

CAUCHY - BINET FOR PSEUDO DETERMINANTS

OLIVER KNILL
HARVARD UNIVERSITY

JULY 2014 (LAST UPDATE: DEC 2015)

PSEUDO DETERMINANT

Det

1	2	3
4	5	6
7	8	9

= -18

Eigenvalues: $0, (15 \pm \sqrt{297})/2$

$$p(x) = -18(-x) + 15(-x)^2 + (-x)^3$$

COMPATIBILITY

Classical determinant $\det$ and pseudo Det

$$\det(A \ B) = \det(A) \det(B)$$

$$\text{Det}(A \ B) \neq \text{Det}(A) \text{Det}(B)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(AB)=3$$

$$\text{Det}(A) \text{Det}(B)=2 \cdot 6$$

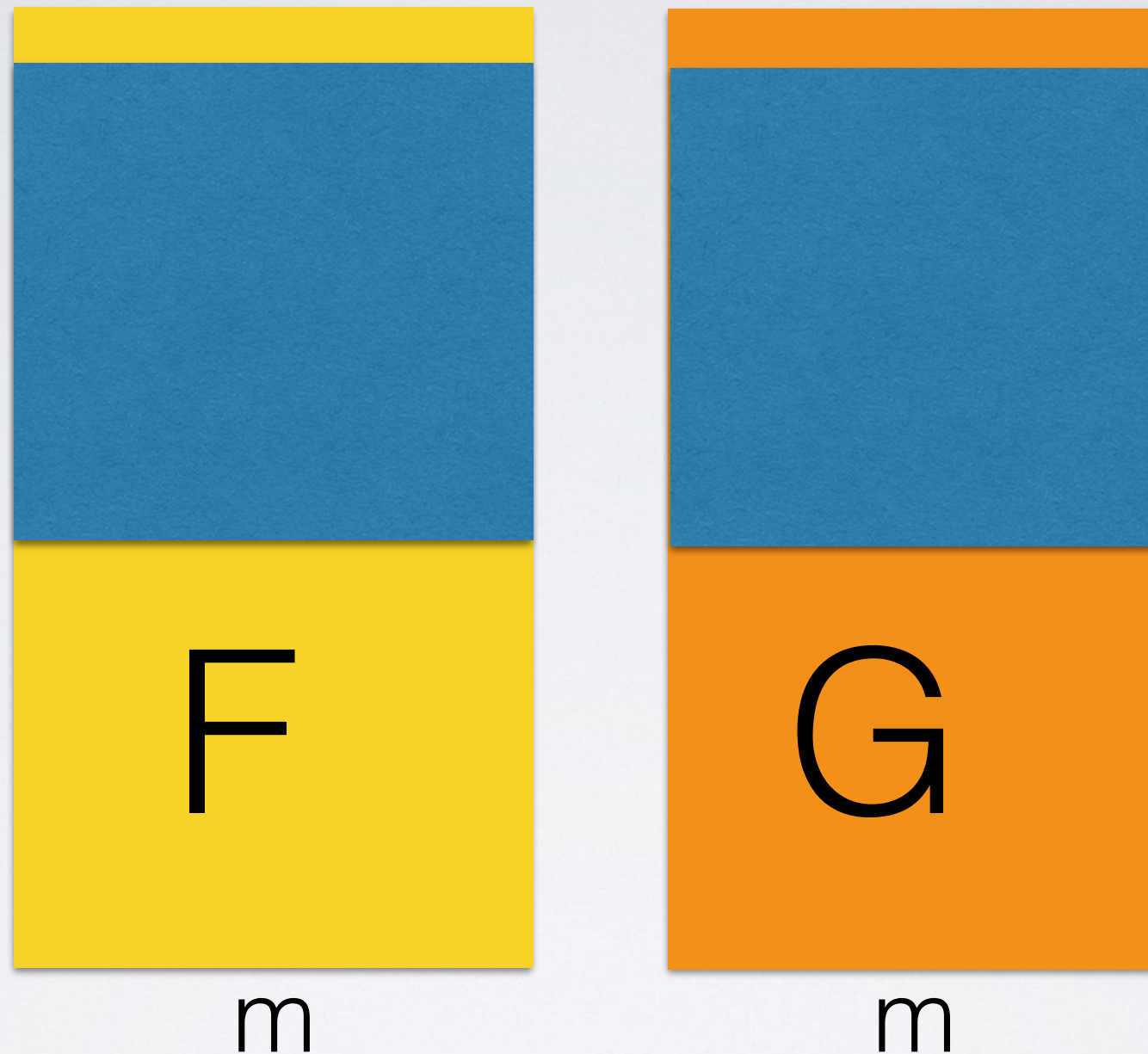
WE PROVE:

$$\begin{bmatrix} F^T & \\ & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \\ \\ P \end{bmatrix} = F^T G$$

