ont donné un seul rhomboïde, dont nous avons considéré les élémens, leurs relations et leurs expressions. Actuellement, prenons un nombre quelconque n de points m', m'', m''', &c. déterminés de position par des coordonnées x', y', z' ; x'', y'', z'' ; x''', y''', z''' ; &c. rapportées à des axes comprenant les angles $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$; en chacun de ces différens points, on pourra, si l'on veut, imaginer des masses représentées par les mêmes lettres m', m'', m''', &c. Ayant joint à un point quelconque pris pour origine des coordonnées, ces masses par des droites, concevons que l'on construise tous les parallélipipèdes formés sur ces droites employées trois à trois comme arêtes contiguës ; ils seront en nombre

$$n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3};$$

leurs faces en nombre $n \cdot \frac{n-1}{2}$ et leurs arêtes en nombre n, en ne comptant toutefois que les faces et arêtes distinctes et passant par l'origine ; ces faces ou arêtes étant communes à plusieurs rhomboïdes.

Chacun des carrés de ces n arêtes, étant multiplié par la masse où elle aboutit, je représente par φ la somme de tous ces produits ; on aura

$$\varphi = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2$$
$$+ 2\cos.\widehat{yz}\,\Sigma m y z + 2\cos.\widehat{zx}\,\Sigma m z x + 2\cos.\widehat{xy}\,\Sigma m x y;$$

Pour abréger, remplaçons les six sommes,

$$\Sigma m x^2,\ \Sigma m y^2,\ \Sigma m z^2,\ \Sigma m y z,\ \Sigma m z x,\ \Sigma m x y,$$

par les lettres A, B, C, D, E, F; alors

$$\varphi = A + B + C + 2D\cos.\widehat{yz} + 2E\cos.\widehat{zx} + 2F\cos.\widehat{xy}.$$

[43.] Nommons ψ la somme des produits deux à deux de toutes les molécules m', m'', &c., chacun multiplié par le carré de l'aire du parallélogramme construit sur les deux lignes qui joignent ces molécules à l'origine; on aura

$$\psi = \Sigma m m' x_,^2 + \Sigma m m' y_,^2 + \Sigma m m' z_,^2$$
$$- 2\cos.\widehat{y_, z_,}\,\Sigma m m' y_, z_, - 2\cos.\widehat{z_, x_,}\,\Sigma m m' z_, x_, - 2\cos.\widehat{x_, y_,}\,\Sigma m m' x_, y_,,$$

formule dans laquelle les quantités $x_,, y_,, z_,$, sont, comme au n.° 37, les projections sur les plans des coordonnées, des faces des rhomboïdes dont nous venons de parler; c'est-à-dire, les quantités désignées au n.° 8 par les mêmes lettres $x_,, y_,, z_,$, mais respectivement multipliées par sin. $\widehat{yz}$, sin. $\widehat{zx}$, sin. $\widehat{xy}$. Remplaçant encore les six intégrales précédentes par les lettres $A_,, B_,, C_,, D_,, E_,, F_,$, il vient

$$\psi = A_, + B_, + C_, - 2D_,\cos.\widehat{y_, z_,} - 2E_,\cos.\widehat{z_, x_,} - 2F_,\cos.\widehat{x_, y_,};$$

et il existera entre ces dernières quantités et les A, B, C, D, E, F des relations qu'il est facile de trouver. Pour cela, on mettra dans les formules du n.° 12 $x'\sqrt{(m')}$, $y'\sqrt{(m')}$, $z'\sqrt{(m')}$, au lieu de x', y', z'; $x''\sqrt{(m'')}$, $y''\sqrt{(m'')}$, $z''\sqrt{(m'')}$, au lieu de x'', y'', z'', &c., et ayant égard à ce que nous venons de dire, que chaque $x_,$ du n.° 12 doit être remplacé par $x_{,}$ sin. $\widehat{yz}$, chaque $y_{,}$ par $y_{,}$ sin. $\widehat{zx}$, chaque $z_{,}$ par $z_{,}$ sin. $\widehat{xy}$; on parvient à

$$\begin{aligned} A_{,} &= (BC - D^2)\sin.^2\widehat{yz}, & D_{,} &= (EF - AD)\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}, \\ B_{,} &= (CA - E^2)\sin.^2\widehat{zx}, & E_{,} &= (FD - BE)\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}, \\ C_{,} &= (AB - F^2)\sin.^2\widehat{xy}, & F_{,} &= (DE - CF)\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}. \end{aligned}$$

