Alexander Ziwet

DARSTELLENDE GEOMETRIE

von

GASPARD MONGE.

(1798.)

Übersetzt und herausgegeben

von

Robert Haussner.

Mit zahlreichen Figuren
in dem Texte und in den Anmerkungen.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1900.

Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, wohl zum kleinsten Maasse durch die Ausbildung und Verbreitung der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Darstellende Geometrie

von

Gaspard Monge.

Paris 1798.

---

[5]
Erster Theil.

Aufgabe und Methode der darstellenden Geometrie. Elementare Aufgaben.

Aufgabe der darstellenden Geometrie.

1. Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist eine zweifache. Erstens soll sie die Methoden liefern, um auf einem Zeichenblatte, welches also nur zwei Dimensionen, Länge und Breite hat, alle Raumgebilde, welche deren drei, nämlich Länge, Breite und Höhe haben, abzubilden, vorausgesetzt, dass diese Gebilde streng definirt werden können.

Zweitens soll sie das Verfahren lehren, um aus einer genauen Zeichnung die Gestalt der Raumgebilde erkennen und alle Sätze, welche aus der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Raumgebilde folgen, ableiten zu können.

Wir werden zunächst die durch eine reiche Erfahrung entdeckten Methoden, um die erste dieser beiden Aufgaben zu lösen, angeben und dann zeigen, auf welche Weise die Lösung der zweiten Aufgabe erreicht wird.

Betrachtungen über die Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Projectionsmethode.

2. Da man die Oberflächen aller Raumgebilde als Träger von unendlich vielen Punkten betrachten kann, so muss der

erste Schritt, welchen wir zur Erreichung unseres Zieles thun, dahin gerichtet sein, das Verfahren anzugeben, durch welches sich die Lage eines Punktes im Raume bestimmen lässt.

Der Raum ist unbegrenzt; alle seine Theile sind einander völlig ähnlich und besitzen keinerlei Unterscheidungsmerkmale. Keiner derselben kann daher dazu dienen, die Lage eines Punktes im Raume anzugeben.

Will man also die Lage eines Punktes im Raume definiren, so muss man dieselbe nothwendiger Weise auf beliebige andere bestimmte Gebilde des Raumes beziehen; diese letzteren Gebilde müssen ihrer Lage nach sowohl demjenigen, welcher die Lage des Punktes angiebt, als auch dem, welcher diese Angabe verstehen will, genau bekannt sein. Damit aber das [**6**] Verfahren selbst leicht anwendbar wird, müssen diese Gebilde möglichst einfache sein und muss sich ihre Lage sehr leicht vorstellen lassen.

3. Unter allen einfachen Gebilden wählen wir diejenigen aus, welche die grössere Bequemlichkeit für die Bestimmung der Lage eines Punktes darbieten. Weil nun die Geometrie kein einfacheres Gebilde als den Punkt aufzuweisen hat, so untersuchen wir zunächst, zu welcher Art von Betrachtungen man geführt wird, wenn man, um die Lage eines Punktes P zu bestimmen, ihn zu einer bestimmten Anzahl anderer Punkte, deren Lage bekannt ist, in Beziehung bringt. Um dieser Darlegung grössere Durchsichtigkeit geben zu können, bezeichnen wir die ihrer Lage nach bekannten Punkte mit den aufeinanderfolgenden Buchstaben A, B, C, ...

Nehmen wir zuerst an, dass der Punkt P, gemäss der Definition seiner Lage, ein Meter Abstand von dem bekannten Punkte A habe.

Wie Jedermann weiss, besitzt die Kugeloberfläche die Eigenschaft, dass alle ihre Punkte gleichweit von ihrem Mittelpunkte entfernt sind. Der vorstehende Theil der Definition sagt mithin aus, dass dem Punkte P, dessen Lage zu bestimmen ist, dieselbe Eigenschaft zukommt, wie allen Punkten einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Punkt A und deren Radius ein Meter lang ist. Die Punkte dieser Kugelfläche sind aber die einzigen Punkte in dem ganzen Raume, welchen die geforderte Eigenschaft zukommt; denn alle Punkte des Raumes, welche in Bezug auf den Mittelpunkt A dieser Kugel jenseits ihrer Oberfläche liegen, sind vom Mittelpunkte weiter als ein Meter, und alle Punkte, welche zwischen dem Mittelpunkte A und der Kugeloberfläche liegen, sind von A weniger als ein Meter entfernt. Es haben also nicht nur alle Punkte der Kugeloberfläche die verlangte Eigenschaft, sondern sie sind zugleich die einzigen, welche sie haben. Hieraus folgt schliesslich, dass der zu bestimmende Punkt P einer der Punkte der Kugeloberfläche ist, deren Mittelpunkt im Punkte A liegt und deren Radius ein Meter lang ist. Dadurch ist der Punkt P jetzt zwar von unendlich vielen anderen Punkten des Raumes unterschieden, aber er ist noch mit allen Punkten der Kugeloberfläche vermengt, und es sind daher noch weitere Bedingungen nöthig, um ihn unter diesen Punkten herausfinden zu können.

Nehmen wir dann weiter an, dass nach der Definition seiner Lage der Punkt P zwei Meter Abstand von dem zweiten Punkte B habe.

Stellt man für diese zweite Bedingung die gleiche Überlegung an, wie für die erste, so muss der Punkt P einer von den Punkten der Oberfläche einer zweiten Kugel sein, deren Mittelpunkt im Punkte B liegt und deren Radius zwei Meter Länge hat. [7] Da nun der Punkt P gleichzeitig auf der Oberfläche der ersten und der zweiten Kugel liegen muss, so kann er jetzt nur noch mit den Punkten, welche beiden Flächen gemeinsam sind und also auf ihrer Schnittcurve liegen, vermengt sein. Selbst wer nur wenig mit geometrischen Betrachtungen vertraut ist, weiss aber, dass der Durchschnitt zweier Kugelflächen die Peripherie eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt auf der die beiden Kugelmittelpunkte verbindenden Geraden liegt und dessen Ebene senkrecht auf dieser Geraden steht. Auf Grund der gestellten zwei Bedingungen ist der gesuchte Punkt jetzt von allen andern Punkten, welche auf den beiden Kugelflächen liegen, unterschieden und kann nur noch mit allen Punkten der Peripherie des Schnittkreises beider Kugeln vermengt sein; alle diese letzteren Punkte und nur sie allein erfüllen die beiden gestellten Bedingungen. Mithin ist noch eine dritte Bedingung nothwendig, um den Punkt P von allen diesen Punkten unterscheiden zu können.

Nehmen wir schliesslich an, dass der Punkt P drei Meter von einem dritten bekannten Punkte C entfernt sei.

Diese dritte Bedingung weist dem Punkte P seinen Platz auf einer dritten Kugelfläche an, deren Mittelpunkt der Punkt C und deren Radius drei Meter lang ist. Da wir nun wissen, dass er auch auf der Peripherie eines seiner Lage und Grösse nach bekannten Kreises liegt, so muss er, um gleichzeitig allen drei gestellten Anforderungen zu genügen, einer der Punkte sein, welche die Peripherie des Kreises und die dritte Kugelfläche gemeinsam haben. Da sich nun die Peripherie eines Kreises und eine Kugelfläche bekanntlich nur in zwei Punkten schneiden können, so ist der Punkt P durch diese drei Bedingungen von allen anderen Punkten des Raumes unterschieden und kann nur einer der beiden so bestimmten Punkte sein. Giebt man noch an, auf welcher Seite der durch die drei Kugelmittelpunkte A, B und C gehenden Ebene der Punkt P liegen soll, so ist er völlig bestimmt und kann mit keinem andern Punkte des Raumes mehr verwechselt werden.

Aus dieser Darlegung ersieht man aber, dass die Betrachtungen, zu denen man geführt wird, wenn man zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume seine Entfernungen von anderen bekannten Punkten, deren man dazu drei nöthig hat, benutzt, nicht einfach genug sind, um als Grundlage für häufig benutzte Verfahren dienen zu können.

4. Untersuchen wir nun, zu welchen Betrachtungen man geführt wird, wenn man einen Punkt, statt auf drei andere bekannte Punkte, auf drei ihrer Lage nach gegebene Gerade bezieht.

[8] Wir bemerken zuvor, dass eine gerade Linie niemals als begrenzt angesehen werden soll, sondern nach beiden Richtungen unbegrenzt weit verlängert werden kann.

Der Einfachheit wegen bezeichnen wir die Geraden, welche wir gebrauchen müssen, der Reihe nach mit a, b, c, ...

Wenn aus der Definition der Lage eines Punktes P folgt, dass er z. B. einen senkrechten Abstand von einem Meter von der ersten bekannten Geraden a haben muss, so besagt dies, dass er auf der Oberfläche eines nach beiden Seiten sich ins Unendliche erstreckenden geraden Kreiscylinders, dessen Axe die Gerade a und dessen Radius ein Meter lang ist, liegen muss; alle Punkte dieser Fläche und nur sie allein besitzen die durch die Definition geforderte Eigenschaft. Folglich ist der Punkt von allen ausserhalb der Cylinderfläche wie auch von allen im Innern des Cylinders gelegenen Punkten des Raumes unterschieden und kann nur noch mit den Punkten der Cylinderfläche selbst, von welchen man ihn auf Grund weiterer Bedingungen unterscheiden kann, vermengt sein.

Nehmen wir also an, dass der gesuchte Punkt P ferner zwei Meter von einer zweiten Geraden b entfernt sei, so erkennt man in gleicher Weise, dass er auf der Oberfläche eines zweiten geraden Kreiscylinders, dessen Axe die Gerade b und und dessen Radius zwei Meter lang ist, liegen muss, und dass er ein beliebiger Punkt dieser zweiten Cylinderfläche sein kann, wenn man nur die zweite Bedingung ins Auge fasst. Nimmt man aber beide Bedingungen zusammen, so muss der gesuchte Punkt P gleichzeitig auf dem ersten und dem zweiten Cylinder liegen und kann mithin nur einer der beiden Flächen gemeinsamen Punkte, d. h. ein Punkt ihrer Schnittcurve sein. Diese Curve, auf welcher der Punkt liegen muss, hat aber an der Krümmung sowohl der ersten als der zweiten Cylinderfläche Antheil und gehört daher im Allgemeinen zu den sogenannten Curven doppelter Krümmung.

Um nun den gesuchten Punkt von allen andern Punkten dieser Curve zu unterscheiden, ist eine dritte Bedingung nothwendig.

Nehmen wir also schliesslich an, dass die gegebene Definition für den gesuchten Punkt P einen senkrechten Abstand von drei Meter von einer dritten Geraden c vorschreibe.

Diese neue Bedingung sagt aus, dass der Punkt P auf der Oberfläche eines dritten geraden Kreiscylinders, dessen Axe die dritte Gerade c und dessen Radius drei Meter lang ist, liegen muss. [9] Fasst man alle drei Bedingungen zusammen, so kann der Punkt nur einer von denjenigen sein, welche sowohl der Oberfläche des dritten Cylinders als auch jener Curve doppelter Krümmung (der Schnittlinie der beiden ersten Cylinder) angehören. Nun wird im Allgemeinen aber diese Curve von der dritten Cylinderfläche in acht Punkten geschnitten, folglich sagen die drei gegebenen Bedingungen nur aus, dass der gesuchte Punkt P einer dieser acht Punkte ist, unter welchen man ihn nur auf Grund von weiteren besonderen Bedingungen — ähnlich derjenigen, welche in dem vorigen Paragraphen als Beispiel angeführt wurde — näher bestimmen kann.

Es zeigt sich also, dass die Betrachtungen, zu welchen die Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume auf Grund der Kenntniss seiner Entfernungen von drei bekannten geraden Linien Anlass gegeben hat, noch weit weniger einfach sind, als jene früheren, welche sich auf seine Entfernungen von drei Punkten bezogen; folglich können diese jetzigen Betrachtungen noch weniger zur Grundlage von Methoden dienen, welche häufig benutzt werden sollen.

5. Unter den einfachen Gebilden, welche die Geometrie

betrachtet, stehen in erster Linie: 1) der Punkt, welcher keine Dimension besitzt; 2) die gerade Linie, welche nur eine Dimension hat; 3) die Ebene, welche deren zwei besitzt. Untersuchen wir daher, ob es nicht einfacher ist, die Lage eines Punktes durch die Angabe seiner Entfernungen von bekannten Ebenen zu bestimmen, als dazu seine Entfernungen von Punkten oder geraden Linien zu verwenden.

Nehmen wir also an, dass uns einander nicht parallele Ebenen ihrer Lage im Raume nach gegeben seien, und bezeichnen wir dieselben der Reihe nach mit den Buchstaben A, B, Γ, ...

Wenn nun der Punkt P, gemäss der Definition seiner Lage, z. B. ein Meter von der ersten Ebene A entfernt sein muss, ohne dass näher angegeben ist, auf welcher Seite dieser Ebene er liegt, so besagt dies, dass er einer der Punkte der beiden zu A parallelen Ebenen ist, welche auf beiden Seiten derselben im Abstande von einem Meter liegen. Denn alle Punkte dieser beiden parallelen Ebenen genügen der gestellten Bedingung und sind zugleich unter allen Punkten des Raumes die einzigen, welche ihr genügen.

Um nun von allen Punkten dieser beiden Ebenen denjenigen, dessen Lage man bestimmen will, zu unterscheiden, muss man noch weitere Bedingungen zu Hülfe nehmen.

[**10**] Setzen wir zweitens fest, dass der gesuchte Punkt P zwei Meter Abstand von der zweiten Ebene B habe. Er muss dann in einer der beiden Ebenen liegen, welche auf beiden Seiten von B in dem Abstande von zwei Meter dieser Ebene parallel laufen. Um den beiden Bedingungen gleichzeitig zu genügen, muss der Punkt P mithin sowohl in einer der zu A, als in einer der zu B parallelen Ebenen und folglich auf dem gemeinsamen Durchschnitte dieser vier Ebenen liegen. Vier einander paarweise parallele und ihrer Lage nach bekannte Ebenen schneiden sich aber in vier parallelen Geraden, deren Lage ebenfalls bekannt ist. Berücksichtigen wir also gleichzeitig beide Bedingungen, so ist der Punkt nicht mehr mit allen Punkten des Raumes vermengt, auch nicht mehr mit allen Punkten von vier Ebenen, sondern nur noch mit den sämmtlichen Punkten von vier geraden Linien.

Wenn schliesslich der Punkt noch einen senkrechten Abstand von drei Meter von der dritten Ebene Γ haben soll, so sagt diese Bedingung aus, dass er in einer der beiden Ebenen, welche auf beiden Seiten von Γ in drei Meter Abstand laufen, liegen muss. Auf Grund aller drei Bedingungen muss der gesuchte Punkt P mithin in einer dieser beiden letzten parallelen Ebenen und auf einer der vier Geraden, in welchen sich die vier ersten Ebenen schneiden, liegen; folglich kann er nur einer von den Punkten sein, welche die beiden Ebenen mit den vier Geraden gemeinsam haben. Da nun aber jede der beiden parallelen Ebenen mit jeder der vier parallelen Geraden einen Punkt gemeinsam hat, so giebt es im Ganzen acht Punkte des Raumes, welche gleichzeitig den gestellten drei Bedingungen genügen. Der gesuchte Punkt P kann also nur einer dieser acht Punkte sein, unter welchen man ihn nur mit Hülfe von einigen besonderen Bedingungen herauserkennen kann.

Hat man z. B. bei der Angabe der Entfernung des Punktes P von der ersten Ebene A auch gesagt, nach welcher Richtung in Bezug auf diese Ebene der Abstand genommen werden soll, so ist von den früheren zwei zu A parallelen Ebenen nur noch eine in Betracht zu ziehen, nämlich die auf derjenigen Seite von A, nach welcher der Abstand gemessen werden soll, liegende Ebene. In gleicher Weise schliesst man eine der beiden zu B parallelen Ebenen aus, wenn man angiebt, in welcher Richtung in Bezug auf die zweite Ebene der Abstand gemessen werden soll, und es giebt dann nur eine Ebene, deren sämmtliche Punkte der zweiten Bedingung genügen. Vereinigt man nun diese Bedingungen, so kann der Punkt P nicht mehr auf den vier Schnittgeraden [**11**] von vier, paarweise einander parallelen Ebenen, sondern nur noch auf der Schnittgeraden zweier Ebenen liegen, und letztere ist ihrer Lage nach bekannt. Giebt man schliesslich auch an, auf welcher Seite der dritten Ebene $\mathsf{\Gamma}$ der Punkt P liegen soll, so giebt es ebenfalls nur eine Ebene, deren sämmtliche Punkte der dritten Bedingung genügen. Um nun den drei Forderungen gleichzeitig zu entsprechen, muss der Punkt P in dem Schnittpunkte dieser dritten Ebene mit der einzigen Geraden, in welcher sich die beiden ersten Ebenen schneiden, liegen. Es kann also der gesuchte Punkt P jetzt mit keinem andern Punkte des Raumes mehr zusammenfallen und ist folglich eindeutig bestimmt.

Man sieht also, dass die Ebene, obgleich sie hinsichtlich der Zahl ihrer Dimensionen ein weniger einfaches Gebilde ist als die gerade Linie, welche nur eine Dimension, und der Punkt, welcher keine Dimension besitzt, doch für die Bestimmung eines Punktes im Raume grössere Bequemlichkeit darbietet als die gerade Linie und der Punkt. Das hierbei gebrauchte Verfahren ist dasselbe, welches man gewöhnlich bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie benutzt, und bei welchem man zur Bestimmung der Lage eines Punktes seine Abstände von drei ihrer Lage nach bekannten Ebenen anzugeben pflegt.

In der darstellenden Geometrie aber, welche seit sehr langer Zeit von einer überaus grossen Anzahl Männer, und zwar solcher, deren Zeit kostbar war, angewendet worden ist, hat man das Verfahren noch weiter vereinfacht. Anstatt drei Ebenen verwenden zu müssen, ist es mit Hülfe der Projectionsmethode gelungen, deren nur zwei nöthig zu haben.

6. Die Projection eines Punktes auf eine gegebene Ebene nennt man den Fusspunkt des von diesem Punkte auf die Ebene gefällten Lothes.

Sind zwei Ebenen ihrer Lage in dem Raume nach bekannt, und giebt man auf jeder derselben die Projection eines und desselben Punktes an, dessen Lage man definiren will, so ist dadurch der Punkt völlig bestimmt. Denn zieht man durch die Projection des Punktes auf die erste Ebene eine Senkrechte zu dieser, so muss diese durch den zu bestimmenden Punkt hindurchgehen. Ebenso muss eine Gerade, welche man durch die Projection des Punktes auf die zweite Ebene senkrecht zu ihr zieht, durch den gesuchten Punkt hindurchgehen. Derselbe muss daher gleichzeitig auf zwei ihrer Lage im Raume nach bestimmten Geraden liegen und folglich mit dem einzigen Punkte, in welchem sich beide schneiden, zusammenfallen, wodurch er vollkommen bestimmt ist.

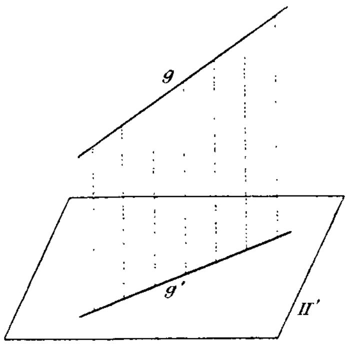

Fig. 1.

[**12**] In den folgenden Paragraphen finden sich die Hülfsmittel angegeben, welche dem Projectionsverfahren eine leichte Anwendbarkeit geben und es ermöglichen, dasselbe auf einem einzigen Zeichenblatte zu gebrauchen.

7. (Fig. 1) Wenn man von allen Punkten einer beliebig im Raume gelegenen unbegrenzten Geraden g Lothe auf eine gegebene Ebene Π' fällt, so liegen alle Schnittpunkte dieser Lothe mit der Ebene Π' in

einer zweiten unbegrenzten Geraden g'; denn alle Lothe liegen in der durch die Gerade g senkrecht zu Π' gelegten Ebene und können daher die Ebene Π' nur in dem beiden Ebenen gemeinsamen Durchschnitte, welcher bekanntlich eine gerade Linie ist, treffen [1]).

Die Gerade g', welche also durch die Projectionen aller Punkte der Geraden g auf die Ebene Π' hindurchgeht, heisst die Projection der Geraden g auf die Ebene.

Da nun zwei Punkte genügen, um die Lage einer geraden Linie zu bestimmen, so braucht man, um die Projection einer Geraden zu construiren, nur die Projectionen zweier ihrer Punkte zu ermitteln; die durch die Projectionen dieser Punkte gezogene Gerade ist die gesuchte Projection der gegebenen geraden Linie.

Daraus folgt, dass die Projection einer gegebenen Geraden sich auf einen Punkt reducirt, wenn die Gerade auf der Projectionsebene senkrecht steht, und zwar auf den Punkt, in welchem die Gerade diese Ebene schneidet.

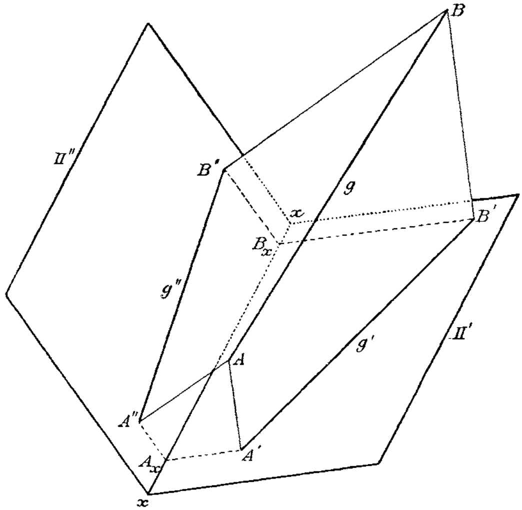

Fig. 2.

(Fig. 2) Wenn von ein und derselben unbegrenzten Geraden g ihre beiden Projectionen g' und g'' auf zwei nicht parallele

Ebenen Π' und Π'' gegeben sind, so ist die Gerade selbst bestimmt. Denn legt man durch die Projection g' eine Ebene senkrecht zu Π' hindurch, so geht diese ihrer Lage nach bekannte Ebene nothwendig durch die Gerade g hindurch. Ebenso enthält eine zweite Ebene, welche man durch die andere Projection g'' senkrecht zu Π'' hindurchlegt, und welche also ihrer Lage nach ebenfalls bekannt ist, die Gerade g. Folglich ist die Lage dieser Geraden, welche gleichzeitig in zwei ihrer Lage nach bestimmten Ebenen liegen und mithin deren Schnittgerade sein muss, völlig bestimmt.

8. Das soeben Gesagte ist unabhängig von der Lage der beiden Projectionsebenen und gilt stets, wie gross auch der Winkel sein mag, welchen die beiden Projectionsebenen mit einander einschliessen. Wenn aber der Winkel, welchen die beiden Projectionsebenen mit einander bilden, sehr stumpf ist, so ist der Winkel zwischen den beiden zu ihnen senkrechten projicirenden Ebenen sehr spitz, [**13**] und es können dann bei der Ausführung des obigen Verfahrens kleine Ungenauigkeiten sehr beträchtliche Fehler bei der Bestimmung der Lage der Geraden erzeugen. Um diese Ursache von Ungenauigkeiten zu vermeiden, wählt man die Projectionsebenen immer zu einander senkrecht, falls man nicht durch gewisse Erwägungen, welche grössere Erleichterungen in Aussicht stellen, von dieser Wahl abgelenkt wird. Da ferner die meisten Künstler, welche sich der Projectionsmethode bedienen, mit der Lage einer horizontalen Ebene und der Richtung des Bleilothes gut vertraut sind, so hat man sich daran gewöhnt, die eine der beiden Projectionsebenen horizontal, die andere vertical gestellt anzunehmen.

Die Nothwendigkeit, bei den Zeichnungen beide Projectionen auf demselben Zeichenblatte zur Darstellung zu bringen und alle Constructionen darauf auszuführen, hat die Künstler veranlasst, sich die verticale Ebene um ihre Schnittlinie mit der horizontalen Ebene als Scharnier gedreht zu denken, bis sie mit der letzteren Ebene zusammenfällt, und für diese Lage die Projectionen zu construiren.

Die verticale Ebene ist also in Wirklichkeit in einer horizontalen Ebene gezeichnet, und man muss sich stets daran erinnern, dass sie erst durch eine Viertelumdrehung um die Schnittgerade der horizontalen und der verticalen Projectionsebene in ihre eigentliche Stellung kommt. Es muss daher diese Schnittgerade*) stets in leicht ersichtlicher Weise auf dem Zeichenblatte angegeben sein.

(Fig. 3) Es wird also die verticale Projection g'' der Geraden g nicht auf einer Ebene Π'', welche thatsächlich vertical steht, gezeichnet; sondern man denkt sich vielmehr diese Ebene um die Gerade x nach Π_0'' gedreht und verzeichnet für diese Lage der Ebene die verticale Projection.

Diese Anordnung gewährt, abgesehen von den Erleichterungen, welche sie für die Construction bietet, noch den Vor-

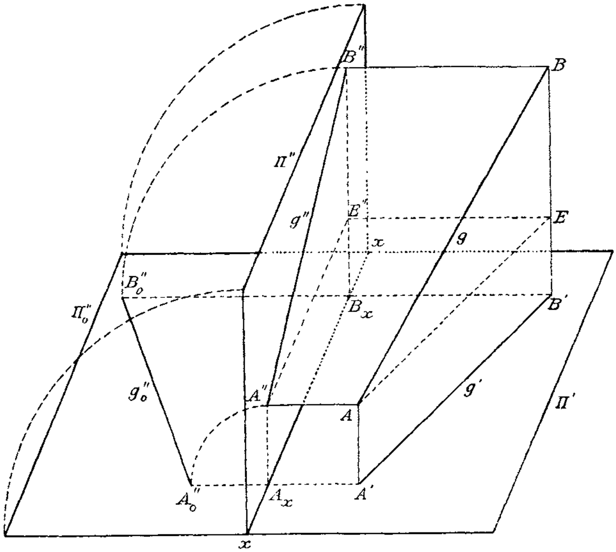

Fig. 3.

theil, dass sie die Arbeit des Projicirens abkürzt. Denn nehmen wir an, dass die Punkte A', A'' die horizontale und verticale Projection des Punktes A vorstellen, so steht die durch

*) [Für die Schnittgerade x der beiden Projectionsebenen werde ich der Einfachheit wegen im Folgenden meistens die jetzt übliche Benennung Projectionsaxe, oder, wenn kein Missverständniss möglich ist, Axe gebrauchen, welche Benennung sich im Originale nicht findet. Über die systematische Änderung der in den Figuren benutzten Bezeichnungen ist in den Textanmerkungen das Nöthige gesagt. *H.*]

die Geraden AA', AA'' hindurchgelegte Ebene gleichzeitig auf beiden Projectionsebenen senkrecht, da sie durch gerade Linien hindurchgeht, welche auf diesen letzteren Ebenen senkrecht stehen; folglich (Fig. 4) ist die Ebene $A'AA''$ auch senkrecht zu ihrer gemeinsamen Schnittgeraden x [welche sie in dem Punkte A_x schneidet], und mithin sind die Geraden $A'A_x$, $A''A_x$, in welchen diese Ebene die beiden Projectionsebenen schneidet, selbst senkrecht zu der Axe x.

[**14**] Wenn nun die verticale Ebene um die Axe x als Scharnier gedreht wird, bleibt die Gerade $A''A_x$ während dieser Bewegung stets senkrecht zu der Axe x und ist es auch dann noch, wenn sie nach erfolgtem Umlegen der verticalen in die horizontale Ebene die Lage $A_0''A_x$ angenommen hat. Da nun die beiden Geraden $A'A_x$ und $A_0''A_x$ durch denselben Punkt A_x der Axe hindurchgehen und auf ihr senkrecht stehen, so liegt jede in der Verlängerung der anderen. Dasselbe gilt von den beiden Geraden $B'B_x$ und $B_0''B_x$, welche zu einem beliebigen anderen Punkte B gehören. Daraus folgt, dass, wenn man die horizontale Projection eines Punktes hat, seine Projection auf die umgelegt gedachte verticale Projectionstafel immer auf der Geraden liegen muss, welche durch seine horizontale Projection senkrecht zu der Projectionsaxe x gezogen ist, und umgekehrt.

Von diesem Resultate wird bei der Ausführung von Constructionen immerfort Gebrauch gemacht.

9. Bis jetzt haben wir eine gerade Linie g als unbegrenzt angesehen und uns nur mit ihrer Richtung beschäftigt. Oft aber wird die Gerade als durch zwei ihrer Punkte begrenzt betrachtet und man kann in die Lage kommen, die wirkliche Länge der Strecke AB kennen zu müssen. Wir wollen zeigen, wie man diese aus den gegebenen beiden Projectionen der Strecke finden kann.

Wenn eine Strecke parallel zu einer der beiden Projectionsebenen ist, so ist ihre Länge gleich derjenigen ihrer Projection auf diese Ebene; denn die Strecke und diese Projection sind, da sie beide durch die von den Endpunkten der Strecke auf die Projectionsebenen gefällten Lothe begrenzt sind, einander parallel und liegen zwischen Parallelen. In diesem besonderen Falle ist also, wenn die Projection der Strecke gegeben ist, auch unmittelbar die Länge der Strecke selbst mitgegeben.

Eine Gerade ist aber einer der beiden Projectionsebenen parallel, wenn ihre Projection auf die andere Projectionsebene der Projectionsaxe x parallel ist.

Wenn dagegen eine Strecke gegen beide Projectionsebenen geneigt ist, so ist ihre Länge grösser als die Länge jeder ihrer Projectionen; sie kann aber durch eine sehr einfache Construction aus diesen abgeleitet werden.

Es sei AB die Strecke, deren beide Projectionen $A'B'$, $A''B''$ gegeben sind und deren wahre Länge gefunden werden soll. Zieht man durch den einen ihrer Endpunkte A in der durch

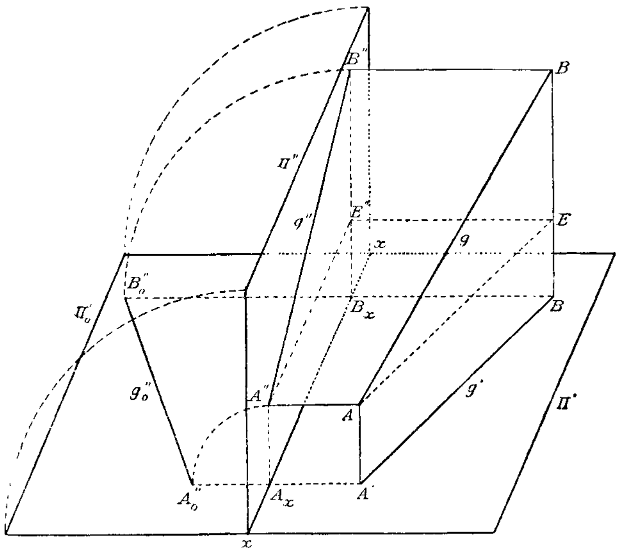

Fig. 4.

die Strecke AB hindurchgelegten verticalen Ebene [**15**] eine horizontale Gerade AE, welche das von dem andern Endpunkte, B auf die Horizontalebene gefällte Loth in dem Punkte E schneidet, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck AEB, welches man construiren muss, um die Länge der Strecke AB, der Hypotenuse dieses Dreiecks, zu erhalten. Nun kennt man aber von diesem Dreiecke ausser dem rechten Winkel die Länge der Seite AE, welche gleich der horizontalen Projection $A'B'$ ist. Zieht man ferner in der verticalen Projectionstafel durch den Punkt A'' eine horizontale Gerade $A''E''$, welche die verticale Projection von AE ist, so schneidet sie die verticale Gerade $B''B_x$ in dem Punkte E'', der verticalen Projection des Punktes E. Mithin ist $B''E''$ die verticale Projection der Strecke BE und hat mit derselben gleiche Länge. Da man also von dem rechtwinkligen Dreiecke die Längen der beiden Katheten kennt, so kann man leicht das Dreieck selbst construiren, dessen Hypotenuse die wahre Länge der Strecke AB angiebt.

Da die Figuren 3 und 4 in schiefer Parallelprojection gezeichnet sind, so haben sie für die in der darstellenden Geometrie üblichen Constructionen der Projectionsmethode keine unmittelbare Verwendung. Wir wollen aber sofort die Lösung dieser ersten Aufgabe in ihrer ganzen Einfachheit mittheilen.

Es seien (Fig. 5) die Gerade x als Projectionsaxe und die Strecken $A'B'$, $A''B''$ als die beiden Projectionen einer Strecke gegeben. Um die wahre Länge dieser Strecke zu finden, zieht man durch den Punkt A'' eine unbegrenzte horizontale Gerade A_0E'', welche die Gerade $B'B''$ in dem Punkte E'' schneidet und auf welcher man von diesem Punkte aus die Länge $A'B'$ bis A_0 abträgt. Zieht man dann die Hypotenuse A_0B'' dieses rechtwinkligen Dreiecks, so giebt sie die wahre Länge der Strecke AB.

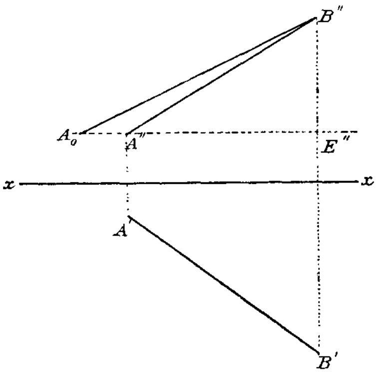

Fig. 5.

Da die beiden Projectionsebenen zu einander senkrecht sind, so könnte diese Construction, welche soeben in der einen dieser Ebenen ausgeführt ist, auch in der andern gemacht werden, wodurch das gleiche Resultat erzielt werden würde.

Wenn von einem durch ebene Flächen, geradlinige Kanten und körperliche Ecken begrenzten Körper seine beiden Projectionen, welche sich mithin auf die Systeme der Projectionen der geradlinigen Kanten reduciren, gegeben sind, so kann man nach dem Vorstehenden aus ihnen leicht die Länge jeder beliebigen Kante des Körpers bestimmen. Denn entweder ist diese Kante einer der beiden Projectionsebenen parallel, oder gegen beide geneigt; in dem ersteren Falle ist die gesuchte Länge der Kante gleich der ihrer Projection, und in dem letzteren Falle kann man sie aus ihren beiden Projectionen mit Hülfe des soeben auseinandergesetzten Verfahrens construiren.

Vergleich der darstellenden Geometrie mit der Algebra.

10. Es würde hier der Ort sein, um das Verfahren anzugeben, [**16**] nach welchem sich die Projectionen von Körpern, welche durch Ebenen und geradlinige Kanten begrenzt sind, construiren lassen; hierfür aber giebt es keine allgemeine Regel. Man erkennt leicht, dass die Construction der Projectionen eines Körpers mehr oder weniger leicht sein kann, je nach der Art und Weise, wie die Lage der Eckpunkte derselben bestimmt ist, und dass die Natur des Verfahrens von derjenigen der gegebenen Definition abhängt. Es verhält sich die darstellende Geometrie in diesem Punkte genau so, wie die Algebra, in welcher es auch kein allgemeines Verfahren giebt, um eine in Worten gegebene Aufgabe in Gleichungen umzusetzen. In jedem einzelnen Falle hängt der einzuschlagende Weg von der Art ab, in welcher die Beziehung zwischen den bekannten und den unbekannten Grössen gegeben ist, und man kann die Anfänger nur durch verschiedenartige Beispiele daran gewöhnen, diese Beziehungen richtig zu erfassen und in Form von Gleichungen zu schreiben. Dasselbe gilt für die darstellende Geometrie. Nur durch zahlreiche Beispiele und den Gebrauch von Lineal und Zirkel im Zeichensaale kann man sich Übung und Gewandtheit in den Constructionen und in der richtigen Wahl der für jeden einzelnen Fall einfachsten und elegantesten Methode erwerben. Aber gerade, wie es in der Analysis[2]), nachdem eine Aufgabe in Gleichungen umgesetzt ist, Methoden giebt, um diese Gleichungen weiter zu behandeln und aus ihnen die Werthe der Unbekannten abzuleiten, so besitzt auch die darstellende Geometrie allgemeine Methoden, um, wenn die Projectionen von Körpern ausgeführt worden sind, aus ihnen alles zu construiren, was aus der Gestalt und der Lage der letzteren folgt.

Wir vergleichen hier nicht ohne Absicht die darstellende Geometrie mit der Algebra; diese beiden Zweige der Mathematik haben die engsten Beziehungen zu einander. Es giebt keine Construction in der darstellenden Geometrie, welche sich nicht in die Analysis übertragen lässt; und umgekehrt kann bei Aufgaben, welche nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, jede analytische Operation als Beschreibung einer geometrischen Operation aufgefasst werden.

Es wäre zu wünschen, dass diese beiden Zweige der Mathematik zusammen gepflegt würden. Dann würde die darstellende Geometrie in die verwickeltsten analytischen Operationen die ihr eigene Durchsichtigkeit hineinbringen, und die Analysis umgekehrt die ihr eigene Allgemeinheit in die Geometrie.

Grundsätze für die Darstellung der Gestalt und Lage von Flächen. Anwendung auf die Ebene.

11. Die Übereinkunft, welche der Projectionsmethode zur Grundlage dient, ist geeignet, die Lage eines Punktes, [17] einer unbegrenzten oder begrenzten geraden Linie und folglich auch die Gestalt und Lage eines durch ebene Flächen, geradlinige Kanten und körperliche Ecken begrenzten Körpers darzustellen, da in diesem Falle der Körper vollständig bekannt ist, wenn man die Lage aller seiner Kanten und Ecken kennt. Wenn aber der Körper begrenzt wird entweder durch eine einzige krumme Fläche, für deren sämmtliche Punkte also dasselbe Gesetz gilt, wie z. B. die Kugelfläche, oder durch eine Anzahl von Stücken verschiedener krummer Flächen, so würde dieses Verfahren nicht nur unbequem und unpraktisch sein und nicht den Vortheil, eine Abbildung zu geben, gewähren, sondern es würde sogar unzulänglich und nicht verwendbar sein.

Zunächst sieht man leicht ein, dass unsere früher getroffene Übereinkunft unbequem und sogar, wenn sie die einzige ist, unbrauchbar ist. Denn um die Lage aller Punkte einer krummen Fläche darzustellen, müsste nicht nur ein jeder derselben durch seine horizontale und verticale Projection gegeben sein, sondern es müssten auch die beiden Projectionen eines und desselben Punktes miteinander verbunden werden, damit man nicht Gefahr liefe, zu der Horizontalprojection eines bestimmten Punktes als Verticalprojection diejenige eines anderen Punktes zu nehmen. Da die einfachste Art, die beiden Projectionen eines Punktes als zusammengehörig zu bezeichnen, die sein würde, sie durch eine zur Projectionsaxe senkrechte Gerade zu verbinden, so würden die Zeichnungen mit einer ungeheuren Zahl von Linien überladen werden, welche um so verwirrender wirken würden, je grössere Genauigkeit erzielt werden sollte.

Wir wollen aber noch zeigen, dass diese Methode sogar unzulänglich ist und der nöthigen Fruchtbarkeit entbehrt.

Unter der unendlich grossen Zahl verschiedenartiger krummer Flächen giebt es solche, welche sich nur in einen im Endlichen begrenzten Theil des Raumes erstrecken und deren Projectionen also nach allen Richtungen hin nur eine endliche Ausdehnung haben. Zu diesen Flächen gehört z. B. die Kugel, deren Projection auf eine Ebene die Fläche eines Kreises mit einem dem Kugelradius gleichen Radius überdeckt; man kann daher das Ebenenstück, auf welches man die Kugel projiciren soll, stets von genügend grossen Abmessungen nehmen, damit ihre ganze Projection auf dasselbe zu liegen kommt. Alle cylindrischen Flächen dagegen sind nach einer bestimmten Richtung [**18**] unbegrenzt, genau so wie ihre erzeugende Gerade. Die Ebene, welche die einfachste aller Flächen darstellt, ist sogar nach zwei Richtungen hin unbegrenzt. Endlich giebt es eine grosse Anzahl von Flächen, deren verschiedene Schalen sich gleichzeitig nach allen Raumgebieten hin ausdehnen. Nun haben aber die Zeichenblätter, auf welchen man die Projectionen ausführt, nothwendigerweise eine begrenzte Ausdehnung. Wenn man also kein anderes Mittel zur Darstellung einer krummen Fläche hätte, als die beiden Projectionen jedes ihrer Punkte anzugeben, so würde dieses nur für diejenigen Punkte der Fläche anwendbar sein, welche innerhalb des der Grösse der Projectionstafeln entsprechenden Gebietes der Fläche liegen; alle darüber hinaus liegenden Punkte der Fläche könnten nicht dargestellt und müssten als unbekannt angesehen werden. Dieses Verfahren ist also völlig unzureichend; es ist aber auch unfruchtbar, da man mit seiner Hülfe nichts ableiten kann, was Bezug hat auf Tangentialebenen und Normalen einer Fläche, auf die beiden Krümmungen in jedem ihrer Punkte, auf ihre Krümmungslinien und Rückkehrkanten, auf ihre mehrfachen Linien und Punkte und endlich auf alle Dinge, welche nothwendigerweise betrachtet werden müssen, sobald man auf einer krummen Fläche operiren will.