$p_k(-x)^k$ smallest
nonzero entry of charact. polynomial

$$\text{Det}(F^T G) = \sum_{|P|=k} \det(F_P) \det(G_P)$$

CLASSICAL CAUCHY-BINET



$$\det(F^T G) = \sum_{|P|=m} \det(F_P) \det(G_P)$$

MORE GENERAL PROBLEM:

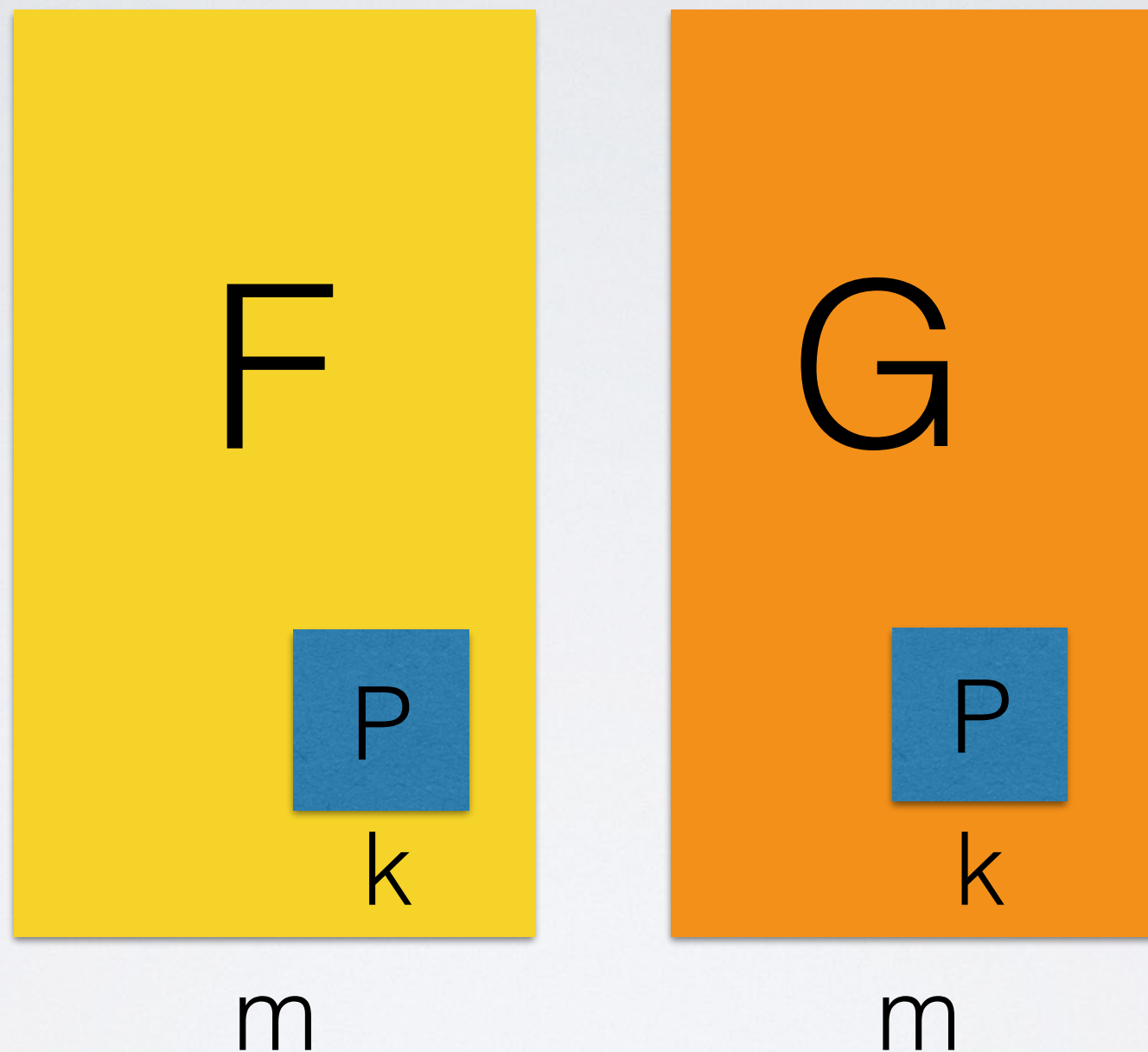
The diagram illustrates the multiplication of two matrices. On the left, a yellow square represents matrix F^T with dimensions m (height) and n (width). In the center, an orange rectangle represents matrix G . To the right of G is an equals sign. Further right is a green square representing the product matrix $F^T G$ with dimensions m (height) and m (width).

$$\begin{matrix} m \\ \text{ } \end{matrix} \begin{matrix} \text{ } \\ n \end{matrix} F^T \quad G \quad = \quad \begin{matrix} \text{ } \\ m \end{matrix} F^T G \quad \begin{matrix} m \\ \text{ } \end{matrix}$$