On pourra assimiler à des résultantes à deux lettres les facteurs dont ces quantités sont composées, et ainsi les avoir sous d'autres formes. Par exemple, $A_{,}$ peut être considéré comme le produit de

$$B \times C - D \times D \text{ par } 1 \times 1 - \cos.\widehat{yz} \times \cos.\widehat{yz};$$

et en vertu du théorème du n.° 4, on aura

$$A_{,} = (B + D\cos.\widehat{yz})(C + D\cos.\widehat{yz}) - (B\cos.\widehat{yz} + D)(C\cos.\widehat{yz} + D).$$

[44.] En multipliant chacun des produits trois à trois des molécules m', m'', &c. du système par le carré du volume du rhomboïde construit sur les droites qui joignent ces trois molécules à l'origine; on aura pour la somme ω de tous ces produits,

$$\omega = \Sigma mm'm'' \left\{ \begin{array}{c} xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' \\ - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'' \end{array} \right\}^2 \times \left\{ \begin{array}{c} 1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} \\ - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy} \end{array} \right\};$$

et le premier facteur de cette valeur, $\Sigma mm'm''(x, y', z'')^2$, peut être transformé par la dernière formule de l'article 12, et exprimé en fonction de A, B, C, &c.; il faut, pour cela, remplacer dans cette formule, comme ci-dessus,

$$x',\ y',\ z' \quad \text{par} \quad x'\sqrt{(m')},\ y'\sqrt{(m')},\ z'\sqrt{(m')};$$
$$x'',\ y'',\ z'' \quad \text{par} \quad x''\sqrt{(m'')},\ y''\sqrt{(m'')},\ z''\sqrt{(m'')};\ \&c.,$$

on trouvera ainsi

$$\omega = (ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2)\left\{\begin{array}{l} 1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} \\ -\cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy} \end{array}\right\}.$$

Il est même facile de voir que cette expression peut encore être mise sous ces autres formes :

$$\omega = BB_{,}\sin.^2\widehat{yy_{,}} + CC_{,}\sin.^2\widehat{zz_{,}} - AA_{,}\sin.^2\widehat{xx_{,}} + 2DD_{,}\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}},$$

$$\omega = CC_{,}\sin.^2\widehat{zz_{,}} + AA_{,}\sin.^2\widehat{xx_{,}} - BB_{,}\sin.^2\widehat{yy_{,}} + 2EE_{,}\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\sin.^2\widehat{z_{,}x_{,}},$$

$$\omega = AA_{,}\sin.^2\widehat{xx_{,}} + BB_{,}\sin.^2\widehat{yy_{,}} - CC_{,}\sin.^2\widehat{zz_{,}} + 2FF_{,}\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\sin.^2\widehat{x_{,}y_{,}}.$$

Ajoutons ces trois équations, nous en tirerons la suivante :

$$\begin{aligned} 3\omega = {} & AA_{,}\sin.^2\widehat{xx_{,}} + 2DD_{,}\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}} \\ & + BB_{,}\sin.^2\widehat{yy_{,}} + 2EE_{,}\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\sin.^2\widehat{z_{,}x_{,}} \\ & + CC_{,}\sin.^2\widehat{zz_{,}} + 2FF_{,}\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\sin.^2\widehat{x_{,}y_{,}}; \end{aligned}$$

en les ajoutant deux à deux, on aura

$$\omega = AA_{,}\sin.^2\widehat{xx_{,}} + EE_{,}\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\sin.^2\widehat{z_{,}x_{,}} + FF_{,}\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\sin.^2\widehat{x_{,}y_{,}};$$

$$\omega = BB_{,}\sin.^2\widehat{yy_{,}} + FF_{,}\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\sin.^2\widehat{x_{,}y_{,}} + DD_{,}\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}},$$

$$\omega = CC_{,}\sin.^2\widehat{zz_{,}} + DD_{,}\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}} + EE_{,}\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\sin.^2\widehat{z_{,}x_{,}};$$

expressions assez remarquables par le rapport de leurs formes à celles des formules de l'article 12 : elles en résultent même très-simplement. Par exemple, on déduit immédiatement de l'une de celles-ci,

$$\begin{aligned} 3\Sigma mm'm''(x,y',z'')^2 = {} & A\frac{A_{,}}{\sin.^2\widehat{yz}} + B\frac{B_{,}}{\sin.^2\widehat{zx}} + C\frac{C_{,}}{\sin.^2\widehat{xy}} \\ & + 2D\frac{D_{,}}{\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}} + 2E\frac{E_{,}}{\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}} + 2F\frac{F_{,}}{\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}}; \end{aligned}$$

en multipliant par

$$1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy},$$

et ayant égard aux formules de la trigonométrie, on arrive à l'une des équations ci-dessus.