Deshalb muss man also eine weitere Übereinkunft zu Hülfe nehmen, welche mit der ersten verträglich ist und diese überall da, wo sie unzureichend ist, ergänzt. Diese neue Übereinkunft wollen wir jetzt auseinandersetzen.

2*

12. Jede krumme Fläche kann als erzeugt gedacht werden durch die Bewegung einer krummen Linie, welche entweder der Gestalt nach unverändert bleibt, während sie ihre Lage im Raume ändert, oder welche gleichzeitig ihre Gestalt und ihre Lage im Raume ändert. Da dieser Satz durch seine allgemeine Fassung dem Verständnisse Schwierigkeiten darbieten könnte, so wollen wir ihn an einigen wohlbekannten Beispielen erläutern.

Die Cylinderflächen können vornehmlich auf zweierlei Art erzeugt werden, nämlich entweder durch die Bewegung einer geraden Linie, welche während ihrer ganzen Bewegung stets einer gegebenen Geraden parallel bleibt und durch eine gegebene Curve hindurchgeht, oder durch die Bewegung dieser, im ersteren Falle als Leitlinie dienenden Curve, welche bei ihrer ganzen Bewegung mit demselben Punkte auf der gegebenen Geraden ruht, während ihre sämmtlichen andern Punkte Parallelen zu dieser Geraden beschreiben. Bei beiden Entstehungsarten ist die Erzeugende, [**19**] welche im ersten Falle eine gerade Linie, im zweiten Falle eine beliebig gegebene Curve ist, der Gestalt nach unveränderlich und ändert allein ihre Lage im Raume.

Ebenso haben die Kegelflächen haupsächlich zwei Erzeugungsweisen.

Erstens kann man die Kegelflächen durch die Bewegung einer unbegrenzten Geraden erzeugt denken, welche immer durch einen gegebenen festen Punkt und durch eine gegebene Curve, an welcher sie entlang gleitet, hindurchgeht. Der Punkt, durch welchen die Gerade während ihrer Bewegung stets hindurchgeht, ist der Mittelpunkt der Fläche, welchen man unpassend als S p i t z e bezeichnet hat. Bei dieser Entstehung der Kegelflächen ist die erzeugende Linie ihrer Gestalt nach ebenfalls unveränderlich; sie ist immer eine gerade Linie.

Zweitens aber kann man die Kegelflächen noch auf eine andere Weise erzeugen, welche wir der Einfachheit wegen hier nur für Kegelflächen mit Kreisgrundfläche auseinandersetzen. Man kann sich diese Flächen entstanden denken durch die Bewegung eines Kreises, dessen Ebene immer zu sich selbst parallel bleibt, dessen Mittelpunkt stets auf einer durch die Spitze gehenden Geraden liegt und dessen Radius in jedem Augenblicke der Bewegung proportional dem Abstande seines Mittelpunktes von der Spitze des Kegels ist. Man erkennt sofort, dass der Radius des Kreises kleiner wird, wenn sich die Kreisebene in ihrer Bewegung der Spitze des Kegels annähert, dass er gleich Null ist, wenn diese Ebene durch die Spitze hindurchgeht, und dass er dann umgekehrt unbegrenzt wächst, wenn sich diese Ebene nach der andern Seite immer weiter von der Spitze entfernt. Bei dieser zweiten Entstehungsweise ändert der Kreis, welcher hier die erzeugende Curve ist, nicht nur in jedem Augenblick der Bewegung seine Lage, sondern auch seine Gestalt, weil sich der Radius des Kreises, mithin auch seine Krümmung und sein Umfang immerfort ändern.

Betrachten wir ein drittes Beispiel.

Eine Umdrehungsfläche kann durch die Bewegung einer ebenen Curve, welche sich um eine beliebig in ihrer Ebene gelegene Gerade dreht, erzeugt werden. Bei dieser Entstehungsweise der Fläche besitzt die erzeugende Curve stets unverändert dieselbe Gestalt und verändert nur ihre Lage. Man kann diese Fläche aber auch durch die Bewegung eines Kreises erzeugt denken, dessen Mittelpunkt stets auf der gegebenen Axe der Fläche liegt, dessen Ebene zu dieser Axe immer senkrecht ist und dessen Radius in jedem Augenblicke der Bewegung [**20**] gleich der Entfernung des Axenschnittpunktes der Kreisebene von ihrem Schnittpunkte mit einer beliebig im Raume gegebenen Curve ist. Hierbei ändert also die erzeugende Curve gleichzeitig ihre Gestalt und ihre Lage.

Diese drei Beispiele mögen genügen, um erkennen zu lassen, dass alle krummen Flächen durch die Bewegung von bestimmten krummen Linien erzeugt werden können, und dass es keine Fläche giebt, deren Gestalt und Lage nicht gänzlich durch die genaue und vollständige Angabe ihrer Entstehungsweise bestimmt werden kann. Diese neue Betrachtung bildet die Ergänzung zur Projectionsmethode. Wir werden in Zukunft oft Gelegenheit haben, uns von ihrer Einfachheit und Nützlichkeit zu überzeugen.

Man wird also, um die Gestalt und Lage einer krummen Fläche zu bestimmen, nicht die Projectionen der einzelnen Punkte, durch welche dieselbe hindurchgeht, angeben, sondern für einen beliebigen Punkt die zugehörige Gestalt und Lage der erzeugenden Curve construiren. Hierbei hat man folgendes zu beachten:

1) Da jede krumme Fläche auf unendlich viele verschiedene Arten erzeugt werden kann, so ist es Sache der Geschicklichkeit und des Scharfsinns des Zeichners, unter allen Erzeu-

gungsarten diejenige auszuwählen, welche die einfachste Curve benutzt und die am wenigsten mühsamen Betrachtungen erfordert.

2) Statt für jede krumme Fläche nur eine ihrer Erzeugungsarten zu betrachten, was das Studium des Gesetzes der Bewegung sowohl als desjenigen der Gestaltänderung der erzeugenden Curve erfordern würde, ist es, wie langjährige Erfahrung gelehrt hat, oft viel einfacher, gleichzeitig zwei verschiedene Erzeugungsarten der Fläche ins Auge zu fassen und für jeden Punkt die Construction der beiden erzeugenden Curven, welche durch ihn hindurchgehen, anzugeben.

Um also eine krumme Fläche ihrer Gestalt und Lage nach darzustellen, genügt es in der darstellenden Geometrie für einen beliebigen Punkt dieser Fläche, dessen eine Projection willkürlich gewählt werden kann, die Construction der horizontalen und verticalen Projectionen von zwei verschiedenen Erzeugenden, welche durch diesen Punkt hindurchgehen, anzugeben.

13. Wenden wir diese allgemeinen Betrachtungen zunächst auf die Ebene an, welche die einfachste und am häufigsten benutzte aller Flächen ist.

Die Ebene wird durch eine in ihrer Anfangslage gegebene gerade Linie erzeugt, [**21**] welche sich so bewegt, dass ihre sämmtlichen Punkte parallele Gerade zu einer zweiten gegebenen geraden Linie beschreiben. Wenn die zweite gegebene Gerade in der betrachteten Ebene selbst liegt, so kann man auch sagen, dass die Ebene durch die zweite Gerade erzeugt wird, welche sich so bewegt, dass ihre sämmtlichen Punkte Parallelen zu der ersten Geraden beschreiben.

Man erhält also ein Bild von der Lage einer Ebene durch die Betrachtung von zwei geraden Linien, deren jede als die Erzeugende der Ebene angesehen werden kann. Die Lage dieser zwei Geraden in der Ebene, welche sie erzeugen können, ist völlig gleichgültig; es handelt sich also nur darum, für die Projectionsmethode diejenigen Geraden auszuwählen, welche die einfachsten Constructionen erfordern. Aus diesem Grunde bestimmt man in der darstellenden Geometrie die Lage einer Ebene durch die Angabe der beiden Geraden, in welchen jene die Projectionsebenen schneidet. Offenbar müssen diese beiden geraden Linien die Schnittgerade der beiden Projectionstafeln in demselben Punkte schneiden.

Da wir sehr häufig Ebenen zu betrachten haben werden, so wollen wir, um uns kürzer ausdrücken zu können, den beiden Geraden, in denen die beiden Projectionsebenen von einer Ebene geschnitten werden und welche zur Bestimmung ihrer Lage dienen, den Namen der Spurlinien beilegen.

Lösung mehrerer elementarer Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene.

14. Nachdem wir diese Vereinbarungen getroffen haben, können wir zur Lösung einer Reihe von Aufgaben übergehen, welche den doppelten Zweck, uns in der Projectionsmethode zu üben und uns zugleich die Hülfsmittel zur Erreichung weiterer Fortschritte in der darstellenden Geometrie zu verschaffen, verfolgen.

Erste Aufgabe. (Fig. 6) Es sind ein Punkt P durch seine beiden Projectionen P', P'' und eine Gerade g durch ihre beiden Projectionen g', g'' gegeben. Man soll die Projectionen der Geraden h construiren, welche durch den Punkt P hindurchgeht und der Geraden g parallel ist.

Lösung. Die horizontalen Projectionen der gegebenen und der gesuchten Geraden, g' und h', müssen zu einander parallel sein, da sie die Schnittgeraden zweier parallelen Verticalebenen mit derselben dritten Ebene sind. Dasselbe gilt für die verticalen Projectionen g'' und h''. [**22**] Da ferner die gesuchte Gerade h durch den Punkt P hindurchgehen soll, so müssen ihre Projectionen bezüglich durch die Projectionen dieses Punktes hindurchgehen. Zieht man also durch den Punkt P' die Gerade h' parallel zu g' und durch P'' die Gerade h'' parallel zu g'', so sind die geraden Linien h' und h'' die gesuchten Projectionen.

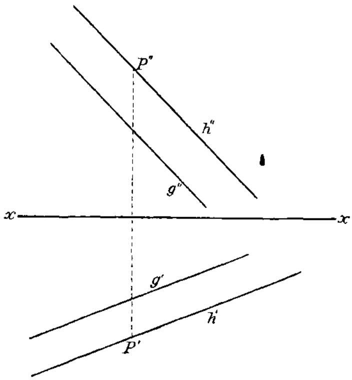

Fig. 6.

15. **Zweite Aufgabe.** (Fig. 7) Eine Ebene E ist durch ihre beiden Spurlinien e_1, e_2 und ein Punkt P durch

seine Projectionen P', P'' gegeben. Man soll die Spurlinien der Ebene Δ construiren, welche durch den gegebenen Punkt parallel zu der gegebenen Ebene hindurchgelegt werden kann.

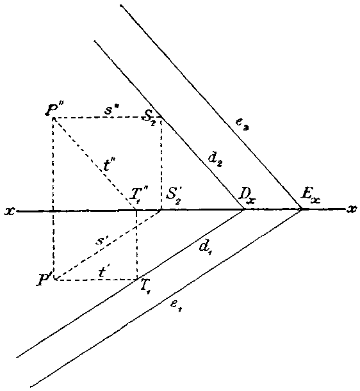

Fig. 7.

Lösung. Die Spurlinien der gesuchten Ebene Δ müssen den Spurlinien der gegebenen Ebene E bezüglich parallel sein, weil dieselben, paarweise zusammengenommen, die Schnittgeraden zweier parallelen Ebenen mit derselben dritten Ebene sind. Man braucht also nur noch für jede Spurlinie einen Punkt zu bestimmen, durch welchen sie hindurchgehen muss. Zu diesem Zwecke denken wir uns durch den Punkt P eine horizontale Gerade s gezogen, welche in der gesuchten Ebene Δ liegt. Diese Gerade s ist der Spur e_1 parallel und schneidet die verticale Tafel in einem Punkte S_2, welcher auf der in der verticalen Projectionstafel liegenden Spurlinie der gesuchten Ebene Δ liegt. Die beiden Projectionen dieses Punktes erhält man, wenn man durch den Punkt P'' die horizontale Gerade s'', durch den Punkt P' die Parallele s' zu der Spur e_1 zieht und s' bis zu ihrem Schnittpunkte S'_2 mit der Projectionsaxe x verlängert, welcher Punkt die horizontale Projection des Schnittpunktes der horizontalen Geraden s mit der verticalen Tafel ist; der Punkt S_2 selbst liegt mithin auf der durch den Punkt S'_2 senkrecht zur Axe x gezogenen Geraden und ist, da er auch auf der Geraden s'' liegen muss, der Schnittpunkt beider. Zieht man dann endlich die Parallele d_2 zu der Spurlinie e_2 durch diesen Punkt S_2, so ist diese die in der verticalen Projectionstafel gelegene Spurlinie der gesuchten Ebene Δ. Verlängert man die Linie d_2 bis zu ihrem Schnittpunkte D_x mit der Axe x, und zieht man durch diesen Punkt die zu der Spur e_1 parallele Gerade d_1, so ist letztere die in der horizontalen Projectionsebene gelegene Spurlinie der Ebene Δ.

Anstatt in der gesuchten Ebene sich eine horizontale Gerade s gezogen zu denken, kann man auch eine zu der verticalen Projectionsebene parallele Hülfsgerade t benutzen, was durch ein ganz gleiches Schlussverfahren zu der folgenden Construction führt.

[**23**] Durch den Punkt P' zieht man die zu der Axe x parallele Gerade t', durch den Punkt P'' die zu der Spur e_2 parallele Gerade t'' bis zu ihrem Axenschnittpunkte T_1'' und durch diesen eine zur Axe x senkrechte Gerade, welche die Gerade t' in dem Punkte T_1 schneidet. Wenn man dann durch den letzteren Punkt zu der Spur e_1 die Parallele d_1 zieht, so ist sie die eine Spurlinie der gesuchten Ebene Δ. Verlängert man diese Spurlinie d_1 bis zu ihrem Axenschnittpunkt D_x, und zieht man durch diesen die Parallele d_2 zu der Spurlinie e_2, so hat man auch die Spurlinie der gesuchten Ebene in der verticalen Projectionstafel gefunden.

16. **Dritte Aufgabe.** (Fig. 8) Eine Ebene E ist durch ihre beiden Spurlinien e_1, e_2 und ein Punkt P durch seine beiden Projectionen P', P'' gegeben. Es sollen die Projectionen des von dem Punkte P auf die Ebene E gefällten Lothes l und die seines Fusspunktes Q bestimmt werden.

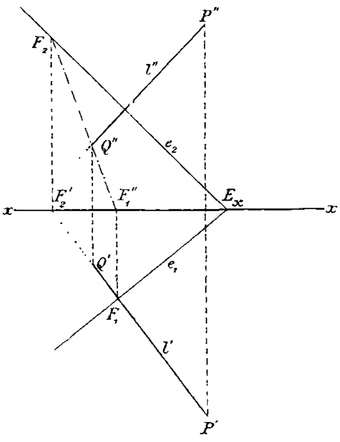

Fig. 8.

Lösung. Die von den Projectionen P', P'' des gegebenen Punktes P auf die gleichnamigen Spurlinien der Ebene E gefällten Lothe l' und l'' sind die beiden Projectionen des gesuchten Lothes. Denn wenn man sich durch das Loth l eine zu der horizontalen Projectionstafel Π' senkrechte Ebene gelegt denkt, so schneidet sie diese Projectionstafel und die Ebene E in zwei Geraden, welche beide auf der diesen Ebenen gemeinsamen Schnittgeraden e_1 senkrecht stehen. Nun ist aber die erste jener beiden Geraden die Projection der verticalen Hülfsebene und mithin auch die Projection l' des in dieser Hülfsebene liegenden

Lothes l. Folglich muss diese Projection l' durch den Punkt P' hindurchgehen und auf der gleichnamigen Spur e_1 senkrecht stehen.

Das gleiche Schlussverfahren gilt für die zweite Projection l''.

Um den Durchstosspunkt Q des Lothes l durch die Ebene E zu erhalten (Fig. 9), hat man zu beachten, dass derselbe offenbar auf der Schnittlinie dieser Ebene mit der durch das Loth l gehenden verticalen Hülfsebene liegen muss. Diese Schnittgerade projicirt sich also in die Linie l'. Bestimmt man noch die verticale Projection dieser Schnittgeraden, so muss auf ihr die gleichnamige Projection Q'' des gesuchten Punktes Q liegen und, weil auch die Linie l'' durch jene hindurchgehen muss, so ist Q'' der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Es ist also nur noch die verticale Projection der genannten Schnittgeraden zu construiren. Nun trifft aber diese Gerade die horizontale Projectionstafel in dem Schnittpunkte F_1 der beiden Geraden l' und e_1 (dessen verticale Projection der Fusspunkt F_1'' des von F_1 auf die Axe x gefällten Lothes ist) und die verticale Projectionstafel [**24**] in einem Punkte, dessen horizontale Projection F_2' der Schnittpunkt der Geraden l' mit der Axe x ist, und welcher selbst sowohl auf der durch den Punkt F_2' gezogenen Verticalen als auf der Spurlinie e_2, mithin im Schnittpunkte F_2 beider Geraden liegen muss.

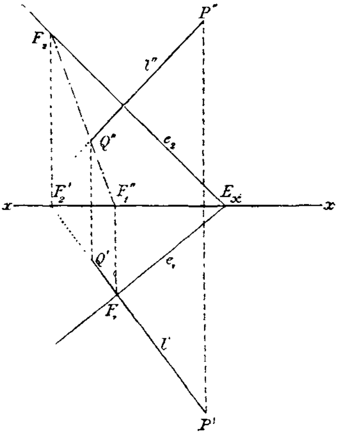

Fig. 9.

Nachdem man so die verticale Projection Q'' des Schnittpunktes von dem Lothe l mit der Ebene E gefunden hat, kann man leicht seine erste Projection Q' ermitteln. Fällt man nämlich von Q'' ein Loth auf die Axe x und verlängert es über dieselbe hinaus, so muss das Loth durch Q' hindurchgehen, welcher Punkt andererseits auch auf der Geraden l' liegen muss. Mithin ist Q' der Schnittpunkt dieser beiden Geraden.

17. **Vierte Aufgabe.** (Fig. 10) Eine Gerade g und ein Punkt P sind durch ihre Projectionen g', g'' und P', P'' gegeben. Man soll die Spurlinien der Ebene E construiren, welche durch den Punkt P hindurchgeht und auf der Geraden g senkrecht steht.

Lösung. Von der vorigen Aufgabe her wissen wir, dass jede der beiden Spurlinien der Ebene E auf der gleichnamigen Projection der Geraden g senkrecht stehen muss; es ist daher für jede nur noch ein Punkt, durch welchen sie hindurchgehen muss, zu suchen. Denkt man sich zu diesem Zwecke durch den Punkt P in der Ebene E eine horizontale Gerade s gezogen und bis zu ihrem Schnittpunkte mit der verticalen Projectionsebene verlängert, so findet man deren verticale Projection s'', indem man durch den Punkt P'' eine Parallele zur Axe x zieht, und ihre horizontale Projection, indem man durch den Punkt P' zu der ersten Projection g' der Geraden g eine Senkrechte s' zieht, deren Schnittpunkt S_2' mit der Axe x die horizontale Projection des Schnittpunktes S_2 der verticalen Projectionsebene und der Geraden s ist. Dieser Punkt S_2, welcher der Schnittpunkt der durch S_2' gezogenen Verticalen und der Geraden s'' sein muss, ist mithin ein Punkt der zweiten Spurlinie e_2 der Ebene E, und man erhält diese Spur e_2, wenn man durch den Punkt S_2 eine Senkrechte zu g'' zieht. Ist E_x der Schnittpunkt dieser Spurlinie e_2 und der Projectionsaxe, so ist die durch ihn senkrecht zu g' gezogene Gerade e_1 die andere gesuchte Spurlinie.

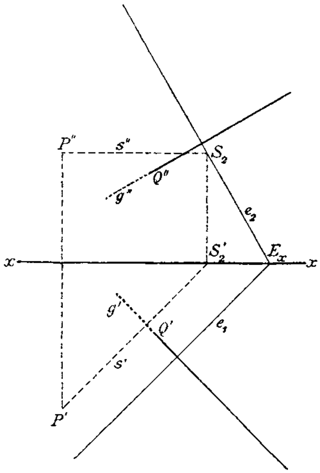

Fig. 10.

Wird noch verlangt, den Durchstosspunkt der gegebenen Geraden g durch die Ebene E zu bestimmen, so verfährt man genau so wie in der vorigen Aufgabe.

Soll man schliesslich von dem gegebenen Punkte P ein Loth auf die Gerade g fällen, so braucht man nur, nach dem in § 16 angegebenen Verfahren, den Durchstosspunkt [**25**] der

Geraden g durch die Ebene E, welche durch den Punkt P hindurchgelegt ist und auf der Geraden g senkrecht steht, zu construiren. Dann kennt man für jede der beiden Projectionen des gesuchten Lothes zwei Punkte, durch welche sie hindurchgehen muss.

18. **Fünfte Aufgabe.** (Fig. 11) Zwei Ebenen A und B sind durch ihre Spurlinien a_1, a_2 und b_1, b_2 gegeben. Es sollen die Projectionen ihrer Schnittgeraden g bestimmt werden.

Lösung. Da alle Punkte der Spurlinie a_1 in der Ebene A und alle Punkte der Spurlinie b_1 in der Ebene B liegen, so gehört der Schnittpunkt G_1 beider Spurlinien offenbar beiden Ebenen gleichzeitig an und ist mithin ein Punkt der gesuchten Schnittgeraden g. Aus dem gleichen Grunde ist der Schnittpunkt G_2 der beiden in der verticalen Projectionsebene gelegenen Spurlinien a_2 und b_2 ebenfalls ein Punkt der gesuchten Geraden. Die Schnittgerade g der beiden gegebenen Ebenen schneidet also die erste Projectionsebene in dem Punkte G_1, die zweite in dem Punkte G_2.

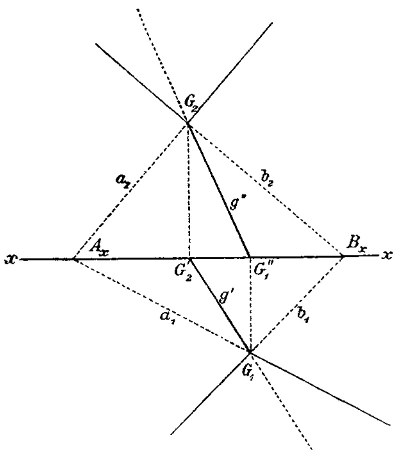

Fig. 11.

Projicirt man dann den Punkt G_2 auf die erste Projectionsebene, indem man von G_2 das Loth $G_2\,G_2'$ auf die Axe x fällt, und zieht man die Gerade $G_1\,G_2'$, so ist sie die horizontale Projection g' der Schnittgeraden g der beiden gegebenen Ebenen. In ähnlicher Weise erhält man die verticale Projection g'' dieser Geraden, wenn man G_1 mittelst des auf die Axe x gefällten Lothes $G_1\,G_1''$ auf die verticale Projectionsebene projicirt und die Gerade $G_2\,G_1''$ zieht.

19. **Sechste Aufgabe.** (Fig. 12) Man soll den Neigungswinkel ε, welchen zwei durch ihre Spurlinien a_1, a_2

und b_1, b_2 gegebene Ebenen A und B mit einander einschliessen, construiren.

Lösung. Nachdem man nach der vorigen Aufgabe die horizontale Projection g' der Schnittgeraden g beider gegebenen Ebenen construirt hat, legt man senkrecht zu ihnen und folglich auch senkrecht zu ihrer Schnittgeraden g eine Hülfsebene, welche die beiden gegebenen Ebenen A und B in zwei Geraden, die den gesuchten Winkel ε einschliessen, schneidet.

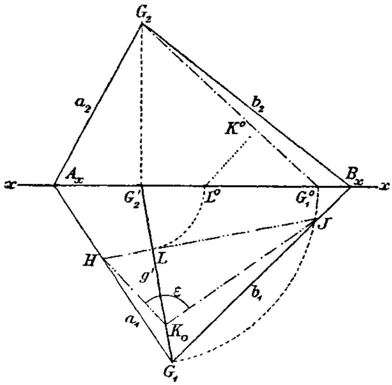

Fig. 12.

Die erste Spurlinie dieser Hülfsebene ist zu der horizontalen Projection g' der Schnittgeraden g beider gegebenen Ebenen senkrecht und bildet mit den Geraden, in welchen sich A und B und die Hülfsebene schneiden, ein Dreieck, dessen der horizontalen Seite gegenüberliegender Winkel [**26**] der gesuchte Winkel ε ist. Es erübrigt daher nur noch die Construction dieses Dreiecks auszuführen.

Nun ist es aber gleichgültig, durch welchen Punkt der Schnittgeraden g die zu den beiden gegebenen Ebenen senkrechte Hülfsebene hindurchgeht, und man kann daher ihre erste Spurlinie beliebig in der horizontalen Projectionsebene wählen, nur muss sie senkrecht auf g' stehen. Zieht man also durch den beliebig auf g' gewählten Punkt L senkrecht zu g' eine Gerade, welche die horizontalen Spurlinien a_1 und b_1 der gegebenen Ebenen in den Punkten H und J schneidet, so ist dieselbe die Grundlinie des zu construirenden Dreiecks. Legt man dann die Ebene dieses Dreiecks um seine Grundlinie HJ in die horizontale Projectionsebene um, so bleibt bei dieser Bewegung der Scheitelpunkt K des Dreiecks, welcher zuerst auf der Schnittgeraden g gelegen ist, stets in der durch diese Gerade gehenden Verticalebene, weil diese senkrecht zu HJ ist, und liegt mithin nach erfolgtem Umlegen des Dreiecks in die horizontale Projectionsebene auf der Linie g'. Folglich braucht man jetzt nur noch die Höhe des Dreiecks oder, was dasselbe ist, die Länge des von dem Punkte L auf die Gerade g gefällten Lothes zu bestimmen.

Dieses Loth liegt aber in der durch g' hindurchgehenden Verticalebene; legt man diese um die verticale Gerade $G_2 G_2'$ in die verticale Projectionstafel um, und trägt man $G_2' G_1$ und $G_2' L$ auf der Projectionsaxe x von G_2' bis $G_1{}^0$, bez. L^0 ab, so ist die Strecke $G_2 G_1{}^0$ gleich dem Stücke der Schnittgeraden g, welches zwischen den beiden Projectionsebenen gelegen ist. Fällt man noch von dem Punkte L^0 das Loth $L^0 K^0$ auf die Gerade $G_2 G_1{}^0$, so ist dieses gleich der gesuchten Dreieckshöhe.

Trägt man schliesslich die Strecke $L^0 K^0$ von dem Punkte L aus auf der Geraden g' bis K_0 ab und vervollständigt man das Dreieck $HK_0 J$, so ist dessen Winkel im Punkte K_0 gleich dem von den beiden Ebenen A und B eingeschlossenen Winkel ε.

20. **Siebente Aufgabe.** (Fig. 13) Zwei sich schneidende gerade Linien g und h sind durch ihre Projectionen g', g'' und h', h'' gegeben. Es soll der von ihnen eingeschlossene Winkel α construirt werden.

Bevor wir an die Lösung dieser Aufgabe herangehen, bemerken wir, dass, weil sich die beiden Geraden g und h nach der Voraussetzung schneiden sollen, der Schnittpunkt P' ihrer horizontalen Projectionen und der Schnittpunkt P'' ihrer verticalen Projectionen die Projectionen des Punktes P sind, in welchem sich die beiden Geraden g und h schneiden, und dass daher die Verbindungslinie $P' P''$ senkrecht [**27**] auf der Axe x stehen muss. Würden die Punkte P' und P'' nicht in derselben Senkrechten zur Axe x liegen, so würden sich die gegebenen Geraden nicht schneiden und könnten folglich nicht in einer Ebene liegen.

Lösung. Man verlängert die beiden gegebenen Geraden, bis sie die horizontale Projectionsebene in ihren Spurpunkten G_1 und H_1 schneiden, und construirt diese Punkte. Zu diesem Zwecke verlängert man die zweiten Projectionen g'' und h'' bis zu ihren Axenschnittpunkten G_1'' und H_1'', welche die verticalen Projectionen dieser beiden Spurpunkte sind, und zieht durch beide Punkte in der horizontalen Projectionsebene und senkrecht zur Axe x zwei Gerade, deren Schnittpunkte mit den nöthigenfalls verlängerten ersten Projectionen g' und h' der Geraden g und h ihre ersten Spurpunkte G_1 und H_1 sind.

Die Verbindungsgerade $G_1 H_1$ bildet dann mit den Theilen der gegebenen Geraden g und h, welche zwischen ihrem Schnittpunkte P und ihren beiden ersten Spurpunkten G_1, H_1 liegen, ein Dreieck, dessen der Grundlinie $G_1 H_1$ gegenüberliegender Winkel der gesuchte Winkel α ist. Es ist mithin nur noch dieses Dreieck zu construiren. Dazu zieht man durch den Punkt P' eine gerade Linie $P'Q$ senkrecht zu $G_1 H_1$ und legt die Ebene des Dreiecks $G_1 P H_1$ um die Grundlinie $G_1 H_1$ in die horizontale Projectionstafel um. Während dieser Bewegung liegt die Spitze dieses Dreiecks stets in der durch die gerade Linie $P'Q$ gehenden verticalen Ebene und kommt nach erfolgtem Umlegen in einen Punkt dieser Linie selbst zu liegen, dessen senkrechter Abstand von der Grundlinie $G_1 H_1$ noch zu finden ist.

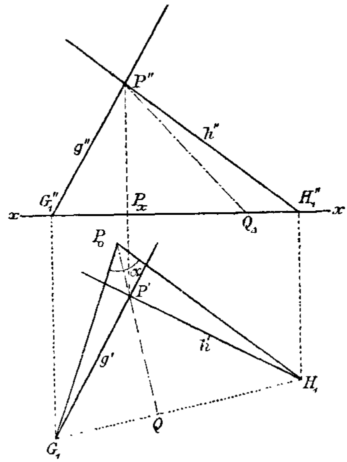

Fig. 13.

Die horizontale Projection der gesuchten Strecke PQ ist $P'Q$ und die verticale Erhebung des Endpunktes P über den andern Endpunkt Q ist gleich $P_x P''$; folglich erhält man (nach Figur 5 auf Seite 16) die wahre Länge von PQ, indem man die Strecke $P'Q$ auf der Axe x von P_x aus bis Q_Δ abträgt und dann die Hypotenuse $P''Q_\Delta$ zieht, welche gleich der gesuchten wahren Länge ist. Trägt man schliesslich die Strecke $P''Q_\Delta$ auf der über P' hinaus verlängerten Geraden QP' von Q bis P_0 ab und zieht man die Geraden $P_0 G_1$ und $P_0 H_1$, so erhält man das zu construirende Dreieck, dessen Winkel $G_1 P_0 H_1$ gleich dem gesuchten Winkel α ist.

21. **Achte Aufgabe.** Eine gerade Linie g ist durch ihre beiden Projectionen g', g'' und eine Ebene E durch ihre beiden Spurlinien e_1, e_2 gegeben. Es soll der Neigungswinkel α der Geraden gegen die Ebene construirt werden.

[28] **Lösung.** Fällt man von einem beliebigen Punkte P

der Geraden g ein Loth auf die Ebene E, so ist der Winkel, welchen dieses mit der Geraden g einschliesst, gleich dem Complement des gesuchten Winkels α, und es ist daher zur Lösung dieser Aufgabe die Construction dieses Complementwinkels ausreichend.

Wenn man aber auf den beiden Projectionen g', g'' der gegebenen Geraden zwei Punkte P', P'' wählt, welche in derselben Verticalen zur Projectionsaxe x liegen, und durch jeden dieser Punkte eine Senkrechte zu der gleichnamigen Spurlinie der Ebene E zieht, so erhält man die horizontale und verticale Projection jenes Lothes. Damit ist aber jetzt diese Aufgabe auf die vorige, welche den Winkel zweier sich schneidenden Geraden zu finden lehrte, zurückgeführt.

22. Will man die Karte eines Landes aufnehmen, so denkt man sich gewöhnlich die hervorragenden Punkte desselben durch gerade Linien, welche Dreiecke begrenzen, mit einander verbunden. Es handelt sich dann darum, diese Dreiecke in verjüngtem Maassstabe in die Karte einzutragen und zwar in derselben Anordnung, in welcher sie in Wirklichkeit liegen. Die Operationen, welche man dazu auf dem Terrain vornehmen muss, bestehen hauptsächlich in dem Messen der Winkel dieser Dreiecke. Wenn diese Winkel dann unmittelbar in die Karte sollen übertragen werden können, so müssen sie in horizontalen, der Kartenebene parallelen Ebenen liegen. Ist aber die Ebene eines solchen Winkels gegen die Kartenebene geneigt, so darf man nicht mehr den Winkel selbst eintragen, sondern nur seine horizontale Projection; diese letztere kann man immer bestimmen, wenn man ausser dem Winkel selbst noch die Neigungswinkel seiner beiden Schenkel gegen die Horizontalebene gemessen hat. Dies führt uns zu dem folgenden Verfahren, welches unter dem Namen der Reduction eines Winkels auf den Horizont bekannt ist.

Neunte Aufgabe. (Fig. 14) Es sind die Winkel α, σ_1, σ_2 gegeben, welche zwei Gerade miteinander und mit der horizontalen Ebene bilden. Man soll die horizontale Projection α' des ersten dieser drei gegebenen Winkel construiren.

Lösung. Es sei A' die horizontale Projection des Scheitels des Winkels α und $A'E'$ diejenige eines seiner Schenkel, sodass man also, um den Winkel α' zu erhalten, nur noch seinen andern Schenkel zu construiren hat. Die zweite Projectionstafel mag durch die Gerade $A'E'$, welche dann die

Projectionsaxe x ist, hindurchgehen. Hierauf wählt man auf der durch den Punkt A' gezogenen Verticalen n einen beliebigen Punkt A [**29**] und betrachtet diesen als den Scheitelpunkt des gemessenen Winkels α. Zieht man dann durch den Punkt A die Gerade AB, welche mit der horizontal gelegenen Projectionsaxe x den Winkel ABA' gleich dem Neigungswinkel σ_1 des ersten Schenkels gegen die Horizontalebene einschliesst, so ist der Punkt B der horizontale Spurpunkt dieses ersten Schenkels. Zieht man ferner durch den Punkt A eine zweite Gerade AC, welche mit der Projectionsaxe x den Winkel σ_2 einschliesst, und beschreibt man um A' als Mittelpunkt mit dem Radius $A'C$ einen Kreisbogen CF, so kann der zweite Schenkel die horizontale Ebene nur in einem Punkte dieses Kreisbogens schneiden. Es handelt sich also nur noch darum, den Abstand dieses letzteren Punktes von einem beliebigen anderen Punkte, z. B. dem Punkte B zu finden.

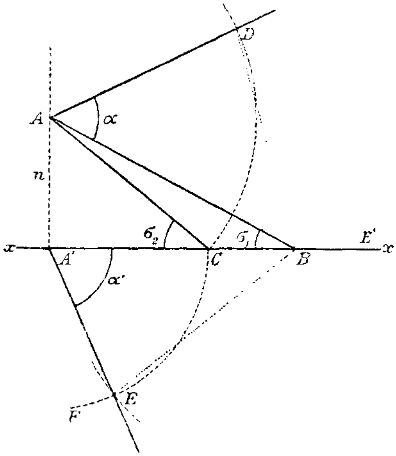

Fig. 14.

Nun liegt aber dieser Abstand in der Ebene des gemessenen Winkels α. Zieht man also die Gerade AD, sodass der Winkel BAD gleich α ist, und trägt man die Strecke AC von A aus bis D ab, so ist die Strecke BD gleich der gesuchten Entfernung.

Beschreibt man schliesslich mit dem Radius BD um den Punkt A' als Mittelpunkt einen Kreisbogen, welcher den ersten Kreisbogen CF in dem Punkte E schneidet, so ist E der horizontale Spurpunkt des zweiten Schenkels. Folglich ist $A'E$ die horizontale Projection dieses Schenkels und der Winkel $BA'E$ die gesuchte Projection α' des gemessenen Winkels α.

Die vorstehenden neun Aufgaben genügen kaum, um einen Begriff von der Projectionsmethode zu geben, und können daher nicht alle ihre Hülfsmittel zeigen. Aber indem wir zu allgemeineren Betrachtungen fortschreiten, werden wir zugleich bemüht sein, die Operationen durchzuführen, welche am geeignetsten sind, uns dieses Ziel erreichen zu lassen.

Zweiter Theil.

Tangentialebenen und Normalen krummer Flächen.

Einleitung.

23. Da jede krumme Fläche auf mehrere Arten durch die Bewegung von Curven erzeugt werden kann, so ist es immer möglich, für jeden beliebigen Punkt einer Fläche zwei verschiedene durch ihn hindurchgehende Erzeugende zu betrachten; zieht man in diesem Punkte an jede der beiden Erzeugenden die Tangente, so ist die durch die beiden Tangenten bestimmte Ebene [**30**] die Tangentialebene. Der Punkt der Fläche, in welchem sich die beiden Erzeugenden schneiden, und welcher sowohl auf den beiden Tangenten als in der Tangentialebene liegt, ist der Berührungspunkt dieser Ebene mit der Fläche.

Die durch den Berührungspunkt senkrecht zu der Tangentialebene hindurchgezogene Gerade heisst die Normale der Fläche. Sie steht auf dem Flächenelement senkrecht, weil dasselbe in jeder Richtung der Lage nach mit der Tangentialebene, welche als seine Fortsetzung betrachtet werden kann, zusammenfällt.

24. Die Betrachtung der Tangentialebenen und Normalen krummer Flächen ist für eine grosse Anzahl von Künsten sehr nützlich und für mehrere derselben sogar ganz unerlässlich. Wir wollen dafür zwei Beispiele geben, eins für jeden der beiden Fälle, und nehmen diese aus der Baukunst und aus der Malerei.

Die verschiedenen Stücke, aus denen Quadersteingewölbe erbaut sind, heissen Gewölbsteine, und Fugen[3]) heissen die Seitenflächen dieser Steine, längs deren sich zwei benachbarte

Steine berühren, gleichgültig ob beide derselben Schicht oder zwei benachbarten angehören.

Die Lage der Fugen ist mehreren Bedingungen unterworfen, welche nothwendig erfüllt sein müssen. Wir werden im Laufe dieser Vorlesungen allmählich alle diese Bedingungen kennen lernen; für den Augenblick wollen wir uns nur mit derjenigen beschäftigen, welche auf unsere gegenwärtigen Untersuchungen Bezug hat.

Diese Bedingung, denen die Lage der Fugen genügen muss, ist die, dass sie senkrecht aufeinander und auf die Gewölbfläche treffen müssen. Wenn man von diesem Gesetze merkbar abwiche, so würde man nicht nur die allgemeinen Schönheitsregeln, ohne deren Befolgung keine gefällige Wirkung zu erzielen möglich ist, verletzen, sondern auch Gefahr laufen, das Gewölbe weniger fest und dauerhaft zu machen. Denn würde eine der Fugen schief auf die Gewölbfläche auftreffen, so müsste von den beiden längs dieser Fuge aneinanderstossenden Gewölbsteinen der eine einen spitzen, der andere einen stumpfen Flächenwinkel besitzen, und die Steine könnten dem Gegendrucke, welchen sie aufeinander ausüben, nicht den gleichen Widerstand entgegensetzen; bei der Sprödigkeit des Materials würde der spitze Winkel der Gefahr des Zersplitterns ausgesetzt sein, wodurch nicht nur die Gestalt des Gewölbes verunstaltet, sondern auch die [**31**] Dauerhaftigkeit des Gebäudes beeinträchtigt werden würde. Die Construction eines Gewölbes aus Gewölbsteinen erfordert mithin unbedingt die Betrachtung der Tangentialebenen und Normalen der von demselben gebildeten krummen Fläche.

25. Gehen wir zu einem zweiten Beispiele über, welches auf den ersten Blick nicht von der Art zu sein scheint, dass es einer gleich strengen Behandlung fähig ist.