Find the coefficients of
the characteristic
polynomial of

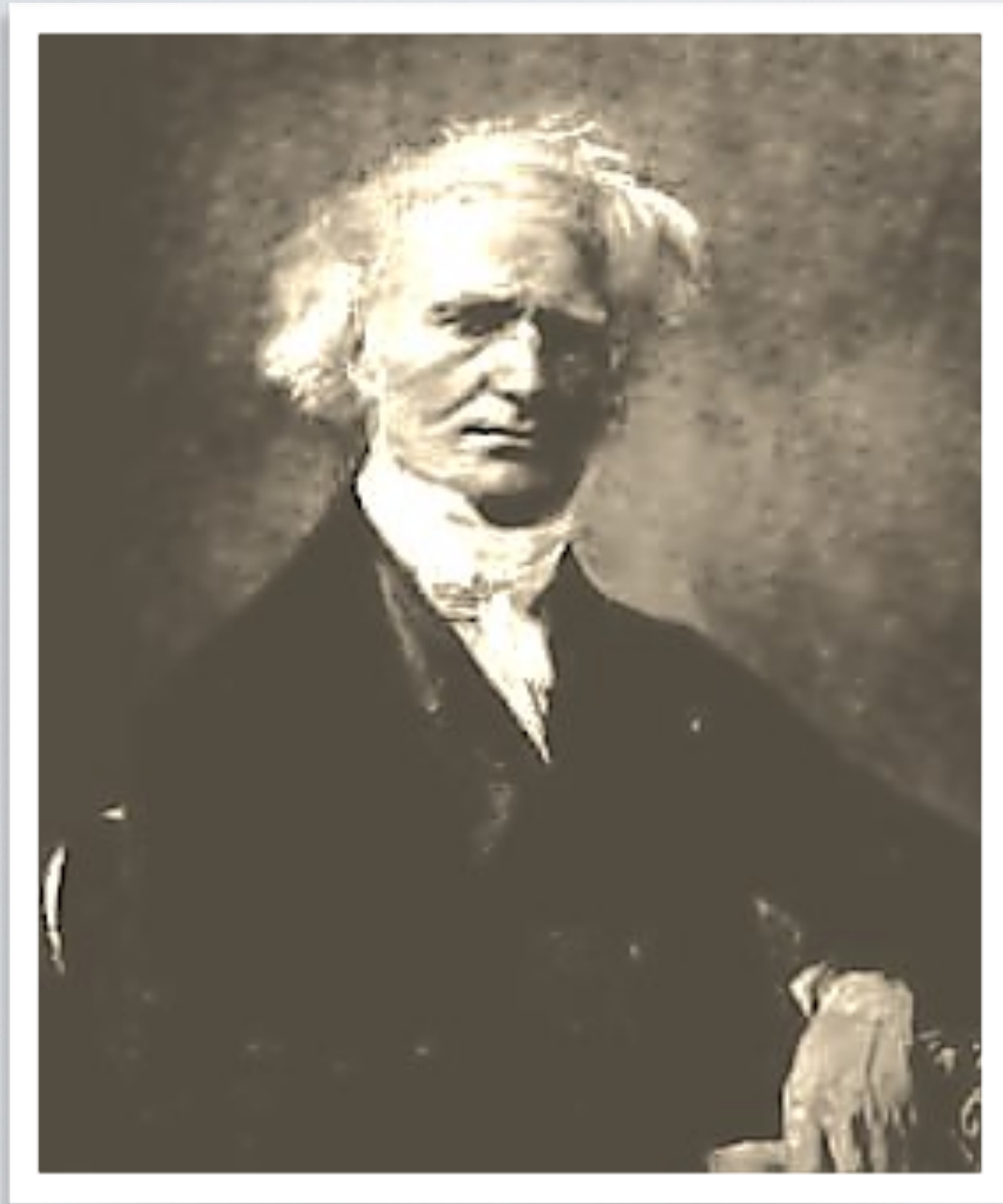
$$F^T G$$

NEW FORMULA:



$$p_k = \sum_{|P|=k} \det(F_P) \det(G_P)$$

CAUCHY AND BINET



Jacques Binet (1786-1856)



Augustin Cauchy (1789-1857)

THEOREM: 1812

CAUCHY 1812

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

II^e SÉRIE. — TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Augustins, 55.

MCMV.

MÉMOIRE

SUR LE

NOMBRE DES VALEURS QU'UNE FONCTION PEUT ACQUÉRIR,

LORSQU'ON Y PERMUTE DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES
LES QUANTITÉS QU'ELLE RENFERME.