Chacun des deux facteurs de la première forme que nous avons donnée à ω, pouvant être regardé comme une résultante à trois lettres ; en vertu du n.° 5, cette quantité est encore susceptible de l'expression

$$\begin{aligned}
&(A+E\cos.\widehat{zx}+F\cos.\widehat{xy})(B+F\cos.\widehat{xy}+D\cos.\widehat{yz})(C+D\cos.\widehat{yz}+E\cos.\widehat{zx})\\
+&(A\cos.\widehat{zx}+E+F\cos.\widehat{yz})(B\cos.\widehat{xy}+F+D\cos.\widehat{zx})(C\cos.\widehat{yz}+D+E\cos.\widehat{xy})\\
+&(A\cos.\widehat{xy}+E\cos.\widehat{yz}+F)(B\cos.\widehat{yz}+F\cos.\widehat{zx}+D)(C\cos.\widehat{zx}+D\cos.\widehat{xy}+E)\\
-&(A\cos.\widehat{xy}+E\cos.\widehat{yz}+F)(B\cos.\widehat{xy}+F+D\cos.\widehat{zx})(C+D\cos.\widehat{yz}+E\cos.\widehat{zx})\\
-&(A+E\cos.\widehat{zx}+F\cos.\widehat{xy})(B\cos.\widehat{yz}+F\cos.\widehat{zx}+D)(C\cos.\widehat{yz}+D+E\cos.\widehat{xy})\\
-&(A\cos.\widehat{zx}+E+F\cos.\widehat{yz})(B+F\cos.\widehat{xy}+D\cos.\widehat{yz})(C\cos.\widehat{zx}+D\cos.\widehat{xy}+E),
\end{aligned}$$

et aussi de celle qui résulterait de cette dernière, en y changeant A, F respectivement en C, D et réciproquement : ce changement revient à celui de $\cos.\widehat{xy}$ en $\cos.\widehat{yz}$. On aurait encore une autre expression de la même quantité par le changement réciproque de $\cos.\widehat{xy}$ en $\cos.\widehat{zx}$.

[45.] Concevons maintenant un système dérivé du précédent comme il suit : Les axes des coordonnées comprenant entre eux des angles supplémens à deux droits de ceux formés par les plans des anciennes coordonnées, ou de $\widehat{y_,z_,}$, $\widehat{z_,x_,}$, $\widehat{x_,y_,}$, le premier point de ce système aura pour coordonnées ce que nous avons désigné par $x_,'$, $y_,'$, $z_,'$ au n.° 43 ; c'est-à-dire,

$$(y'z''-z'y'')\sin.\widehat{yz},\quad (z'x''-x'z'')\sin.\widehat{zx},\quad (x'y''-y'z'')\sin.\widehat{xy},$$

et

et la masse que nous y supposerons placée sera $m'm''$; les coordonnées du deuxième point seront $x_{,}''$, $y_{,}''$, $z_{,}''$, ou bien

$$(y'z'''-z'y''')\sin.\widehat{yz},\ (z'x'''-x'z''')\sin.\widehat{zx},\ (x'y'''-y'z''')\sin.\widehat{xy},$$

et sa masse $m'm'''$, &c., &c. Nous représenterons par les mêmes lettres portant un accent en bas, les quantités relatives au nouveau système, formées avec ses coordonnées, comme le sont les quantités de l'ancien avec les siennes. On aura ainsi pour ce système, des quantités

$$A_{,},\quad B_{,},\quad C_{,},\quad D_{,},\quad E_{,},\quad F_{,},$$

qui remplaceront les A, B, C, D, E, F de l'ancien ; mais il est évident qu'elles sont les mêmes que les $A_{,}$, $B_{,}$, &c. du n.° 43.

En conservant les $\widehat{y_{,}z_{,}}$, $\widehat{z_{,}x_{,}}$, $\widehat{x_{,}y_{,}}$ pour les angles des plans des coordonnées de l'ancien système, la quantité $\varphi_{,}$ du nouveau,

$$\varphi_{,}=A_{,}+B_{,}+C_{,}-2D_{,}\cos.\widehat{y_{,}z_{,}}-2E_{,}\cos.\widehat{z_{,}x_{,}}-2F_{,}\cos.\widehat{x_{,}y_{,}},$$

et par conséquent, $\varphi_{,}=\psi$.