Man ist gewohnt, in der Malerei zwei verschiedene Theile der künstlerischen Thätigkeit zu unterscheiden. Der eine gehört der eigentlichen Kunst an und hat das Ziel, in dem Beschauer eine bestimmte Erregung, eine bestimmte Empfindung hervorzurufen, oder ihn in die Stimmung zu versetzen, welche ihn am besten befähigt, einen bestimmten Eindruck in sich aufzunehmen. Dieser Theil seiner Thätigkeit verlangt von dem Künstler eine innige Bekanntschaft mit der Psychologie[4]) und die genauesten Kenntnisse von der Natur der Dinge, von der Art, in welcher sie auf uns einwirken, und von den, selbst unwillkürlichen Kennzeichen, durch welche sich diese Einwirkung kundgiebt. Dies Alles kann aber nur das Resultat einer ganz ausgezeichneten Erziehung sein, wie sie kaum Jemand zu Theil wird und wie wir sie nicht im Entferntesten unseren jungen Künstlern angedeihen lassen. Dieser Theil der künstlerischen Thätigkeit ist keiner allgemeinen Regel unterworfen, und in Bezug auf ihn lassen sich nur gute Rathschläge geben.

Der andere Theil der Thätigkeit in der Malerei umfasst genau genommen das Handwerksmässige derselben und erstrebt die sorgsame Ausführung der geistigen Schöpfungen des ersten Theiles. Hier ist nichts willkürlich, alles kann vielmehr auf Grund einer strengen Schlussfolgerung vorausgesehen werden, weil es das nothwendige Ergebniss des Zusammenwirkens geeigneter Objecte und gegebener Umstände ist. Wenn ein Object der Gestalt und Lage nach bestimmt ist, wenn man die Beschaffenheit, Zahl und Lage aller Körper kennt, welche es — entweder mit directem oder reflectirtem Lichte — beleuchten können, wenn die Lage des Auges des Beschauers festgelegt ist und schliesslich alle Umstände, welche auf die Besichtigung Einfluss haben können, ermittelt und gut bekannt sind, so ist das Bild jedes Punktes auf der sichtbaren Oberfläche des Objectes völlig bestimmt. Alles was sich auf den Farbenton und die Helligkeit dieses Bildes bezieht, hängt ab von der Lage der Tangentialebene in diesem Punkte des Objectes zu den beleuchtenden Körpern und zu dem Auge des Beschauers und kann durch Ueberlegung allein gefunden werden; ist es auf solche Weise bestimmt, so muss es genau angewendet werden. Jede Abschwächung ebenso wie jede Uebertreibung würde den Anblick und die Gestalt des Objectes verändern und eine andere Wirkung als die von dem Künstler beabsichtigte hervorbringen.

Ich weiss sehr wohl, dass die oft nothwendige schnelle Ausführung [**32**] nur selten eine Methode zu benutzen gestattet, welche den Geist jeder sinnlichen Hülfe beraubt und ihn allein auf die Ausbildung seiner Verstandesfähigkeiten hinweist, und dass es für den Maler weit leichter ist, seine Objecte in Bezug auf ihre Stellung, Lage, Farbentöne und Helligkeitsverhältnisse zu beobachten und dann nachzubilden. Wenn er sich aber daran gewöhnt hätte, die Lage der Tangentialebenen und der beiden Krümmungen — von diesen sprechen wir in späteren Vorlesungen — in jedem Punkte der zu malenden Flächen in Betracht zu ziehen, so würde er davon bedeutenden Nutzen haben und im Stande sein, die Wirkungen, welche er durch

Ausserachtlassen einiger Umstände vielleicht nicht erzielt hat, noch hervorzubringen und andere Wirkungen, welche durch fremdartige Umstände veranlasst sind, zu beseitigen.

Schliesslich sind solche nichtssagenden Ausdrücke, wie halbflach, helldunkel, welche die Maler fortwährend gebrauchen, nur ein beständiges Zeugniss dafür, dass sie eingehendere Kenntnisse und strengere Ueberlegungen nothwendig brauchen.

26. Unabhängig von ihrer Verwendbarkeit und Nützlichkeit für viele Künste ist die Untersuchung der Tangentialebenen und Normalen krummer Flächen in der darstellenden Geometrie eines der fruchtbarsten Hülfsmittel zur Lösung von Aufgaben, die durch andere Verfahren nur sehr schwierig zu lösen sind und von denen wir einige Beispiele geben werden.

Methode für die Bestimmung der Tangentialebenen in gegebenen Punkten krummer Flächen.

27. Die allgemeine Methode, um die Tangentialebene einer krummen Fläche zu bestimmen, besteht (vgl. Artikel 23) darin, durch den Berührungspunkt die Tangenten an zwei verschiedene durch diesen Punkt gehende Erzeugende zu ziehen und dann die durch diese zwei Geraden bestimmte Ebene zu construiren. In einigen besonderen Fällen weicht man zwar, um die Constructionen abzukürzen, ein wenig von der buchstäblichen Befolgung dieser Vorschrift ab, aber man verfährt immer in ganz ähnlicher Weise.

Mit der Construction der Normalen beschäftigen wir uns nicht besonders, weil diese auf die Construction einer zur Tangentialebene senkrechten Geraden hinausläuft, und wir diese Construction bereits auszuführen gelernt haben (vgl. S. 25—26).

28. **Erste Aufgabe.** (Fig. 15 u. 16) In einem Punkte P einer Cylinderfläche, dessen horizontale Projection gegeben ist, soll die Tangentialebene an diese Fläche gelegt werden.

Lösung. Es seien a', a'' die horizontale und verticale Projection der gegebenen Geraden a, welcher die Erzeugenden der Cylinderfläche [**33**] parallel sein sollen. In der horizontalen Ebene sei die Curve k gegeben*), durch welche die

*) [In der Figur 15 ist als diese Curve k der durch die Punkte B, C gehende Kreis mit dem Mittelpunkte A gezeichnet.]

geradlinige Erzeugende stets hindurchgehen soll, und welche man als die horizontale Spur der Cylinderfläche auffassen kann. Endlich sei P' die gegebene Horizontalprojection des Punktes der Cylinderfläche, in welchem die Tangentialebene an diese construirt werden soll.

Zieht man durch den betrachteten Punkt P der Fläche, dessen horizontale Projection nach P' fällt, die zugehörige geradlinige Erzeugende m, so ist diese, da sie eine gerade

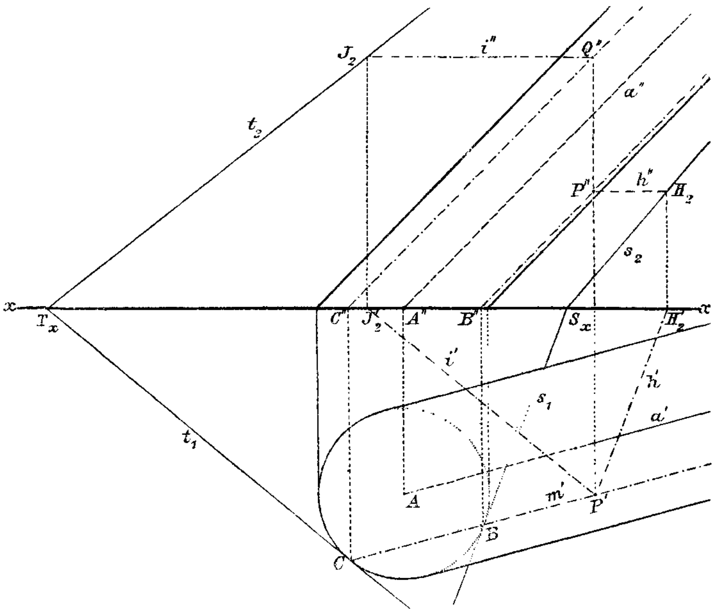

Fig. 15.

Linie ist, ihre eigene Tangente und mithin eine der beiden Geraden, welche die Lage der gesuchten Tangentialebene bestimmen. Diese Gerade m muss ferner der gegebenen Geraden a parallel sein, folglich sind ihre beiden Projectionen den Geraden a' und a'' bezüglich parallel. Zieht man also durch den Punkt P' eine Parallele zu der Geraden a', so erhält man die horizontale Projection m' der Erzeugenden m. Um ihre verticale Projection zu erhalten, verlängert man die Erzeugende m auf der Cylinderfläche, bis sie die horizontale Projectionsebene schneidet; dies kann nur in einem Punkte geschehen, welcher gleichzeitig auf der horizontalen Projection m' der Erzeugenden und auf der Leitlinie k liegt und also ein Schnittpunkt beider sein muss. Man verlängert also die Gerade m', bis sie irgend einen Theil der Curve k schneidet.

Hier bieten sich nun zwei Fälle dar: entweder schneidet die Gerade m' die Spur der Cylinderfläche nur in einem einzigen Punkte oder in mehreren. Wir wollen die beiden Fälle getrennt behandeln und zunächst annehmen, dass die Gerade m', wie weit wir sie auch verlängern, die Curve k nur in einem Punkte B schneidet. Da dieser Punkt B der erste Spurpunkt der Erzeugenden m ist, so erhält man ihre verticale Projection m'', indem man den Punkt B mittelst der verticalen Geraden BB'' auf die verticale Projectionsebene projicirt und durch den Punkt B'' die Parallele m'' zu a'' zieht. Man hat mithin jetzt die beiden Projectionen einer der Geraden, durch welche die gesuchte Tangentialebene hindurchgehen muss. Die verticale Projection P'' des Berührungspunktes P muss nun sowohl auf der durch den Punkt P' zur Axe x gezogenen Senkrechten als auf der zweiten Projection m'' der Erzeugenden m und folglich in ihrem Schnittpunkte liegen.

Schneidet die Gerade m' die Spur k der Cylinderfläche in mehreren Punkten B, C, . . ., so verfährt man für jeden dieser Punkte in genau derselben Weise, wie es soeben für den Fall eines einzigen Schnittpunktes B beschrieben worden ist. [**34**] Daraus folgt nur, dass man die verticalen Projectionen $B''P''$, $C''Q''$, . . ., von eben so vielen erzeugenden Geraden und die verticalen Projectionen von eben so vielen Berührungspunkten P'', Q'', . . . erhält, als es Schnittpunkte der Geraden m' mit der Curve k giebt.

In den Figuren 15 u. 16 ist die Spur k der Cylinderfläche ein Kreis, welcher von einer schneidenden Geraden im allgemeinen in zwei Punkten getroffen wird. Es muss also die durch den Punkt P' gezogene Verticale die Cylinderfläche in zwei Punkten schneiden, zuerst in dem Punkte P, welcher auf der durch den Punkt B gehenden Erzeugenden liegt und dessen verticale Projection P'' ist, und dann in dem Punkte Q'', welcher auf der durch den Punkt C gehenden Erzeugenden liegt und dessen verticale Projection Q'' ist. Obgleich die beiden Punkte P und Q dieselbe Horizontalprojection P' besitzen, fallen sie durchaus nicht zusammen und zu jedem von ihnen gehört eine besondere Tangentialebene. Jetzt hätte man weiter für jeden Berührungspunkt eine zweite Gerade zu construiren, welche die Lage der Tangentialebene in dem Punkte bestimmt. Wollte man streng nach der allgemeinen Methode verfahren, so müsste man, indem man die Spurlinie der Cylinderfläche als eine zweite Erzeugende ansieht, durch jeden Berührungspunkt eine solche hindurchlegen und an dieselbe die betreffende Tangente construiren. Bei den Cylinderflächen

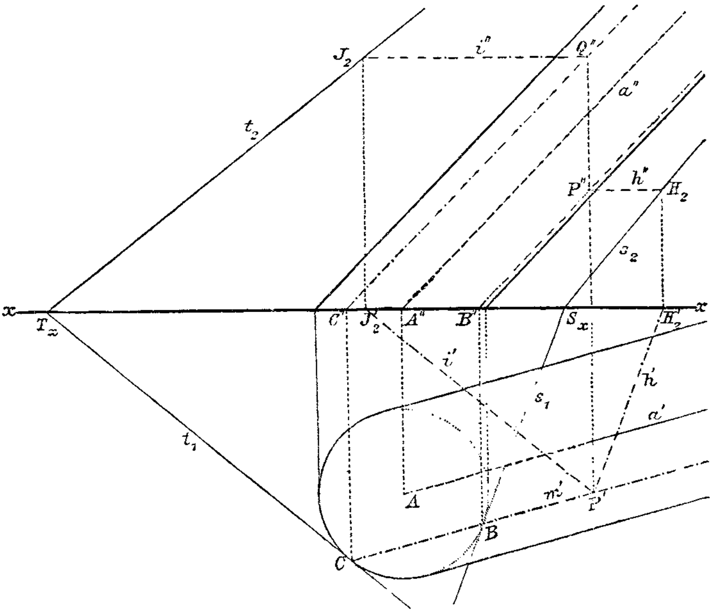

Fig. 16.

kann man aber eine einfachere Betrachtung benutzen. Die Tangentialebene im Punkte P berührt die Fläche längs der geradlinigen Erzeugenden m, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, und also auch in dem Spurpunkte B, welcher ein Punkt der Graden m ist; folglich muss die gesuchte Tangentialebene auch durch die im Punkte B an die Leitlinie k des Cylinders gezogene Tangente hindurchgehen. Durch den gleichen Schluss erkennt man, dass die Tangentialebene im Punkte Q durch die im Punkte C an die Leitlinie k gezogene Tangente hindurchgehen muss. Wenn man also in den beiden Punkten

B und C die Tangenten s_1 und t_1 an den Spurkreis zieht und sie verlängert, bis sie die Projectionsaxe in den beiden Punkten S_x und T_x schneiden, so hat man damit die in der horizontalen Ebene gelegenen Spurlinien der beiden Tangentialebenen erhalten.

Es bleiben jetzt nur noch die in der verticalen Ebene gelegenen Spurlinien der beiden Tangentialebenen zu construiren übrig. Da man für jede dieser Spurlinien bereits einen Punkt S_x, bez. T_x kennt, durch welchen sie hindurchgehen muss, so braucht man für jede nur noch einen Punkt zu bestimmen.

Fig. 16. Zu diesem Zwecke construiren wir, indem wir für die erste der beiden Ebenen das Verfahren auseinandersetzen, denjenigen Punkt, [**35**] in welchem eine durch den Berührungspunkt P in der Tangentialebene gezogene horizontale Gerade h die verticale Projectionsebene schneidet. Die horizontale Projection h' dieser Hülfsgeraden h erhält man, indem man durch den Punkt P' eine Parallele zu der ersten Spurlinie s_1 dieser Tangentialebene zieht und zwar, bis sie die Axe x in dem Punkte H_2' schneidet; die verticale Projection h'' ist die durch den Punkt P'' gezogene horizontale Gerade. Der gesuchte Schnittpunkt der Geraden h und der zweiten Projectionsebene muss sowohl auf der durch den Punkt H_2' gezogenen Verticalen als auch auf der durch den Punkt P'' gezogenen Horizontalen h'' liegen und ist folglich der Schnittpunkt H_2 beider. Verbindet man schliesslich noch die Punkte H_2 und S_x durch die Gerade s_2, so ist sie die zweite Spurlinie der betrachteten Tangentialebene. Um die zweite Spurlinie der anderen Tangentialebene zu finden, verfährt man in ganz gleicher Weise: man zieht durch den Punkt P' zu der Spurlinie t_1 eine Parallele i', welche die Axe in dem Punkte J'_2 trifft, und errichtet in J'_2 auf der Axe x eine Senkrechte, welche die durch den Punkt Q'' gezogene horizontale Gerade i'' in dem Punkte J_2 schneidet. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte J_2 und T_x ist dann die gesuchte zweite Spurlinie t_2. [5])

29. **Zweite Aufgabe.** (Fig. 17) In einem durch seine Horizontalprojection gegebenen Punkte einer Kegelfläche soll man die Tangentialebene an die Fläche construiren.

Lösung. Die Lösung dieser Aufgabe weicht von der vorigen nur darin ab, dass die erzeugende Gerade, statt immer sich selbst parallel zu bleiben, stets durch die Spitze des Kegels, welche durch ihre beiden Projectionen gegeben ist, gehen muss.

Wir glauben daher, dass es sich nicht empfiehlt, die Lösung hier durchzuführen, und empfehlen vielmehr dem Leser, sie selbst zu suchen, wozu wir ihm die nachfolgende Figur 17 als Hülfsmittel für den Fall, dass ein solches noch nöthig ist, an die Hand geben.

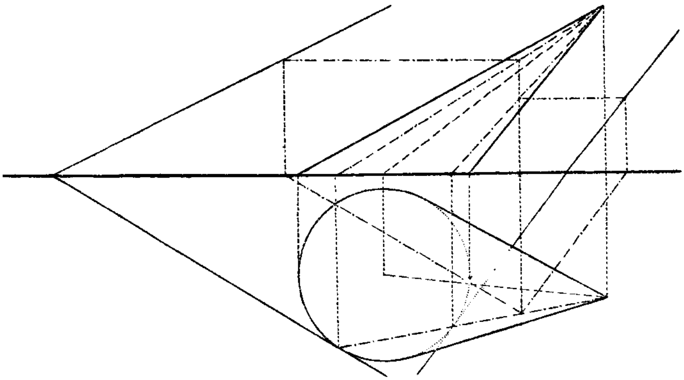

Fig. 17.

30. **Dritte Aufgabe.** (Fig. 18 u. 19) Man soll in einem durch seine Horizontalprojection gegebenen Punkte P' einer Umdrehungsfläche, deren Axe a vertical steht, die Tangentialebene an die Fläche construiren.

Lösung. Es sei A die gegebene horizontale Projection der Umdrehungsaxe a, a'' ihre verticale Projection, k'' die gegebene erzeugende Curve, wie sie eine durch die Axe a gelegte Ebene (in der Figur die zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene) aus der Fläche ausschneidet, und P' die gegebene horizontale Projection des Berührungspunktes P.

Denkt man sich durch den Berührungspunkt P und die Umdrehungsaxe a eine verticale Ebene hindurchgelegt, deren horizontale Projection die unbegrenzte Gerade AP' ist, so schneidet diese Ebene die Umdrehungsfläche in der [**36**] durch den Punkt P gehenden erzeugenden Curve. Zieht man durch den Punkt P' eine verticale Gerade, so schneidet sie die eben erwähnte Erzeugende und folglich auch die Umdrehungsfläche in einem oder mehreren Punkten P, Q, . . ., welche ebenso viele Berührungspunkte mit der gemeinsamen horizontalen Projection P' sind. Alle diese Berührungspunkte findet man dadurch, dass man die Strecke AP' auf der Projectionsaxe x von A'' bis B_x abträgt und durch den letzteren Punkt eine Parallele

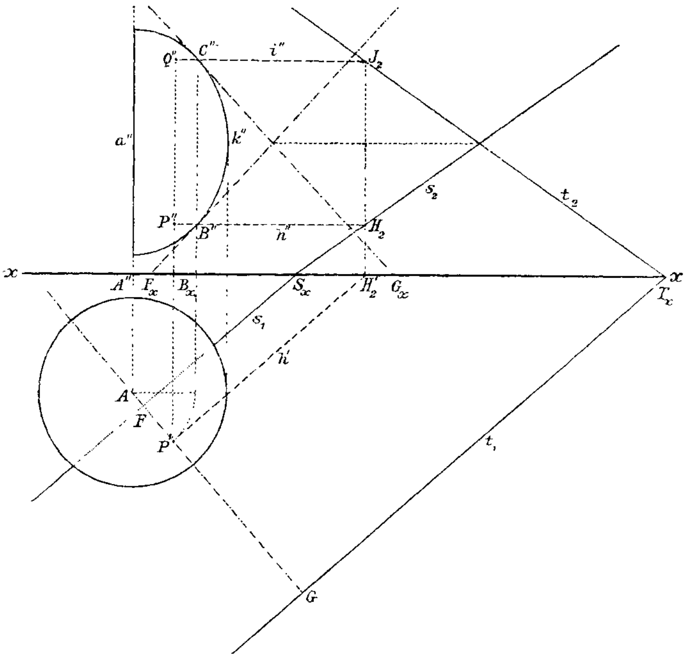

Fig. 18.

zu a'' zieht; die Punkte B'', C'', . . ., in denen diese Gerade die Curve k'' schneidet, geben die Höhen über der horizontalen Projectionstafel für ebenso viele Schnittpunkte der durch den Punkt P' gezogenen Verticalen mit der durch P gehenden Erzeugenden der Fläche an. Um die verticalen Projectionen der gesuchten Berührungspunkte zu erhalten, zieht man durch alle diese Punkte B'', C'', . . . unbegrenzte horizontale Gerade, auf welchen jene liegen müssen; andererseits müssen sie aber auch auf der durch den Punkt P' senkrecht zur Projectionsaxe x gezogenen Geraden liegen. Die Schnittpunkte P'', Q'', . . . dieser letzteren Senkrechten mit den eben erwähnten horizontalen Geraden sind mithin die zweiten Projectionen der verschiedenen Berührungspunkte.

Legt man ferner durch jeden Berührungspunkt eine horizontale Ebene hindurch, so schneidet diese die Umdrehungsfläche in einem Kreise, welcher als eine zweite erzeugende Curve derselben betrachtet werden kann; der Mittelpunkt dieses Kreises liegt auf der Axe a und die Tangente im Berührungspunkte steht, da sie auf dem zugehörigen Radius senkrecht steht, auch senkrecht auf der durch die Gerade AP' hindurchgelegten verticalen Ebene, in welcher dieser Radius liegt. Die durch diese Kreistangente hindurchgehende Tangentialebene muss folglich auch auf derselben verticalen Ebene senkrecht stehen und daher in der horizontalen Projectionsebene eine zu AP' senkrechte Spur haben, zu deren Bestimmung man nur noch ihren senkrechten Abstand von dem Punkte A zu

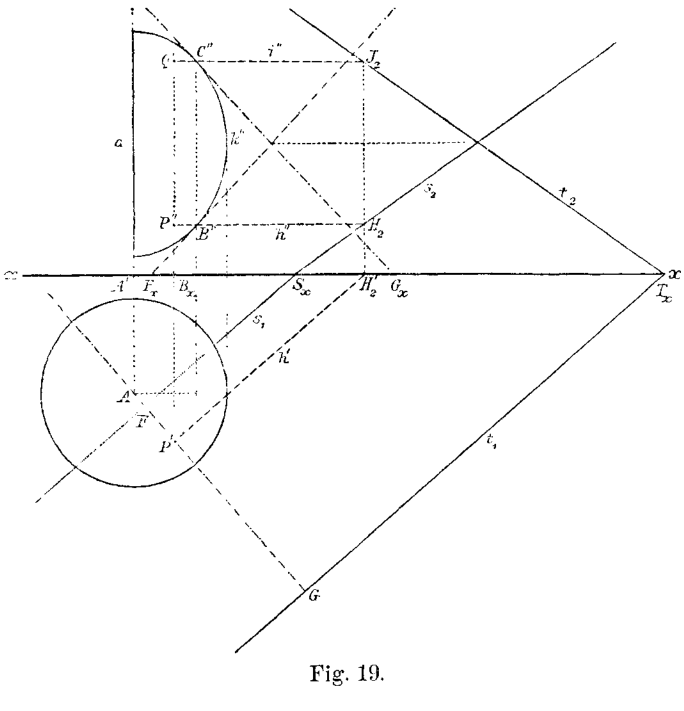

Fig. 19.

bestimmen braucht. Zieht man nun durch die Punkte B'', C'', ... die Tangenten $B''\,F_x$, $C''\,G_x$, ... an die Erzeugende k'', so geben die Strecken $A''F_x$, $A''G_x$, ... die gesuchten

Abstände. Trägt man schliesslich diese Strecken von A aus auf der Geraden AP' bez. bis F, G, ... ab und zieht man durch die so erhaltenen Punkte die zu AP' senkrechten Geraden s_1, t_1, ..., welche die Projectionsaxe in den Punkten S_x, T_x, ... schneiden, so sind letztere Geraden die ersten Spurlinien der gesuchten Tangentialebenen.

Um in der verticalen Projectionsebene die Spurlinien aller dieser Ebenen zu erhalten, muss man sich durch jeden Berührungspunkt eine horizontale Gerade in der zugehörigen Tangentialebene gezogen und bis zu ihrem Durchstosspunkte durch die verticale Projectionstafel verlängert denken. [**37**] Jede solche Gerade ist die Tangente an den durch den zugehörigen Berührungspunkt gehenden Parallelkreis der Fläche, und ihr in der verticalen Projectionsebene gelegener Spurpunkt gehört der in derselben Ebene liegenden Spurlinie der betreffenden Tangentialebene an. Für alle Berührungspunkte P, Q, ... haben die horizontalen Hülfsgeraden h, i, ... dieselbe horizontale Projection, nämlich die durch den Punkt P' senkrecht zu AP' gezogene Gerade h', welche in dem Punkte H_2' die Projectionsaxe schneidet. Zieht man durch H_2' eine verticale Gerade, so liegen auf ihr alle Durchstosspunkte der horizontalen Hülfsgeraden durch die verticale Projectionstafel, und da diese Punkte auch auf den durch B'', C'', ... gezogenen horizontalen Geraden h'', i'', ... liegen müssen, so sind sie die Schnittpunkte H_2, J_2, ... derselben mit der verticalen Geraden durch H_2'. Jeder dieser Punkte liefert einen Punkt der gesuchten zweiten Spurlinie für je eine der betrachteten Tangentialebenen. Folglich ist die Gerade s_2, welche H_2 mit S_x verbindet, die zweite Spurlinie der ersten Tangentialebene, die Gerade t_2, welche J_2 mit T_x verbindet, diejenige der zweiten Tangentialebene, und so fort, wenn deren noch mehrere zu betrachten sind.

Wir beschränken uns jetzt auf die drei soeben behandelten Beispiele, weil diese für alle Flächen, deren Erzeugung wir früher (vgl. S. 20—22) beschrieben haben, ausreichen. In der Fortsetzung dieses Werkes werden wir Gelegenheit haben, die Erzeugung von weit mehr Flächenfamilien kennen zu lernen und dann das gleiche Verfahren zur Bestimmung ihrer Tangentialebenen und Normalen anwenden. Jetzt wollen wir eine Aufgabe behandeln, zu deren Lösung man mit Vortheil die Betrachtung einer Tangentialebene benutzt.

31. **Vierte Aufgabe.** (Fig. 20) Zwei Gerade g und h

sind durch ihre horizontalen und verticalen Projectionen g', h' und g'', h'' gegeben. Es sollen die beiden Projectionen n', n'' ihres kürzesten Abstandes (d. h. der Geraden, welche gleichzeitig auf den beiden Geraden g und h senkrecht steht) construirt und die wahre Länge desselben bestimmt werden.

Lösung. Durch die erste der beiden gegebenen Geraden g denken wir uns eine Ebene Σ parallel zu der zweiten Geraden h gelegt, was immer möglich ist; denn wenn man durch einen beliebigen Punkt der Geraden g eine Parallele zu der Geraden h zieht und diese dritte Gerade sich immer parallel zu sich selbst die Gerade g entlang bewegen lässt, so erzeugt sie die Ebene Σ. Ferner denken wir uns um die Gerade h als Axe einen Kreiscylinder construirt, [**38**] dessen Radius gleich dem gesuchten kürzesten Abstande der beiden Geraden g und h ist. Diese Cylinderfläche wird von der zuerst construirten Ebene Σ längs einer zur Cylinderaxe h parallelen Geraden m berührt, welche die Gerade g in einem bestimmten Punkte P schneidet. Zieht man durch diesen Punkt eine Senkrechte zu der Ebene Σ, so ist sie die gesuchte Gerade des kürzesten Abstandes; denn sie geht durch einen Punkt der Geraden g, steht in diesem auf g senkrecht und schneidet die Gerade h unter einem rechten Winkel, da sie ein Radius der um die Gerade h als Axe construirten Cylinderfläche ist.

Es kommt also nur noch darauf an, alle Schritte dieser Lösung allmählich durch Construction wirklich auszuführen.

1. Um die Spurlinien s_1, s_2 der durch die Gerade g parallel zu der andern Geraden h gelegten Ebene Σ zu construiren, sucht man zunächst den Punkt G_1, in welchem die Gerade g die horizontale Ebene schneidet; dieser ist ein Punkt der ersten Spurlinie s_1. Nachdem man die verticale Projection g'' bis zum Schnittpunkte G_1'' mit der Projectionsaxe x verlängert hat, zieht man durch den Punkt G_1'' eine Senkrechte zu x, welche die horizontale Projection g' in dem gesuchten ersten Spurpunkte G_1 schneidet. Ferner zieht man durch den zweiten Spurpunkt der Geraden g, dessen Horizontalprojection G_2' ist und dessen Verticalprojection mit dem Punkte G_2 selbst zusammenfällt, zu der Geraden h die Parallele i, deren Projectionen man erhält, indem man durch G_2' zu h' die Parallele i' und durch G_2 zu h'' die Parallele i'' zieht. Errichtet man in dem Schnittpunkte J_1'' der Axe x mit i'' eine Senkrechte, so schneidet diese die erste Projection i' in dem ersten Spur-

punkte J_1 der Hülfsgeraden i. Der Punkt J_1 ist dann ebenfalls ein Punkt der ersten Spurlinie der gesuchten Ebene Σ.

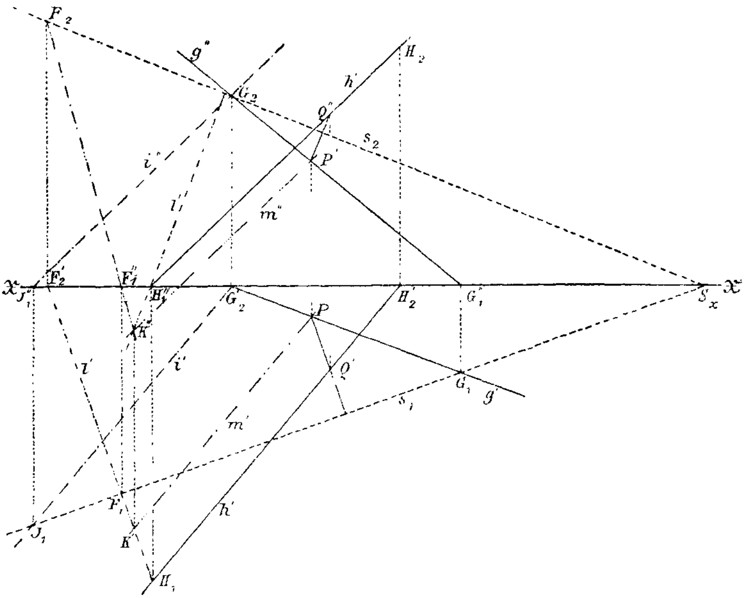

Fig. 20.

Zieht man also die Gerade G_1 J_1, welche man bis zu ihrem Schnittpunkte S_x mit der Axe x verlängert, so ist sie die gesuchte erste Spurlinie s_1. Verbindet man noch die Punkte S_x und G_2 durch eine Gerade, so ist diese offenbar die zweite Spurlinie s_2 derselben Ebene.

2. Um die Berührungslinie m der Ebene Σ mit der Cylinderfläche zu construiren, muss man von einem beliebigen Punkte der Geraden h, welche die Axe des Cylinders ist (z. B. von ihrem ersten Spurpunkte H_1), ein Loth auf die tangirende Ebene Σ fällen; der Fusspunkt K dieses Lothes ist ein Punkt der Berührungslinie m. Um diesen Fusspunkt nach der früher (vgl. Art. 16, S. 25—26) gegebenen Methode zu finden, bestimmt man zunächst die Projectionen des erwähnten Lothes, [**39**] indem man durch die Punkte H_1, H_1'' bez. die Senkrechten l', l'' zu den Spurlinien s_1, s_2 zieht. Nachdem man dann die Gerade l' verlängert hat, bis sie die Spurlinie s_1 in dem Punkte

F_1 und die Projectionsaxe x in dem Punkte F_2' schneidet, projicirt man den ersteren in den Punkt F_1'' der Projectionsaxe x, den letzteren in den Punkt F_2 der Spurlinie s_2 und zieht dann die Gerade $F_1'' F_2$, deren Schnittpunkt mit l'' die zweite Projection K'' des gesuchten Fusspunktes ist; die Horizontalprojection K' desselben erhält man dadurch, dass man $K''K'$ senkrecht zur Projectionsaxe x bis zum Schnitte mit l' zieht. Die durch die Punkte K', K'' bez. zu h', h'' gezogenen Parallelen m', m'' sind die beiden Projectionen der Geraden m, in welcher die Ebene Σ von der Cylinderfläche berührt wird. Die Punkte P', P'', in denen die beiden Projectionen von m von denen der gegebenen Geraden g geschnitten werden, sind die Projectionen des Punktes P der Geraden g, durch welchen die gesuchte Linie des kürzesten Abstandes hindurchgeht.

3. Nachdem man die Projectionen P', P'' des Punktes P der gesuchten Linie des kürzesten Abstandes kennt, braucht man nur durch den Punkt P' eine Senkrechte zu der Spurlinie s_1 und durch den Punkt P'' eine Senkrechte zu der Spurlinie s_2 zu ziehen; die zwischen den Projectionen der beiden Geraden gelegenen Stücke $P' Q'$ und $P'' Q''$ sind dann die Projectionen des gesuchten kürzesten Abstandes.

4. Um schliesslich die wahre Länge dieses kürzesten Abstandes zu erhalten, wendet man das in dem Artikel 9 durch die Figur 5 (Seite 16) veranschaulichte Verfahren an.[6])

Die Zuhülfenahme einer Cylinderfläche, welche von einer Ebene berührt wird, ist zur Lösung dieser Aufgabe nicht unbedingt nöthig. Man kann auch so verfahren, dass man eine zu den beiden gegebenen Geraden g und h parallele Ebene construirt und dann durch die Geraden g und h zu dieser Ebene senkrechte Ebenen hindurchlegt; die Schnittgerade dieser beiden letzteren Ebenen ist dann die Linie des kürzesten Abstandes. Wir begnügen uns aber mit dieser Andeutung der anderen Lösung und empfehlen dem Leser, die Construction zu seiner Uebung selbst durchzuführen.

Bedingungen, welche die Lage der Tangentialebene einer beliebigen krummen Fläche bestimmen. Bemerkung über die abwickelbaren Flächen.

32. In den verschiedenen Aufgaben, welche wir über die Tangentialebenen krummer Flächen gelöst haben, setzten wir

stets voraus, dass der gegebene Punkt, durch welchen die Tangentialebene hindurchgehen soll, auf der Fläche liegt und der Berührungspunkt der Tangentialebene ist; diese Bedingung allein genügte, um die Lage der Ebene zu bestimmen. Dies ist aber nicht mehr der Fall, [**40**] wenn der Punkt, durch welchen die Tangentialebene hindurchgelegt werden soll, ausserhalb der Fläche liegt.

Damit eine Ebene ihrer Lage nach völlig bestimmt sei, muss sie drei verschiedenen Bedingungen genügen, deren jede mit der andern Bedingung, dass die Ebene durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen soll, gleichwerthig ist. Wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist, so kommt aber im Allgemeinen die Bedingung, dass eine Ebene Tangentialebene an eine krumme Fläche sein soll, nur einer einzigen dieser drei Bedingungen gleich. Stellt man sich also die Aufgabe, durch derartige Bedingungen die Lage einer Ebene zu bestimmen, so sind deren im allgemeinen drei nöthig. Denn nehmen wir drei krumme Flächen und eine Ebene, welche eine derselben berührt, als gegeben an, so können wir uns vorstellen, dass sich diese Ebene um die Fläche herumbewegt, indem sie dieselbe dabei fortwährend berührt; diese Bewegung kann nach allen Richtungen hin stattfinden, wobei nur der Berührungspunkt seine Lage auf der Fläche ändert und sich nach derselben Richtung hin bewegt, nach welcher die Bewegung der Ebene gerichtet ist. Denken wir uns nun, dass diese Bewegung nach einer beliebigen, aber bestimmten Richtung hin vor sich geht, und zwar so weit, bis die Ebene die zweite Fläche in einem bestimmten Punkte berührt, so ist dann die Ebene zwar zugleich Tangentialebene an die beiden ersten der gegebenen drei Flächen, aber ihre Lage ist dadurch noch nicht festgelegt. Wir können uns nämlich vorstellen, dass sich die Ebene nun um beide Flächen herum dreht, indem sie stets beide zugleich berührt. Sie kann sich dabei nicht mehr, wie früher, frei nach jeder Richtung, sondern nur noch nach einer einzigen Richtung bewegen. Mit der Ebene bewegen sich zugleich ihre beiden Berührungspunkte und zwar jeder auf seiner Fläche; werden die beiden Berührungspunkte durch eine Gerade verbunden, so bewegen sich diese beiden Punkte in Bezug auf die Gerade in demselben oder in entgegengesetztem Sinn, je nachdem die beiden krummen Flächen die Ebene auf derselben oder auf verschiedenen Seiten berühren. Denken wir uns nun diese einzige noch mögliche Bewegung so weit fortgesetzt, bis die

Ebene auch die dritte gegebene Fläche in einem bestimmten Punkte berührt, so ist dann die Lage der Ebene vollständig festgelegt, und die Ebene kann sich nicht mehr bewegen, ohne aufzuhören an einer der gegebenen Flächen Tangentialebene zu bleiben.

Wie man sieht, sind also, um die Lage einer Ebene durch unbestimmte Berührungen mit gegebenen krummen Flächen zu bestimmen, im allgemeinen deren drei nöthig. Wenn man sich daher die Aufgabe stellt, an eine gegebene krumme Fläche eine Tangentialebene [**41**] zu legen, so ist diese Bedingung nur einer der drei Bedingungen, durch welche die Lage einer Ebene bestimmt wird, gleichwerthig, und man kann noch zwei andere Bedingungen willkürlich hinzufügen, z. B. dass die Ebene noch durch zwei gegebene Punkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch eine gegebene Gerade gehen soll. Soll die Ebene gleichzeitig zwei Flächen berühren, so sind dadurch zwei Bedingungen gegeben, und es bleibt nur eine, über welche man frei verfügen kann, z. B. indem man annimmt, dass die Ebene durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen soll. Wenn aber die Ebene gleichzeitig drei gegebene Flächen berühren soll, so ist keine Bedingung mehr frei verfügbar, da die Lage der Ebene bereits völlig bestimmt ist.

Das soeben Gesagte bezieht sich auf krumme Flächen im allgemeinen und gilt nicht für die Cylinder-, Kegel- und abwickelbaren Flächen. Denn bei diesen Arten von Flächen findet die Berührung mit einer Ebene nicht nur in einem einzigen Punkte statt, sondern längs einer unbegrenzten Geraden, welche mit einer Erzeugenden der Fläche zusammenfällt. Die Forderung, dass eine Ebene eine einzige solche Fläche berühren soll, kommt zwei Bedingungen gleich, da die Ebene durch eine gerade Linie gehen muss, und es bleibt folglich nur noch eine Bedingung frei wählbar, wie z. B. die, dass die Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll. Man kann also nicht verlangen eine Ebene zu construiren, welche an zwei derartige Flächen Tangentialebene ist, und noch weniger eine solche, welche es an drei derartige Flächen ist, ausgenommen in Fällen, in welchen durch vorhandene besondere Umstände diese Bedingungen miteinander verträglich sind.

Beispiele von Fällen, in denen es nöthig ist, Tangentialebenen an eine Fläche von ausserhalb derselben gelegenen Punkten zu legen.

33. Bevor wir weiter gehen, empfiehlt es sich, einige Beispiele von Fällen zu geben, in denen man gezwungen ist, Tangentialebenen an krumme Flächen von nicht auf ihnen liegenden Punkten zu legen.

Wenn man die allgemeinen Grundsätze der Befestigungskunst auseinandersetzt, so nimmt man zunächst an, dass das Terrain, welches eine Festung auf Kanonenschussweite umgiebt, nach jeder Richtung hin eben ist und keine Anhöhen aufzuweisen hat, welche dem Belagerer irgendwelchen Vortheil gewähren könnten. Unter dieser Voraussetzung bestimmt man die Risse der Hauptwälle, Lünetten, gedeckten Gänge und der vorgeschobenen Werke und giebt an, [**42**] wie die verschiedenen Theile der Befestigungen sich gegenseitig beherrschen müssen, damit alle in wirksamster Weise zu ihrer wechselseitigen Vertheidigung beitragen. Um dann diese Grundsätze auf den Fall anzuwenden, in welchem sich in der Umgebung der Festung irgend eine Anhöhe befindet, die ein Belagerer benutzen könnte und gegen welche mithin die Festung geschützt werden muss, muss man eine weitere Betrachtung zu Hülfe nehmen. Ist nur eine einzige Anhöhe vorhanden, so wählt man in der Festung zwei Punkte, durch welche man eine Tangentialebene an die Anhöhe, vor deren Bestreichung man sich schützen will, legt. Diese Tangentialebene nennt man Defilementebene, und man lässt alle Theile der Befestigungen sich ebenso hoch über die Defilementebene erheben, als sie sich über die Horizontalebene erheben müssten, wenn das Terrain völlig eben wäre. Dadurch erreicht man es, dass die Befestigungswerke einander und alle zusammen die benachbarte Anhöhe in derselben Weise beherrschen, wie in einem ganz ebenen Terrain, und die Befestigungen gewähren die gleichen Vortheile, wie in dem ersten Falle. Betreffs der Wahl der beiden Punkte, durch welche die Defilementebene hindurchgehen muss, ist folgenden zwei Bedingungen zu genügen: 1. Der von dieser Ebene mit dem Horizonte gebildete Winkel sei möglichst klein, damit die Wallgänge weniger Neigung haben und der Vertheidigungsdienst auf weniger Schwierigkeiten stösst. 2. Die Erhebung der Befestigungen über das natürliche Terrain sei ebenfalls so klein als möglich, damit ihr Bau weniger Arbeit und Kosten verursacht.