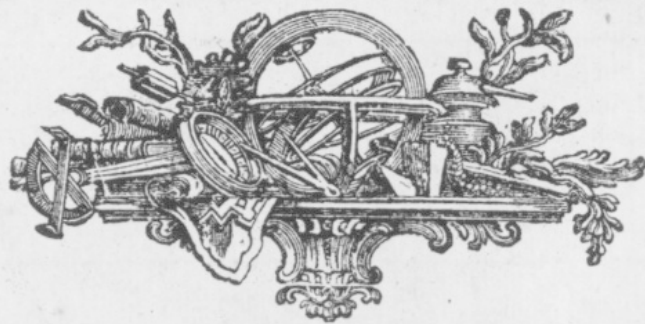
Journal de l'École Polytechnique, XVII^e Cahier, Tome X, p. 1; 1815.

MM. Lagrange et Vandermonde sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressants relatifs à ce sujet dans deux Mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière et, particulièrement, M. Ruffini, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le Tome XII des *Mémoires de la Société italienne* et dans sa *Théorie des équations numériques*. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres est que, avec un nombre donné de lettres, on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette impossibilité se manifeste ne sont pas toujours faciles à saisir; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce Mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet et ce que mes propres recherches

JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PUBLIÉ
PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION
DE CET ÉTABLISSEMENT.

SEIZIÈME CAHIER.

TOME IX.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

Mai 1813.

Per. 4°
5699



280

ANALYSE.

MÉMOIRE

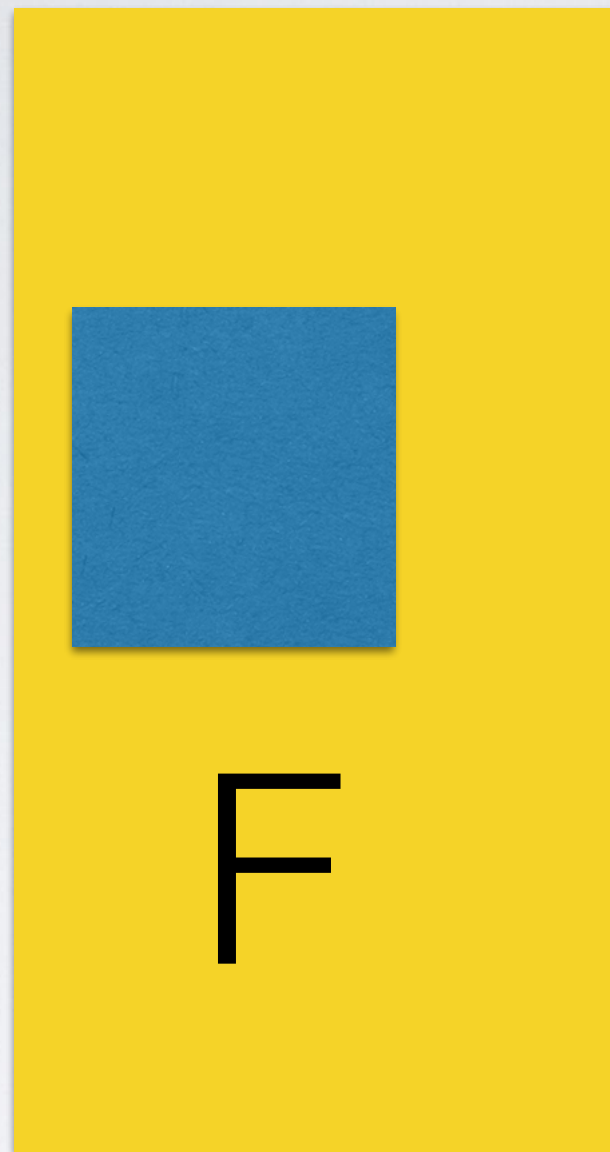
*SUR un Système de Formules analytiques, et leur application à
des considérations géométriques;*

LU À L'INSTITUT LE 30 NOVEMBRE 1812.

PAR M. J. BINET.