Si l'on observe que les angles des plans des nouveaux axes coordonnés sont les supplémens à deux droits de ceux compris par les anciens axes, on aura

$$\psi_{,}=A_{,,}+B_{,,}+C_{,,}+2D_{,,}\cos.\widehat{yz}+2E_{,,}\cos.\widehat{zx}+2F_{,,}\cos.\widehat{xy};$$

mais

$$A_{,,}=(B_{,}C_{,}-D_{,}^{2})\sin.^{2}\widehat{y_{,}z_{,}},\qquad D_{,,}=(E_{,}F_{,}-A_{,}D_{,})\sin.\widehat{z_{,}x_{,}}\sin.\widehat{x_{,}y_{,}},$$
$$B_{,,}=(C_{,}A_{,}-E_{,}^{2})\sin.^{2}\widehat{z_{,}x_{,}},\qquad E_{,,}=(F_{,}D_{,}-B_{,}E_{,})\sin.\widehat{x_{,}y_{,}}\sin.\widehat{y_{,}z_{,}},$$
$$C_{,,}=(A_{,}B_{,}-F_{,}^{2})\sin.^{2}\widehat{x_{,}y_{,}},\qquad F_{,,}=(D_{,}E_{,}-C_{,}F_{,})\sin.\widehat{y_{,}z_{,}}\sin.\widehat{z_{,}x_{,}};$$

substituant dans ces équations à la place de $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, &c. leurs valeurs données au n.° 43, et observant que, d'après les formules connues ;

$$\sin.^2\widehat{zx}\,\sin.^2\widehat{xy}\,\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}} = \sin.^2\widehat{yz}\,\sin.\widehat{zx}\,\sin.\widehat{xy}\,\sin.\widehat{z_{,}x_{,}}\,\sin.\widehat{z_{,}y_{,}} = \&c.$$

$$= 1 + 2\cos.\widehat{yz}\,\cos.\widehat{zx}\,\cos.\widehat{xy} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy},$$

et ayant égard aux formules du n.° 15, on aura

$$A_{,,} = A\omega,\quad B_{,,} = B\omega,\quad C_{,,} = C\omega,$$
$$D_{,,} = D\omega,\quad E_{,,} = E\omega,\quad F_{,,} = F\omega;$$

de là résulte

$$\psi_{,} = (A + B + C + 2D\cos.\widehat{yz} + 2E\cos.\widehat{zx} + 2F\cos.\widehat{xy})\,\omega,$$

ou bien $\psi_{,} = \phi.\omega$.

On aura encore, en remarquant que les angles formés par les nouveaux axes et leurs plans opposés, sont les supplémens de ceux des anciens,

$$\begin{aligned} 3\omega_{,} = {} & A_{,}A_{,,}\sin.^2\widehat{xx_{,}} + 2D_{,}D_{,,}\sin.\widehat{z_{,}x_{,}}\,\sin.\widehat{x_{,}y_{,}}\,\sin.^2\widehat{yz} \\ & + B_{,}B_{,,}\sin.^2\widehat{yy_{,}} + 2E_{,}E_{,,}\sin.\widehat{x_{,}y_{,}}\,\sin.\widehat{y_{,}z_{,}}\,\sin.^2\widehat{zx} \\ & + C_{,}C_{,,}\sin.^2\widehat{zz_{,}} + 2F_{,}F_{,,}\sin.\widehat{y_{,}z_{,}}\,\sin.\widehat{z_{,}x_{,}}\,\sin.^2\widehat{xy}: \end{aligned}$$

or,

$$\sin.\widehat{z_{,}x_{,}}\,\sin.\widehat{x_{,}y_{,}}\,\sin.^2\widehat{yz} = \sin.\widehat{zx}\,\sin.\widehat{xy}\,\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}}$$

et ainsi des deux autres. Mettant donc ces valeurs dans l'expression précédente, et aussi celles de $A_{,,}$, $B_{,,}$, &c.

$$3\omega_{,} = \omega\left\{\begin{aligned} & A_{,}A\sin.^2\widehat{xx_{,}} + 2D_{,}D\sin.\widehat{zx}\,\sin.\widehat{xy}\,\sin.^2\widehat{y_{,}z_{,}} \\ & + B_{,}B\sin.^2\widehat{yy_{,}} + 2E_{,}E\sin.\widehat{xy}\,\sin.\widehat{yz}\,\sin.^2\widehat{z_{,}x_{,}} \\ & + C_{,}C\sin.^2\widehat{zz_{,}} + 2F_{,}F\sin.\widehat{yz}\,\sin.\widehat{zx}\,\sin.^2\widehat{x_{,}y_{,}} \end{aligned}\right\},$$

ou bien $\omega_{,} = \omega^2$.