Sind in der Umgebung der Festung zwei Anhöhen vorhanden, vor deren Bestreichung die Befestigungen zu schützen sind, so muss die Defilementebene Tangentialebene an die Flächen beider Anhöhen zugleich sein. Um ihre Lage festzulegen, kann man mithin nur noch über eine Bedingung frei verfügen, und zwar thut man dies in der Weise, dass man in der Festung den Punkt, durch welchen die Defilementebene hindurchgehen soll, so auswählt, dass soweit als irgend möglich die im ersten Falle angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

34. Das zweite Beispiel, welches wir anführen wollen, ist wieder der Malerei entnommen.

Die Oberflächen der Körper zeigen, besonders wenn sie polirt sind, so glänzend leuchtende Punkte, dass sie in ihrem Glanze dem der Lichtquelle, welche die Fläche bestrahlt, fast gleichkommen. Die Leuchtkraft dieser Punkte ist um so grösser und ihr Umfang um so kleiner, je glänzender und glatter die Oberflächen sind. [**43**] Wenn die Oberflächen matt und rauh sind, so haben die leuchtenden Punkte geringeren Glanz und nehmen einen grösseren Theil der Oberfläche ein.

Für jede Fläche ist die Lage des leuchtenden Punktes durch die folgende Bedingung bestimmt: Der einfallende Lichtstrahl und der nach dem Auge des Beschauers reflectirte Lichtstrahl müssen in derselben Normalebene zur Tangentialebene in dem leuchtenden Punkte liegen und mit dieser letzteren gleiche Winkel bilden, weil der leuchtende Punkt als Spiegel wirkt und ein Theil des Bildes der Lichtquelle in das Auge zurückstrahlt. Die Bestimmung dieses Punktes erfordert die äusserste Genauigkeit, und der geringste dabei begangene Fehler giebt zu sehr grossen Irrthümern und Verzerrungen in dem äusseren Ansehen eines Gegenstandes Anlass, selbst wenn seine Umrisse und seine Zeichnung mit mathematischer Genauigkeit ausgeführt sind. Wir geben dafür nur ein einziges, aber sehr treffendes Beispiel.

Die Oberfläche des Augapfels ist glänzend und, um ihren Glanz so intensiv als möglich zu machen, ausserdem noch mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht überzogen. Beobachtet man ein offenes Auge, so nimmt man auf seiner Oberfläche einen leuchtenden Punkt von grossem Glanze und sehr geringem Umfange war, dessen Lage von derjenigen der Lichtquelle und des Beobachters abhängt. Hätte die Oberfläche des Augapfels vollkommene Kugelgestalt, so könnte sich das Auge um seine verticale Axe drehen, ohne dass die Lage des leuchtenden Punktes die geringste Aenderung erfahren würde. Der Augapfel ist aber in der Richtung der Sehaxe verlängert, und wenn er sich um seine verticale Axe dreht, so verschiebt sich die Lage des leuchtenden Punktes. Diese Verschiebung, für welche wir durch lange Uebung sehr empfindlich geworden sind, bedingt sehr wesentlich unser Urtheil über die Stellung des Augapfels. Hauptsächlich aus dem Unterschiede der Lage der leuchtenden Punkte auf den Oberflächen der Augäpfel eines Menschen erkennen wir, ob er schielt oder nicht schielt, ob er uns ansieht oder nicht ansieht, und wohin er in dem letzteren Falle seinen Blick gerichtet hat.

Indem wir dieses Beispiel erwähnen, wollen wir damit nicht behaupten, dass man nun die Lage des leuchtenden Punktes auf dem Augapfel durch geometrische Zeichnung bestimmen soll; wir wollen durch dasselbe nur deutlich erkennen lassen, wie geringe Irrthümer in der Lage dieses Punktes oft beträchtliche Fehler in der äusseren Erscheinung des Gegenstandes hervorbringen können, obgleich sonst sein äusserer Umriss immer derselbe bleibt.

[**44**]

Tangentialebene an eine oder mehrere Kugeln. Bemerkenswerthe Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades.

35. Gehen wir nun zur wirklichen Bestimmung von Tangentialebenen über, welche von einem ausserhalb liegenden Punkte an krumme Flächen gelegt werden sollen.

Die Kugel ist eine der einfachsten Flächen, welche man betrachten kann. Sie hat mit einer grossen Anzahl anderer Flächen die Art der Erzeugung gemeinsam; man könnte sie z. B. zu den Umdrehungsflächen zählen und sie nicht besonders betrachten. Ihre Regelmässigkeit aber ist die Ursache von bemerkenswerthen Resultaten, von welchen einige durch ihre Neuheit besonderen Reiz haben und mit welchen wir uns — weniger ihrer selbst willen, als um in der räumlichen Anschauung die für allgemeinere und nützlichere Dinge nöthige Uebung zu erhalten — zunächst beschäftigen wollen.

36. **Erste Aufgabe.** Es soll durch eine gegebene Gerade eine Tangentialebene an eine gegebene Kugel gelegt werden.

Lösung I. (Fig. 21 u. 22) M', M'' seien die beiden Projectionen des Kugelmittelpunktes M, k' die erste Projection des horizontalen grössten Kugelkreises k und g', g'' die beiden Projectionen der gegebenen Geraden g. Durch den Kugelmittelpunkt M denken wir uns zunächst eine Ebene E senkrecht zu der Geraden g gelegt und nach dem von uns in dem Artikel 16 (Seite 25—26) gegebenen Verfahren die Projectionen P', P'' des Schnittpunktes dieser Ebene mit der Geraden g bestimmt.

Durch die Gerade g können offenbar zwei Tangentialebenen Σ und T an die Kugel gelegt werden, welche sie auf verschiedenen Seiten berühren und zwischen denen die Kugel selbst liegt. Deshalb erhalten wir zwei verschiedene Berührungs-

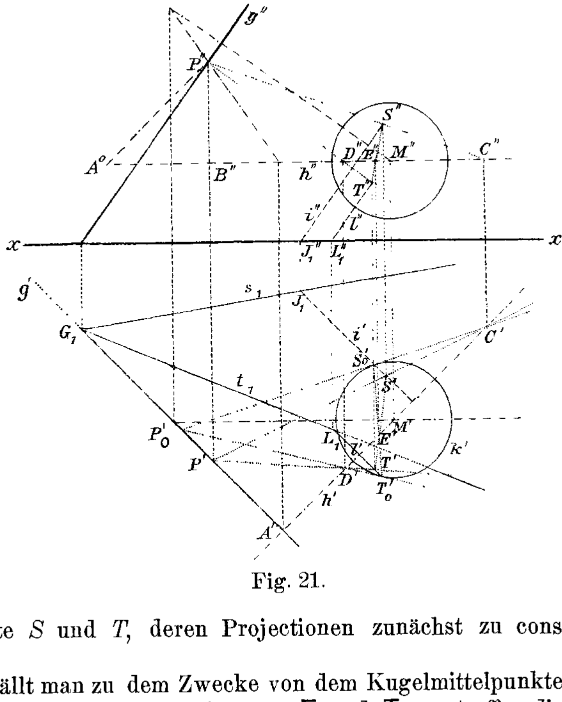

Fig. 21.

punkte S und T, deren Projectionen zunächst zu construiren sind.

Fällt man zu dem Zwecke von dem Kugelmittelpunkte Lothe auf die beiden Tangentialebenen Σ und T, so treffen die Lothe diese letzteren in ihren Berührungspunkten S, T mit der Kugel und liegen in der zu der gegebenen Geraden g senkrechten Hülfsebene E. Die beiden Berührungspunkte sind mithin auf der Schnittlinie der Kugel und der Ebene E gelegen, welche ein grösster Kugelkreis ist und an welche die beiden Schnittgeraden der Ebene E mit den gesuchten Tangentialebenen Tangenten sind.

[**45**] Man denkt sich also in der Ebene E durch den Kugelmittelpunkt M eine horizontale Gerade h gezogen, deren verticale Projection h'' die durch den Punkt M'' gezogene horizontale Gerade und deren horizontale Projection h' das von dem Punkte M' auf die Projection g' gefällte Loth ist. Denkt man sich dann weiter die Ebene E um diese horizontale Gerade h in die Lage E_0 parallel zur ersten Projectionsebene gedreht, so muss der Schnittkreis der Ebene E mit der Kugel sich ebenfalls in den Kreis k' projiciren, auf dessen Peripherie dann auch die beiden gesuchten Berührungspunkte liegen. Construirt man noch den Punkt P_0' — die Projection des Punktes P_0, in welchen der Schnittpunkt P der Ebene E und der Geraden g durch diese Umlegung zu liegen kommt —, so bestimmen die beiden Tangenten $P_0'S_0'$ und $P_0'T_0'$, welche von P_0' aus an den Kreis k' gezogen werden können, die beiden gesuchten Berührungspunkte in der umgelegten Ebene E_0. Den Punkt P_0' oder, was dasselbe ist, den Abstand des Punktes P von dem Punkte A*) kann man aber leicht finden, da die horizontale Projection dieser Strecke gleich $A'P'$ und die Differenz der verticalen Höhen ihrer Endpunkte gleich $B''P''$ ist; trägt man also die Strecke $A'P'$ auf der Geraden h'' von B'' aus bis A^0 ab, so ist die Hypotenuse A^0P'' gleich dem gesuchten Abstande, welchen man dann auf der Projection g' von A' bis P_0' abträgt. Von P_0' zieht man hierauf die beiden Tangenten an den Kreis k, deren Berührungspunkte die Projectionen S_0', T_0' der gesuchten Berührungspunkte in der Lage S_0, T_0, in welche sie durch die Umlegung der Ebene E zu liegen gekommen sind, bestimmen.

Um nun schliesslich die Projection S', T' der Berührungspunkte S, T in ihrer eigentlichen Lage zu finden, dreht man die umgelegte Ebene E_0 wieder um die Gerade h in ihre ursprüngliche Lage E zurück, wodurch der Punkt P_0, die beiden

*) [Der Punkt A ist der Schnittpunkt einer durch die Gerade g gelegten Verticalebene mit der Geraden h.]

Tangenten $P_0 S_0$, $P_0 T_0$ (welche bis zu ihren Schnittpunkten C und D mit der Geraden h verlängert sind) und die Sehne $S_0 T_0$ (welche die Gerade h in dem Punkte E schneidet) in ihre natürliche Lage, also in P, PS, PT, ST zu liegen kommen. Die Punkte C, D, E und also auch C', D', E' behalten bei dieser Bewegung unverändert ihre Lage bei, da sie auf der Umdrehungsaxe selbst liegen. Die Punkte S_0, T_0 beschreiben Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht auf der Geraden h stehen und deren horizontale Projectionen die von S_0, T_0 auf die Gerade h' gefällten Lothe sind; auf diesen Lothen müssen die horizontalen Projectionen S', T' der gesuchten Berührungspunkte S, T liegen. Während dieser Rückwärtsbewegung der Ebene E bleiben aber die beiden Tangenten $P_0 S_0 C$ und $P_0 T_0 D$ stets Tangenten an den grössten Kugelkreis, welcher von der Ebene E aus der Kugel ausgeschnitten wird, und S_0 und T_0 stets ihre Berührungspunkte mit demselben; [**46**] ist die Ebene in ihre ursprüngliche Lage E zurückgelangt, so fällt der Punkt P_0' wieder in den Punkt P' und die beiden Tangenten projiciren sich in die geraden Linien $P'C'$ und $P'D'$. Auf diesen beiden letzteren Geraden müssen auch die ersten Projectionen S' und T' der gesuchten Berührungspunkte liegen, und folglich ist der Schnittpunkt von $P'C'$ mit dem von S_0' auf h' gefällten Lothe der Punkt S' und der Schnittpunkt von $P'D'$ mit dem von T_0' auf h' gefällten Lothe der Punkt T'; die beiden Punkte S' und T' liegen mit E' in gerader Linie.

Um die verticalen Projectionen S'', T'' derselben Punkte zu erhalten, zieht man zunächst durch S' und T' Senkrechte zur Projectionsaxe x von unbestimmter Länge und bestimmt von den Punkten C, D die zweiten Projectionen C'', D'', welche auf der zweiten Projection h'' der Geraden h liegen müssen. Verbindet man C'' und D'' mit P'', so sind diese Geraden die verticalen Projectionen der beiden Tangenten. Folglich müssen auf ihnen die gesuchten Projectionen S'', T'' der Berührungspunkte liegen und daher in ihre Schnittpunkte mit den durch die Punkte S', T' zu der Projectionsaxe gezogenen Senkrechten fallen.

Nachdem man so die horizontalen und verticalen Projectionen der beiden Berührungspunkte gefunden hat, denkt man sich durch jeden dieser Punkte eine zu der gegebenen Geraden g parallele Gerade gezogen, um die ersten Spurlinien der beiden gesuchten Tangentialebenen zu construiren. Diese Geraden i und l liegen in den entsprechenden Tangentialebenen, und man erhält ihre Projectionen, indem man zu g' eine Parallele i' durch S' und eine Parallele l' durch T', zu g'' eine Parallele i'' durch S'' und eine Parallele l'' durch T'' zieht.

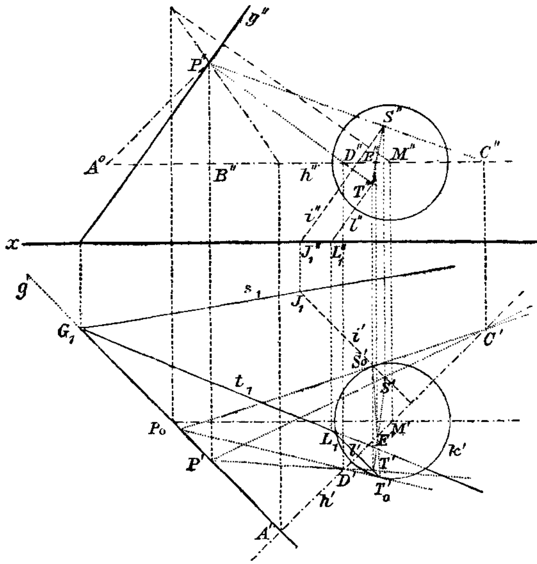

Fig. 22.

Dann construirt man die ersten Spurpunkte G_1, J_1, L_1 der Geraden g, i, l und erhält in den Verbindungsgeraden $G_1 J_1$, $G_1 L_1$ die ersten Spurlinien s_1, t_1 der beiden gesuchten Tangentialebenen Σ, T.

Anstatt durch die Berührungspunkte S, T neue Hülfsgerade i, l zu ziehen, kann man auch die ersten Spurpunkte der beiden Tangenten PS, PT aufsuchen, welche denselben Zweck erfüllen würden. Um die zweiten Spurlinien s_2, t_2 der gesuchten Tangentialebenen zu erhalten, wendet man das schon öfter benutzte Verfahren an.

Die Lösung hätten wir viel eleganter gestalten können, wenn wir die beiden Projectionsebenen durch den Kugelmittelpunkt gelegt hätten. Dann würden die beiden Projectionen der Kugel in ein und denselben Kreis gefallen und die geraden Linien weniger lang zu ziehen gewesen sein. Wir haben aber diese Annahme nicht gemacht und beide Projectionen der Kugel getrennt von einander gezeichnet, um unseren Entwickelungen grössere Durchsichtigkeit geben zu können. Es ist jedoch leicht, die Construction in der angegebenen Weise so kurz und bündig zu gestalten, als dies nur irgend erreichbar ist.

[**47**] 37. **Lösung II.** (Fig. 23 u. 24) Es seien wieder M', M'' die Projectionen des Kugelmittelpunktes M, $M'A'$ der Kugelradius, k' die erste Projection des horizontalen grössten Kugelkreises k, und g', g'' die Projectionen der gegebenen Geraden g. Die Ebene des horizontalen Kreises denkt man sich bis zum Schnitte P mit der Geraden g verlängert; da die verticale Projection dieser Ebene in die durch den Punkt M'' gezogene horizontale Gerade fällt, so ist der Punkt, in welchem sich die letztere Gerade mit der zweiten Projection g'' schneidet, die zweite Projection P'' des Schnittpunktes P, und man findet seine erste Projection, indem man den Punkt P'' senkrecht zu x auf die Gerade g' projicirt.

Denkt man sich dann von dem Punkte P als Spitze einen einhüllenden Kegel an die Kugel gelegt, so berührt jede seiner geradlinigen Erzeugenden die Kugel in einem Punkte, und man erhält die Projectionen der beiden horizontal gelegenen Erzeugenden, indem man von P' aus die Tangenten an den Kreis k' zieht, welche ihn in den leicht zu construirenden Punkten A' und B' berühren. Die Kegelfläche berührt die Kugel in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich $A'B'$ ist und dessen Ebene senkrecht auf der Kegelaxe, also hier vertical steht, sodass seine horizontale Projection mit der Geraden $A'B'$ zusammenfällt.

Wenn man nun die beiden Tangentialebenen Σ und T der Kegelfläche construirt, welche durch die Gerade g hindurchgehen, so berührt jede den Kegel längs derjenigen geradlinigen Erzeugenden, welche gleichzeitig der Ebene und dem Kegel angehört. Und weil diese geradlinige Erzeugende auch die Kugelfläche in einem ihrer Punkte, welcher auf der sich in die Gerade $A'B'$ projicirenden Kreisperipherie liegt, berührt, so folgt, dass dieser Punkt gleichzeitig auf dem Kegel, auf der ihn berührenden Ebene, auf der Kugel und der Peripherie des sich in die Gerade $A'B'$ projicirenden Kreises liegt, und also ein allen diesen Gebilden gemeinsamer Berührungspunkt ist. Folglich sind 1. die beiden Tangentialebenen Σ und T des Kegels auch Tangentialebenen an die Kugel und zwar sind es diejenigen Tangentialebenen, deren Lage zu bestimmen ist; 2. da die Berührungspunkte S und T dieser

Ebenen Σ und T auf der Peripherie des sich in die Gerade $A'B'$ projicirenden Kreises liegen, so liegen ihre ersten Projectionen S' und T' auf der Geraden $A'B'$; 3. da die Ver-

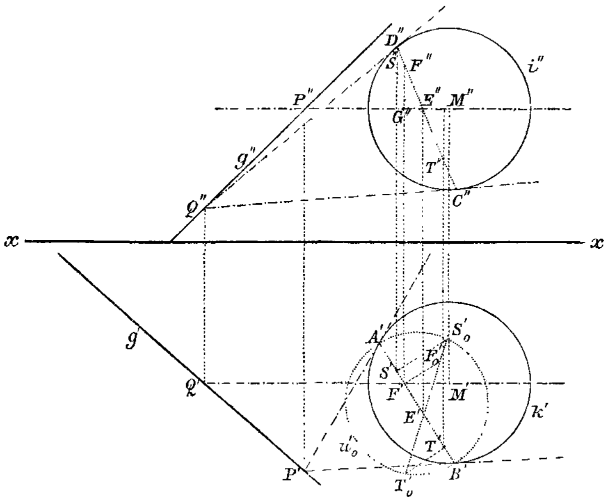

Fig. 23.

bindungsgerade der beiden Punkte S und T in der Ebene des erwähnten Kreises liegt, so fällt ihre erste Projection ebenfalls in die Gerade $A'B'$.

Führen wir nun für die Ebene des der verticalen Projectionsebene parallelen grössten Kugelkreises i dieselben Operationen durch, [**48**] welche wir soeben für die Ebene des grössten horizontalen Kugelkreises k angegeben haben.

Die horizontale Projection dieser verticalen Ebene ist die zur Projectionsaxe x parallele Gerade durch den Punkt M'; der Durchstosspunkt Q der Geraden g durch diese Ebene projicirt sich auf die erste Projectionstafel in den Schnittpunkt Q' der soeben durch M' gezogenen Parallelen mit g', und man findet seine zweite Projection Q'', indem man den Punkt Q' senkrecht zu x auf g'' projicirt. Denkt man sich nun eine zweite Kegelfläche, deren Spitze in dem Punkte Q liegt und welche die Kugel in ähnlicher Weise wie die erste Kegelfläche einhüllt, so erhält man die verticalen Projectionen der beiden äussersten erzeugenden Geraden dieses Kegels, indem man von dem Punkte Q'' die beiden Tangenten an den Kreis i'' zieht, welche ihn in den Punkten C'' und D'' berühren. Dieser zweite Kegel berührt die Kugel in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich $C''D''$ ist und dessen zur verticalen Projectionsebene senkrechte Ebene sich in die Grade $C''D''$ projicirt. Die Peripherie dieses Kreises geht ebenfalls durch die beiden Berührungspunkte S, T der Kugel mit den gesuchten Tangentialebenen Σ, T. Folglich liegen die verticalen Projectionen S'', T'' dieser beiden Punkte auf der Geraden $C''D''$ und in diese projicirt sich auch ihre Verbindungsgerade ST.

Die durch die beiden Berührungspunkte S und T gezogene Gerade hat also die Gerade $A'B'$ zur horizontalen, die Gerade $C''D''$ zur verticalen Projection und schneidet die Ebene des horizontalen grössten Kreises k in einem Punkte, dessen verticale Projection der Schnittpunkt E'' von $C''D''$ mit $M''P''$

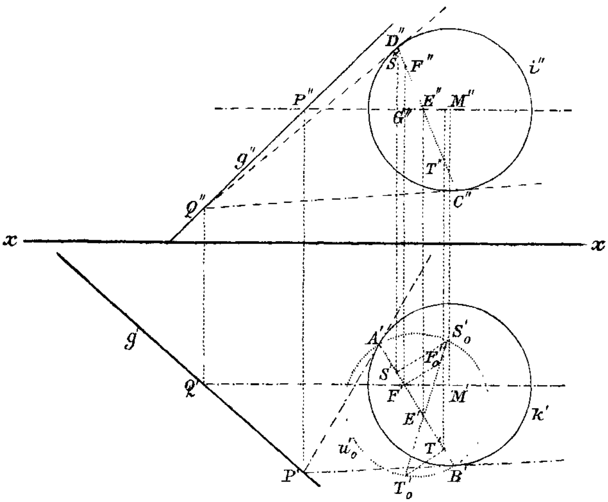

Fig. 24.

ist und dessen horizontale Projection E' man durch Projection auf $A'B'$ erhält.

Nun legt man die Ebene des verticalen Kreises, dessen Projection die Gerade $A'B'$ ist, um seinen horizontalen Durchmesser AB in horizontale Lage um und lässt die beiden Berührungspunkte S, T, durch welche dieser Kreis hindurchgeht, an dieser Bewegung theilnehmen. Man erhält die Projection des Kreises in dieser neuen Lage, indem man über $A'B'$ als Durchmesser den Kreis u_0' construirt. Bestimmt man noch die Lage, welche die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte nach ausgeführter Umlegung angenommen hat, so findet man in deren Schnittpunkten mit dem Kreise u_0' die ersten Projectionen S_0', T_0' der umgelegten Berührungspunkte.

Da der Punkt E der Verbindungsgeraden ST auf der Umlegungsaxe AB liegt, so bleibt seine Lage bei dieser Bewegung unverändert; [**49**] die Gerade muss also auch nach erfolgter Umlegung in die Lage $S_0 T_0$ noch durch diesen Punkt gehen. Der Punkt F, in welchem die Gerade ST die der verticalen Projectionsebene parallele Ebene trifft, hat den Schnittpunkt F' der Geraden $A'B'$ und $M'Q'$ zur ersten Projection, und man findet seine zweite Projection F'', indem man den Punkt F' auf $C''D''$ projicirt. Der Punkt F beschreibt bei der Umlegung um die Axe AB den vierten Theil der Peripherie eines Kreises, dessen Ebene senkrecht auf AB steht und dessen Radius gleich $F''G''$ ist. Zieht man also durch den Punkt F' eine Senkrechte zu der Geraden $A'B'$ und trägt man auf ihr die Strecke $F''G''$ von F' aus bis F'_0 ab, so ist der Punkt F'_0 ein Punkt der horizontalen Projection der horizontal umgelegten Verbindungsgeraden $S_0 T_0$. Zieht man nun durch die Punkte E' und F_0' eine Gerade, so schneidet sie den Kreis u_0' in den Punkten S_0', T_0', welche die horizontalen Projectionen der gesuchten beiden Berührungspunkte in der umgelegten verticalen Ebene sind.

Um die horizontalen Projectionen S', T' der beiden Berührungspunkte S, T in ihrer natürlichen Lage zu erhalten, dreht man den Kreis u_0 um die Gerade AB in seine ursprüngliche verticale Lage zurück. Bei dieser Rückwärtsbewegung beschreiben die beiden Punkte S_0 und T_0 die vierten Theile der Peripherien von Kreisen, deren Ebenen zu AB senkrecht sind und deren horizontale Projectionen folglich die zu $A'B'$ senkrechten Geraden $S_0'S'$ und $T_0'T'$ sind. Die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte liegen also auf diesen ebengenannten Senkrechten, und da sie, wie wir gesehen haben, auch auf der Geraden $A'B'$ liegen müssen, so müssen sie mit den Schnittpunkten S' und T' zusammenfallen.

Die verticalen Projectionen S'' und T'' der beiden Berührungspunkte erhält man durch Projection der Punkte S' und T' auf die Gerade $C''D''$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man auf den durch die Punkte S' und T' gezogenen verticalen Geraden von ihren Schnittpunkten mit der horizontalen Geraden $M''P''$ aus die Strecken $S_0'S'$ und $T_0'T'$ nach oben, bez. unten abträgt.

Nachdem jetzt die horizontalen und verticalen Projectionen der beiden Berührungspunkte S und T gefunden worden sind, bestimmt man die Spurlinien der beiden zugehörigen Tangentialebenen Σ und T in derselben Weise wie in der ersten Lösung der vorliegenden Aufgabe.

Diese zweite Lösung kann ebenfalls viel knapper gestaltet werden, wenn man die beiden Projectionstafeln durch den Kugelmittelpunkt legt, wodurch die beiden Projectionen k' und i'' der Kugel in eine einzige zusammenfallen.

38. Die letzten Betrachtungen führen uns zur Entdeckung einiger bemerkenswerthen Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades.

[**50**] Wir haben soeben gesehen, dass die Kugel von den beiden ihr umschriebenen Kegeln in zwei Kreisen, welche durch die beiden Berührungspunkte der Tangentialebenen an die Kugel hindurchgehen, berührt wird. Diese Eigenschaft kommt nicht allein den beiden betrachteten Kegeln zu, sondern allen der Kugel umschriebenen Kegeln, deren Spitzen auf der gegebenen Geraden liegen. Nimmt man also einen der Kugel umschriebenen Kegel, dessen Spitze auf der gegebenen Geraden liegt, und lässt man ihn sich so bewegen, dass die Spitze sich längs der Geraden bewegt und die Kegelfläche dabei stets die Kugel einhüllt, so berührt der Kegel in jeder seiner Lagen die Kugel in einem Kreise. Alle diese Kreise gehen durch zwei Punkte hindurch, welche die Berührungspunkte der von der gegebenen Geraden an die Kugel gelegten Tangentialebenen sind, und die Ebenen dieser Kreise schneiden sich sämmtlich in der Verbindungssehne dieser beiden Berührungspunkte. Legt man dann eine Ebene durch die gegebene Gerade und den Kugelmittelpunkt, so geht diese Ebene durch die Axen aller Kegel hindurch und steht senkrecht auf den Ebenen aller Berührungskreise, folglich auch auf ihrer gemeinsamen Schnittlinie; sie schneidet also alle diese Kreisebenen in geraden Linien, welche durch ein und denselben Punkt gehen.

Legt man, wenn eine Kugel und eine Gerade gegeben sind, umgekehrt durch die Gerade unendlich viele Ebenen, welche die Kugel in Kreisen schneiden, und construirt man über jedem dieser Kreise als Grundlinie den geraden Kegel, welcher zugleich der Kugel umschrieben ist, so liegen die Spitzen aller dieser Kegel in einer andern geraden Linie.

39. Betrachtet man nur die Figuren, welche von der durch den Kugelmittelpunkt und die gegebene Gerade gehenden Ebene

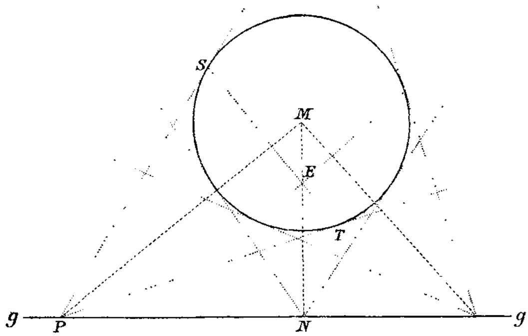

Fig. 25.

ausgeschnitten werden, so erhält man die folgenden zwei Sätze (Fig. 25 u. 26), welche unmittelbare Folgerungen der vorstehenden Betrachtungen sind.

»In einer Ebene ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte M und eine gerade Linie g gegeben. Von einem beliebigen Punkte P der Geraden g zieht man die beiden Tangenten an den Kreis und verbindet ihre Berührungspunkte S, T durch eine Gerade. [**51**] Lässt man dann den Punkt P in fester Verbindung mit den beiden Geraden PS, PT die Gerade g in der Weise durchlaufen, dass die beiden Geraden stets Tangenten an den Kreis bleiben, so ändern zwar die beiden Berührungspunkte und deren Verbindungslinie fortgesetzt ihre Lage, letztere geht aber dabei stets durch einen festen Punkt E, welcher auf dem von dem Kreismittelpunkte M auf die Gerade g gefällten Lothe MN liegt.«

»Wenn man umgekehrt durch einen beliebigen Punkt E in der Ebene eines Kreises beliebig viele Gerade ST zieht, von denen eine jede den Kreis in zwei Punkten S und T schneidet, und wenn man in diesen Schnittpunkten die Tangenten SP und TP an den Kreis zieht, welche sich in einem Punkte P schneiden, so ist der geometrische Ort aller auf diese Weise bestimmten Schnittpunkte P eine Gerade g, welche senkrecht auf der Linie ME steht.«

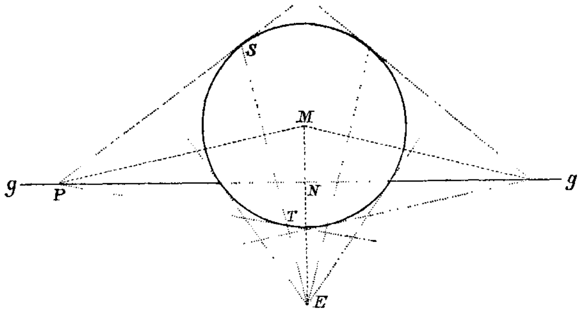

Fig. 26.

Der Kreis besitzt die soeben ausgesprochene Eigenschaft nicht, weil alle seine Punkte gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, sondern weil er eine Curve zweiten Grades ist, und es haben in der That alle Kegelschnitte diese Eigenschaft.

Es sei $ASBT$ (Fig. 27) ein beliebiger Kegelschnitt und g eine in seiner Ebene beliebig gegebene Gerade. Denken wir uns,

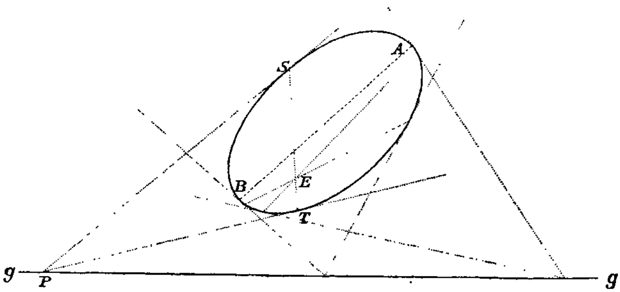

Fig. 27.

dass die Curve sich um eine ihrer Hauptaxen, z. B. AB dreht, sodass also eine Umdrehungsfläche entsteht, und dann die beiden Tangentialebenen von der Geraden g aus an die so erzeugte Fläche gelegt, so wird die letztere von den beiden Ebenen in zwei Punkten berührt. Nehmen wir dann einen beliebigen Punkt P der Geraden g als Spitze einer Kegelfläche, welche der Umdrehungsfläche umschrieben ist und sie berührt, so findet die Berührung längs einer ebenen Curve statt, welche unbedingt durch die beiden Berührungspunkte der Tangentialebenen gehen muss; die Ebene dieser Berührungscurve steht senkrecht auf der des gegebenen Kegelschnittes und projicirt sich auf die letztere in die Gerade ST, welche durch die Berührungspunkte der beiden von dem Punkte P an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten geht. Nimmt man dann weiter an, dass die Spitze P des Kegels sich auf der Geraden g entlang bewegt und dass die Kegelfläche dabei stets die Umdrehungsfläche einhüllt, so gehen die Curven, längs deren die letztere von den Kegelmänteln berührt wird, durch die Berührungspunkte der beiden Tangentialebenen durch die Gerade g und liegen in einer zur Ebene des Kegelschnittes senkrechten Ebene. [**52**] Es gehen also die Ebenen aller Berührungscurven durch die Verbindungsgerade der genannten zwei Berührungspunkte, und diese steht auf der Ebene des Kegelschnittes senkrecht; die Projectionen aller dieser Ebenen auf die Ebene des Kegelschnittes sind mithin gerade Linien, welche sämmtlich durch den Punkt E, die Projection der die beiden Berührungspunkte verbindenden Geraden, gehen.

40. Dieser Satz ist endlich nur ein specieller Fall eines weit allgemeineren, im Raume gültigen Satzes, welchen wir hier aber nur ohne Beweis anführen.

»Es sei eine beliebige Fläche zweiten Grades und ein ihr umschriebener, sie berührender Kegel gegeben, dessen Spitze in einem beliebigen Punkte des Raumes liegt. Wenn sich dann die Kegelfläche in der Weise bewegt, dass sie stets der gegebenen Fläche umschrieben ist und sie berührt, ihre Spitze aber stets auf einer beliebig gegebenen Geraden liegt, so geht die Ebene der Berührungscurve beider Flächen immer durch ein und dieselbe Gerade, nämlich durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Tangentialebenen, welche von der gegebenen Geraden an die Fläche zweiten Grades gelegt werden können; bewegt sich die Kegelfläche aber in der Weise, dass ihre Spitze stets in derselben Ebene liegt, so gehen die Ebenen ihrer Berührungscurven mit der gegebenen Fläche immer durch ein und denselben Punkt.«[7])

41. **Zweite Aufgabe.** (Fig. 28) Durch einen gegebenen Punkt soll eine Ebene gelegt werden, welche zwei gegebene Kugeln zugleich berührt.

Lösung. Es seien M', M'' und N', N'' die Projectionen der Mittelpunkte der beiden gegebenen Kugeln und P', P'' die Projectionen des gegebenen Punktes. Nachdem man die beiden Geraden $M'N'$, $M''N''$, welche die Projectionen der Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte M, N sind, und die Projectionen k'_M, i''_M und k'_N, i''_N der grössten Kreise beider Kugeln, welche den Projectionsebenen parallel sind, gezeichnet hat, denkt man sich den beiden Kugeln eine Kegelfläche, welche beide berührt, umschrieben. Die Spitze dieses Kegels

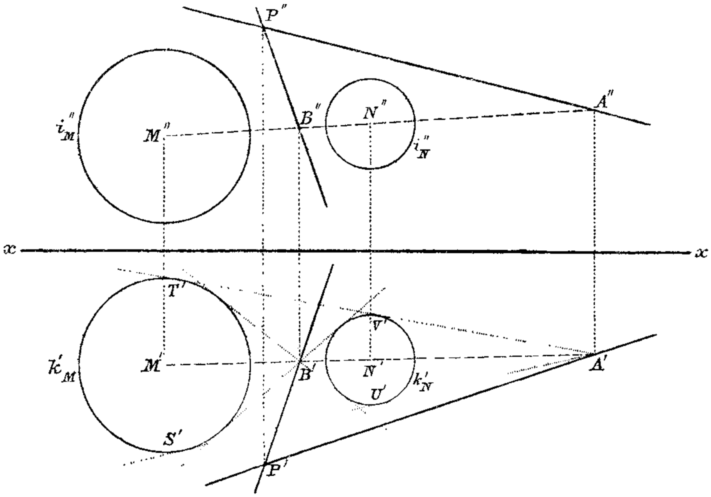

Fig. 28.

liegt auf der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte. Man zieht an die beiden Kreise k'_M und k'_N die beiden gemeinsamen Tangenten $S'U'$, $T'V'$, welche sich in einem Punkte A' der Geraden $M'N'$ schneiden; dieser Punkt A' ist die horizontale Projection der Kegelspitze, deren verticale Projection man erhält, [53] wenn man den Punkt A' nach A'' auf der Verlängerung der Geraden $M''N''$ projicirt. Endlich zieht man noch die Projectionen $A'P'$, $A''P''$ der durch die Kegelspitze A und den gegebenen Punkt P gehenden Geraden. Legt man dann durch diese Gerade AP zwei Tangentialebenen an den Kegel, so berührt eine jede denselben längs einer erzeugenden Geraden und ist folglich auch eine beiden Kugeln gemeinsame Tangentialebene. Die vorliegende Aufgabe ist damit auf die andere zurückgeführt, durch die Gerade AP, welche die Kegelspitze und den gegebenen Punkt verbindet, zwei Tangentialebenen an eine der beiden gegebenen Kugeln zu legen, welche Aufgabe nach einem der zur Lösung der vorigen gegebenen Verfahren auszuführen ist; die beiden so erhaltenen Ebenen sind zugleich auch Tangentialebenen an die andere Kugel.

Bei dieser Lösung ist zu beachten, dass man zwei verschiedene Kegelflächen den beiden Kugeln umschreiben kann. Die eine derselben hüllt beide Kugeln nach aussen hin ein, ihre Spitze liegt in Bezug auf die eine Kugel jenseits der andern und ihre Tangentialebenen werden von beiden Kugeln auf derselben Seite berührt. Der zweite Kegel hüllt eine der Kugeln nach innen, die andere nach aussen hin ein, und seine Spitze liegt zwischen den beiden Kugelmittelpunkten. Man findet die horizontale Projection B' der Spitze dieses zweiten Kegels, wenn man an die Kreise k'_M und k'_N die beiden inneren gemeinsamen Tangenten zieht, welche sich in dem Punkte B' auf der Centrale $M'N'$ schneiden, und die verticale Projection B'', indem man den Punkt B' nach B'' auf der Geraden $M''N''$ projicirt. Die beiden von der Geraden BP aus an diese zweite Kegelfläche gelegten Tangentialebenen berühren ebenfalls beide Kugeln; aber die berührenden Kugeln liegen auf verschiedenen Seiten jeder der beiden Tangentialebenen. Es giebt also vier verschiedene Ebenen, welche den von der Aufgabe gestellten Forderungen genügen; für zwei derselben liegen die Kugeln auf derselben Seite der Ebene, für die beiden andern auf verschiedenen Seiten.

42. **Dritte Aufgabe.** An drei ihrer Lage und Grösse nach gegebene Kugeln soll eine gemeinschaftliche Tangentialebene gelegt werden.

Lösung. Denken wir uns zuerst eine Kegelfläche, welche die beiden ersten Kugeln berührt, construirt, so berührt die gesuchte Tangentialebene dieselbe längs einer ihrer geradlinigen Erzeugenden und geht durch die Spitze des Kegels. Wenn wir uns dann um die erste und dritte Kugel einen Kegel, welcher beide berührt, beschrieben denken, so muss die gesuchte Tangentialebene auch diesen zweiten Kegel längs einer seiner geradlinigen Erzeugenden berühren [**54**] und mithin auch durch seine Spitze gehen. Denken wir uns schliesslich der zweiten und dritten Kugel einen Kegel, welcher beide berührt, umschrieben, so berührt die gesuchte Tangentialebene auch diesen dritten Kegel längs einer seiner geradlinigen Erzeugenden und geht durch seine Spitze. Es liegen also die Spitzen aller drei Kegel in der gesuchten Tangentialebene; sie liegen aber auch in der durch die drei Kugelmittelpunkte gehenden Ebene, in welcher die Axen aller drei Kegel liegen. Da nun die drei Spitzen zugleich in zwei Ebenen liegen, so liegen sie mithin in einer Geraden. Wenn man folglich die horizontalen und verticalen Projectionen der drei Spitzen (es genügen schon dazu die Projectionen von zwei Spitzen) nach dem bei der vorigen Aufgabe gegebenen Verfahren construirt und durch dieselben zwei Gerade zieht, so sind diese letzteren die Projectionen einer in der Tangentialebene liegenden Geraden. Die vorliegende Aufgabe ist damit wieder auf die andere, durch eine gegebene Gerade eine Tangentialebene an eine beliebige der drei Kugeln zu legen, zurückgeführt, welche man nach den früher gegebenen Methoden löst; die auf diese Weise gefundene Ebene berührt dann zugleich auch die beiden andern Kugeln.