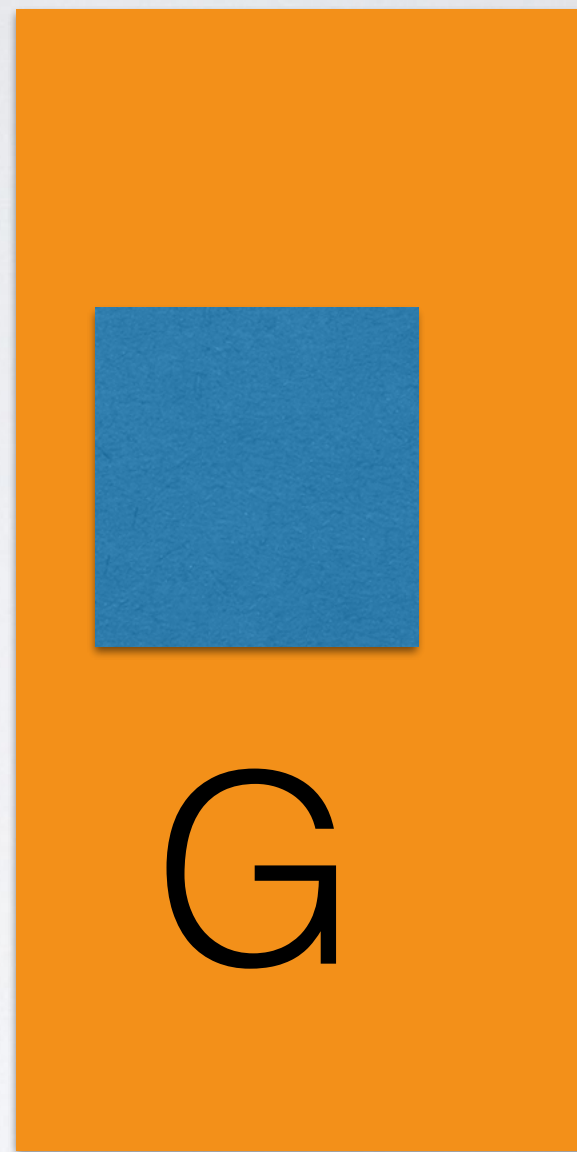
Je me propose dans ce mémoire, d'exposer une série de relations analytiques qui existent entre des quantités dérivées les unes des autres, selon une certaine loi particulière : ces relations sont fondées sur un théorème que je vais énoncer. Je rappellerai pour cela, que M. Laplace a nommé *résultantes à deux lettres, à trois lettres, à quatre lettres, &c.* des quantités formées avec quatre lettres, neuf lettres, seize lettres, &c. et qui seraient les dénominateurs des valeurs des inconnues déterminées par des équations linéaires, dans lesquelles ces lettres entreraient comme coëfficiens. (Voyez les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1772, II.^e partie. Dans ce même volume, on trouve des Recherches de Vandermonde sur les propriétés de ces résultantes.) Lorsqu'on a deux systèmes de n lettres chacun, et nous supposerons chaque système écrit avec une seule lettre portant divers accens, qui serviront à ranger dans le même ordre les deux systèmes; on peut former avec ces lettres un nombre $n \frac{n-1}{2}$ de résultantes à deux lettres, en ne prenant dans le second terme de chacune, que des lettres portant les mêmes accens que celles du premier. Si, avec deux autres systèmes de lettres, on forme encore