Si l'on considérait un nouveau système qui fût, à l'égard du précédent, ce qu'est celui-ci au système primitif, on aurait encore pour ses quantités

$$A_{\prime\prime\prime},\ B_{\prime\prime\prime},\ C_{\prime\prime\prime},\ \&c.;\qquad \phi_{\prime\prime},\ \psi_{\prime\prime},\ \omega_{\prime\prime};$$

$$A_{\prime\prime\prime} = A_{\prime}\omega_{\prime} = A_{\prime}\omega^2,\qquad B_{\prime\prime\prime} = B_{\prime}\omega^2,\ \&c.;$$

$$\phi_{\prime\prime} = \psi_{\prime} = \phi\omega,\quad \psi_{\prime\prime} = \phi_{\prime}\omega_{\prime} = \psi\omega^2,\quad \omega_{\prime\prime} = \omega_{\prime}^2 = \omega^4;$$

pour un quatrième système dérivé

$$\phi_{\prime\prime\prime} = \psi_{\prime\prime} = \psi\omega^2,\quad \psi_{\prime\prime\prime} = \phi_{\prime\prime}\omega_{\prime\prime} = \phi\omega,\quad \omega_{\prime\prime\prime} = \omega_{\prime\prime}^2 = \omega^8;$$

et ainsi de suite pour les systèmes d'ordres ultérieurs. On voit comment la loi de ces quantités est donnée par celle des élémens des rhomboïdes dérivés du n.° 33.

[46.] Tout ce que nous venons de dire a lieu par rapport à l'origine des coordonnées choisie d'abord. Pour calculer les quantités ϕ, ψ, ω, relatives à une origine dont α, β, γ seraient les coordonnées, il faudra remplacer les A, B, C, D, E, F dont elles sont composées, respectivement par

$$\begin{array}{ll} A - 2\alpha\xi M + \alpha^2 M, & D - (\beta\zeta + \gamma\upsilon)M + \beta\gamma M, \\ B - 2\beta\upsilon M + \beta^2 M, & E - (\gamma\xi + \alpha\zeta)M + \gamma\alpha M, \\ C - 2\gamma\zeta M + \gamma^2 M, & F - (\alpha\upsilon + \beta\xi)M + \alpha\beta M, \end{array}$$

ξ, υ, ζ étant les coordonnées du centre d'inertie du corps, et M la somme $m' + m'' + m''' +$ &c. de toutes les masses du système.

Ainsi la somme des carrés des distances des molécules au point α, β, γ, chacun de ces carrés étant multiplié par la molécule correspondante, sera

$$A - 2\alpha\xi M + \alpha^2 M + B - \&c. + 2[D - (\beta\zeta + \gamma\upsilon)M + \beta\gamma M]\cos.\widehat{yz} + \&c.$$

Si on remplace successivement α, β, γ par x', y', z'; x'', y'', z'';

x''', y''', z'''; &c.; que l'on multiplie les résultats par m', m'', m''', &c., et qu'on ajoute ces produits, on aura, après avoir divisé par 2, parce que chaque produit se trouve deux fois répété dans cette somme,

$$[A + B + C + 2D\cos.\widehat{yz} + 2E\cos.\widehat{zx} + 2F\cos.\widehat{xy}]M$$
$$-[\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2 + 2\upsilon\zeta\cos.\widehat{yz} + 2\zeta\xi\cos.\widehat{zx} + 2\xi\upsilon\cos.\widehat{xy}]M^2.$$

Cette quantité, que je nomme Φ, sera la somme des produits deux à deux de toutes les molécules, chacun de ces produits multiplié par le carré de la distance mutuelle des deux molécules.

On voit que φ étant toujours, comme ci-dessus, la quantité qui se rapporte à l'origine des coordonnées,

$$\Phi = \varphi M - [\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2 + 2\upsilon\zeta\cos.\widehat{yz} + 2\zeta\xi\cos.\widehat{zx} + 2\xi\upsilon\cos.\widehat{xy}]M^2;$$

c'est-à-dire, que la somme des produits deux à deux des masses m', m'', &c., chacun multiplié par le carré de leur distance mutuelle, égale la masse entière du système, multipliée par la somme des produits de chaque molécule par le carré de sa distance à un point donné; diminué du carré de la distance de ce point au centre d'inertie du système, multiplié par le carré de la masse entière. Ce théorème a été donné par M. *Lagrange* (Mém. de Berlin, 1783.)

[47.] Pour rapporter à la nouvelle origine α, β, γ la quantité ψ, il faudra y faire la même substitution que dans φ; la quantité $A_{,}$ se changera ainsi en

$$A_{,} + \left\{\begin{matrix} \beta^2(C - \zeta^2 M) + \gamma^2(B - \upsilon^2 M) + 2\beta\gamma(D - \upsilon\zeta M) \\ -2\beta(C\upsilon - \zeta D) - 2\gamma(B\zeta - \upsilon D) \end{matrix}\right\} M\sin.^2\widehat{yz},$$

et $D_{,}$ se changera en

$$D_{,} + \left\{\begin{matrix} \alpha\beta(E - \zeta\xi M) + \gamma\alpha(F - \xi\upsilon M) - \beta\gamma(A - \xi^2 M) - \alpha^2(D\upsilon - \zeta M) \\ -\gamma(F\xi - A\upsilon) - \beta(E\xi - A\zeta) - \alpha(E\upsilon + F\zeta - 2D\xi) \end{matrix}\right\} M\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy};$$

on aura de pareilles valeurs à substituer à $B_{,}$, $E_{,}$, $C_{,}$, $F_{,}$.