43. Hierbei ist zu beachten, dass man an je zwei der Kugeln immer zwei sie berührende und einhüllende Kegel legen kann, von denen die Spitze des einen Kegels in Bezug auf die eine Kugel jenseits der anderen liegt, während die Spitze des anderen Kegels zwischen den beiden Kugeln gelegen ist. Folglich giebt es im ganzen sechs Kegelflächen, von denen drei je zwei Kugeln nach aussen hin einhüllen und von denen die drei anderen ihre Spitzen zwischen den Kugeln liegen haben. Die Spitzen dieser sechs Kegel liegen zu je dreien in vier Geraden, durch deren jede man gleichzeitig zwei gemeinsame Tangentialebenen an die drei Kugeln legen kann. Es genügen mithin acht verschiedene Ebenen den Forderungen dieser dritten Aufgabe; zwei dieser Ebenen werden von den drei Kugeln auf derselben Seite berührt, während die sechs anderen Ebenen so liegen, dass sie von zwei Kugeln auf der einen, von der dritten aber auf der entgegengesetzten Seite berührt werden.

44. Diese Betrachtungen führen uns zu den folgenden Sätzen.

(Fig. 29) »Zieht man an je zwei von drei Kreisen, welche ihrer Grösse und Lage nach in einer Ebene gegeben sind, die gemeinschaftlichen Tangenten und verlängert je zwei zusammengehörige äussere Tangenten, bis sie sich schneiden, so liegen ihre drei Schnittpunkte A_1, A_2, A_3 in einer geraden Linie.«

[55] Denn denkt man sich an die drei Kugeln, für welche die drei gegebenen Kreise grösste Kreise sind, eine Ebene

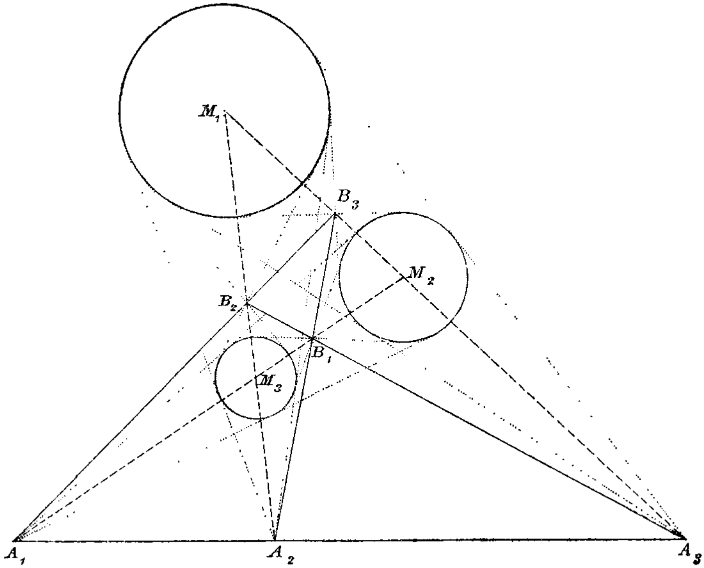

Fig. 29.

gelegt, welche von allen dreien auf derselben Seite berührt wird, so berührt diese Ebene auch die drei Kegel, welche je zwei der Kugel nach aussen einhüllen und geht durch deren Spitzen A_1, A_2, A_3. Die drei Spitzen liegen aber auch in der Ebene, welche durch die drei Kugelmittelpunkte geht und folglich, da sie also in zwei verschiedenen Ebenen enthalten sind, in einer geraden Linie.

»Zieht man an je zwei der drei gegebenen Kreise die inneren Tangenten, welche sich auf den Centralen kreuzen, so liegen je zwei der drei neuen Schnittpunkte B_1, B_2, B_3 in gerader Linie mit einem der drei ersten Schnittpunkte, sodass also die sechs Punkte A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte von vier geraden Linien sind.«

Dieser Satz ist schliesslich nur ein specieller Fall des folgenden für den Raum gültigen Satzes.

»Es sind vier Kugeln ihrer Grösse und Lage im Raume nach beliebig gegeben. Construirt man die sechs Kegel, welche je zweien dieser Kugeln von aussen umschrieben sind, so liegen ihre sechs Spitzen in einer Ebene und zwar in den Schnittpunkten von vier Geraden. Construirt man dann noch die sechs anderen Kegel, deren Spitzen zwischen den Mittelpunkten der berührten Kugeln liegen, so sind die Spitzen dieser weiteren sechs Kegel zu je dreien mit drei Spitzen der ersten sechs Kegel in einer Ebene gelegen.« [8])

Tangentialebenen an Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen von nicht auf ihnen liegenden Punkten aus.

45. **Vierte Aufgabe.** (Fig. 30) Von einem beliebigen Punkte aus eine Tangentialebene an eine gegebene Cylinderfläche zu legen.

Lösung. k sei die in der horizontalen Projectionsebene gegebene Spur der Cylinderfläche; a', a'' seien die Projectionen der Geraden a, welcher die Erzeugende der Cylinderfläche immer parallel sein soll, und P', P'' die Projectionen des gegebenen Punktes P. Legt man zu der Geraden a durch den Punkt P eine Parallele g, so muss dieselbe in der gesuchten Tangentialebene liegen, und durch die Spurpunkte dieser Parallelen müssen die Spurlinien der gesuchten Tangentialebene gehen. Zieht man also durch den Punkt P' eine Parallele g' zu der Geraden a' und durch den Punkt P'' eine Parallele g'' zu der Geraden a'', so sind diese Parallelen die beiden Projectionen der Geraden g; verlängert man dann die Projection g'' bis zu ihrem Schnittpunkte G_1'' mit der Axe und projicirt man diesen Punkt nach G_1 auf der Geraden g' so ist der Punkt G_1 der erste Spurpunkt der Geraden g und folglich ein Punkt der ersten Spurlinie der gesuchten Tangentialebene. [**56**] Nun muss aber diese Spurlinie die Curve k berühren; zieht man also von dem Punkte G_1 alle möglichen Tangenten s_1, t_1, . . . an die Curve k, so sind diese die in der horizontalen Ebene gelegenen Spurlinien aller durch den Punkt P gehenden Tangentialebenen Σ, T, . . . des Cylinders. Zieht man weiter durch die Berührungspunkte S, T, ... der Tangenten s_1, t_1, ... mit der Curve k Parallelen zu der Geraden a', so sind diese die horizontalen Projectionen der geradlinigen Erzeugenden, längs deren die

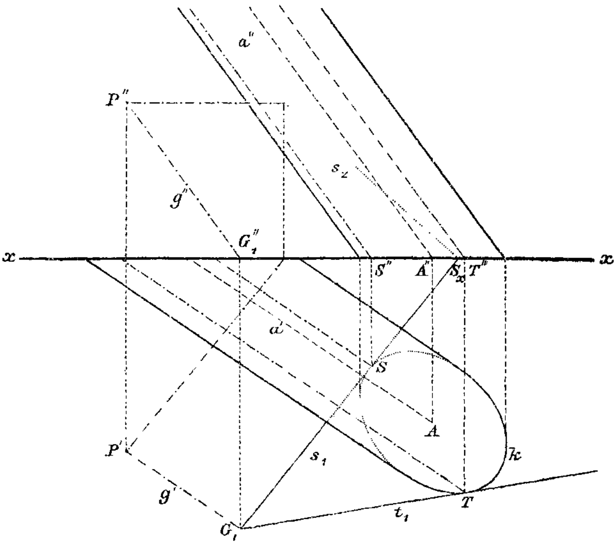

Fig. 30.

verschiedenen Tangentialebenen Σ, T, ... den Cylinder berühren. Die verticalen Projectionen derselben erhält man, wenn man die Punkte S, T auf die verticale Projectionsebene nach S'', T'', ... projicirt und durch diese letzteren Punkte Parallelen zu a'' zieht. Die zweiten Spurlinien s_2, t_2, ... der gesuchten Tangentialebenen findet man dann nach dem in Artikel 28 (S. 37—41) gegebenen Verfahren.

46. **Fünfte Aufgabe.** (Fig. 31) Von einem beliebigen Punkte aus eine Tangentialebene an eine gegebene Kegelfläche zu legen.

Lösung. Da die Lösung dieser Aufgabe nur sehr wenig von derjenigen der vorigen Aufgabe abweicht, so beschränken wir uns hier darauf, die Construction nur durch die umstehende Figur 31 anzudeuten, in welcher die Curve k die gegebene Spurlinie des Kegels darstellt, B', B'' die Projectionen seiner Spitze B und P', P'' diejenigen des gegebenen

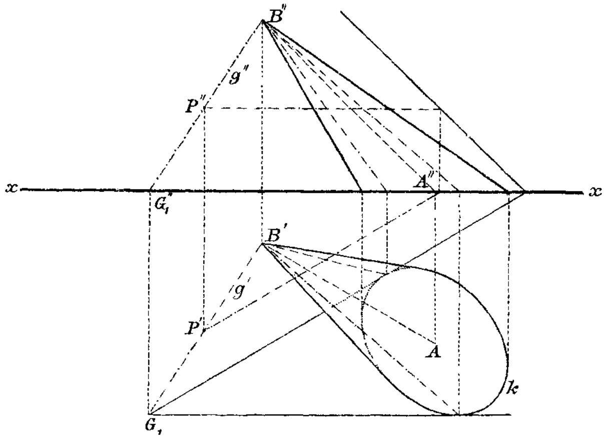

Fig. 31.

Punktes P, von dem aus die Tangentialebene an den Kegel gelegt werden soll, sind.

47. **Sechste Aufgabe.** (Fig. 32 u. 33) Durch eine gegebene Gerade soll eine Tangentialebene an eine gegebene Umdrehungsfläche gelegt werden.

Lösung. Wir nehmen von vornherein an, dass die Axe der Umdrehungsfläche senkrecht auf einer der beiden Projectionsebenen steht; dadurch wird die Allgemeinheit der Lösung nicht beeinträchtigt, da man über die Lage dieser Ebenen stets so verfügen kann, dass diese Annahme statt hat.

Es sei also A' die gegebene horizontale Projection der Axe der Fläche, a'' die verticale Projection derselben, k'' die Projection der erzeugenden Curve k, welche der verticalen Projectionsebene parallel ist, und g', g'' seien die Projectionen der Geraden g, durch welche die Tangentialebene an die Umdrehungsfläche gelegt werden soll. Von A' fällt man das Loth $A'B'$ auf die Projection g', welches die horizontale Projection des kürzesten Abstandes der Axe a von der Geraden g ist, und projicirt dann den Punkt B' nach B'' auf der Geraden g''.

[**57**] Nehmen wir nun an, eine solche Tangentialebene Σ sei bereits construirt, und die gegebene Gerade g bewege sich

so um die Umdrehungsaxe a herum, dass ihr Abstand von der Axe und ihre Neigung gegen die horizontale Ebene ungeändert bleiben und dass die Tangentialebene sich mit der Geraden g gleichzeitig bewegt, aber stets dabei die Umdrehungsfläche berührt. Dann ändert zwar, wie leicht ersichtlich ist, bei dieser Bewegung der Berührungspunkt seine Lage auf der Fläche, nicht aber seine Höhe über der Horizontalebene, da die Tangentialebene gegen diese stets die gleiche Neigung hat, und bewegt sich mithin auf der Peripherie eines Parallelkreises der Fläche. Die Gerade g erzeugt bei ihrer Bewegung eine zweite Umdrehungsfläche, welche dieselbe Axe a wie die erste hat, und an welche die Tangentialebene Σ bei ihrer Bewegung ebenfalls immer Tangentialebene ist.

Denken wir uns nämlich eine Ebene durch die Axe a und den Berührungspunkt S der Tangentialebene Σ mit der gegebenen Umdrehungsfläche gelegt, so schneidet diese Ebene die erzeugende Gerade der zweiten Umdrehungsfläche in einem Punkte P, welcher der Berührungspunkt der nämlichen Tangentialebene Σ mit der letzteren Umdrehungsfläche ist. Denn ausser der erzeugenden Geraden, durch welche die Tangentialebene Σ in diesem Punkte P hindurchgeht, enthält sie auch die Tangente, welche in dem Punkte P an den zugehörigen Parallelkreis der zweiten Umdrehungsfläche gezogen werden kann; die Tangentialebene Σ geht nämlich auch durch die Tangente, welche im Punkte S den auf der ersten Umdrehungsfläche liegenden Parallelkreis berührt, hindurch und nach der Natur der Umdrehungsfläche sind diese beiden Tangenten einander parallel.

Da wir die vorliegende Aufgabe mit Hülfe dieser zweiten Umdrehungsfläche lösen müssen, so ist es nothwendig ihre Schnittcurve l mit einer durch die Axe a gehenden Ebene E zu construiren. Wir wählen diese Ebene E parallel zur verticalen Projectionsebene; ihre Horizontalprojection ist also die zur Projectionsaxe parallele Gerade $A'C_0'$.

Wir nehmen nun auf der Geraden g einen Punkt C, dessen Projectionen C', C'' sind, beliebig an und bestimmen den Punkt, in welchem er bei der Bewegung der Geraden g um die Axe die Hülfsebene E trifft. Der Punkt C beschreibt hierbei einen Parallelkreis, dessen horizontale Projection man erhält, wenn man um den Punkt A' als Mittelpunkt einen Kreisbogen mit dem Radius $A'C'$ beschreibt, bis er die durch den Punkt A' zur Projectionsaxe x gezogene Parallele in dem Punkte C_0'

schneidet; die verticale Projection dieses Kreisbogens ist die durch den Punkt C'' zur Projectionsaxe x gezogene Parallele.

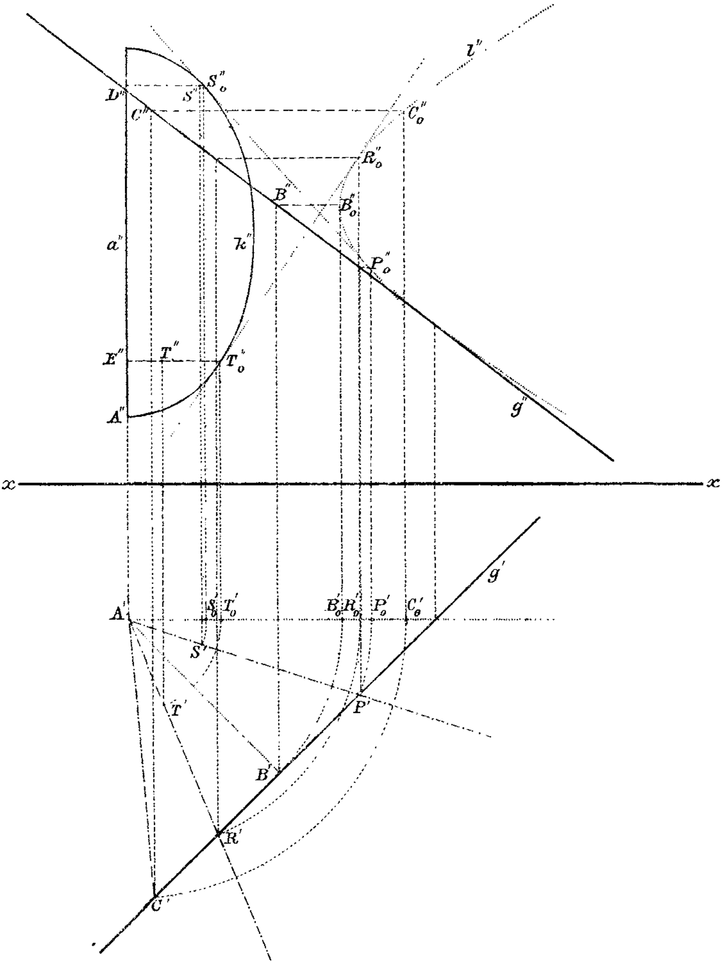

Fig. 32.

Der Punkt C_0' ist also die horizontale Projection [**58**] des Punktes C_0, in welchem der von dem Punkte C beschriebene

Parallelkreis die verticale Ebene E schneidet; projicirt man daher den Punkt C_0' nach C_0'' auf der durch den Punkt C'' gezogenen horizontalen Geraden, so ist der Punkt C_0'' die verticale Projection desselben Schnittpunktes C_0 und also die zweite Projection eines Punktes, welcher auf der von der verticalen Ebene E aus der zweiten Umdrehungsfläche ausgeschnittenen Curve l liegt. Wendet man das gleiche Verfahren noch auf beliebig viele andere Punkte der Geraden g, z. B. auf die Punkte R, B, P, . . . an, so erhält man ebenso viele Punkte R_0'', B_0'', P_0'', . . ., welche auf der zweiten Projection l'' der gesuchten Schnittcurve l liegen müssen.

Wenn nun bei der gleichzeitigen Umdrehung der Geraden g und der Tangentialebene Σ um die Axe a diese Ebene in eine zur zweiten Projectionsebene senkrechte Lage gekommen ist, so projicirt sie sich auf diese letztere in eine gerade Linie, welche gleichzeitig die beiden Curven k'' und l'' berührt. Zieht man daher an die Curven k'' und l'' alle gemeinsamen Tangenten, wie z. B. $P_0''S_0''$, $R_0''T_0''$, . . ., so erhält man die Projectionen aller Tangentialebenen Σ_0, T_0, . . ., welche der Aufgabe genügen, und zwar in der Lage, welche sie eingenommen haben, wenn sie durch die Drehung in senkrechte Stellung zu der zweiten Projectionsebene gelangt sind. Die Berührungspunkte S_0'', T_0'', . . . dieser Tangenten mit der erzeugenden Curve k'' der gegebenen Fläche bestimmen die Höhen der Berührungspunkte S, T, . . . der sämmtlichen Tangentialebenen Σ, T, . . ., welche durch die Gerade g an die Fläche gelegt werden können. Zieht man also durch diese Punkte S_0'', T_0'', . . . Parallelen zur Projectionsaxe x, so liegen auf ihnen die verticalen Projectionen S'', T'' . . . der Berührungspunkte S, T, . . . der Fläche mit den gesuchten Tangentialebenen Σ, T, ... Beschreibt man dann um A' als Mittelpunkt Kreisbogen mit den Radien $D''S_0''$, $E''T_0''$, . . ., so liegen auf diesen die horizontalen Projectionen S', T', . . . derselben Punkte S, T, ... Es bleiben also zu ihrer vollständigen Bestimmung nur noch die Meridiane der gegebenen Umdrehungsfläche, auf denen sie liegen, zu ermitteln. Hierzu werden die Berührungspunkte P_0'', R_0'', . . . benutzt.

Nachdem die Punkte P_0'', R_0'', . . . nach P_0', R_0', . . . auf der Geraden $A'C_0'$ projicirt sind, beschreibt man um A' als Mittelpunkt mit den Radien $A'P_0'$, $A'R_0'$, . . . Kreisbogen bis zu ihren Schnittpunkten P', R', . . . mit der Geraden g'. Die Kreisbogen messen zugleich die Winkel, um welche die durch die Berührungspunkte der Tangentialebenen Σ, T, . . . mit den beiden Umdrehungsflächen gezogenen Geraden *SP*, *TR*

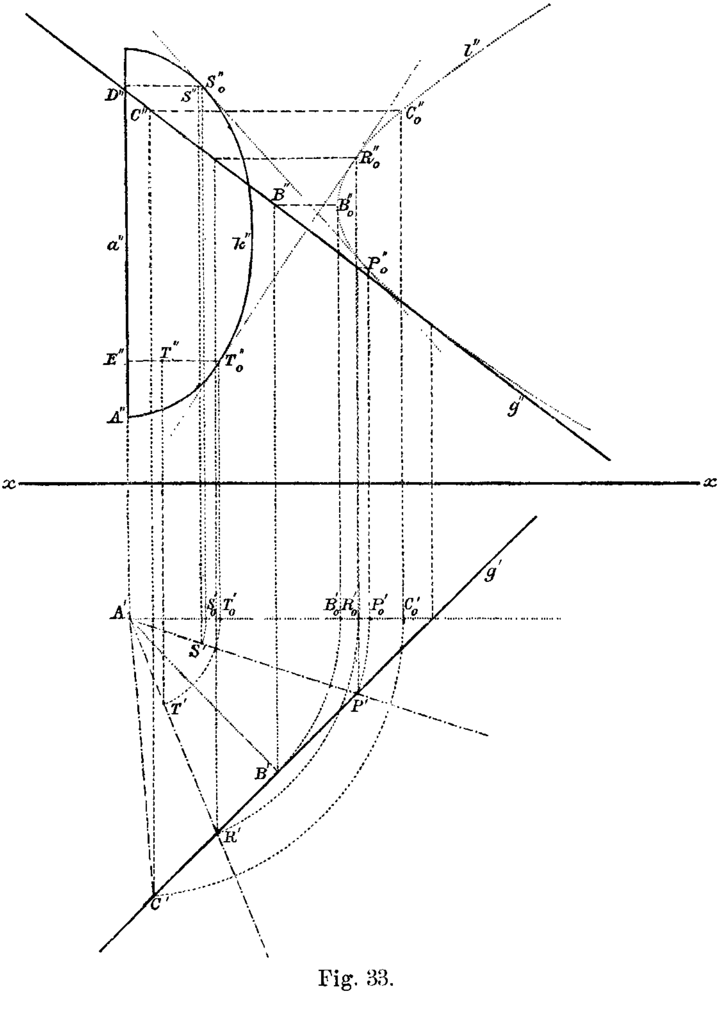

Fig. 33.

. . . gedreht werden müssen, um in die der verticalen Projectionsebene parallele Ebene E zu fallen. Man erhält also die horizontalen Projectionen dieser Geraden in ihrer natürlichen Lage, wenn man durch den Punkt A' die Geraden $A'P'$, $A'R'$, ... zieht. [59] Die Punkte S', T', ... endlich, in denen diese letzteren Geraden die durch die Punkte S_0', T_0', ... um A' als Mittelpunkt gezogenen Kreisbogen schneiden, sind die horizontalen Projectionen der Punkte S, T, ..., in welchen die gegebene Umdrehungsfläche von den durch die Gerade g gehenden Tangentialebenen Σ, T, ... berührt wird.

Die verticalen Projectionen S'', T'', ... dieser Punkte erhält man durch Projection der Punkte S', T', ... auf die zugehörigen horizontalen Geraden durch die Punkte S_0'', T_0'', ...

Nachdem man so die horizontalen und verticalen Projectionen der Berührungspunkte S, T, ... gefunden hat, construirt man die Spurlinien s_1, s_2; t_1, t_2; ... aller durch die Gerade g gehenden Tangentialebenen nach den früher angegebenen Methoden.

Diese Methode lässt sich leicht verallgemeinern und auf Flächen anwenden, welche durch beliebige, ihrer Gestalt nach unveränderliche, ihrer Lage im Raume nach aber irgendwie veränderliche Curven erzeugt werden.[9])

Dritter Theil.

Schnitte krummer Flächen.

Schnitte krummer Flächen. Definition der Curven doppelter Krümmung.

48. Es seien die Erzeugungsweisen von zwei krummen Flächen vollkommen bekannt, sodass für jede derselben die Gesammtheit aller ihrer Punkte genau bestimmbar ist und für jeden Punkt einer der Flächen, dessen eine Projection willkürlich gewählt ist, stets die andere construirt werden kann. Wenn dann diese zwei Flächen gemeinsame Punkte haben, so ist auch die Lage aller dieser gemeinsamen Punkte vollständig bestimmt, und zwar hängt sie sowohl von der Gestalt der beiden krummen Flächen, als auch von ihrer Stellung zu einander ab. Folglich kann die Lage dieser gemeinsamen

Punkte stets aus den gegebenen Erzeugungsweisen der Flächen, aus welchen sie sich mit Nothwendigkeit ergiebt, abgeleitet werden.

Die Gesammtheit aller zwei bestimmten krummen Flächen gemeinsamen Punkte bildet im allgemeinen eine bestimmte krumme Linie im Raum. Diese Curve kann in speciellen Fällen eine ebene Curve sein und also nur eine Krümmung besitzen, sie kann in noch specielleren Fällen zu einer geraden Linie werden und mithin gar keine Krümmung haben, und in ganz speciellen Fällen sich sogar auf einen Punkt reduciren; im Allgemeinen aber gehört diese Schnittcurve [**60**] zu den sogenannten Curven doppelter Krümmung,[10]) welche diesen Namen deshalb führen, weil sie an den Krümmungen zweier krummen Flächen Antheil haben, auf deren jeder sie liegen und deren gemeinsame Schnittcurven sie sind.

Gegenseitiges Entsprechen von Operationen der darstellenden Geometrie und der Elimination in der Algebra.

49. Zwischen den analytischen Operationen und denen der darstellenden Geometrie besteht eine gewisse Uebereinstimmung, welche an dieser Stelle erwähnt werden muss.

Wenn man in der Algebra eine gestellte Aufgabe auf ein System von ebenso vielen Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind, zurückgeführt hat, so kann man aus diesem ein anderes System mit der gleichen Anzahl von Gleichungen ableiten, in deren jeder aber nur eine einzige Unbekannte noch vorkommt. Das Verfahren, welches zu diesem Ziele führt und unter dem Namen der Elimination bekannt ist, besteht darin, dass man zunächst mit Hülfe einer Gleichung irgend eine Unbekannte aus allen übrigen Gleichungen fortschafft. Indem man auf diese Weise allmählich die verschiedenen Unbekannten entfernt, gelangt man schliesslich zu einer Endgleichung, welche nur noch eine einzige Unbekannte enthält und mithin deren Werth bestimmt.

Die Elimination in der Algebra hat die grösste Aehnlichkeit mit den Methoden, durch welche man in der darstellenden Geometrie die Schnitte krummer Flächen bestimmt.

Nehmen wir an, dass ein Punkt im Raume durch seine Entfernungen x, y, z von drei zu einander rechtwinkligen Ebenen bestimmt wird, dass zwischen diesen drei Entfernungen eine Beziehung festgesetzt und diese Beziehung dann durch eine Gleichung ausgedrückt wird, in welcher die drei Grössen x, y, z und Constante vorkommen. Auf Grund dieser Beziehung ist die Lage des Punktes nicht bestimmt; es können die Grössen x, y, z ihre Werthe und folglich auch der Punkt seine Lage im Raume so ändern, dass die durch die Gleichung dargestellte Beziehung immer stattfindet. Die krumme Fläche, welche der geometrische Ort für alle mit der gegebenen Beziehung verträglichen Punkte ist, wird durch die entsprechende Gleichung analytisch dargestellt.

Betrachten wir z. B. eine Kugelfläche, deren Radius mit r bezeichnet werde und welche ihren Mittelpunkt in dem Schnittpunkte der drei zu einander rechtwinkligen Ebenen habe. Wird dann ein bestimmter Punkt der Kugelfläche durch seine Abstände x, y, z von diesen drei Ebenen bestimmt, [**61**] so ist offenbar der Kugelradius nach dem betrachteten Punkte gleich der Diagonale eines rechtwinkligen Prisma, dessen drei Kanten die Abstände x, y, z sind; das Quadrat der Diagonale ist aber gleich der Summe der Quadrate der drei Kanten, also erhält man die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 .$$

Wenn nun der betrachtete Punkt seine Lage auf der Kugeloberfläche ändert, so ändern sich seine senkrechten Entfernungen x, y, z von den drei zu einander rechtwinkligen Ebenen, nicht aber ändert sich seine Entfernung von dem Kugelmittelpunkte; es hat also die Summe der Quadrate seiner drei Coordinaten x, y, z stets denselben Werth und ist immer gleich dem Quadrate des Kugelradius. Zwischen den Coordinaten des betrachteten Punktes besteht also die durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

dargestellte Beziehung, und umgekehrt hat diese Gleichung für alle Punkte der Kugelfläche und nur für diese statt, ist folglich die Gleichung der Kugel.

Jede krumme Fläche hat also eine bestimmte Gleichung. Wenn es auch nicht immer möglich ist, diese Gleichung in so einfachen Grössen wie den Abständen x, y, z darzustellen, so kann man sie doch in complicirteren Grössen, z. B. den Richtungswinkeln der Tangentialebenen, den Krümmungsradien, u.

s. w. erhalten. Für unsern Zweck reicht es aus, dass wir eine Gleichung als Beispiel gegeben haben.

Sind nun die Gleichungen zweier verschiedenen krummen Flächen in den Coordinaten x, y, z gegeben, und setzt man voraus, dass in diesen beiden Gleichungen die Coordinaten x, y, z auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem bezogen sind, so kann man eine der drei Grössen x, y, z, z. B. z, aus den beiden Gleichungen eliminiren. Durch die gleichzeitige Gültigkeit der beiden Gleichungen setzt man fest, dass man weder alle Punkte der ersten Fläche, noch alle Punkte der zweiten Fläche unterschiedslos in Betracht ziehen will, sondern dass man sich nur mit den Punkten ihres Schnittes beschäftigt, für welche beide Gleichungen erfüllt sein müssen, da diese Punkte gleichzeitig auf beiden Flächen liegen. Folglich drückt die Gleichung in den Grössen x, y, welche sich durch die Elimination von z aus den beiden Gleichungen ergeben hat, die Beziehung aus, welche zwischen den beiden Coordinaten x, y aller Punkte der Schnittlinie — ohne Rücksicht auf die Grösse der eliminirten Coordinate z — bestehen muss; diese Gleichung ist also die Gleichung der Projection des Schnittes beider Flächen auf die zu den z-Abständen senkrechte Ebene.

Man sieht mithin, dass in der Algebra die Elimination einer Unbekannten zwischen mehreren Gleichungen mit drei Unbekannten darauf hinausläuft, auf den drei zu Grunde gelegten Coordinatenebenen die Projectionen der Schnitte der Flächen, welchen diese Gleichungen entsprechen, zu bestimmen.

[**62**] 50. Das Entsprechen zwischen den Operationen der Analysis und den Methoden der darstellenden Geometrie ist aber nicht auf das eben Gesagte beschränkt; es besteht überall. Wenn man Punkte, Curven oder Flächen sich bewegen lässt, so können diese Bewegungen immer durch analytische Operationen beschrieben werden, und die durch diese Bewegungen erzeugten Raumgebilde entsprechen den Resultaten dieser Operationen. Umgekehrt giebt es keine analytische Operation mit drei Veränderlichen, welche nicht als der Ausdruck einer im Raume ausgeführten Bewegung betrachtet werden kann. Um dem Schüler die Mathematik in der vortheilhaftesten Weise zu lehren, muss man ihn frühzeitig daran gewöhnen, dieses gegenseitige Entsprechen von analytischen und geometrischen Operationen zu erkennen; er muss die Fähigkeit erlangen, einerseits alle Bewegungen, welche im Raume denkbar sind, in die Sprache der Analysis zu übersetzen und andererseits sich stets

im Raume die Bewegungen vorzustellen, deren Ausdruck die analytischen Operationen sind.

Allgemeine Methode, um die Projectionen der Schnitte krummer Flächen zu bestimmen. Abänderung dieser Methode für einige besondere Fälle.

51. Kommen wir nun auf unseren eigentlichen Gegenstand, das Verfahren für die Bestimmung der Projectionen von Schnitten krummer Flächen zu entwickeln, wieder zurück.

Um diese Methode in möglichst übersichtlicher Form darzustellen, werden wir ihr nicht sofort die äusserste Eleganz, deren sie fähig ist, geben, sondern letztere schrittweise erreichen. Das Gesagte gilt aber allgemein und ist auf zwei beliebige krumme Flächen anwendbar. Obgleich die benutzten Buchstaben sich auf die Figur 34 beziehen, welche den besonderen Fall zweier geraden Kreiskegel mit vertical gestellten Axen darstellt, so ist immer im Auge zu behalten, dass jede der beiden betrachteten Flächen eine ganz beliebige sein kann.

52. **Erste allgemeine Aufgabe.** (Fig. 34) Die Erzeugungsweisen zweier krummen Flächen sind bekannt und alle hierzu nöthigen Elemente in den Projectionsebenen gegeben. Man soll die Projectionen der Curve doppelter Krümmung construiren, in welcher sich die beiden Flächen schneiden.

Lösung. Man nimmt eine Schaar von Ebenen Π zu Hülfe, welche im Raume passend gelegen gewählt werden; diese Ebenen können z. B. sämmtlich horizontal liegen, was zunächst thatsächlich angenommen werde. [**63**] Dann sind die verticalen Projectionen dieser Hülfsebenen horizontale gerade Linien, und weil die Ebenen in willkürlich gewählten Abständen voneinander liegen können, nehmen wir an, dass in der verticalen Projectionsebene beliebig viele horizontale Gerade p gezogen seien, welche die verticalen Projectionen von eben so vielen Ebenen Π vorstellen. Dann führt man nacheinander für jede dieser Ebenen Π und in Bezug auf die Gerade p, welche ihre verticale Projection ist, das Verfahren durch, welches im Folgenden für die eine dieser Ebenen, $\hat{\Pi}$, welche sich in die Gerade $\hat{p}$ projicirt, angegeben ist.

Die Ebene $\hat{\Pi}$ schneidet die erste Fläche in einer gewissen

Curve, welche man immer construiren kann, wenn die Erzeugung der Fläche bekannt ist. Diese Curve ist der geometrische Ort

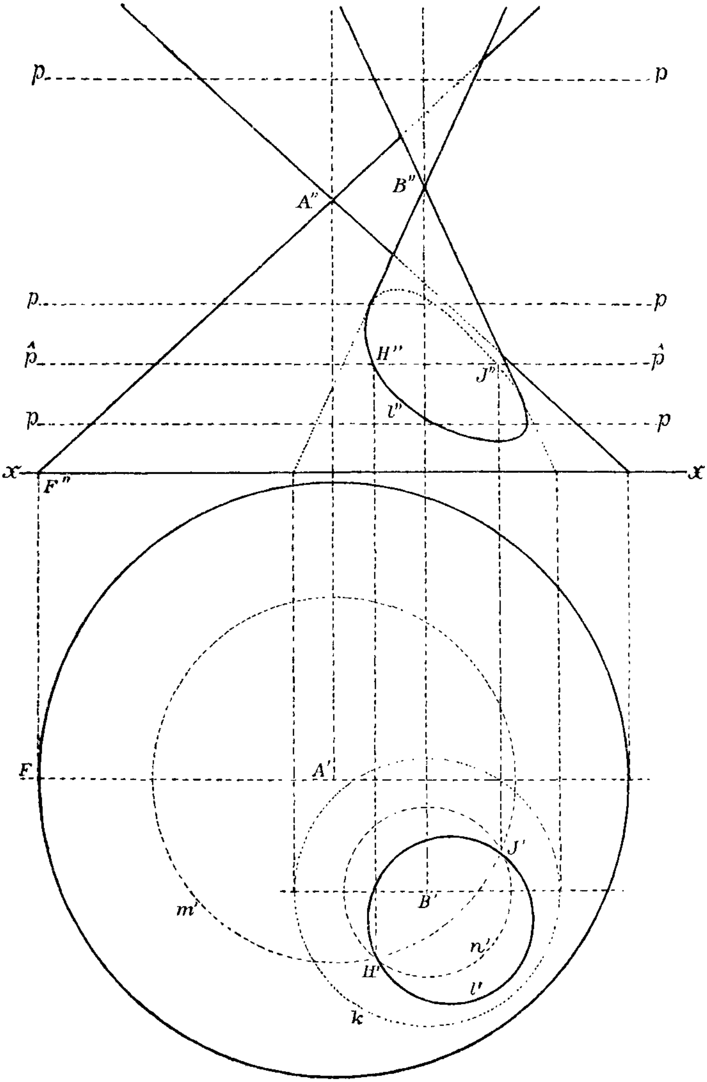

Fig. 34.

aller Punkte, in denen die Ebene $\hat{\Pi}$ von allen Erzeugenden der Fläche geschnitten wird. Da diese Curve eben und horizontal gelegen ist, so projicirt sie sich in ihrer wahren Gestalt und Grösse auf die horizontale Projectionsebene. Es ist also möglich, diese Projection zu construiren, und es ergebe dies die Curve m'.

Dieselbe Ebene $\hat{\Pi}$ schneidet auch die zweite gegebene Fläche in einer horizontal gelegenen, ebenen Curve, deren horizontale Projection sich ebenfalls stets construiren lässt; diese Projection sei die Cure n'.

Nun ist es möglich, dass sich die beiden Curven, in welchen die Ebene $\hat{\Pi}$ die beiden gegebenen Flächen schneidet, selbst schneiden, oder dass sie sich nicht schneiden. Wenn sich die beiden Curven auch in beliebiger Verlängerung nicht schneiden, so ist dies ein Beleg dafür, dass die beiden gegebenen Flächen in der Höhe der Ebene $\hat{\Pi}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Schneiden sich aber die beiden Curven, so geschieht dies in einer gewissen Anzahl von Punkten, welche beiden Flächen gemeinsam und daher ebenso viele Punkte ihres gesuchten Schnittes sind. Denn in der That gehören die Schnittpunkte beider Curven beiden Flächen an, da sie sowohl auf der ersten Curve, welche auf der ersten der beiden gegebenen Flächen liegt, als auch auf der zweiten Curve, welche auf der zweiten Fläche liegt, gelegen sind.

Es müssen aber die horizontalen Projectionen der Schnittpunkte beider Curven [**64**] sowohl auf der Projection der ersten als auch auf der Projection der zweiten Curve liegen, folglich sind die Schnittpunkte $H', J', \ldots$ der beiden Curven m' und n' die horizontalen Projectionen von ebenso vielen Punkten des gesuchten Schnittes beider gegebenen krummen Flächen. Um die verticalen Projectionen dieser Punkte zu erhalten, hat man nur zu beachten, dass die Punkte $H, J, \ldots$ in der horizontalen Ebene $\hat{\Pi}$ und also ihre zweiten Projectionen auf der Geraden $\hat{p}$ liegen. Projicirt man daher die Punkte $H', J', \ldots$ auf die Gerade $\hat{p}$ in die Punkte $H'', J'', \ldots$, so sind diese letzteren die zweiten Projectionen der gesuchten Schnittpunkte.

Führt man dieses für die Gerade $\hat{p}$ eben beschriebene Verfahren nun für alle übrigen horizontalen Geraden p durch, so erhält man für jede von ihnen in der horizontalen Projectionsebene eine Reihe weiterer Punkte $H', J', \ldots$ und in der verticalen Projectionsebene die entsprechende Reihe H'', J'', ... Zieht man dann durch alle Punkte H' einen Curvenzweig, durch alle Punkte J' einen zweiten, und so fort, so bildet die Gesammtheit aller dieser Curvenzweige, welche mitunter ineinander übergehen können, die horizontale Projection des Schnittes beider Flächen. Zieht man ebenso durch alle Punkte H'' einen Curvenzweig, durch alle Punkte J'' einen zweiten, und so fort, so bildet die Gesammtheit aller dieser Curvenzweige, welche ebenfalls mitunter ineinander übergehen können, die verticale Projection des gesuchten Schnittes.

53. Das soeben geschilderte Verfahren ist ganz allgemein verwendbar, sogar mit der getroffenen speciellen Festsetzung, dass die benutzten Hülfsebenen Π sämmtlich horizontal liegen. Wir wollen jetzt aber zeigen, dass in bestimmten Fällen die Wahl des Hülfsebenensystems nicht gleichgültig ist; man kann sie vielmehr oft so treffen, dass dadurch sich leichtere und elegantere Constructionen ergeben. Es kann sogar der Fall eintreten, dass die Benutzung einer Schaar von krummen Flächen, welche nur in einer ihrer Abmessungen von einander verschieden sind, vortheilhafter als die Benutzung von Ebenen ist.