CASE: PSEUDO DETERMINANTS



F

m

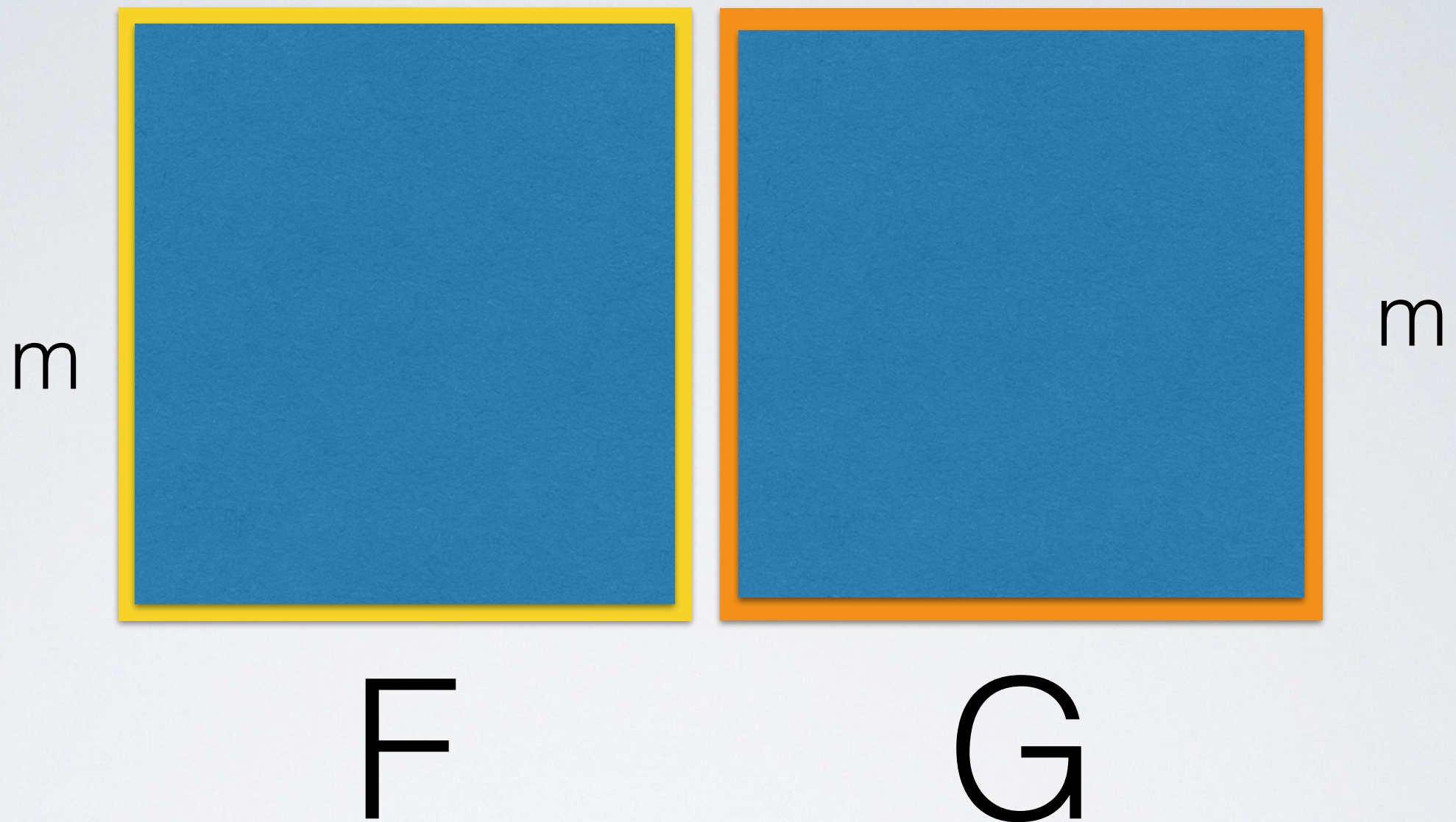


G

m

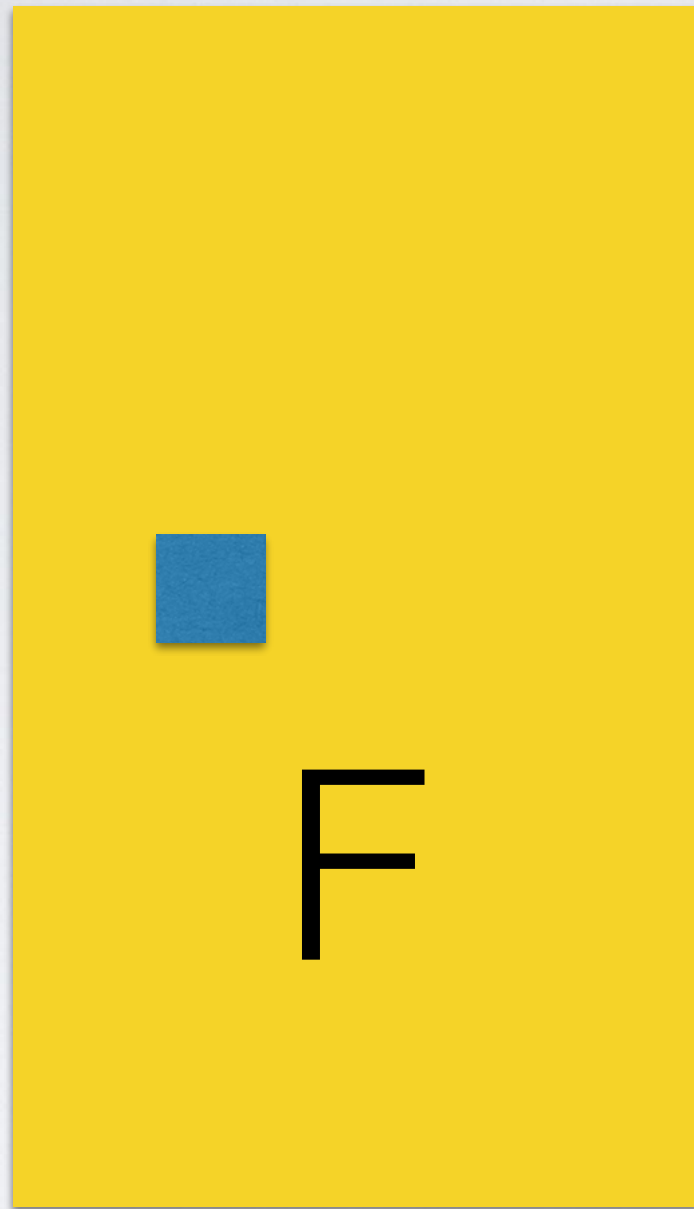
$$\text{Det}(F^T G) = \sum_{|P|=k} \det(F_P) \det(G_P)$$