Si l'on emploie successivement pour origine les points m', m'', m''', &c.; c'est-à-dire, si dans l'expression de ψ à laquelle on arrive ainsi, on remplace α, β, γ par x', y', z'; par x'', y''. z''; par x''', y''', z''', &c.; qu'on multiplie les résultats par m', m'', m''', &c. et qu'on les ajoute : apres avoir divisé par trois, parce que chaque terme de cette somme y entre trois fois, on aura une quantité que j'appelle Ψ, et dont l'expression est

$$\Psi = \psi M - \left\{\begin{array}{l} (B\zeta^2 + C\upsilon^2 - 2D\upsilon\zeta)\sin.^2\widehat{yz} \\ + (C\xi^2 + A\zeta^2 - 2E\zeta\xi)\sin.^2\widehat{zx} \\ + (A\upsilon^2 + B\xi^2 - 2F\xi\upsilon)\sin.^2\widehat{xy} \\ -2(E\xi\upsilon + F\zeta\xi - A\upsilon\zeta - D\xi^2)\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\cos.\widehat{y,z,} \\ -2(F\upsilon\zeta + D\xi\upsilon - B\zeta\xi - E\upsilon^2)\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\cos.\widehat{z,x,} \\ -2(D\zeta\xi + E\upsilon\zeta - C\xi\upsilon - F\zeta^2)\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\cos.\widehat{x,y,} \end{array}\right\} M^2.$$

Cette quantité Ψ est la somme des produits trois à trois de toutes les molécules, chacun multiplié par le carré de l'aire du rhombe que l'on peut construire sur deux des distances de ces molécules employées comme côtés contigus, rhombe qui est double du triangle déterminé par ces molécules; et l'on voit par l'équation qui précède, que cette somme égale la différence des deux quantités suivantes : 1.° La masse entière du système, multipliée par la somme des produits deux à deux des molécules et du carré de l'aire du rhombe construit sur les deux lignes qui joignent ces molécules à un point donné; 2.° le carré de la masse par la somme des produits de chaque molécule et du carré de l'aire du parallélogramme construit sur les droites qui joignent la molécule au centre d'inertie et au point donné.

On aura un énoncé plus facile, en divisant par quatre les deux membres de cette équation : la somme des produits trois à trois des molécules, multiplié chacun par le carré de l'aire du triangle que ces molécules déterminent, égale le produit de la masse entière du système multiplié par la somme des produits des molécules deux à deux et du carré de l'aire d'un triangle déterminé par ces deux molécules et un point quelconque; ce premier produit étant diminué de celui du carré de la masse par la somme des molécules, multipliée chacune par le carré de l'aire du triangle formé par cette molécule, le centre d'inertie du système et le point quelconque.

[48.] Au moyen de la première expression de ω du n.° 44, en A, B, C, &c., on obtiendra de la même manière la valeur de la somme Ω de tous les produits quatre à quatre des molécules, chacun multiplié par le carré du volume du rhomboïde construit sur trois des lignes qui joignent ces molécules, employées comme arêtes contiguës; et l'on aura

$$\Omega = \omega M - \left\{ \begin{array}{l} \quad (BC - D^2)\xi^2 + 2(EF - AD)\upsilon\zeta \\ + (CA - E^2)\upsilon^2 + 2(FD - BE)\zeta\xi \\ + (AB - F^2)\zeta^2 + 2(DE - CF)\xi\upsilon \end{array} \right\}$$

$$\times \left\{ 1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy} \right\} M^2,$$

ce que l'on peut encore écrire ainsi

$$\Omega = \omega M - \left\{ \begin{array}{l} \quad \xi^2 A_{,} \sin.^2\widehat{xx_{,}} + 2\upsilon\zeta D_{,} \sin.\widehat{yy_{,}} \sin.\widehat{zz_{,}} \\ + \upsilon^2 B_{,} \sin.^2\widehat{yy_{,}} + 2\zeta\xi E_{,} \sin.\widehat{zz_{,}} \sin.\widehat{xx_{,}} \\ + \zeta^2 C_{,} \sin.^2\widehat{zz_{,}} + 2\xi\upsilon F_{,} \sin.\widehat{xx_{,}} \sin.\widehat{yy_{,}} \end{array} \right\} M^2.$$

Après avoir divisé Ω par trente-six, ces équations expriment le théorème suivant : La somme des produits quatre à quatre des molécules, chacun multiplié par le carré du volume du tétraèdre qui a ces points pour sommets, égale la somme des molécules, multipliée par la somme des produits trois à trois des molécules, chacun de ces produits étant lui-même multiplié par le carré du tétraèdre déterminé par les trois molécules et un point quelconque ; moins le carré de la masse totale, multiplié par la somme des produits deux à deux des molécules et du carré du volume du tétraèdre déterminé par les deux molécules, le centre d'inertie du système et le point pris arbitrairement.