Für die Construction des Schnittes zweier Umdrehungsflächen mit verticalen Axen ist am vortheilhaftesten eine Schaar von horizontalen Ebenen zu verwenden, da diese beide Flächen in Kreisen schneiden, deren Mittelpunkte auf den Axen der Flächen liegen, deren Radien gleich den in der Höhe der schneidenden Ebenen gemessenen senkrechten Abständen der erzeugenden Curven von den zugehörigen Axen sind und deren horizontale Projectionen mithin ihrer Grösse und Lage nach bekannte Kreise sind. [**65**] In diesem Falle werden also alle Punkte der horizontalen Projection des gesuchten Schnittes als Schnittpunkte von Kreisen bestimmt. Wenn die Umdrehungsflächen zwar zu einander parallele, aber nicht vertical stehende Axen haben, so muss man den Projectionsebenen eine andere Lage geben und sie so wählen, dass eine derselben auf den Umdrehungsaxen senkrecht steht.

54. Handelt es sich darum, die Schnittcurve von zwei beliebig gestalteten Kegeln, deren Spuren in der horizontalen Projectionsebene gegeben sind, zu construiren, so würde uns die Anwendung einer Schaar von horizontalen Ebenen zur Ausführung von Constructionen nöthigen, welche in diesem Falle zu umständlich und zeitraubend sein würden. Denn jede

horizontale Ebene schneidet beide Kegelflächen in Curven, welche den Spurlinien derselben ähnlich sind, und diese Schnittcurven müssen folglich, weil sie nicht mit den Spurlinien identisch sind, für jede Hülfsebene von neuem punktweise construirt werden. Legt man dagegen durch die Spitzen beider Kegel eine Gerade und benutzt man das durch dieselbe hindurchgehende Ebenenbüschel, so schneidet jede Ebene desselben beide Flächen in vier gerade Linien. Da diese Geraden in einer Ebene liegen, so schneiden sie sich — von den Kegelspitzen abgesehen — in vier Punkten, welche auf dem Schnitte beider Kegel liegen. In diesem Falle construirt man also jeden Punkt der horizontalen Projection des Schnittes als Schnittpunkt zweier geraden Linien.

55. Für zwei beliebig gestaltete Cylinderflächen, deren beiderseitige Erzeugende nicht einander parallel sind, bietet die Schaar horizontaler Ebenen gleichfalls nicht die günstigste Wahl dar. Jede dieser Ebenen würde zwar beide Flächen in Curven schneiden, welche ihren horizontalen Spurcurven congruent sind. Da diese Schnittcurven aber nicht senkrecht über den Spurcurven liegen, so fallen ihre horizontalen Projectionen nicht mit den letzteren zusammen und müssen folglich punktweise construirt werden. Wählt man dagegen eine Schaar von Hülfsebenen, welche gleichzeitig zu den erzeugenden Geraden beider Flächen parallel sind, so schneidet jede dieser Ebenen beide Cylinder in geraden Linien, deren Schnittpunkte dem Schnitte beider Flächen angehören. [66] Dadurch erhält man wieder die Punkte der horizontalen Projection des Schnittes als Schnittpunkte von geraden Linien. Uebrigens sind diese für zwei Cylinder gegebenen Betrachtungen nur eine nothwendige Folge der vorher für zwei Kegelflächen angestellten.

56. Für zwei Umdrehungsflächen endlich, deren Axen in derselben Ebene liegen, aber nicht zu einander parallel sind, ist überhaupt eine Schaar von Ebenen nicht mehr die passendste Wahl, welche man treffen kann, sondern hier empfiehlt es sich, eine Schaar von concentrischen Kugeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt in dem Schnittpunkte der beiden Umdrehungsaxen liegt, zu benutzen. Die beiden Umdrehungsflächen werden von jeder dieser Kugeln in zwei Kreisen geschnitten, deren Mittelpunkte auf den beiden Umdrehungsaxen liegen und deren Ebenen auf der Ebene dieser Axen senkrecht stehen; die Schnittpunkte beider Kreise liegen zugleich auf der Kugel und auf den beiden Umdrehungsflächen und gehören mithin dem gesuchten Schnitte

an. Die Punkte der Projection des Schnittes werden construirt als Schnittpunkte von Kreisen und geraden Linien, wenn man die eine Projectionsebene senkrecht zu einer der beiden Umdrehungsaxen, die andere parallel zu diesen beiden Axen wählt, welche Annahme die in diesem Falle günstigste ist.

Diese wenigen Bemerkungen über die am häufigsten vorkommenden krummen Flächen genügen, um zu zeigen, in welcher Weise die allgemeine Methode gebraucht werden muss, und wie man aus der Kenntniss der Erzeugung der Flächen die Wahl der Hülfsflächen so treffen kann, dass sich die leichtesten Constructionen ergeben.

Tangenten an die Schnitte krummer Flächen.

57. Wenn zwei krumme Flächen ihrer Gestalt und gegenseitigen Lage nach gegeben sind, so ist nicht nur ihre Schnittcurve bestimmt, sondern es ist auch die Lage aller geometrischen Gebilde, welche zu ihr Bezug haben, bestimmt, so z. B. die Lage der Tangente in jedem ihrer Punkte und die Lage der Normalebene, d. h. der Ebene, auf welche die Curve unter einem rechten Winkel auftrifft und welche mithin auf der Tangente der Curve senkrecht steht. Obgleich wir in dem Folgenden oft Gelegenheit haben, Normalebenen an Curven doppelter Krümmung zu betrachten, gehen wir hier nicht in die Einzelheiten ihrer Bestimmung ein; [**67**] denn da die Normalebenen stets auf den Tangenten senkrecht stehen, so ist es ausreichend, das Verfahren, nach welchem die Projectionen der Tangenten an die Schnittcurven krummer Flächen construirt werden, hier mitzutheilen.

58. **Zweite allgemeine Aufgabe.** In einem beliebigen Punkte der Schnittcurve zweier krummen Flächen soll man die Tangente an diese Curve construiren.

Lösung. Da der auf der Schnittcurve beider Flächen willkürlich gewählte Punkt gleichzeitig auf beiden Flächen liegt, so berührt sowohl die in dem betrachteten Punkte an die erste Fläche als wie die an die zweite Fläche gelegte Tangentialebene die Schnittcurve in diesem Punkte. Dieser Punkt der Schnittcurve, in welchem sie von den beiden Ebenen berührt wird, liegt also zugleich in beiden Ebenen und ist folglich ein Punkt ihrer Schnittgeraden, welche selbst offenbar die gesuchte Tangente ist.

Diese Aufgabe giebt zu folgender Bemerkung Anlass, von welcher in der darstellenden Geometrie häufiger Gebrauch gemacht wird.

»Die Projection der Tangente einer Curve doppelter Krümmung ist selbst Tangente an die Projection der Curve und der Berührungspunkt dieser letzteren ist die Projection des zugehörigen Berührungspunktes auf der Curve doppelter Krümmung.«

Denn denkt man sich von allen Punkten einer Curve doppelter Krümmung Lothe auf eine der beiden Projectionsebenen, z. B. auf die horizontale Ebene gefällt, so liegen alle diese Lothe auf dem Mantel eines vertical stehenden Cylinders, welcher von der horizontalen Projectionsebene in der Projection der Curve geschnitten wird. Wenn man sich ferner von allen Punkten einer Tangente an die Curve doppelter Krümmung ebenfalls Lothe gefällt denkt, so liegen diese Lothe in einer verticalen Ebene, welche von der horizontalen Projectionsebene in der Projection der Tangente geschnitten wird. Nun berühren sich aber offenbar der Cylindermantel und diese verticale Ebene längs des von dem Berührungspunkte gefällten Lothes, da dieses beiden Flächen angehört. Es berühren sich also die Schnittlinien der horizontalen Projectionsebene mit der Cylinderfläche und mit der verticalen Ebene [**68**] in dem Fusspunkte dieses Lothes, und mithin berühren sich die Projection einer Curve doppelter Krümmung und die Projection einer Tangente an dieselbe in dem Punkte, welcher die Projection des Berührungspunktes der Tangente und der Raumcurve ist.

Schnitte von Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen. Abwickelung dieser Schnitte, wenn eine der Flächen, auf welchen sie liegen, eine abwickelbare Fläche ist.

59. Wir wollen nun das bisher Gesagte auf einige besondere Fälle wirklich zur Anwendung bringen. Um mit einfachen Betrachtungen zu beginnen, setzen wir zunächst voraus, dass eine der beiden Flächen, deren Schnitt bestimmt werden soll, eine Ebene ist.

Erste Aufgabe. Es soll die Schnittcurve eines Cylindermantels und einer gegebenen Ebene bestimmt werden.

Wenn die Lage der Projectionsebenen willkürlich ist, so nehmen wir zunächst an — was immer möglich ist —, dass die eine Projectionsebene senkrecht auf den geradlinigen Erzeugenden des Cylindermantels und die andere senkrecht auf der gegebenen Ebene steht, weil bei dieser Annahme die Construction sich sehr viel leichter gestaltet. Später werden wir, um den Schüler mit der Projectionsmethode gut vertraut zu machen, diese Annahme fallen lassen und die beiden Projectionsebenen beliebig wählen.

Erster Fall. (Fig. 35—37) Die geradlinigen Erzeugenden der Fläche stehen senkrecht auf einer, z. B. auf der horizontalen Projectionsebene, und die schneidende Ebene steht senkrecht auf der andern Projectionsebene.

Lösung. Es sei A' die horizontale und a'' die verticale Projection der Geraden a, welcher die sämmtlichen Erzeugenden des Cylinders parallel sind; k sei die gegebene Spurcurve des Cylinders, welche zugleich die horizontale Projection des unbegrenzten Cylindermantels ist und welche daher auch die horizontale Projection des gesuchten Schnittes l ist; e_2 sei die verticale Projection der schneidenden Ebene E, welche Gerade auch zugleich die verticale Projection des gesuchten Schnittes l ist, und e_1 sei die in der horizontalen Ebene gelegene Spurlinie dieser Ebene E. Zieht man dann an die Curve k die zur Projectionsaxe x senkrechten Tangenten $B'b''$, $C'c''$, so sind diese beiden Geraden offenbar die verticalen Projectionen der äussersten geradlinigen Erzeugenden[11]), und die Punkte B'', C'', in welchen sie von der Spurlinie e_2 der Ebene E geschnitten werden, begrenzen auf der Geraden e_2 die verticale Projection des gesuchten Schnittes l.

[**69**] Wenn man nun in einem auf dem Schnitte l beliebig angenommenen Punkte, dessen horizontale Projection der auf der Curve k willkürlich gewählte Punkt D' ist und dessen verticale Projection man erhält, indem man den Punkt D' in den Punkt E'' auf der zweiten Spurlinie e projicirt — die Tangente an denselben ziehen will, so muss offenbar diese Tangente in der schneidenden Ebene E liegen und daher ihre zweite Projection in die Spurgerade e_2 fallen. Ferner liegt die Tangente in der Tangentialebene des Cylinders im Punkte D, und da diese Ebene vertical steht, so fällt die horizontale Projection der Tangente mit der horizontalen Projection der Tangentialebene zusammen und ist die Gerade $t = TD'$,

welche die Curve k in dem Punkte D' berührt. Es ist also für die gesuchte Schnittcurve l die Lage der Tangente völlig bestimmt.

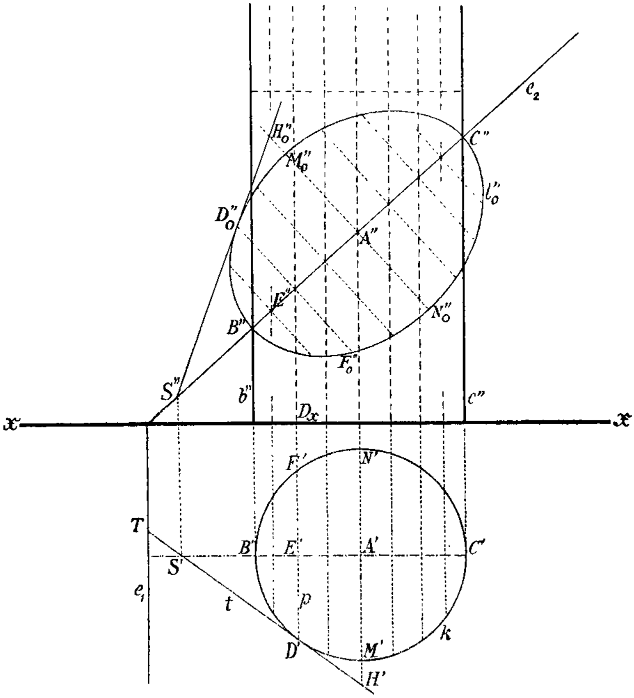

Fig. 35.

60. Es handelt sich nun weiter darum, die Schnittcurve l in ihrer wahren Gestalt zu construiren und dann an dieselbe in einem beliebigen Punkte eine Tangente zu ziehen. Wenn die verticale Projectionsebene zu weit von der Curve k entfernt ist, nimmt man eine andere verticale Ebene zu Hülfe welche die Curve k schneidet und deren horizontale Projection in die zu x parallele Gerade $B'\,C'$ fällt. Diese neue verticale Projectionstafel schneidet die Ebene E in einer zu e_2 parallelen Geraden, um welche wir die Ebene E in die verticale Lage umlegen, sodass die Curve l sich in ihrer wahren Gestalt darbietet. Dann wählt man beliebig viele Punkte D' willkürlich auf der

Curve k und legt durch dieselben verticale, zur zweiten Projectionstafel senkrechte Ebenen Π hindurch, deren beide Projectionen man gleichzeitig erhält, indem man durch alle Punkte D' verticale Gerade p zieht. Jede dieser Hülfsebenen schneidet die Ebene E in einer horizontalen und zur Umlegungsaxe senkrechten Geraden, deren verticale Projection der Schnittpunkt E'' der beiden Geraden p und e_2 ist. Diese horizontale Gerade

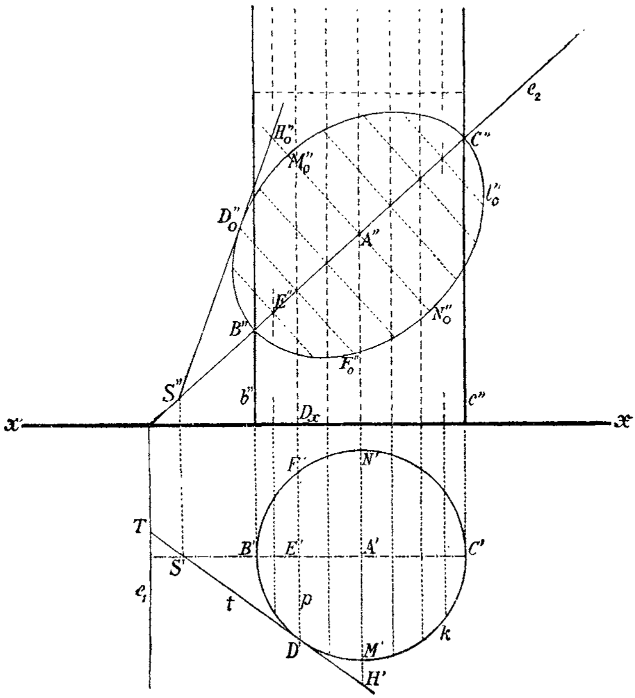

Fig. 36.

trifft die Umlegungsaxe in einem Punkte E, dessen horizontale Projection der Schnittpunkt E' der beiden Geraden $B'C'$ und der durch D' gezogenen Verticalen p ist, während sie die Schnittcurve l der Ebene E und des Cylinders in den Punkten D, F . . . trifft, deren horizontale Projectionen die Schnittpunkte D', F', . . . der Geraden p und der Curve k sind. Die Strecken DE, FE, . . . sind aber offenbar gleich ihren horizontalen Projectionen $D'E'$, $F'E'$, ... Bei der Umlegung der Ebene E in die verticale Lage bleiben alle diese Strecken, welche ursprünglich horizontal lagen, senkrecht zu der Umlegungsaxe und behalten dieselbe Länge. [70] Zieht man also durch jeden Punkt E'' eine unbegrenzte Gerade senkrecht zu e_2 und trägt auf dieser von E'' aus die Strecken $D'E'$, $F'E'$, ... bis D_0'', F_0'', ... ab, so erhält man beliebig viele Punkte D_0'', F_0'', ...; die durch diese Punkte hindurchgezogene Curve l_0'' ist die Schnittcurve des Cylinders und der Ebene E in ihrer wahren Gestalt.

61. Nachdem jetzt die wahre Gestalt der Schnittcurve gefunden ist, soll noch in einem beliebigen ihrer Punkte, z. B. D_0'' die Tangente construirt werden. Die verticale Projection dieses Punktes in seiner natürlichen Lage ist der Fusspunkt E'' des von D'' auf die Gerade e_2 gefällten Lothes und die horizontale Projection findet man, indem man den Punkt E'' in den Punkt D' auf der Curve k projicirt. Die horizontale Projection der gesuchten Tangente ist dann die in dem Punkte D' an die Curve k gezogene Tangente t und es genügt, um unser Ziel zu erreichen, in der Ebene der Curve l_0 einen beliebigen Punkt zu bestimmen, durch welchen die Tangente gehen muss, z. B. den Punkt H, dessen horizontale Projection in den beliebig auf der Tangente t gewählten Punkt H' fällt und dessen verticale Projection der Punkt A'' auf der Spur e_2 ist. Stellt man für diesen Punkt dieselbe Betrachtung an wie für jeden anderen Punkt der Ebene E, so muss offenbar der umgelegte Punkt H auf der durch den Punkt A'' senkrecht zu e_2 gezogenen Geraden liegen, und man erhält seine verticale Projection, indem man auf dieser Senkrechten die Strecke $A'H'$, d. i. den Abstand des Punktes H' von der Geraden $B'C'$, von A'' bis H_0'' abträgt. Dann ist H_0'' ein zweiter Punkt der an die Curve l_0'' zu construirenden Tangente, welche also die Verbindungslinie $D_0''H''$ beider Punkte ist.[12])

62. Welche Gestalt auch die Curve k haben mag, immer hat die Schnittcurve die Eigenschaft, dass in jedem Punkte, z. B. in D_0'' die Subtangente $A''H_0''$ gleich der Subtangente $A'H'$ der Curve k ist. Diese Eigenschaft ist für die Ellipse und den über einer ihrer Axen construirten Kreis wohlbekannt; sie kommt diesen beiden Curven nur deshalb zu, weil sie die Schnitte eines Cylindermantels mit zwei verschiedenen Ebenen sind.

63. Schliesslich kann der Fall eintreten, dass man die

Abwickelung des Cylindermantels und der von der Ebene E ausgeschnittenen Curve nöthig hat. Zunächst wickelt man dann die Curve k (Fig. 36) in eine gerade Linie $N_a' N_a'$ (Fig. 37) ab [**71**] und zieht durch alle Punkte derselben zu ihr senkrechte Gerade, welche die erzeugenden Geraden des abgewickelten Cylindermantels darstellen.[13]) Auf diesen Senkrechten hat man weiter die Theilstrecken der Erzeugenden abzutragen, welche zwischen der Curve k und der von der Ebene E ausgeschnittenen Curve l liegen. Diese Theilstrecken sind aber ihren verticalen Projec-

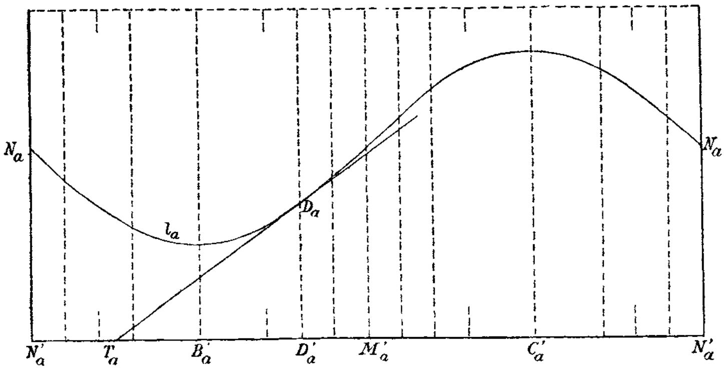

Fig. 37.

tionen gleich, und diese letzteren sind die einerseits durch die Projectionsaxe x, andererseits durch die Spurgerade e_2 begrenzten Strecken der verticalen Geraden p. Wenn also bei der Abwickelung der Punkt D' in den Punkt D_a' der Geraden $N_a' N_a'$ fällt, so trägt man auf der durch den Punkt D_a' gezogenen Senkrechten die Strecke $D_x E''$ von D_a' bis D_a ab; dann ist D_a der Punkt, in welchen der Schnittpunkt D der Ebene E und der durch den Punkt D' gehenden Erzeugenden des Cylinders bei der Abwickelung zu liegen kommt. Die Curve l_a, welche durch alle auf diese Weise bestimmten Punkte hindurchgeht, ist die abgewickelte Schnittcurve, welche gezeichnet werden sollte.

64. Wenn man die Tangente im Punkte D' der Curve k verlängert, bis sie die erste Spurlinie e_1 der Ebene E in dem Punkte T schneidet, und dann TD' auf der Linie $N_a' N_a'$ von D_a' bis T_a abträgt, so ist offenbar die Gerade $T_a D_a$ die Tangente an die Curve l_a im Punkte D_a. Denn bei der Abwicke-

lung des Cylindermantels ändern seine Elemente nicht ihre Neigung gegen die horizontale Ebene.

65. Zweiter Fall. (Fig. 38 u. 39) Die Cylinderfläche und die schneidende Ebene liegen in beliebiger Weise zu den beiden Projectionsebenen.

Lösung. a' und a'' seien die beiden Projectionen der Geraden a, welcher die Erzeugenden des Cylinders parallel sein sollen, k sei seine horizontale Spurlinie und e_1 und e_2 seien die beiden Spurlinien der schneidenden Ebene E.

Man benutzt bei dieser Aufgabe eine Schaar von Ebenen, welche den Erzeugenden der Cylinderfläche parallel und senkrecht zu einer Projectionsebene, z. B. der horizontalen, sind. Jede dieser Hülfsebenen projicirt sich in eine Gerade b', welche der Projection a' parallel ist, und schneidet den Cylindermantel in erzeugenden Geraden, welche die horizontale Projectionsebene in den Schnittpunkten B, C, ... der Geraden b' und der Curve k treffen. Projicirt man die Punkte B, C, ... in die Punkte B'', C'', ... der Projectionsaxe x, und zieht man durch die letzteren Parallelen zu a'', so erhält man die verticalen Projectionen b'', c'', ... der Schnittgeraden des Cylindermantels und der benutzten Hülfsebene.

[**72**] Die Hülfsebenen schneiden die Ebene E ebenfalls in parallelen geraden Linien, deren erste Spurpunkte auf der Spur e_1 liegen. Um die verticalen Projectionen dieser Geraden, welche natürlich auch zu einander parallel sind, zu erhalten, bestimmt man die Richtung einer dieser Schnittgeraden, z. B. derjenigen, in welcher die durch a' gehende verticale Hülfsebene die Ebene E schneidet [und welche mit s bezeichnet werde]. Zu dem Zwecke verlängert man a' bis zu dem Schnittpunkte S_1 mit der Spur e_1 der Ebene E einerseits und bis zu dem Schnittpunkte S_2' mit der Projectionsaxe x andererseits. Projicirt man dann S_2' in den Punkt S_2 der zweiten Spur e_2, so sind die beiden Punkte S_1 und S_2 die Spurpunkte der gesuchten Schnittgeraden s. Wenn man noch S_1 in den Punkt S_1'' der Axe x projicirt und die Gerade $S_1'' S_2$ zieht, so erhält man die verticale Projection s'' der Schnittgeraden s. Projicirt man also alle Punkte D der Spurlinie e_1, in welchen sie von den Projectionen der verticalen Hülfsebenen geschnitten wird, in die Punkte D'' der Axe x und zieht durch alle Punkte D'' Parallelen zu s'', so erhält man die verticalen Projectionen von Schnittgeraden der Ebene E und den verticalen, einander parallelen Hülfsebenen. Dann bestimmt man die Schnittpunkte J'',

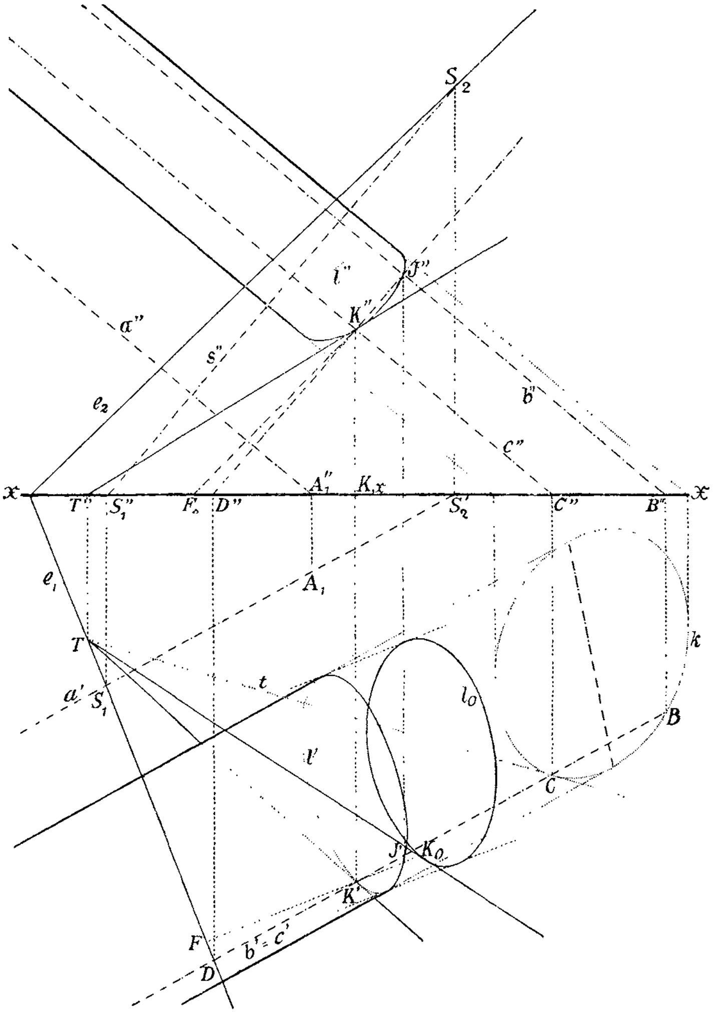

Fig. 38.

K'', ... jeder dieser Schnittgeraden mit den zweiten Projectionen b'', c'', ... der durch B, C, ... gehenden Erzeugenden, in welchen die zugehörige Hülfsebene den Cylindermantel schneidet; diese Schnittpunkte J'', K'', ... liegen auf der verticalen Projection l'' der gesuchten Schnittcurve l. Projicirt man alle Punkte J'', K'', ... auf die Horizontalprojection b' der entsprechenden Hülfsebene, so erhält man die horizontalen Projectionen J', K', ... derselben Punkte, und die durch sie gezogene Curve l' ist die horizontale Projection der Schnittcurve l.

66. Um in den Punkten K', K'' die Tangenten an die Projectionen l', l'' der Curve l zu erhalten, muss man beachten, dass diese Tangenten die Projectionen der Tangente in dem Punkte K an die Schnittcurve l sind. Da die letztere Tangente gleichzeitig in der Ebene E und in der Tangentialebene in dem Punkte K an den Cylindermantel liegt, so muss ihr erster Spurpunkt in den Schnittpunkt der ersten Spurgeraden beider Ebenen fallen. Die erste Spurgerade der Tangentialebene ist aber die Tangente t, welche in dem Punkte C an die Spurlinie k des Cylinders gezogen ist. Zieht man also diese Tangente t und verlängert sie bis zu ihrem Schnittpunkte T mit der Spur e_1 der Ebene E, so berührt die Gerade TK' die horizontale Projection l' der Schnittcurve l in dem Punkte K'. [**73**] Wenn man schliesslich den Punkt T in den Punkt T'' der Axe x projicirt und die Gerade $T''K''$ zieht, so ist sie die Tangente im Punkte K'' der verticalen Projection l'' der Schnittcurve l.

67. Muss man auch die wahre Gestalt der Schnittcurve l ermitteln, so legt man die Ebene E um ihre Spurlinie e_1 in die horizontale Projectionsebene um. Bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt des Schnittes l, z. B. der Punkt K, dessen erste Projection in den Punkt K' fällt, einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Geraden e_1 steht und sich in das von dem Punkte K' auf e_1 gefällte Loth $K'F$ projicirt; nach erfolgter Umlegung liegt der Punkt K in einem bestimmten Punkte K_0 des Lothes $K'F$, und es ist daher nur noch der senkrechte Abstand KF des Punktes K von der Spurgeraden e_1 zu bestimmen. Die horizontale Projection des Abstandes KF ist die Strecke $K'F$ und die Höhe des Punktes K über der horizontalen Projectionsebene ist gleich K_xK''. Trägt man also die Länge $K'F$ auf der Axe x von K_x bis F_Δ ab, so ist die Hypotenuse $F_\Delta K''$ gleich dem gesuchten Abstande, welchen man dann auf dem Loth $K'F$ von F bis K_0 abträgt. Der Punkt K_0 ist ein Punkt der in die Horizontalebene niedergelegten Schnittcurve l, und die Curve l_0, welche alle auf die gleiche Weise bestimmten

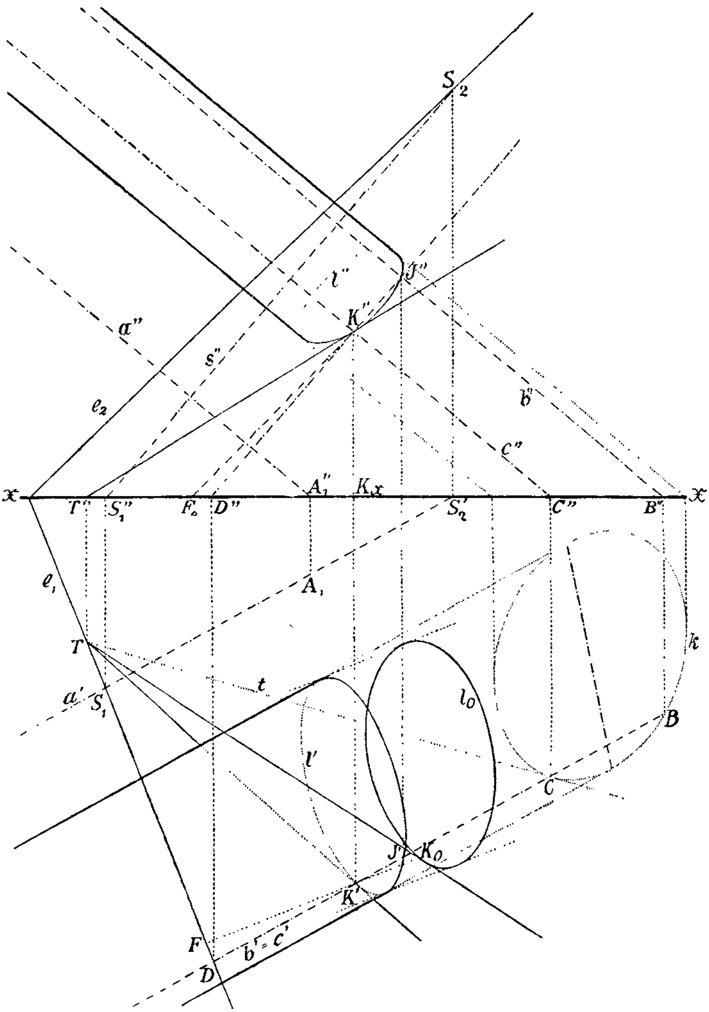

Fig. 39.

Punkte verbindet, stellt die Schnittcurve des Cylinders und der Ebene E in ihrer wahren Gestalt dar.

68. Um die Tangente in dem Punkte K_0 an die Curve l_0 zu construiren, braucht man nur zu beachten, dass bei der Umlegung der Ebene E die Tangente im Punkte K an die Curve l stets durch den Punkt T der Umlegungsaxe geht. Man hat daher nur die Gerade TK_0 zu ziehen, um die verlangte Tangente zu erhalten.

69. **Zweite Aufgabe.** (Fig. 40 u. 41) Es ist der Schnitt eines beliebig gestalteten Kegels mit einer gegebenen Ebene E zu construiren.

Lösung. Wir nehmen an — was immer möglich ist —, dass die verticale Projectionsebene senkrecht auf der schneidenden Ebene E steht.

Es seien A', A'' die Projectionen der Spitze A des Kegels, k sei die Spurlinie des Kegelmantels in der ersten Projectionsebene, und e_2 die verticale Spurlinie der schneidenden Ebene E; folglich ist die durch den Schnittpunkt E_x von e_2 mit der Axe x gezogene Verticale die horizontale Spurlinie e_1 der Ebene E. Man benutzt zur Lösung der Aufgabe eine Schaar von Hülfsebenen, welche durch die Kegelspitze A senkrecht zur zweiten Projectionsebene gelegt sind; die verticale Projection einer solchen Ebene ist die gerade Linie $A''B''$, welche durch die zweite Projection der Kegelspitze A geht, [**74**] und ihre horizontale Projection ist die senkrecht zur Axe x durch den Punkt B'' gezogene Gerade $B''B$, welche die Spurlinie des Kegelmantels in den Punkten B, C, . . . schneidet. Diese Hülfsebene schneidet den Kegelmantel in den geradlinigen Erzeugenden b, c, . . ., deren verticale Projectionen mit der Geraden $A''B''$ zusammenfallen und deren horizontale Projectionen b', c', . . . die Verbindungslinien der Punkte B, C, . . . mit A' sind. Diese Hülfsebene schneidet auch die Ebene E in einer geraden Linie, welche zur verticalen Projectionsebene senkrecht ist. Die verticale Projection dieser Geraden ist der Schnittpunkt J'' der Spuren e_2 und $A''B''$, während man die horizontale Projection erhält, wenn man von dem Punkte J'' ein Loth auf die Axe x fällt und dasselbe über die Axe x hinaus verlängert. Dieses Loth schneidet die ersten Projectionen BA', CA', . . . der in derselben Hülfsebene liegenden Mantellinien in den Punkten J', K', . . ., welche die horizontalen Projectionen von ebenso vielen Punkten des gesuchten Schnittes l liefern. Verfährt man in gleicher Weise für die übrigen Hülfsebenen, und verbindet alle auf diese Weise gefundenen Punkte J', K', . . . mit einander durch die Curve l', so ist diese die horizontale Projection des gesuchten Schnittes l.

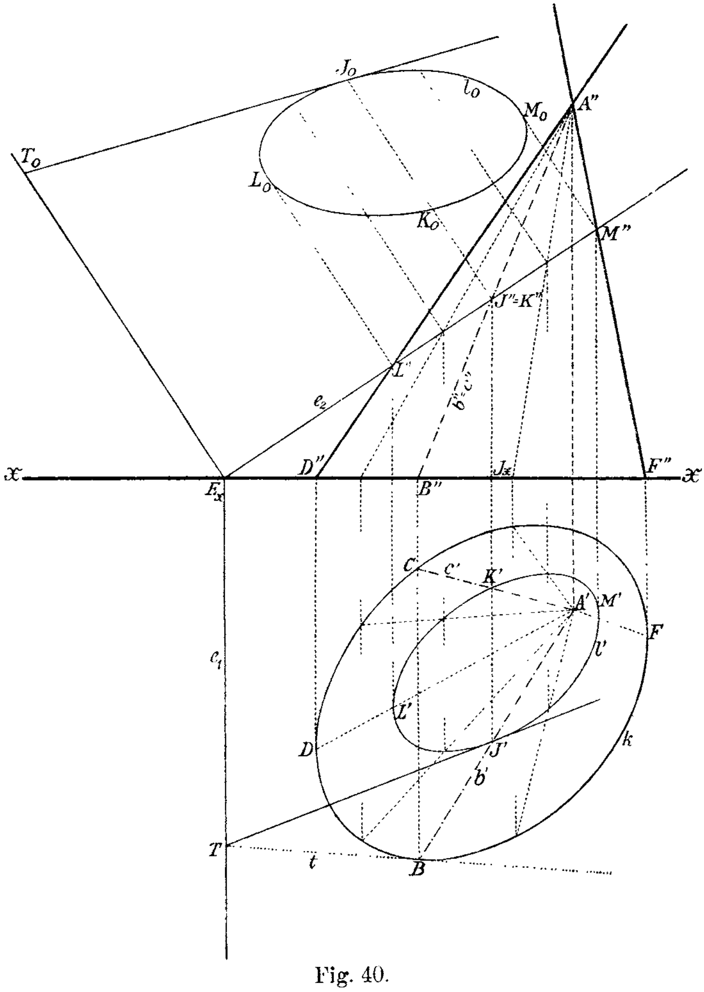

Fig. 40.

70. Um die Tangente in dem willkürlich gewählten Punkte J' an die Curve l' zu ziehen, braucht man nur den ersten Spurpunkt der in dem Punkte J an die Schnittcurve l gezogenen

Tangente zu finden, welcher auf der Spur e_1 der Ebene E liegen muss. Dieser Spurpunkt muss aber auch auf der ersten Spur der Ebene liegen, welche den Kegelmantel längs der Erzeugenden AJ — mit der horizontalen Projection $A'J'$ — berührt. Die Gerade $A'J'$ schneidet die Curve k in dem Punkte B und die in diesem Punkte an die Curve k gezogene Tangente t ist die erste Spurlinie der Tangentialebene. Der Punkt T, in welchem sich die beiden Spurgeraden e_1 und t schneiden, liegt mithin auch auf der durch den Punkt J' gehenden Tangente der Curve l'.

71. Wenn noch die wahre Gestalt des Schnittes l ermittelt werden soll, so kann man entweder die Ebene E um ihre erste Spur e_1 in die erste oder um ihre zweite Spur e_2 in die zweite Projectionstafel umlegen und in der umgelegten Ebene die Schnittcurve construiren. Wir wollen hier den zweiten Weg einschlagen. Alle horizontalen Geraden, in denen die Ebene E von den durch die Spitze des Kegels senkrecht zu der verticalen Projectionsebene gelegten Hülfsebenen geschnitten wird, bleiben bei dieser Umlegung stets senkrecht zu der Spur e_2 und ändern ihre Längen nicht. [75] Zieht man also durch alle Punkte J'' der Spur e_2 Senkrechte zu ihr und trägt auf diesen die entsprechenden horizontalen Strecken $J_x J'$, $J_x K'$, ... von J'' bis J_0, K_0, ... ab, so gehören die Punkte J_0, K_0, ... der Schnittcurve an, und die Curve l_0, welche durch alle so erhaltenen Punkte hindurchgelegt ist, giebt die Schnittcurve des Kegelmantels mit der Ebene E in ihrer wahren Gestalt.

72. Um an die Curve l_0 in dem beliebig gewählten Punkte J_0 die Tangente zu construiren, verfährt man, wie aus dem Vorhergesagten sich unmittelbar ergiebt, folgendermaassen: Man fällt von dem Punkte J_0 das Loth $J_0 J''$ auf die zweite Spurlinie e_2 der Ebene E, verbindet dann die Punkte J'' und A'' durch eine Gerade, welche man bis zu ihrem Schnittpunkte B'' mit der Axe x verlängert, und projicirt den letzteren Punkt noch in den Punkt B der Curve k; darauf zieht man an die Curve k im Punkte B die Tangente, welche die Spurlinie e_1 in dem Punkte T schneidet, und trägt die Strecke $E_x T$ auf der im Punkte E_x zu der Spur e_2 gezogenen Senkrechten von E_x bis T_0 ab. Die Gerade $T_0 J_0$ ist dann die gesuchte Tangente an die Curve l_0.

Die Construction der Abwickelung eines Kegels mit beliebiger Basis und der von der Ebene E ausgeschnittenen Curve l

werden wir sofort auseinandersetzen, nachdem wir den Schnitt einer Kegelfläche mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels liegt, bestimmt haben [vgl. Art. 81, S. 111—113].

73. **Dritte Aufgabe.** (Fig. 41 u. 42) Man soll den Schnitt zweier Kreiskegel, deren Axen einander parallel sind, construiren.

Lösung. Wir wiederholen hier über die Figuren 41 und 42 nichts von dem, was wir bereits früher bei der Darlegung der allgemeinen Methode, bei welcher wir die gleiche Figur [Nr. 34] als typisch benutzt hatten. Wir bemerken nur, dass in dem vorliegenden Falle genau so wie in jedem, in welchem es sich um zwei beliebige Umdrehungsflächen [mit verticalen Axen] handelt, die von einer Schaar horizontaler Hülfsebenen auf den Flächen ausgeschnittenen Curven Kreise sind. Jetzt wollen wir nur bezüglich der Tangentenconstruction noch auf einige Einzelheiten eingehen, von denen zu sprechen wir früher nicht Gelegenheit hatten.