CASE: DETERMINANTS



$$\det(F^T G) = \det(F) \det(G)$$

CASE:FREDHOLM: IDENTITY



m



m

$$\text{tr}(F^T G) = \sum_{i,j} F_{ij} G_{ij}$$

SPECIAL: PYTHAGORAS PSEUDO DETERMINANT

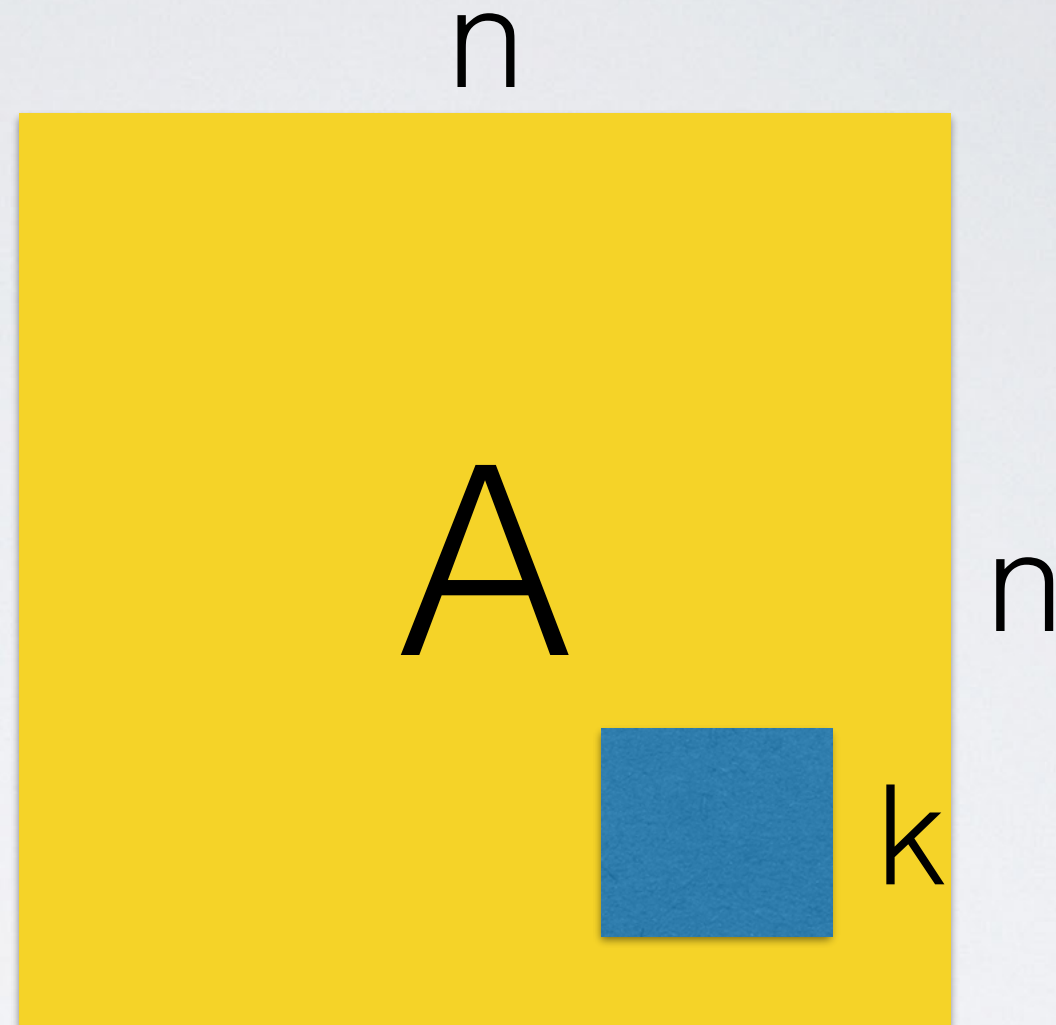
$$\text{Det}(A^T A) = \sum_{|P|=k} \det(A_P^2)$$

True for all $n \times n$ matrices A of rank k .

PYTHAGORAS

$$A = A^T$$

rank k



$$\text{Det}(A^2) = \sum_{|P|=k} \det(A_P^2)$$

EXAMPLE

1	2	3	2	1
2	3	4	3	2
3	4	5	4	3
2	3	4	3	2
1	2	3	2	1

$$\text{rank}=2$$

$$\text{Det}=-14$$

Sum of all
2x2 minors
squares is
 $196=14^2$

GUSTAV KIRCHHOFF

1824-1887



APPLICATION (KIRCHHOFF)

$\text{Det}(L)$ is the number of rooted spanning trees in a graph

$$\text{Det}(F^T F) = \sum_{|P|=k} \text{det}(F_P)^2$$

$$\text{det}(F_P) = 1 \quad \text{if and only if } P \text{ encodes a tree}$$

DETERMINANT FORMULA

Fredholm determinant

$$\det(1 + F^T G) = \sum_P \det(F_P) \det(G_P)$$

We sum over all possible patterns P .

True for all $n \times m$ matrices F, G .