Sur la dernière forme que nous venons de donner à Ω, on voit bien facilement la signification de la partie multipliée par $-M^2$, en observant de mettre à la place des lettres $A_,$, $B_,$, &c. les intégrales $\Sigma mm'x_,^2$, $\Sigma mm'y_,^2$, &c. ; cette quantité devient alors

$$\Sigma mm' (\xi x_, \sin.\widehat{xx_,} + \upsilon y_, \sin.\widehat{yy_,} + \zeta z_, \sin.\widehat{zz_,})^2 ;$$

mais chacun des carrés de cette somme, tel que

$$(\xi x_,' \sin.\widehat{xx_,} + \upsilon y_,' \sin.\widehat{yy_,} + \zeta z_,' \sin.\widehat{zz_,})^2 ;$$

se change, par les formules de la trigonométrie, et la substitution des valeurs de $x_,'$, $y_,'$, $z_,'$, en

$$\{\xi(y'z'' - z'y'') + \upsilon(z'x'' - x'y'') + \zeta(x'y'' - y'x'')\}^2$$
$$\times \left[1 + 2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xz} - \cos.^2\widehat{yz} - \cos.^2\widehat{zx} - \cos.^2\widehat{xy}\right],$$

qui est bien, selon le n.° 40, l'expression du carré du rhomboïde construit sur les trois droites qui joignent l'origine au point x', y', z', au point x'', y'', z'', au point ξ, υ, ζ; ces droites étant employées comme arêtes contiguës à un même sommet ; et ce rhomboïde a un volume sextuple de celui de la pyramide déterminée par ces quatre mêmes points.

Le même moyen sert à trouver la signification de la partie de Ψ qui est multipliée par $-M^2$.

[49.] Dans les expressions de Φ, Ψ et Ω, les trois quantités multipliées par $-M^2$ dépendent également et de l'origine des coordonnées prise arbitrairement, et du centre d'inertie du système; il suit de là que l'on peut considérer l'un ou l'autre de ces deux points comme étant à l'origine des coordonnées, à laquelle se rapporte l'évaluation des quantités A, B, C, &c. C'est, en effet, ce que le calcul confirme; il suffit, pour s'en assurer, de transporter l'ancienne origine au centre, ce qui exigera que l'on substitue

$$A-M\xi^2,\ B-M\upsilon^2,\ C-M\zeta^2,\ D-M\upsilon\zeta,\ E-M\zeta\xi,\ F-M\xi\upsilon,$$

à la place de A, B, C, &c. dans ces parties de Φ, Ψ, Ω, multipliées par $-M^2$; on trouve que cette substitution n'apporte aucun changement à l'expression de ces quantités; mais alors les nouveaux A, B, &c. introduits se rapporteront à des axes parallèles aux anciens, passant par le centre d'inertie, et les coordonnées de l'ancienne origine, relatives à ces axes, sont $-\xi$, $-\upsilon$, $-\zeta$.

Les quantités φ, ψ, ω, Φ, Ψ, Ω, étant indépendantes de la direction des axes coordonnés, si, pour simplifier, on emploie un système d'axes conjugués répondant au centre d'inertie, et pour lesquels on sait que

$$D=0,\quad E=0,\quad F=0;$$

alors

$$\Phi=M\varphi-M^2\{\xi^2+\upsilon^2+\zeta^2+2\upsilon\zeta\cos.\widehat{yz}+2\zeta\xi\cos.\widehat{zx}+2\xi\upsilon\cos.\widehat{xy}\},$$

$$\Psi=M\psi-M^2\left\{\begin{array}{l}(B\zeta^2+C\upsilon^2)\sin.^2\widehat{yz}+2A\upsilon\zeta\sin.\widehat{zx}\sin.\widehat{xy}\cos.\widehat{y,z},\\+(C\xi^2+A\zeta^2)\sin.^2\widehat{zx}+2B\zeta\xi\sin.\widehat{xy}\sin.\widehat{yz}\cos.\widehat{z,x},\\+(A\upsilon^2+B\xi^2)\sin.^2\widehat{xy}+2C\xi\upsilon\sin.\widehat{yz}\sin.\widehat{zx}\cos.\widehat{x,y}\end{array}\right\},$$

$$\Omega=M\omega-M^2\{BC\xi^2+CA\upsilon^2+AB\zeta^2\}$$
$$\times[1+2\cos.\widehat{yz}\cos.\widehat{zx}\cos.\widehat{xy}-\cos.^2\widehat{yz}-\cos.^2\widehat{zx}-\cos.^2\widehat{xy}].$$