74. Um an die horizontale Projection l' des Schnittes l beider Kegelmäntel in dem Punkte K' die Tangente zu construiren, erinnern wir uns wieder daran, dass diese Tangente die Projection der Tangente in dem Punkte K des Schnittes l selbst ist, und dass es also, um die Construction der ersteren Tangente ausführen zu können, genügt, den horizontalen Spurpunkt T der letzteren Tangente zu bestimmen. [**76**] Nun liegt aber die Tangente in dem Punkte K des Schnittes l in den beiden Tangentialebenen, welche die beiden Kegelmäntel in diesem Punkte berühren. Construirt man also die horizontalen Spurlinien t und v dieser beiden Ebenen, so ist ihr Schnittpunkt der Spurpunkt T. Die Tangentialebene an den ersten Kegel berührt diesen längs der durch den Punkt K gehenden geradlinigen Erzeugenden, deren horizontale Projection man findet, wenn man die Gerade $A'K'$ zieht und sie bis zu dem Schnittpunkte C mit der horizontalen Spurlinie i des Kegels verlängert. Der Punkt C liegt auf der Geraden, längs deren die Tangentialebene den Kegel berührt, und mithin ist die horizontale Spur t dieser Ebene die in dem Punkte C an den Kreis i gezogene Tangente. In gleicher Weise verfährt man in Bezug auf den zweiten Kegel. Man verlängert die Gerade $B'K'$ bis zu ihrem Schnittpunkte D mit dem Kreise k und zieht in diesem Punkte die Tangente v an den Kreis, welche dann die horizontale Spur der Tangentialebene in dem Punkte K an den zweiten Kegel ist. Zieht man dann durch

den Schnittpunkt T der beiden Tangenten t und v die Gerade TK', so ist sie die gesuchte Tangente an die Curve l'.

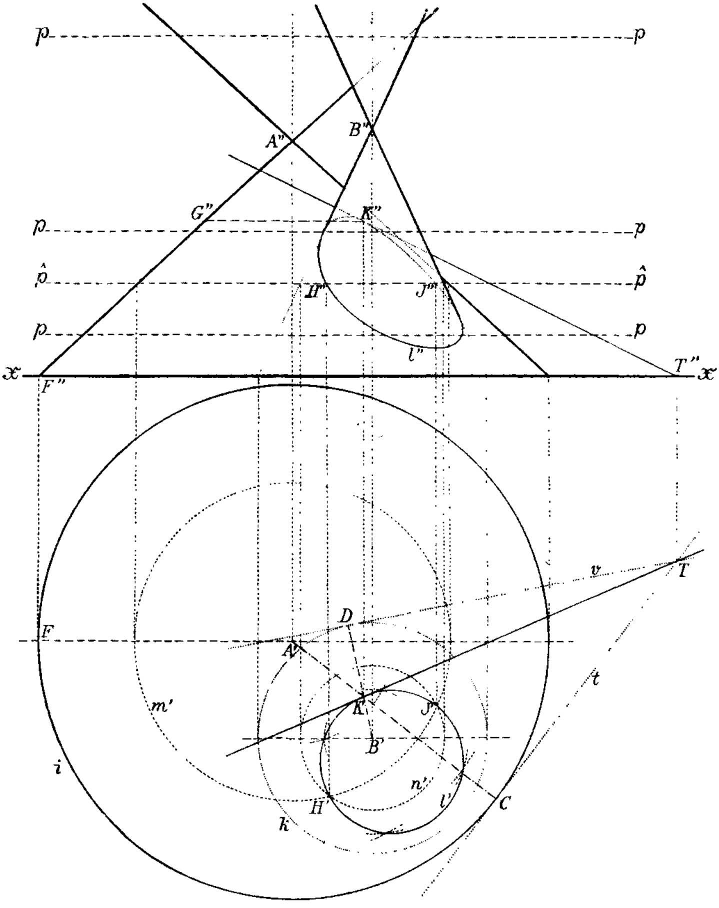

Fig. 41.

Um die Tangente in dem entsprechenden Punkte K'' der verticalen Projection l'' der Schnittcurve l zu erhalten, braucht man offenbar nur den Punkt T in den Punkt T'' auf der Axe x zu projiciren und T'' mit K'' durch eine Gerade zu verbinden, welche die gesuchte Tangente ist.

75. Es kann unter Umständen nöthig werden, auf der Abwickelung eines der beiden Kegel, oder sogar auf denen beider Kegel ihre ebenfalls abgewickelte Schnittcurve einzuzeichnen, z. B. wenn man ein Modell für die Durchdringung beider Kegel aus biegsamen Stoffen, z. B. aus Metallblechen, herstellen will. In solchen Fällen wendet man für jeden der beiden Kegel das Verfahren an, welches wir jetzt für den ersten auseinandersetzen.

Zunächst ist zu beachten, dass bei der Abwickelung eines Kegelmantels die auf ihm liegenden Geraden weder ihre Gestalt, noch ihre Länge ändern, weil allmählich jede dieser Geraden als Scharnier, um welches die Fläche bei ihrer Abwickelung in die Ebene gedreht wird, dient; es bleiben also alle Punkte des Kegelmantels stets in derselben Entfernung von der Spitze. Ist ferner der Kegel, wie in dem vorliegenden Falle, ein gerader Kreiskegel, so haben alle Punkte des horizontalen Grundkreises i den gleichen Abstand von der Kegelspitze; sie müssen also in der Abwickelung auch in gleicher Entfernung von der Spitze und folglich [77] auf einem Kreisbogen liegen, dessen Radius gleich der constanten Entfernung der Spitze von den Punkten des Grundkreises i ist. Nachdem man also den Punkt A_a, in welchen bei der Abwickelung des Kegels seine Spitze A zu liegen kommen soll, willkürlich angenommen hat, beschreibt man um diesen Punkt als Mittelpunkt mit dem Radius $A''F''$ einen Kreisbogen i_a, in welchen der Grundkreis i sich abwickelt. Trägt man dann ausgehend von dem Punkte F des Grundkreises, bei welchem man mit der Abwickelung beginnen will, den Kreisbogen FC auf dem soeben construirten Kreise i_a von dem willkürlich gewählten Punkte F_a desselben ab, so erhält man die Lage C_a des Punktes C nach geschehener Abwickelung; die Gerade, welche die Punkte C_a und A_a verbindet, giebt die Lage an, in welche die Erzeugende AC des Kegels dabei gekommen ist, und auf dieser Geraden muss auch der Punkt K_a liegen, welcher dem Punkte K des Schnittes l beider Flächen entspricht. Um K_a zu finden, muss man den Abstand des Punktes K von der Spitze des Kegels bestimmen und diesen dann auf der Geraden A_aC_a von A_a aus abtragen. Dazu zieht man durch den Punkt K'' der verticalen Projection eine horizontale Gerade, bis sie die Seitenlinie $A''F''$ in dem Punkte G'' trifft; dann ist $A''G''$ der gesuchte Abstand. Verfährt man in gleicher Weise, wie für den Punkt K, für alle anderen Punkte der

Schnittcurve l, und verbindet man dann alle so erhaltenen Punkte in der Abwickelung des Kegelmantels durch die Curve l_a, so ist diese die zugleich mit der ersten Kugelfläche abgewickelte Schnittcurve l beider Kegel.

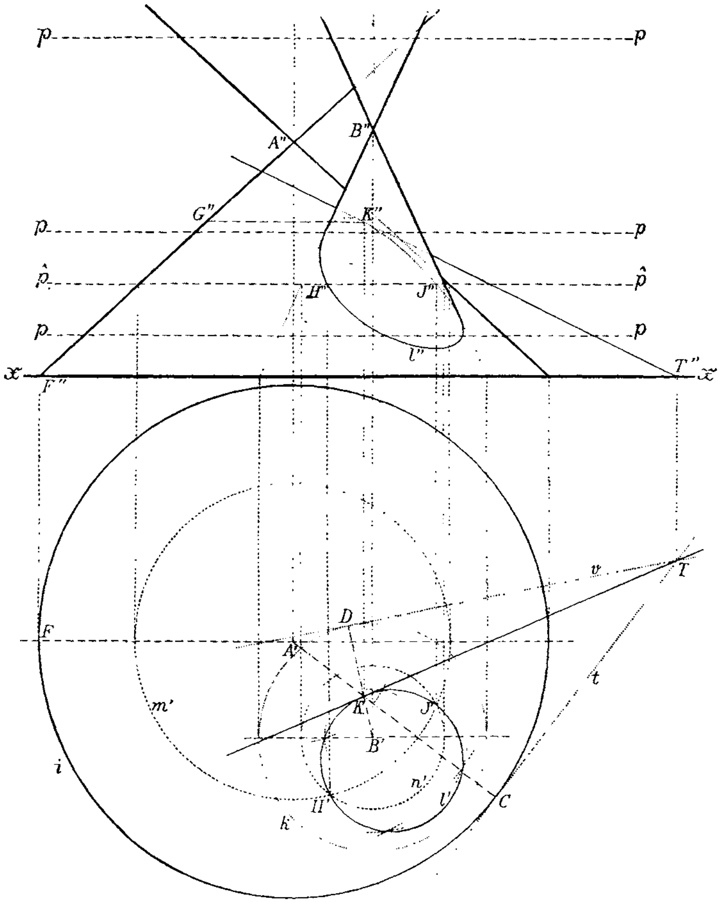

Fig. 42.

In gleicher Weise verfährt man, um die mit der zweiten Kegelfläche abgewickelte Schnittcurve zu erhalten.

76. **Vierte Aufgabe.** (Fig. 43) Es soll der Schnitt zweier Kegel mit beliebigen Grundflächen construirt werden.

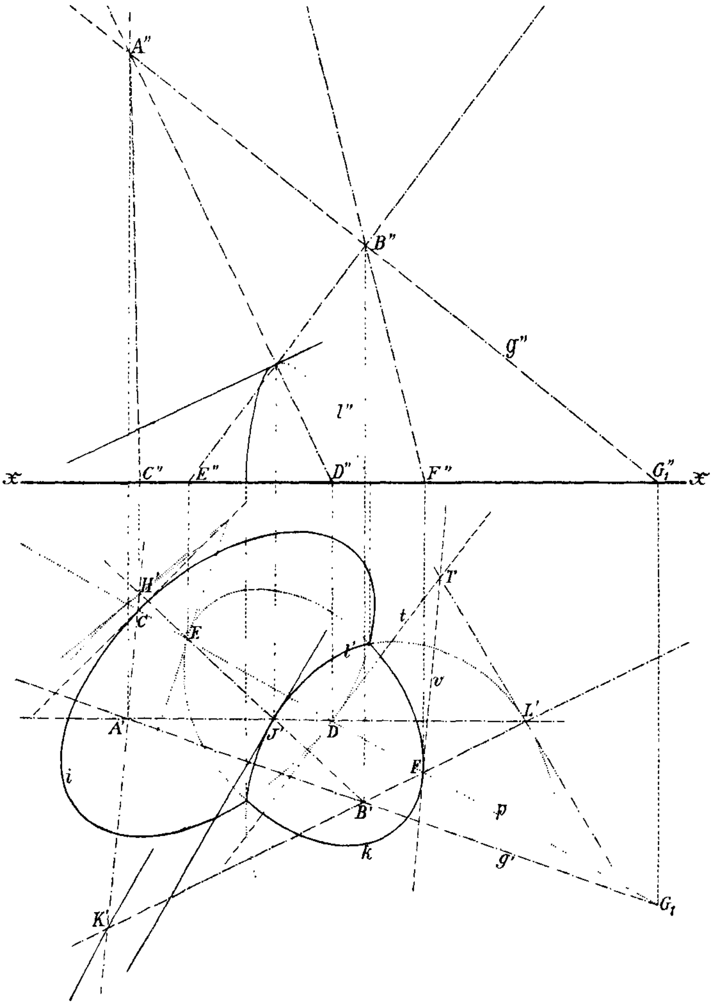

Fig. 43.

Lösung. Es seien A', A'' und B', B'' die Projectionen der Spitzen A und B beider Kegel, i und k ihre Spurlinien in der ersten Projectionsebene.

Durch die beiden Spitzen A, B zieht man eine Gerade g, deren Projectionen mithin die geraden Linien $A'B'$, $A''B''$ sind und deren ersten Spurpunkt G_1 man nach dem früher angegebenen Verfahren leicht construiren kann. Durch diese Gerade AB legt man dann eine Schaar von Hülfsebenen Π, welche jeden der beiden Kegel in einer Anzahl gerader Linien schneiden. Die in einer solchen Hülfsebene Π liegenden Geraden bestimmen durch ihre Schnittpunkte — wobei von den beiden Spitzen natürlich abgesehen wird — ebenso viele Punkte der Schnittcurve l beider Kegelmäntel. Die horizontalen Spurlinien dieser Hülfsebenen Π müssen nothwendiger Weise [**78**] durch den Punkt G_1 gehen, und da die Lage dieser Ebenen im Übrigen willkürlich ist, so kann man ihre ersten Spurlinien willkürlich annehmen, indem man durch den Punkt G_1 so viele gerade Linien p zieht, als man für nöthig findet; für jede dieser Linien p, bez. die entsprechende Hülfsebene Π hat man dann die Construction durchzuführen, welche wir für eine derselben jetzt beschreiben wollen.

Die erste Spurlinie p einer solchen Hülfsebene Π schneidet die horizontale Spurlinie i des ersten Kegels in den Punkten C, D, . . ., welche zugleich die ersten Spurpunkte der Mantellinien sind, in welchen diese Fläche von der benutzten Hülfsebene geschnitten wird. Es sind mithin $A'C$, $A'D$, . . . die horizontalen Projectionen dieser Geraden, und man erhält ihre verticalen Projectionen dadurch, dass man die Punkte C, D, . . . in die Punkte C'', D'', . . . der Projectionsaxe x projicirt und die Geraden $A''C''$, $A''D''$, . . . zieht. Auch die Spurlinie k der zweiten Kegelfläche schneidet die Gerade p in gewissen Punkten E, F, . . ., deren Verbindungsgeraden mit dem Punkte B' die ersten Projectionen $B'E$, $B'F$, . . . der Schnittgeraden dieser zweiten Fläche mit derselben Hülfsebene Π sind; die verticalen Projectionen dieser Geraden erhält man, indem man die Punkte E, F, . . . in die Punkte E'', F'', . . . der Axe x projicirt und die letzteren mit dem Punkte B'' verbindet.

Da alle diese Geraden AC, AD, . . . des ersten Kegels und BE, BF, . . . des zweiten Kegels in derselben Ebene liegen, so sind die Schnittpunkte H', J', K', L', . . . ihrer horizontalen Projectionen $A'B$, $A'C$, . . . mit $B'E$, $B'F$, . . . die horizontalen Projectionen von ebenso vielen Punkten der

Schnittcurve l beider Kegel. Verfährt man in gleicher Weise allmählich für alle anderen Geraden p, welche durch G_1 gezogen sind, so erhält man eine Reihe derartiger Schnittpunkte, wie H', J', K', L', ... Verbindet man dann alle Punkte H' durch einen Curvenzweig, alle Punkte J' durch einen zweiten, alle Punkte K' durch einen dritten und so fort, so bildet die Gesammtheit dieser Curven die horizontale Projection l' des gesuchten Schnittes l beider Kegel.

In gleicher Weise erhält man für die Hülfsebene, deren erste Spur die Gerade p ist, in der verticalen Ebene eine gewisse Anzahl von Geraden $A''C''$, $A''D''$, ..., $B''E''$, $B''F''$, ..., deren Schnittpunkte J'', H'', K'', L'', ... die verticalen Projectionen von ebenso vielen Punkten des gesuchten Schnittes sind.

Es ist nicht nöthig, beide Projectionen des Schnittes l unabhängig von einander zu construiren; man kann vielmehr, nachdem für einen Punkt des Schnittes eine seiner Projectionen gefunden ist, seine andere dadurch erhalten, dass man ihn senkrecht zur Axe x auf die andere Projection einer der Mantellinien, auf welchen er liegt, projicirt. Dieser Umstand giebt uns zugleich ein Mittel, um die früheren Constructionen auf ihre Richtigkeit und Genauigkeit hin prüfen, bez. unter Umständen Schnittpunkte von Geraden, welche sich unter sehr spitzen Winkeln schneiden, vermeiden zu können.

[**79**] 77. Um die Tangenten an die horizontale Projection l' des Schnittes, z. B. die Tangente, welche sie in dem Punkte L' berührt, zu erhalten, muss man den horizontalen Spurpunkt T der in dem Punkte L an den Schnitt l selbst gezogenen Tangente construiren. Diese Tangente ist aber die Schnittgerade der beiden Tangentialebenen, welche die Kegelflächen in dem Punkte L berühren, und daher fällt ihr erster Spurpunkt in den Schnittpunkt der horizontalen Spurlinien t, v dieser beiden Tangentialebenen. Nun ist $A'DL'$ die Projection der Geraden, in welcher die Tangentialebene im Punkte L den ersten Kegel berührt, und folglich ist die im Punkte D an die Curve i gezogene Tangente t die horizontale Spur dieser Tangentialebene. Die Gerade $B'FL'$ ist die Projection der Berührungsgeraden der Tangentialebene an den zweiten Kegel, und folglich ist die im Punkte F an die Curve k gezogene Tangente v die horizontale Spur der zweiten Tangentialebene. Zieht man dann durch den Schnittpunkt T der Tangenten t

und v die Gerade TL', so ist sie die gesuchte Tangente an die horizontale Projection l' des Schnittes l.

Stellt man dieselbe Betrachtung für die anderen Punkte H', J', K', ... an, so findet man, dass 1) die Tangente in J' durch den Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten D und E, 2) die Tangente in K' durch den Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten C und F, 3) die Tangente in H' durch den Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten C und E gehen muss.

Die Tangenten an die verticale Projection l'' zu bestimmen, bietet keine Schwierigkeiten mehr, wenn die entsprechenden Tangenten der horizontalen Projection l' construirt sind. Denn nachdem man die horizontalen Spurpunkte der Tangenten an die Schnittcurve l gefunden hat, erhält man Punkte, durch welche die gesuchten Tangenten gehen müssen, indem man jene Spurpunkte auf die Axe x projicirt.

78. **Fünfte Aufgabe.** (Fig. 44 u. 45) Man soll den Schnitt eines Kegels mit beliebiger Basis und einer Kugel construiren.

Lösung. (Fig. 44) Es seien A', A'' die Projectionen des beiden Flächen gemeinsamen Mittelpunktes; ferner sei die Curve k die gegebene horizontale Spur des Kegels, $A''D''$ der Kugelradius und der Kreis i'' die verticale Projection der Kugel. Durch den beiden Flächen gemeinsamen Mittelpunkt A denkt man sich eine Schaar von Hülfsebenen hindurchgelegt, welche man noch senkrecht [**80**] zu einer der beiden Projectionsebenen wählen kann. In den Figuren 44 u. 45 sind diese Ebenen senkrecht zur ersten Projectionsebene angenommen. Jede dieser Hülfsebenen schneidet den Kegel in einer Anzahl von Geraden und die Kugel in einem grössten Kreise; in jeder dieser Ebenen liefern die Schnittpunkte der Geraden und des Kreises Punkte der gesuchten Schnittcurve l. Man zieht also durch den Punkt A' beliebig viele Gerade, welche die horizontalen Projectionen von ebenso vielen verticalen Hülfsebenen und zugleich von ihren Schnittlinien mit den beiden gegebenen Flächen sind. Jede dieser Geraden, z. B. $BA'C$, schneidet die horizontale Spur k des Kegels in den Punkten B, C, ..., welche zugleich die ersten Spurpunkte der von der zugehörigen Hülfsebene ausgeschnittenen Mantellinien des Kegels sind. Projicirt man diese Punkte in die Punkte B'', C'', ... der Axe x und zieht die Geraden $A''B''$, $A''C''$ ..., so sind diese die verticalen Projectionen derselben Mantellinien. Jetzt handelt es sich noch darum, die Punkte zu finden, in

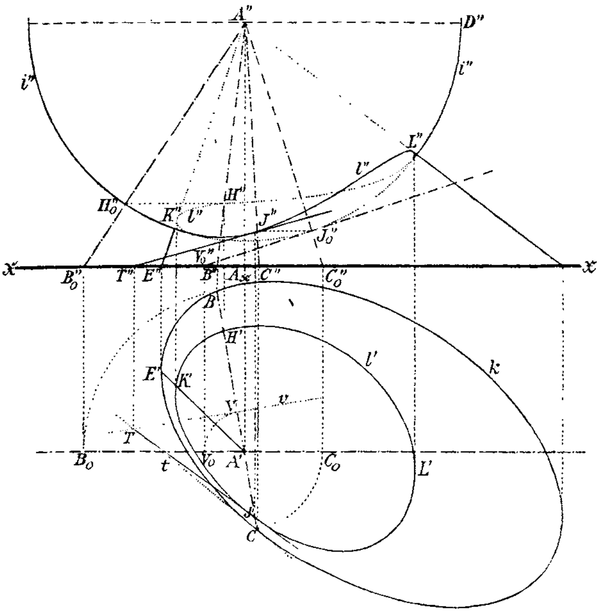

Fig. 44.

welchen diese Mantellinien von dem in derselben Hülfsebene gelegenen grössten Kugelkreise geschnitten werden.

Zu diesem Zwecke zieht man zunächst durch den Punkt A' eine Parallele zur Axe x. Dann dreht man die durch BC gehende verticale Hülfsebene um die in dem Punkte A' errichtete Senkrechte $A'A$ zu der verticalen Projectionsebene parallel, wobei alle von dieser Ebene auf den beiden gegebenen Flächen erzeugten Schnitte mit gedreht werden sollen. Dabei beschreiben die Punkte B, C, . . . die Kreisbogen BB_0, CC_0, . . . mit dem gemeinsamen Mittelpunkte A' und kommen schliesslich in die Schnittpunkte dieser Kreisbogen mit der durch den Punkt A' zu der Axe x gezogenen Parallelen zu liegen. Projicirt man die Punkte B_0, C_0, . . . in die Punkte B_0'', C_0'', . . . der Axe x, so sind die Geraden $A''B_0''$, $A''C_0''$,

. . . die verticalen Projectionen der Geraden, in welchen die betrachtete Hülfsebene den Kegel schneidet, in der Lage, welche sie nach ausgeführter Paralleldrehung angenommen haben. Der von derselben Hülfsebene ausgeschnittene grösste Kugelkreis hat nach ausgeführter Paralleldrehung den Kreis i'' als verticale Projection. Folglich sind die Schnittpunkte H_0'', J_0'', . . . dieses Kreises mit den Geraden $A''B_0''$, $A''C_0''$, . . . die Projectionen von Punkten der gesuchten Schnittcurve, betrachtet in der neuen Lage der schneidenden Ebene.

Nachdem man auf diese Weise die Projectionen der erwähnten Punkte in ihrer neuen Lage gefunden hat, muss man die betrachtete verticale Hülfsebene wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückdrehen. Bei dieser Rückwärtsdrehung beschreiben alle Punkte der Ebene und folglich auch die in ihr liegenden Punkte H, J, . . . der Schnittcurve [**81**] horizontal gelegene Kreisbogen, deren Mittelpunkte auf der verticalen Geraden $A'A$ liegen und deren verticale Projectionen horizontale Gerade sind. Zieht man also durch die Punkte H_0'', J_0'', . . . horizontale Gerade, so liegen auf ihnen die verticalen Projectionen H'', J'', . . . der Schnittpunkte H, J, . . . in ihrer natürlichen Lage. Diese Projectionen müssen aber auch auf den entsprechenden Geraden $A''B''$, $A''C''$, . . . liegen und sind daher ihre Schnittpunkte mit den eben gezogenen horizontalen Geraden. Auf diese Weise verfährt man auch für die übrigen Hülfsebenen und erhält dann in der Curve l'', welche alle so erhaltenen zweiten Projectionen von Schnittpunkten verbindet, die verticale Projection der gesuchten Schnittcurve l.

Projicirt man die Punkte H'', J'', . . . in die Punkte H', J', . . . der horizontalen Projection BC der Hülfsebene, so erhält man die horizontalen Projectionen derselben Punkte H, J, . . . der Schnittcurve l, und die Curve, welche man durch alle, für jede Lage der Geraden BC construirten Punkte H', J', . . . ziehen kann, ist die horizontale Projection l' der Schnittcurve l.

79. Um die Tangente in dem Punkte J' an die horizontale Projection l' ziehen zu können, muss man den horizontalen Spurpunkt T der Tangente in dem Punkte J des Schnittes l construiren. Dieser Spurpunkt muss in den Schnittpunkt der horizontalen Spurlinien der in dem Punkte J an die beiden Flächen gelegten Tangentialebenen fallen. Nun ist aber offenbar die in dem Punkte C an die Curve k gezogene Tangente t die erste Spurlinie der Tangentialebene an den Kegel. Um

die erste Spur der Tangentialebene an die Kugel zu erhalten, wendet man das für die Umdrehungsflächen gegebene Verfahren an [siehe Art. 30, Seite 42—45]; man zieht also in dem Punkte

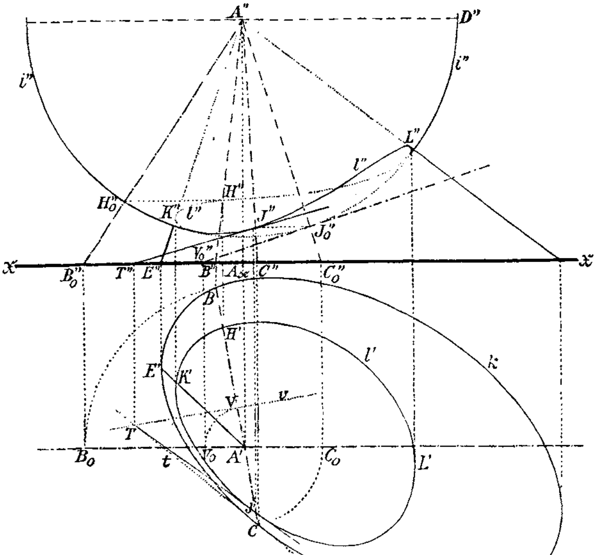

Fig. 45.

J_0'' die Tangente an den Kreis i'', verlängert sie bis zu ihrem Schnittpunkte V_0'' mit der Axe x, trägt dann $A_x V_0''$ auf der Geraden BC von A' bis V ab und zieht dann durch den Punkt V die Gerade v senkrecht zu BC. Die beiden Spurlinien t und v schneiden sich in dem Punkte T, durch welchen man die Gerade TJ' ziehen muss, um die gesuchte Tangente zu erhalten.

Die Tangente im Punkte J'' der verticalen Projection l'' findet man, indem man den Punkt T in den Punkt T'' der Axe x projicirt und dann die Gerade $T''J''$ zieht, welche die verlangte Tangente ist.

80. Wenn die Kugel und der Kegel nicht concentrisch sind, so muss man die Mittelpunkte der beiden Flächen durch

eine gerade Linie verbinden und die durch sie hindurchgehenden Ebenen [**82**] als die schneidenden Hülfsebenen benutzen. Jede dieser Hülfsebenen schneidet den Kegelmantel in geraden Linien und die Kugel in einem grössten Kreise, wie in dem zuerst betrachteten Falle concentrischer Flächen, und man erhält ebenfalls eine einfache Construction. In diesem allgemeineren Falle ist es am vortheilhaftesten, die verticale Projectionsebene parallel zu der Verbindungsgeraden der Flächenmittelpunkte zu wählen, damit bei der Drehung, welche für jede Hülfsebene auszuführen ist, um sie der verticalen Projectionsebene parallel werden zu lassen, die beiden Flächenmittelpunkte ihre Lage unverändert beibehalten, und also auch ihre Projectionen unverändert bleiben; hierdurch werden die Constructionen wesentlich vereinfacht.

81. **Sechste Aufgabe.** (Fig. 45—47) Man soll eine Kegelfläche mit beliebiger Basis nebst einer auf ihr liegenden Schnittcurve, deren beide Projectionen gegeben sind, abwickeln.

Lösung. Man denkt sich um die Spitze A des Kegels als Mittelpunkt eine Kugel von beliebigem Radius beschrieben und construirt nach dem für die vorige Aufgabe gegebenen Verfahren die Projectionen der Schnittcurve beider Flächen. Da nun alle Punkte der sphärischen Schnittcurve die gleiche Entfernung von der Kegelspitze A haben, so müssen sie auch auf dem abgewickelten Kegelmantel in gleicher Entfernung von der Spitze und also auf einem um dieselbe als Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogen liegen, dessen Radius gleich demjenigen der Kugel ist. Wenn also A_a (Fig. 46) der Punkt ist, in welchen bei der Abwickelung die Kegelspitze zu liegen kommt, so beschreibt man um diesen Punkt mit einem Radius gleich $A''D''$ (Fig. 45) einen Kreisbogen l_a, auf welchen sich dann die Punkte des sphärischen Kegelschnitts abwickeln, sodass die Theilstücke dieses Kreisbogens bezüglich gleich den entsprechenden Theilen des sphärischen Kegelschnittes selbst sind. Nachdem man noch auf dem sphärischen Kegelschnitte l einen Punkt, z. B. den Punkt K, dessen Projectionen K', K'' sind, und auf seiner Abwickelung l_a den Punkt K_a als den ihm entsprechenden angenommen hat, handelt es sich noch darum, die Längen der verschiedenen Bogen des Kegelschnittes auf seiner Abwickelung l_a von dem Punkte K_a aus abzutragen. Weil nun die sphärische Curve eine solche doppelter Krümmung ist, muss man sie allmählich ihrer beiden Krümmungen berauben, ohne ihre Länge dabei zu verändern, was auf folgende Weise möglich ist.

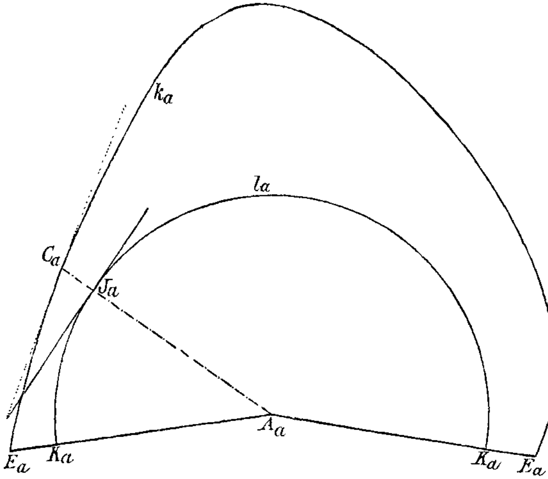

Fig. 46.

[**83**] Da die sphärische Curve l sich in die Curve l' der ersten Projectionsebene projicirt, so kann man annehmen, dass sie auf der Oberfläche eines verticalen Cylinders liegt, dessen horizontale Spurlinie die Curve l' ist. Diesen Cylinder und die auf ihm liegende Curve l wickelt man dann nach dem

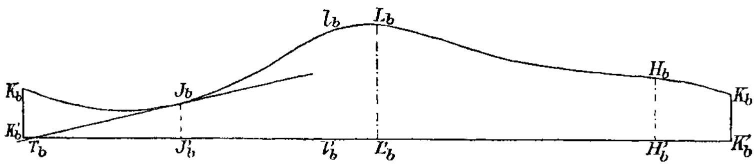

Fig. 47.

früher angegebenen Verfahren [Art. 63, S. 92] in die Ebene ab, indem man den Bogen $K'J'$ (Fig. 45) in die gerade Linie $K_b'J_b'$ (Fig. 47) abwickelt und die verticale Strecke J_xJ''[14]) senkrecht zu $K_b'K_b'$ von J_b' bis J_b abträgt. Die Curve l_b, welche durch alle so erhaltenen Punkte J_b hindurchgeht, ist der abgewickelte sphärische Kegelschnitt, nachdem man ihn seiner horizontalen Krümmung beraubt hat, ohne jedoch dabei seine Bogenlänge geändert zu haben.

Nun wickelt man noch die Curve l_b auf den Kreis l_a (Fig. 46) ab, indem man z. B. die Bogenlänge $K_b J_b$ der Curve l_b auf dem Kreise l_a von K_a bis J_a abträgt und dadurch den Punkt J_a erhält, in welchen bei der Abwickelung des Kegelmantels in die Ebene der Punkt J, dessen Projectionen J', J'' (Fig. 45) sind, fällt. Zieht man dann die Gerade $A_a J_a$, so findet man auf dem abgewickelten Kegelmantel die geradlinige Erzeugende, deren horizontale Projection $A' C$ (Fig. 45) ist. Soll nun ein Punkt dieser Geraden, z. B. der Punkt C auf der abgewickelten Fläche verzeichnet werden, so braucht man nur den Abstand dieses Punktes von der Spitze A des Kegels zu messen und auf $A_a J_a$ von A_a aus bis C_a abzutragen; dann ist C_a der Punkt, in welchen der Punkt C bei der Abwickelung des Kegelmantels zu liegen kommt.

82. **Siebente Aufgabe.** (Fig. 48) Es ist der Schnitt zweier beliebigen Cylinder zu construiren.

Lösung. Wenn man bei einer Untersuchung, welche zu der vorliegenden Aufgabe geführt hat, keine anderen Schnittcurven als die der beiden Cylindermäntel zu betrachten hat, und besonders wenn diese Flächen kreisförmige Grundflächen haben, so wählt man die Projectionsebenen vortheilhaft so, dass eine derselben parallel zu den geradlinigen Erzeugenden beider Cylinderflächen ist; dadurch wird es möglich, den verlangten Schnitt zu construiren, ohne andere Curven als die gegebenen zu benutzen. Muss man aber gleichzeitig noch die Schnitte der Cylinder mit anderen Flächen betrachten, so bietet es keinen Vortheil dar, für die Construction des Schnittes beider Cylinder eine besondere Wahl der Projectionsebenen zu treffen; es ist vielmehr einfacher, für die Construction aller Schnitte dieselben Projectionsebenen zu benutzen.

[**84**] Wir nehmen deshalb bei der Lösung der vorliegenden Aufgabe an, dass die erzeugenden Geraden beider Flächen eine ganz beliebige Lage zu den beiden Projectionsebenen haben.

Es seien i, k die gegebenen horizontalen Spurcurven der beiden Cylinder; a', a'' und b', b'' die Projectionen der beiden Geraden a und b, welchen die Erzeugenden des ersten und zweiten Cylinders parallel sein sollen. Man nimmt dann zur

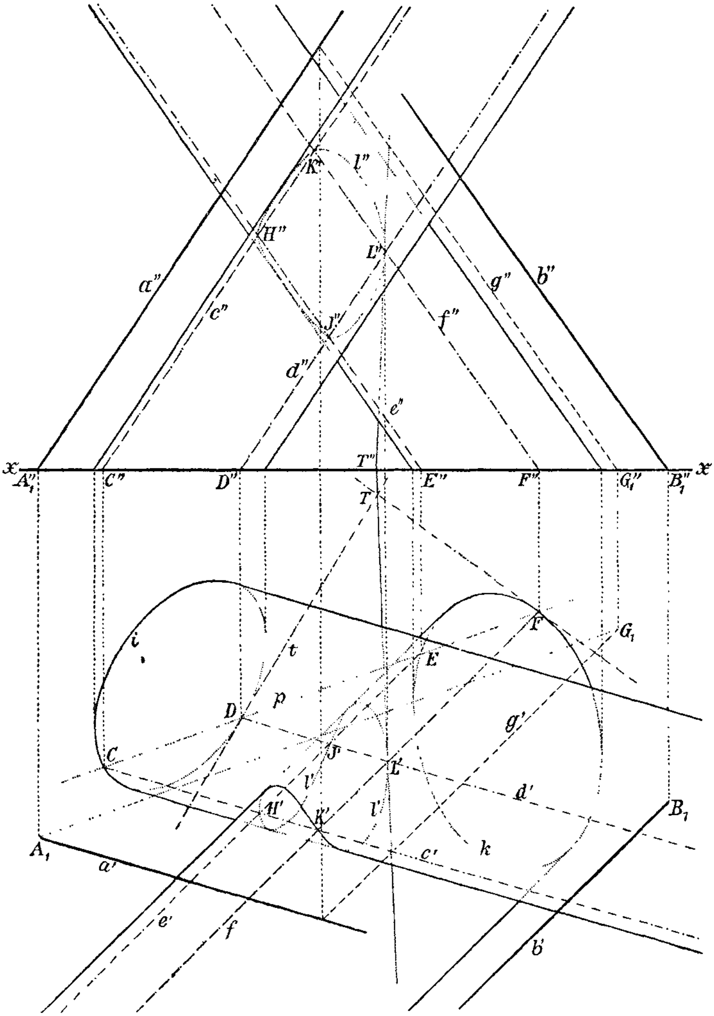

Fig. 48.

Lösung eine Schaar von Ebenen Π zu Hülfe, welche den Erzeugenden beider Flächen, also den Geraden a und b parallel sind. Diese Hülfsebenen schneiden die beiden Flächen in geraden Linien, von denen sich die auf dem ersten Cylinder liegenden mit den auf dem zweiten Cylinder liegenden in Punkten der gesuchten Schnittcurve l schneiden.

Nachdem man nach der in dem Art. 31 (1) [S. 46—47] gegebenen Verfahren die horizontale Spurlinie $A_1 G_1$ der durch die Gerade a parallel zu der Geraden b gelegten Ebene construirt hat, zieht man parallel zu $A_1 G_1$ so viele Gerade, als man für nöthig findet, und betrachtet sie als horizontale Spurlinien von ebenso vielen Hülfsebenen. Eine solche Parallele, z. B. p, schneidet die Spur i des ersten Cylinders in gewissen Punkten C, D, ... und die Spur k des zweiten Cylinders in gewissen anderen Punkten E, F, ..., durch welche man die Parallelen c', d', ..., e', f', ... bez. zu den ersten Projectionen a', b' zieht. Die Schnittpunkte H', J', K', L', ... der Geraden c', d' ... mit den Geraden e', f', ... sind die horizontalen Projectionen von ebenso vielen Punkten der Schnittcurve l beider Cylinder. Verfährt man in gleicher Weise für die anderen Hülfsebenen, d. h. also für andere Parallelen zu $A_1 G_1$, so findet man die horizontalen Projectionen weiterer Punkte der Schnittcurve l. Die Curve l', welche durch alle so erhaltenen Punkte H', J', K', L', ... hindurchgeht, ist dann die horizontale Projection der gesuchten Schnittcurve l.

Um die verticale Projection l'' derselben Curve zu erhalten, projicirt man die Punkte C, D, ..., E, F, ... in die entsprechenden Punkte C'', D'', ..., E'', F'', ... der Axe x und zieht durch diese Punkte die Parallelen c'', d'', ..., e'', f'', ... bez. zu den Projectionen a'', b''. Die Schnittpunkte H'', J'', K'', L'', ... der Parallelen c'', d'', ... mit den Parallelen e'', f'', ... sind die verticalen Projectionen der Punkte H, J, K, L, ... des Schnittes l. Bestimmt man in gleicher Weise die verticalen Projectionen der übrigen Punkte des Schnittes und verbindet man dann alle durch die Curve l'', so ist sie die verticale Projection des Schnittes l.

Will man an die Curven l', l'' in den zusammengehörigen Punkten L', L'' die Tangenten ziehen, so construirt man die horizontalen Spurgeraden t, v der Tangentialebenen, welche in dem Punkt L den ersten, bez. zweiten Cylinder berühren. Die von dem Punkte L' nach dem Schnittpunkte T der beiden Spuren t und v gezogene Gerade [**85**] ist die Tangente, welche in dem Punkte L' die Curve l' berührt. Projicirt man dann den Punkt T in den Punkt T'' der Axe x und zieht $T''L''$, so ist diese Gerade die Tangente, welche die verticale Projection l'' in dem Punkte L'' berührt.

83. **Achte Aufgabe.** (Fig. 49) Es ist der Schnitt zweier Umdrehungsflächen, deren Axen in einer Ebene liegen, zu construiren.

Lösung. Man wählt die Projectionsebenen so, dass eine derselben zu der Axe einer der Umdrehungsflächen senkrecht und die andere beiden Axen parallel ist. Es sei dann A' die horizontale Projection der Axe a der ersten Fläche, a'' ihre verticale Projection und i'' die Erzeugende der ersten Fläche. Dann muss die durch A' gezogene Parallele zur Axe x die horizontale Projection b' der Axe b der zweiten Umdrehungsfläche sein; die verticale Projection dieser Axe sei b'', so dass also A', A'' die Projectionen des Schnittpunktes A beider Flächenaxen sind, und k'' sei die gegebene Erzeugende der zweiten Umdrehungsfläche. Zur Lösung der Aufgabe benutzt man als Hülfsflächen eine Schaar von concentrischen Kugeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Schnittpunkt A beider Flächenaxen ist. Für jede dieser Kugeln construirt man die verticale Projection, welche ein mit dem Kugelradius um den Punkt A'' als Mittelpunkt beschriebener Kreis ist. Jeder dieser Kreise schneidet die erzeugenden Curven i'', k'' in gewissen Punkten, z. B. der Kreis m'' in den Punkten C'' und E''.