MATHEMATICA CODE

```
K = 7; M = 6; L = 4; m = Minors;  
R := RandomInteger[{-L, L}, {K, M}]; F = R; G = R;  
Total[Flatten[Table[x^(M - k) m[F, k]*m[G, k], {k, 0, M}]]]  
Det[x*IdentityMatrix[M] + Transpose[F].G]
```

$$\begin{aligned} & -602194 + 2523748 x - 7853 x^2 - \\ & 47380 x^3 - 1067 x^4 + 54 x^5 + x^6 \end{aligned}$$

SPECIAL: PYTHAGORAS TYPE FORMULA

$$\det(1 + A^T A) = \sum_P \det(A_P^2)$$

We sum over all possible patterns P .
True for all $n \times m$ matrices F, G .

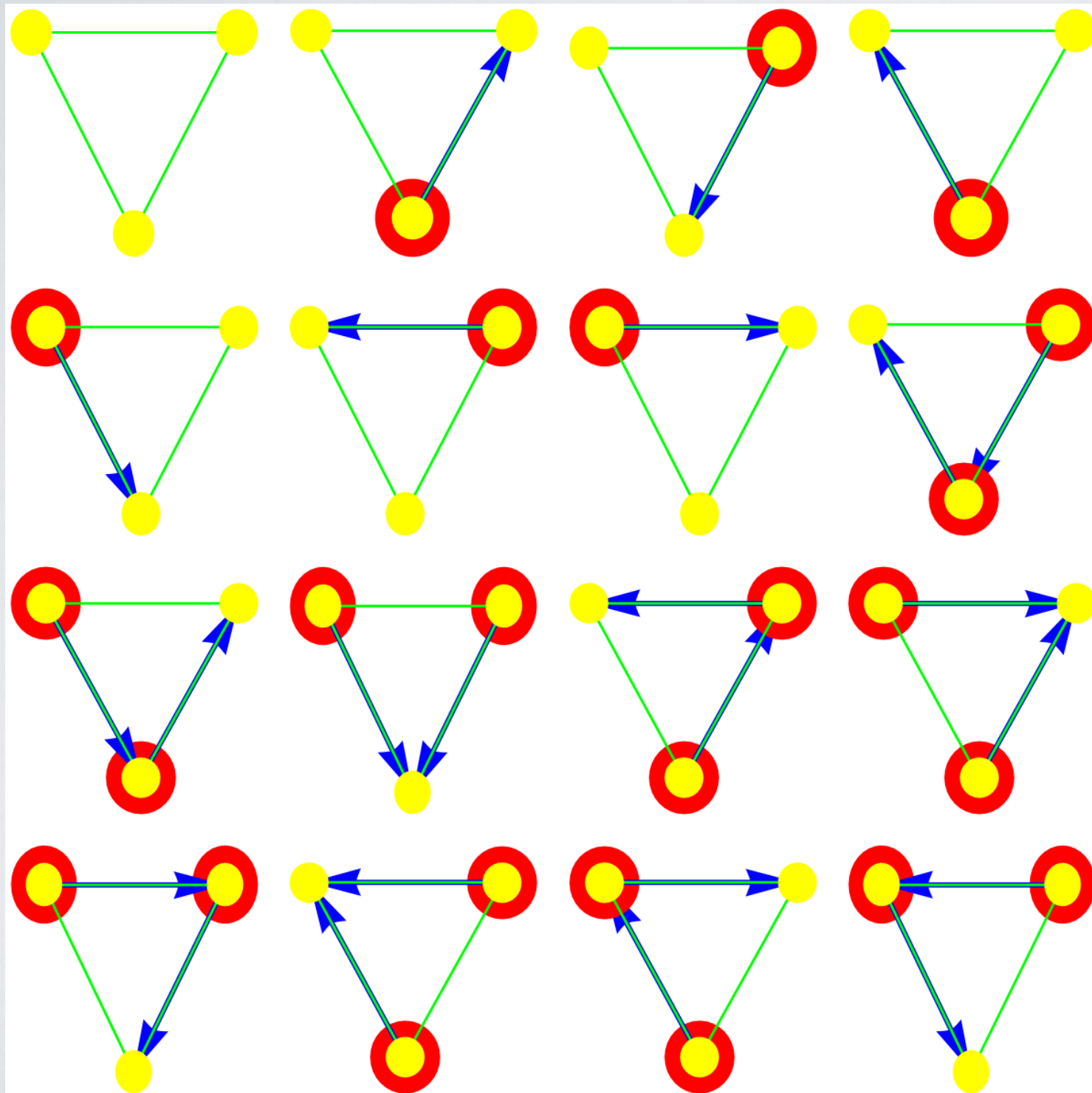
CHEBOTAREV-SHAMIS

$\text{Det}(1+L)$ is the number of
rooted spanning forests in a
graph

$$\text{Det}(1+F^T F) = \sum_{|P|} \det(F_P)^2$$

$$\det(F_P) = 1 \quad \text{if and only if } P \text{ encodes a forest}$$

EXAMPLE



$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(L) = 9$$

rooted trees

$$\text{Det}(1+L) = 16$$

rooted forests