Ces

Ces valeurs se simplifient encore, si l'on choisit parmi les axes conjugués qui répondent au centre, ceux qui sont rectangulaires; c'est-à-dire, les axes principaux du corps répondant à ce centre. On a, dans ce cas,

$$\Phi = M\varphi - M^2 \{\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2\};$$
$$\Psi = M\psi - M^2 \{(B+C)\xi^2 + (C+A)\upsilon^2 + (A+B)\zeta^2\};$$
$$\Omega = M\omega - M^2 \{BC\xi^2 + CA\upsilon^2 + AB\zeta^2\}.$$

Les quantités A, B, C étant positives, la première équation montre que tous les points de l'espace pour lesquels les quantités φ ont la même valeur, sont répartis sur la surface d'une sphère dont le centre est au centre d'inertie du système;

Tous ceux pour lesquels la quantité ψ conserve la même valeur, sont sur un ellipsoïde; et les divers ellipsoïdes répondant à diverses valeurs de ψ, sont semblables et ont pour direction d'axes celles des axes principaux du corps qui se croisent au centre d'inertie. Pareille chose a lieu pour les ellipsoïdes sur lesquels se trouvent les points où répondent des valeurs constantes de ω.

[50.] Il résulte encore de là que les quantités φ, ψ, ω varient proportionnellement au carré de la distance de leur origine au centre d'inertie, lorsque cette origine se meut sur une ligne droite passant par le centre; et par conséquent, le centre d'inertie est le point pour lequel ces quantités ont les plus petites valeurs dont elles sont susceptibles, en ce point,

$$\varphi = \frac{\Phi}{M}, \quad \psi = \frac{\Psi}{M}, \quad \omega = \frac{\Omega}{M},$$

et en fonction de A, B, C, momens d'inertie, pris relativement aux plans des axes principaux du centre,

$$\varphi = A + B + C,$$
$$\psi = BC + CA + AB,$$
$$\omega = ABC.$$

C'est aussi leur valeur en fonction des momens d'inertie pris par rapport aux plans principaux du corps qui répondent à une origine quelconque, cette origine étant celle à laquelle se rapporteraient les φ, ψ, ω. On voit, d'après cela, que l'équation dont les racines seraient ces trois quantités A, B, C, momens d'inertie pris relativement aux plans des axes principaux du centre d'inertie d'un corps, est

$$Mp^3 - \Phi p^2 + \Psi p - \Omega = 0;$$

et l'on sait que tout ce qui a rapport à la détermination des axes principaux pour un point quelconque, dépend des racines de cette équation. C'est à raison de cela, et aussi des singulières propriétés dont jouissent les quantités φ, ψ, ω, Φ, Ψ, Ω, que nous les avons considérées avec autant d'étendue.

D'après le rapport fait à l'Institut par MM. *Legendre*, *Carnot* et *Poisson*, ce Mémoire doit être imprimé dans le *Recueil des Savans étrangers.*

FIN.

TABLE

Des Articles contenus dans le XVI.ᵉ Cahier du Journal de l'École polytechnique.

Théorie mathématique de l'action capillaire, par M. Petit. .... Page 1 — 40.

Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps, par M. Binet (J.)............................ 41 — 67.

1.ᵉʳ *Mémoire — Recherches sur les polyèdres, première et seconde parties; par M.* Cauchy.............................. 68 — 86.

2.ᵉ *Mémoire sur les polygones et les polyèdres.—Première partie. Théorèmes sur les polygones convexes rectilignes et sphériques. — Seconde partie. Théorèmes sur les angles solides et les polyèdres convexes, par* le même. 87—98.

Recherches sur les nombres, par le même.............. 99 — 123.

Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement les cercles déterminés par trois conditions, et les sphères déterminées par quatre conditions; par M. L. Gaultier, de Tours............. 124 — 214.

Mémoire sur les intégrales définies, par M. Poisson...... 215 — 246.

Mémoire sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans, par le même.............................. 247 — 262.

De l'héliostate.—Théorie et Description de l'héliostate; par M. Hachette. .... 263 — 279.

Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques; par M. Binet (J.)......... 280 — 354.

Annonce.. 354.

Fin de la Table du XVI.ᵉ Cahier.