Betrachtet man die Kugelfläche, deren verticale Projection der Kreis m'' ist, so schneidet sie die erste Umdrehungsfläche in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht auf der Axe a steht, dessen verticale Projection mithin die horizontale Gerade $C''D''$ ist und dessen horizontale Projection der um den Punkt A' als Mittelpunkt mit dem Durchmesser $C''D''$ beschriebene Kreis $C'H'D'J'$ ist. Dieselbe Kugel schneidet auch die zweite Umdrehungsfläche in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht zur verticalen Projectionsebene steht und dessen verticale Projection die durch den Punkt E'' zu der Geraden b'' gezogene Senkrechte $E''F''$ ist.

Wenn der Punkt H'', in welchem sich die beiden Geraden $C''D''$ und $E''F''$ schneiden, näher an den beiden Axen liegt als die beiden Punkte C'' und E'', so schneiden sich offenbar die eben construirten Kreise in zwei Punkten H und J, deren gemeinsame verticale Projection der Punkt H'' ist. Die durch alle Punkte, welche auf dieselbe Weise [**86**] wie der Punkt H'' gefunden sind, gelegte Curve l'' ist dann die verticale Projection des Schnittes l der beiden Umdrehungsflächen. Projicirt man den Punkt H'' auf die Peripherie des Kreises $C'H'D'J'$,

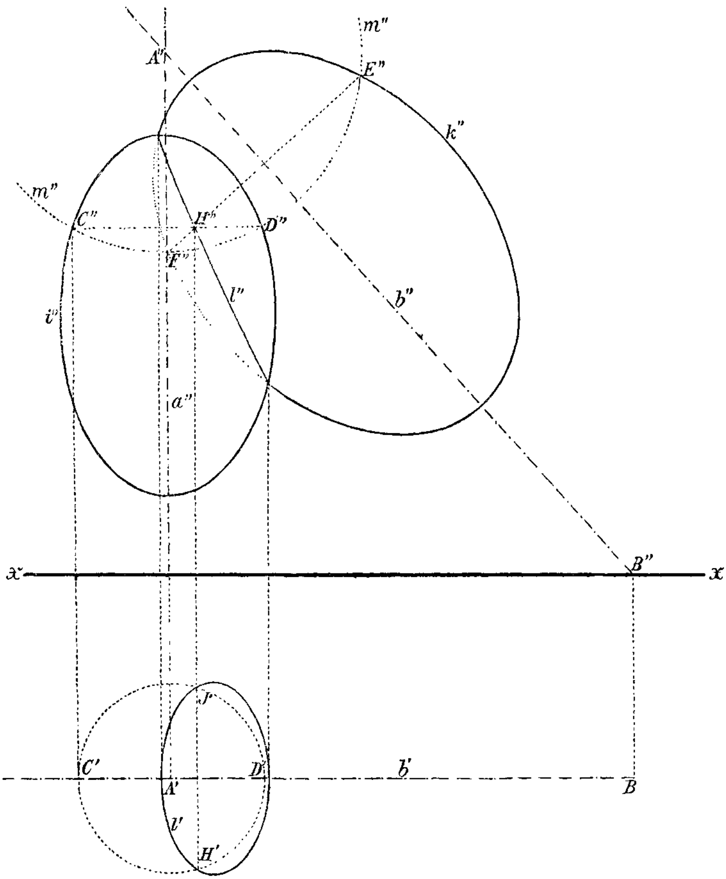

Fig. 49.

so erhält man dort die Punkte H' und J' als die horizontalen Projectionen der Schnittpunkte H und J der Kreise, in denen die Hülfskugel die beiden Umdrehungsflächen schneidet. Construirt man in gleicher Weise die horizontalen Projectionen der von den anderen Kugeln bestimmten Punkte des Schnittes l, so ist die durch sie hindurchgehende Curve l' die horizontale Projection des Schnittes beider Umdrehungsflächen.

Diese Beispiele mögen genügen, um das Verfahren, dessen man sich zur Construction der Schnitte von Flächen bedient, zu veranschaulichen. Und sie genügen in der That auch, besonders wenn sich die Schüler der grössten Genauigkeit bei der Ausführung der Construction befleissigen, möglichst grosse Abmessungen für die Zeichnungen benutzen und die Curven, sofern es möglich ist, stets in ganzer Ausdehnung zeichnen.

Roberval's Methode, um an eine Curve, welche durch das Gesetz der Bewegung eines erzeugenden Punktes gegeben ist, eine Tangente zu ziehen. Anwendung dieser Methode auf die Ellipse und auf die Schnittcurve zweier Rotationsellipsoide mit einem gemeinsamen Brennpunkte.

84. Bisher haben wir jede Curve doppelter Krümmung als Schnittcurve zweier krummen Flächen betrachtet, und in der That bieten sie sich in der darstellenden Geometrie meistens unter diesem Gesichtspunkte dar. Wir haben in diesem Falle gesehen, dass es immer möglich ist, Tangenten an diese Curven zu ziehen. Aber gerade so wie eine krumme Fläche durch die Gestalt und Bewegung ihrer Erzeugenden bestimmt werden kann, lässt sich auch eine Curve durch das Gesetz der Bewegung eines erzeugenden Punktes definiren. Will man dann aber eine Tangente an die Curve ziehen, so kann man nur die Methode von *Roberval* benutzen, wenn man nicht die Analysis zu Hülfe nehmen will.[15]) Diese Methode hatte *Roberval* gefunden, bevor *Descartes* die Algebra auf die Geometrie anwandte; sie ist implicite in den Betrachtungen der Differentialrechnung enthalten und wird aus diesem Grund nicht in der elementaren Mathematik erwähnt. Wir begnügen uns hier damit, sie in gedrängter Weise auseinanderzusetzen. Diejenigen Leser, welche zahlreiche Anwendungen der Methode kennen zu lernen wünschen, mögen die »Mémoires de l'Académie des Sciences« bis zum Jahre 1699 nachsehen, in welchen die Schriften von *Roberval* zu finden sind.

85. Wenn sich ein Punkt nach dem für ihn gültigen

Bewegungsgesetze beständig nach demselben festen Punkte im Raume hin bewegt, so ist seine Bahn eine gerade Linie. Wird der Punkt aber in jedem Augenblicke [**87**] seiner Bewegung gleichzeitig gegen zwei feste Punkte getrieben, so ist seine Bahn, welche in einigen besonderen Fällen eine gerade Linie sein kann, im Allgemeinen eine krumme Linie. Man findet die Tangente an die Bahncurve, indem man durch den betrachteten Punkt der Bahn zwei gerade Linien nach den beiden festen Punkten zieht, auf diesen in richtigem Sinne Strecken, welche den Geschwindigkeiten in diesen beiden Richtungen proportional sind, von dem Bahnpunkt aus abträgt und dann die Figur zu einem Parallelogramm vervollständigt; zieht man dann die von dem Bahnpunkte ausgehende Diagonale dieses Parallelogramms, so ist dieselbe, da sie die Bewegungsrichtung des erzeugenden Punktes in dem betrachteten Punkte seiner Bahn angiebt, die gesuchte Tangente an die Bahncurve.

86. Wir wollen nur ein einziges Beispiel für diese Construction geben.

(Fig. 50) Ein Faden AMB ist mit seinen Enden in zwei festen Punkten A und B befestigt. Spannt man den Faden mit einem Stifte M und lässt den Stift sich so bewegen, dass der Faden stets gespannt ist, so beschreibt der Stift eine Curve DMC, welche bekanntlich eine Ellipse ist, deren Brennpunkte die beiden festen Punkte A und B sind. Auf Grund der Erzeugungsweise dieser Curve ist es leicht mit Hülfe der *Roberval*'schen Methode eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Da die Länge des Fadens ungeändert bleibt, so wird in jedem Augenblick der Bewegung der Radiusvector AM um dieselbe Strecke verlängert, um welche der andere Radiusvector BM verkürzt wird. Die Geschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punktes in der Richtung AM ist gleich seiner Geschwindigkeit in der Richtung MB. Trägt man daher auf der Geraden MB und auf der Verlängerung von AM von M aus gleiche Strecken

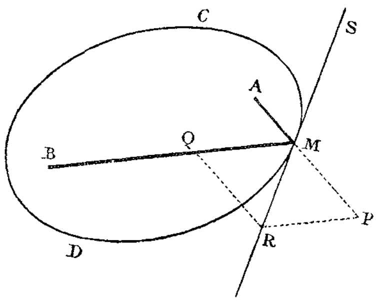

Fig. 50.

$MQ = MP$ ab und vervollständigt das Parallelogramm $MPRQ$, so giebt die Diagonale MR derselben die Bewegungsrichtung des erzeugenden Punktes in dem Punkte M an und ist folglich die Tangente an die Ellipse. Hieraus folgt unmittelbar, dass bei der Ellipse die Tangente den Winkel BMP zwischen dem einen Radiusvector und der Verlängerung des andern halbirt, dass also auch die Winkel AMS und BMR einander gleich sind und folglich die Curve die Eigenschaft besitzt, die von dem einen Brennpunkte ausgehenden Lichtstrahlen nach dem andern zu reflectiren.

Die Methode von *Roberval* lässt sich leicht auf den Fall von drei Dimensionen ausdehnen und zur Construction von Tangenten an doppelt gekrümmte Curven verwenden. Bewegt sich nämlich ein Punkt so im Raume, dass er in jedem Augenblicke nach drei festen Punkten hin getrieben wird, so ist seine Bahncurve, welche in einigen besonderen Fällen eine ebene Curve und sogar [**88**] eine gerade Linie sein kann, im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung. Um die Tangente in einem beliebigen Punkte der Bahn zu erhalten, zieht man durch diesen Punkt drei Gerade nach den drei festen Raumpunkten, trägt auf ihnen in richtigem Sinne Strecken auf, welche den Geschwindigkeiten des Punktes in diesen drei Richtungen proportional sind, und vervollständigt die Figur zu einem Parallelepipedon, dessen durch den Bahnpunkt gehende Diagonale die Tangente an die Bahn in diesem Punkte ist.

87. Wir wollen diese Methode auf einen Fall anwenden, welcher dem vorherbehandelten Falle der Ellipse ähnlich ist. Die nebenstehende Figur (Fig. 51), welche wir dabei benutzen, ist in schiefer Parallelprojection gezeichnet.

Drei feste Punkte A, B, C sind im Raume gegeben. Ein erster Faden AMB ist mit seinen beiden Enden in den Punkten A und B und ein anderer Faden AMC, dessen Länge von der des ersten ganz unabhängig ist, mit seinen beiden Enden in den Punkten A und C befestigt. Wenn sich nun ein Stift M gleichzeitig längs beider Fäden bewegt, sodass dieselben stets gespannt sind, so beschreibt er eine Curve doppelter Krümmung.[16]) Um an diese Curve in dem Punkte M eine Tangente zu construiren, muss man beachten, dass die Strecke, um welche der Radiusvector AM in jedem Augenblicke wächst, gleich der Strecke ist, um welche der Radiusvector MB kürzer wird, da die Länge des ganzen Fadens AMB unveränderlich ist; folglich ist die Geschwindigkeit des Punktes M in der Richtung AM

gleich seiner Geschwindigkeit in der Richtung MB. Da ferner auch die Länge des Fadens AMC constant ist, so ist die Ge-

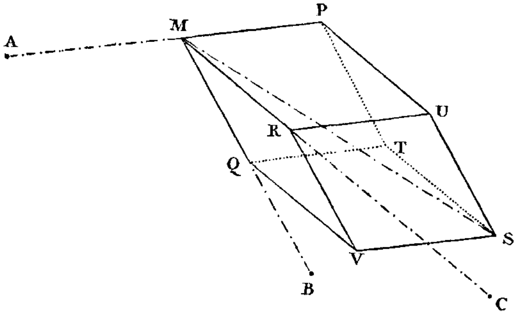

Fig. 51.

schwindigkeit in der Richtung MC auch gleich seiner Geschwindigkeit in der Richtung AM. Wenn man daher auf der Verlängerung des Radiusvector AM und auf den beiden Radiivectoren MB, MC von M aus die gleichen Strecken MP, MQ, MR abträgt und die Figur zu dem Parallelepipedon $MPUSVQRT$ vervollständigt, so ist die Diagonale MS dieses Parallelepipedons die gesuchte Tangente.

Da sich die Methode von *Roberval* auf das Princip der Zusammensetzung von Bewegungen stützt, so kann man, wie leicht ersichtlich ist, in weniger einfachen Fällen, als wie sie unsere Beispiele boten, die bekannten Methoden zur Bestimmung der Resultante von Kräften, welche an einem Punkte angreifen und ihrer Grösse und Richtung nach gegeben sind, zu Hülfe nehmen.

[89]

Vierter Theil.

Anwendung der für die Construction der Schnitte krummer Flächen gegebenen Methode zur Lösung verschiedener Aufgaben.

88. Wir haben in dem Art. 52 [S. 81—84] die Methode gegeben, nach welcher sich die Projectionen des Schnittes zweier der Gestalt und Lage nach bestimmten krummen Flächen construiren lassen, und zwar, ohne uns um die Natur der Aufgaben zu kümmern, welche solche Constructionen nöthig machen können. Die Darlegung dieser Methode für sich würde für die grösste Anzahl der Künste schon ausreichend sein. Denn wenn man z. B. die Künste des Steinschnittes und des Zimmerns in Betracht zieht, so bilden die krummen Flächen, welche sich hier der Betrachtung naturgemäss darbieten und deren Schnitte man oft construiren muss, gewöhnlich den Hauptgegenstand, mit dem man sich zu beschäftigen hat. Die darstellende Geometrie muss einst einen der Hauptzweige der nationalen Erziehung bilden, weil die von ihr gegebenen Methoden die Künstler ebenso nöthig brauchen, wie Lesen, Schreiben und Rechnen; wir halten es deshalb für nützlich, an einigen Beispielen zu zeigen, wie die Analysis durch die darstellende Geometrie in der Lösung einer grossen Anzahl von Aufgaben, welche auf den ersten Blick nicht derartige zu sein scheinen, dass sie auf diese Weise behandelt werden könnten, ersetzt werden kann. Wir beginnen zunächst mit einigen Beispielen, welche nur die Construction ebener Schnitte erfordern, und gehen dann zu solchen über, bei welchen Schnitte krummer Flächen benutzt werden müssen.

89. In der gewöhnlichen elementaren Geometrie ist die erste Aufgabe, welche in hervorragenderer Weise die Schüler interessirt, die Construction des Mittelpunktes des Kreises, welcher durch drei willkürlich in der Ebene angenommene Punkte hindurchgeht. Die Bestimmung dieses Mittelpunktes als Schnittpunkt zweier geraden Linien, deren jede durch den gesuchten Punkt gehen muss, überrascht die Schüler sowohl durch ihre Allgemeinheit, als auch dadurch, dass sie die wirkliche Ausführung der Construction leicht gestattet. Wenn man — was möglich ist — die ganze Geometrie nach diesen beiden Gesichtspunkten

hin behandelte, so würde sie einer grösseren Anzahl von Menschen zusagen und von einem grösseren Kreise gepflegt und ausgeübt werden; [**90**] die Durchschnittsbildung des Volkes würde dadurch auf eine höhere Stufe gebracht und der Fortschritt in der Wissenschaft selbst beschleunigt werden. —

In dem Raume giebt es eine der soeben genannten analoge Aufgabe, an deren Lösung wir jetzt herantreten wollen.

90. **Erste Aufgabe.** (Fig. 52) Man soll den Mittelpunkt und den Radius der Kugel finden, welche durch vier willkürlich im Raume gegebene Punkte geht.

Lösung. Die vier Punkte seien durch ihre horizontalen und verticalen Projectionen gegeben. Dann denkt man sich von einem der vier Punkte nach den drei anderen gerade Linien gezogen, deren horizontale und verticale Projectionen man leicht zeichnen kann. Betrachtet man zunächst die erste der drei geraden Linien, so muss der gesuchte Mittelpunkt offenbar in gleicher Entfernung von ihren beiden Endpunkten und daher in einer Ebene liegen, welche senkrecht zu der Geraden durch ihren Halbirungspunkt geht. Wenn man also die beiden Projectionen der betrachteten Geraden halbirt, wodurch man die Projectionen ihres Halbirungspunktes findet, und die Spuren der Ebene, welche durch diesen Punkt senkrecht zu der Geraden geht, nach Art. 17 [S. 27—28] construirt, so liegt der gesuchte Mittelpunkt in dieser Ebene. Betrachtet man dann die beiden anderen Geraden und führt man für jede von ihnen die gleiche Construction aus, so erhält man schliesslich die Spuren von drei verschiedenen Ebenen, in deren jeder der gesuchte Mittelpunkt liegen muss. Da dieser nun sowohl in der ersten, als in der zweiten Ebene liegt, so muss er auf der Schnittgeraden beider liegen; man construirt also die Projectionen dieser Schnittgeraden und erhält dadurch in jeder Projectionsebene eine Gerade, auf welcher die gleichnamige Projection des Kugelmittelpunktes liegt. Aus dem gleichen Grunde bestimmen die Projectionen der Schnittgeraden der ersten und dritten Ebene in beiden Projectionsebenen zwei Geraden, welche durch die gleichnamigen Projectionen des Kugelmittelpunktes gehen. Die beiden Geraden in jeder Projectionsebene bestimmen in ihrem Schnittpunkte die gleichnamige Projection des gesuchten Kugelmittelpunktes.

Benutzt man noch die Schnittgerade der zweiten und dritten Ebene, so hat man eine dritte Gerade, welche durch den

Kugelmittelpunkt geht und auf deren Projectionen die Projectionen desselben ebenfalls liegen; dies bietet ein Hülfsmittel dar, um die Richtigkeit der Zeichnung zu prüfen.

Zieht man durch die gleichnamigen Projectionen eines der gegebenen Punkte [**91**] und des Kugelmittelpunktes gerade Linien, so sind sie die Projectionen des Kugelradius. Aus seiner horizontalen und verticalen Projection kann man aber leicht seine wahre Länge construiren.

91. Kann man die Lage der Projectionsebenen frei wählen, so lässt sich die eben auseinandergesetzte Construction bedeutend vereinfachen. Nimmt man nämlich an, dass die erste Projectionsebene durch drei der gegebenen Punkte A, B, C geht, so fallen dieselben mit ihren ersten Projectionen zusammen;

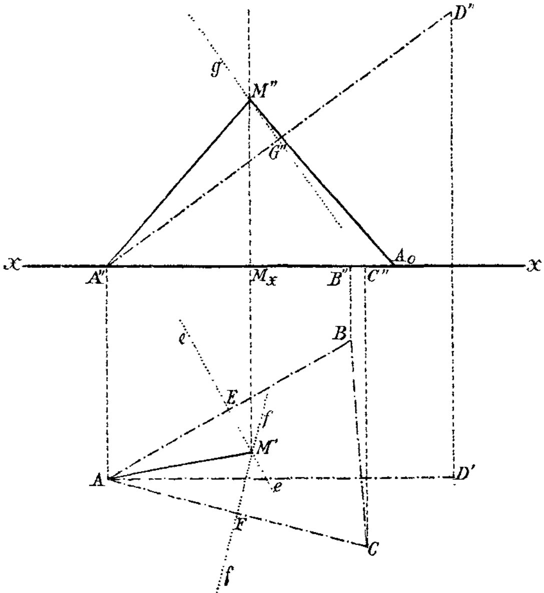

Fig. 52.

die horizontale Projection des vierten Punktes D sei der Punkt D'. Nachdem dann die Geraden AB, AC, AD' gezogen sind, wählt man die zweite Projectionsebene und folglich auch die Projectionsaxe x parallel zu der Geraden AD'. Die verticalen

Projectionen der drei ersten Punkte sind dann die Fusspunkte A'', B'', C'' der von den drei Punkten A, B, C auf die Axe x gefällten Lothe; die verticale Projection des vierten Punktes D sei gegeben durch den Punkt D'', welcher auf der durch den Punkt D' senkrecht zur Axe x gezogenen Geraden liegen muss. Da die Gerade AB in der horizontalen Projectionsebene liegt, so ist jede zu ihr senkrechte Ebene vertical gestellt und ihre horizontale Projection ist daher eine zu AB senkrechte Gerade. Dasselbe gilt für die Gerade AC. Zieht man also durch den Mittelpunkt E von AB eine zu ihr senkrechte Gerade e, so ist sie die horizontale Projection einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden verticalen Ebene, und folglich liegt die horizontale Projection des Kugelmittelpunktes auf ihr. Ebenso ist die durch den Mittelpunkt F von AC zu ihr senkrecht gezogene Gerade f die horizontale Projection einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden verticalen Ebene, und es muss daher die horizontale Projection desselben auch auf der Geraden f liegen. Folglich ist der Schnittpunkt M' der beiden Geraden e und f die horizontale Projection des gesuchten Kugelmittelpunktes, dessen verticale Projection auf der durch den Punkt M' senkrecht zur Axe x gezogenen Geraden liegen muss.

Da nun die von dem Punkte A nach dem vierten Punkte D gezogene Gerade parallel zu ihrer zweiten Projection ist, so steht jede zu AD senkrechte Ebene auch auf der zweiten Projectionsebene senkrecht, und ihre zweite Projection ist mithin eine zu $A''D''$ senkrechte Gerade. Man zieht also durch den Mittelpunkt G'' von $A''D''$ eine Senkrechte g zu ihr, welche die verticale Projection dieser dritten Hülfsebene durch den Kugelmittelpunkt ist, und [**92**] deren Schnittpunkt M'' mit der verticalen Geraden $M'M_x$ folglich die verticale Projection des gesuchten Kugelmittelpunktes bestimmt.

Zieht man schliesslich die Geraden AM', $A''M''$, so sind sie die beiden Projectionen des Kugelradius AM; trägt man daher die Strecke AM' auf der Axe x von M_x bis A_0 ab, so giebt die Strecke A_0M'' die wahre Länge des Kugelradius.

92. **Zweite Aufgabe.** (Fig. 53) Es soll eine Kugel in eine gegebene dreiseitige Pyramide einbeschrieben, d. h. die Lage ihres Mittelpunktes und die Länge ihres Radius construirt werden.

Lösung. Da die Kugel die vier Seitenflächen der Pyramide berühren muss, so halbirt offenbar jede der sechs Ebenen, welche man durch den Kugelmittelpunkt und durch je eine Kante der Pyramide legen kann, den an der betreffenden Kante liegenden Flächenwinkel. Wählt man also von den sechs Kanten drei, welche nicht alle durch dieselbe Ecke gehen, und legt man durch jede derselben eine Ebene, welche den an dieser Kante liegenden Flächenwinkel halbirt, so hat man drei Ebenen, in deren jeder der gesuchte Mittelpunkt liegt und deren gemeinsamer Schnittpunkt er daher sein muss.

93. Um die Construction zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die horizontale Projectionsebene mit einer Seitenfläche der Pyramide zusammenfällt.

Es seien A, B, C, D' die horizontalen Projectionen und A'', B'', C'', D'' die verticalen Projectionen der vier Pyramidenecken. Durch die Spitze D derselben legt man drei Ebenen senkrecht zu den Kanten der Grundfläche ABC; da diese Ebenen vertical stehen, so sind ihre horizontalen Projectionen die Geraden $D'E$, $D'F$, $D'G$, welche durch den Punkt D' senkrecht zu den drei Kanten AB, BC, CA gezogen sind. Jede dieser verticalen Hülfsebenen schneidet die Grundfläche der Pyramide und die der betreffenden Kante anliegende Seitenfläche in zwei geraden Linien, welche miteinander einen Winkel gleich dem Flächenwinkel zwischen dieser Seitenfläche und der Grundfläche einschliessen. Trägt man also auf der Axe x die Strecken $D'E$, $D'F$, $D'G$ von dem Schnittpunkte D_x der verticalen Geraden $D'D''$ bis zu den Punkten E_0, F_0, G_0 ab [**93**] und zieht die Geraden $D''E_0$, $D''F_0$, $D''G_0$, so schliessen diese letzteren mit der Axe x Winkel ein, welche gleich den Neigungswinkeln der drei Seitenflächen gegen die Grundfläche sind. Halbirt man diese Winkel durch die Geraden e, f, g, so sind die von ihnen mit der Axe x eingeschlossenen Winkel gleich den Neigungswinkeln der Seitenflächen einer zweiten Pyramide, welche über derselben Grundfläche ABC construirt ist und deren Spitze in dem gesuchten Kugelmittelpunkte M liegt.

Um nun die Spitze dieser zweiten Pyramide zu finden, schneidet man dieselbe durch eine in beliebiger Höhe gelegte horizontale Ebene, deren verticale Projection die willkürlich gezogene horizontale Gerade $N''O''$ ist. Diese Gerade schneidet die Geraden e, f, g in den Punkten H_0, J_0, K_0, von denen man die Lothe H_0H_0', J_0J_0', K_0K_0' auf die Axe x fällt. Trägt man dann die drei Abstände E_0H_0', F_0J_0', G_0K_0' bez. auf den drei von dem Punkte D' auf die Kanten der Grundfläche gefällten Lothen von E bis H', von F bis J' und von

G bis K' ab, so erhält man in H', J', K' die horizontalen

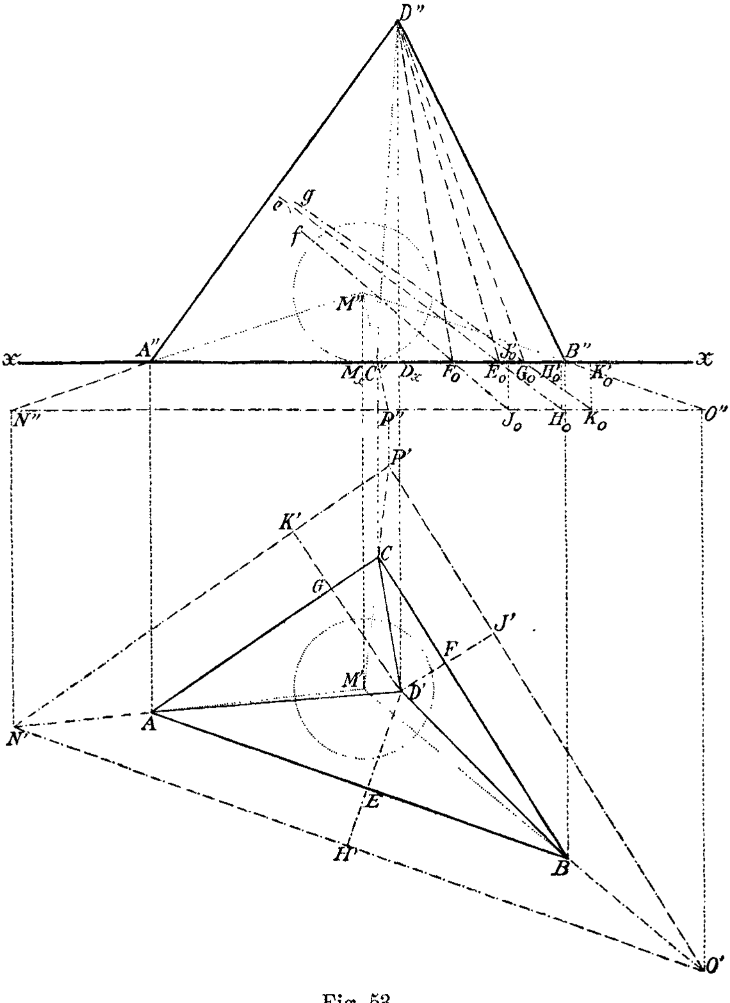

Fig. 53.

Projectionen von drei Punkten, welche auf den Schnittgeraden der horizontalen Hülfsebene mit den drei Seitenflächen der zweiten Pyramide liegen; die durch diese Punkte zu den entsprechenden Kanten der Grundfläche ABC gezogenen Parallelen $N'O'$, $O'P'$, $P'N'$ sind dann die ersten Projectionen dieser Schnittgeraden selbst. Die Parallelen $N'O'$, $O'P'$, $P'N'$ schneiden sich zu je zweien in den Punkten O', P', N', welche die Projectionen von Punkten der drei nicht in der Grundfläche liegenden Kanten der zweiten Pyramide sind; wenn man dann noch die Geraden $N'A$, $O'B$, $P'C$ zieht, so sind sie die Projectionen dieser Kanten selbst. Der Punkt M', in welchem sich die Geraden $N'A$, $O'B$, $P'C$ schneiden, ist die horizontale Projection der Spitze M der zweiten Pyramide und mithin auch diejenige des gesuchten Kugelmittelpunktes.

Um die verticale Projection M'' desselben Punktes zu erhalten, zieht man zuerst durch M' eine Senkrechte zur Axe x, $M'M_x$, auf welcher der Punkt M'' liegen muss. Dann projicirt man die drei Punkte N', O', P' in die Punkte N'', O'', P'' der horizontalen Hülfsgeraden und zieht die Geraden $N''A''$, $O''B''$, $P''C''$, welche die verticalen Projectionen der drei Kanten der zweiten Pyramide sind. Der Punkt M'', in welchem sich alle drei schneiden müssen und welcher gleichzeitig auf der Verlängerung der Verticalen $M'M_x$ liegen muss, ist die verticale Projection des gesuchten Kugelmittelpunktes.

Die verticale Strecke M_xM'' schliesslich ist gleich dem Radius der eingeschriebenen Kugel, [**94**] und die Punkte M', M_x sind die beiden Projectionen des Berührungspunktes der Kugel und der Pyramidengrundfläche ABC.

94. Wir haben in dem Artikel 3 gezeigt, wie man die Lage eines Punktes bestimmen kann, dessen Abstände von drei der Lage nach bekannten Punkten gegeben sind. Wir wollen jetzt im Anschlusse an jene früheren Auseinandersetzungen die Construction dieses Punktes geben.

Dritte Aufgabe. (Fig. 54) Man soll die Projectionen eines Punktes, dessen Entfernungen von drei im Raume beliebig gegebenen Punkten bekannt sind, construiren.

Lösung. Die Projectionsebenen mögen, wie wir voraussetzen, so gewählt sein, dass die erste Projectionsebene durch die drei gegebenen Punkte hindurchgeht und die zweite Projectionsebene senkrecht auf der Verbindungsgeraden zweier dieser Punkte steht.

Es seien A, B, C die drei gegebenen Punkte und a, b, c die bezüglichen Entfernungen des gesuchten Punktes von ihnen.

Man verbindet zwei der gegebenen Punkte, z. B. A und B durch eine Gerade und zieht durch einen beliebigen ihrer Punkte

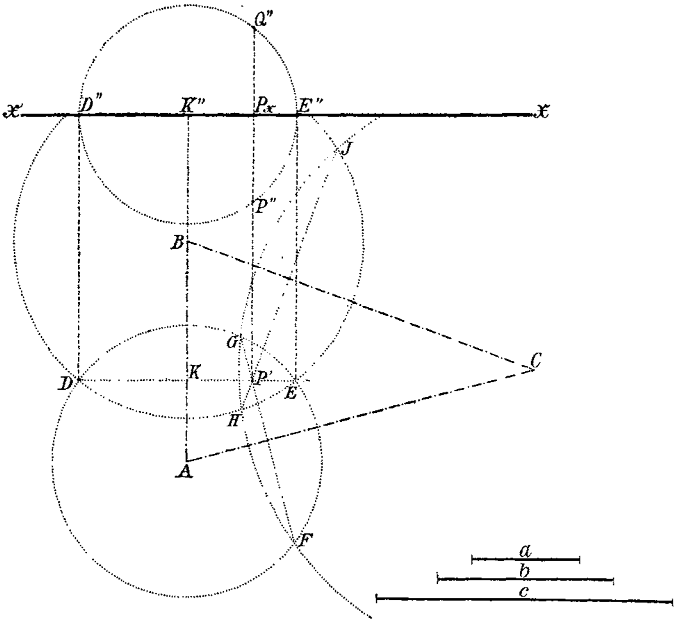

Fig. 54.

senkrecht zu ihr die Axe x, welche die Lage der verticalen Projectionsebene bestimmt. Dann beschreibt man um die Punkte A, B, C als Mittelpunkte bez. mit den Strecken a, b, c als Radien Kreise, welche sich zu je zweien in den Punkten D, E; F, G; H, J schneiden. Zieht man die Geraden DE, FG, HJ, so sind sie die horizontalen Projectionen der drei Kreise, in welchen sich je zwei Kugeln schneiden; der einzige Punkt P', in welchem sich die drei Geraden schneiden, ist dann offenbar die horizontale Projection des gesuchten Punktes.

Um die verticale Projection dieses Punktes zu erhalten, zieht man zunächst senkrecht zur Axe x die Gerade $P' P_x$, auf welcher die gesuchte Projection liegen muss. Ferner muss man beachten, dass der Kreis, dessen horizontale Projection die Gerade DE ist, der zweiten Projectionsebene parallel ist, und dass also seine verticale Projection ein Kreis mit gleichem Radius sein muss. Projicirt sich die Gerade AB in den Punkt K'' auf der Axe x, so braucht man daher nur mit der Strecke KD, welche gleich dem halben Durchmesser DE ist, als Radius einen Kreis um K'' als Mittelpunkt zu beschreiben, um die verticale Projection des betrachteten Kreises zu erhalten. Dieser Kreis schneidet die Gerade $P'P_x$, bez. deren Verlängerung in den Punkten P'', Q'', von denen jeder die verticale Projection eines der gestellten Aufgabe genügenden Punktes P, bez. Q ist.

Es müssen weitere Bedingungen der gestellten Aufgabe hinzugefügt werden, [**95**] um zu entscheiden, ob beide Punkte P und Q brauchbar sind, bez. welcher von beiden Punkten, wenn nur einer derselben nach dem Wortlaute der Aufgabe brauchbar sein kann, genommen werden darf.

Der Leser mag die Aufgabe lösen, die Projectionen eines Punktes zu construiren, dessen Entfernungen von drei im Raume beliebig gegebenen Geraden bekannt sind.

95. **Vierte Aufgabe.** (Fig. 55) Ein Ingenieur bereist ein Gebirgsland, sei es um nur seine Bodengestalt zu studiren, sei es um den Plan für Unternehmungen, welche von der Bodengestalt abhängig sind, zu entwerfen. Er ist mit einer topographischen Karte versehen, in welcher nicht nur die horizontalen Projectionen der verschiedenen Punkte des Terrains genau verzeichnet sind, sondern welche auch noch die Erhebungen aller dieser Punkte über jene horizontale Projectionsebene (Niveaufläche) durch eine neben jeden Punkt geschriebene Zahl, die sogenannte Kote dieses Punktes, angiebt. Nun gelangt der Ingenieur an einen bemerkenswerthen Punkt, welcher — entweder weil er vergessen worden war oder erst nach Vollendung der Karte bemerkenswerth geworden ist — nicht in der Karte sich verzeichnet findet. Der Ingenieur führt nur ein mit einem Lothe versehenes Graphometer bei sich.

Man verlangt von dem Ingenieur, dass er, ohne seinen Standort zu verlassen, die Lage desselben auf der Karte einträgt und seine Kote, d. h. seine Erhebung über die Niveaufläche bestimmt.[17])

Lösungsverfahren. Der Ingenieur wählt sich unter den auf der Karte genau verzeichneten Terrainpunkten drei aus, welche seinem Standorte am nächsten liegen und von denen wenigstens zwei nicht dieselbe Höhe wie dieser haben. Dann misst er die Winkel, welche die Richtung des Lothes mit den nach diesen drei Punkten gerichteten Visirlinien einschliesst und kann nach Ausführung dieser Messung bereits die ihm gestellte Aufgabe lösen.

Die drei beobachteten Punkte, deren horizontale Projectionen die Karte unmittelbar giebt, während man ihre verticalen Projectionen mit Hülfe der Koten construiren kann, mögen mit A, B, C bezeichnet werden. Da der Winkel, welchen die Visirlinie nach dem Punkte A mit der Lothrichtung des Standortes bildet, bekannt ist, so kennt man auch den Winkel, welchen dieselbe Visirlinie mit der nach oben verlängerten Lothrichtung in dem Punkte A einschliesst; denn wenn man die Krümmung der Erde vernachlässigt, was in dem vorliegenden Falle statthaft ist, **[96]** so sind diese beiden Winkel als Wechselwinkel an Parallelen einander gleich. Denkt man sich nun einen geraden Kreiskegel mit vertical gerichteter Axe construirt, dessen Spitze in dem Punkte A liegt und dessen geradlinige Erzeugenden mit der Axe einen dem gemessenen gleichen Winkel einschliessen — hierdurch ist die Fläche vollständig bestimmt —, so geht der Kegelmantel durch die nach dem Punkte A gerichtete Visirlinie und folglich auch durch den Standort des Beobachters. Mithin ist eine erste krumme Fläche gefunden, auf welcher der gesuchte Punkt liegt. Stellt man dieselbe Ueberlegung für die beiden anderen Punkte B und C an, so erhält man noch zwei andere gerade Kreiskegel, deren Spitzen in diesen Punkten liegen, deren Axen vertical stehen und deren Seitenlinien mit den Axen Winkel einschliessen, welche bez. gleich den beiden anderen gemessenen Winkeln sind. Der gesuchte Punkt ist nun ebenfalls auf jeder dieser beiden Kegelflächen und folglich, da er gleichzeitig auf allen drei Kegeln liegen muss, auf ihrem gemeinsamen Schnitte gelegen. Es handelt sich mithin nur noch darum, die beiden Projectionen der Schnitte je zweier dieser Kegelflächen zu construiren; die Schnittpunkte der gleichnamigen Projectionen bestimmen dann die horizontale und verticale Projection des gesuchten Punktes, folglich auch seine Lage auf der Karte und seine Höhe über oder unter den beobachteten Punkten, aus welcher letzteren sich seine Kote ergiebt.

Diese Lösung wird im Allgemeinen acht Punkte liefern, welche der Aufgabe genügen. Es ist aber für den Beobachter leicht, denjenigen Punkt, welcher seinem Standorte entspricht, herauszufinden. Zunächst kann er sich immer vergewissern, ob sein Standort über oder unter der Ebene, welche durch die drei beobachteten Punkte A, B, C hindurchgeht, liegt. Angenommen der Standort liege über dieser Ebene, so kann er von den Schnittcurven der Kegel die Zweige, welche unter dieser Ebene liegen, unberücksichtigt lassen. Dadurch reducirt sich die Anzahl der möglichen Punkte auf vier. Das Gleiche ist der Fall, wenn der Standort unterhalb der Ebene ABC liegt. Unter den übrigen vier Punkten — wenn sie überhaupt sämmtlich vorhanden sind — kann der Beobachter dann aber leicht denjenigen herausfinden, dessen Lage in Bezug auf die drei Kegelspitzen dieselbe ist, wie die Lage seines Standortes in Bezug auf die entsprechenden drei Terrainpunkte.

96. **Construction.** (Fig. 55) Es seien A, B', C' die der Karte entnommenen horizontalen Projectionen der drei [**97**] beobachteten Punkte und A'', B'', C'' ihre verticalen Projectionen, welche man dadurch erhält, dass man auf den verticalen Geraden $B'B_x$, $C'C_x$ von der durch den Punkt A'' gehenden horizontalen Geraden x aus die Koten von B, C vermindert um die Kote von A bis B'', C'' abträgt; α, β, γ seien die Winkel, welche die Visirlinien von dem Standorte nach den drei beobachteten Punkten A, B, C mit der verticalen Richtung einschliessen.

Verlängert man die drei Geraden AA'', $B'B''$, $C'C''$ nach oben, so stellen sie die zweiten Projectionen der Axen der drei Kegel dar. Durch die drei Punkte A'', B'', C'' zieht man dann die Geraden r, s, t, welche mit den Verticalen in den drei Punkten bez. die Winkel α, β, γ einschliessen; die Geraden r, s, t sind die verticalen Projectionen je einer der beiden äussersten Seitenlinien der drei geraden Kreiskegel.

Dann zieht man in der verticalen Projectionsebene beliebig viele horizontale Gerade p, betrachtet sie als die Projectionen von gleich vielen horizontalen Ebenen Π und führt für jede von ihnen die Construction durch, welche wir jetzt für die mit $\hat{p}$ bezeichnete dieser Geraden beschreiben wollen.

Die Gerade $\hat{p}$ schneidet die Projectionen der Axen der drei Kegel in den Punkten D'', H'', M'', welche die verticalen Projectionen der Mittelpunkte der Kreise sind, in denen die zugehörige horizontale Ebene $\hat{\Pi}$ die drei Kegelmäntel schneidet, und die äussersten Seitenlinien r, s, t in den Punkten E'', J'', N'', sodass die Strecken $D''E''$, $H''J''$, $M''N''$ die Radien dieser Kreise sind. Um die Punkte A, B', C' als Mittelpunkte beschreibt man bez. mit diesen Radien Kreise, welche

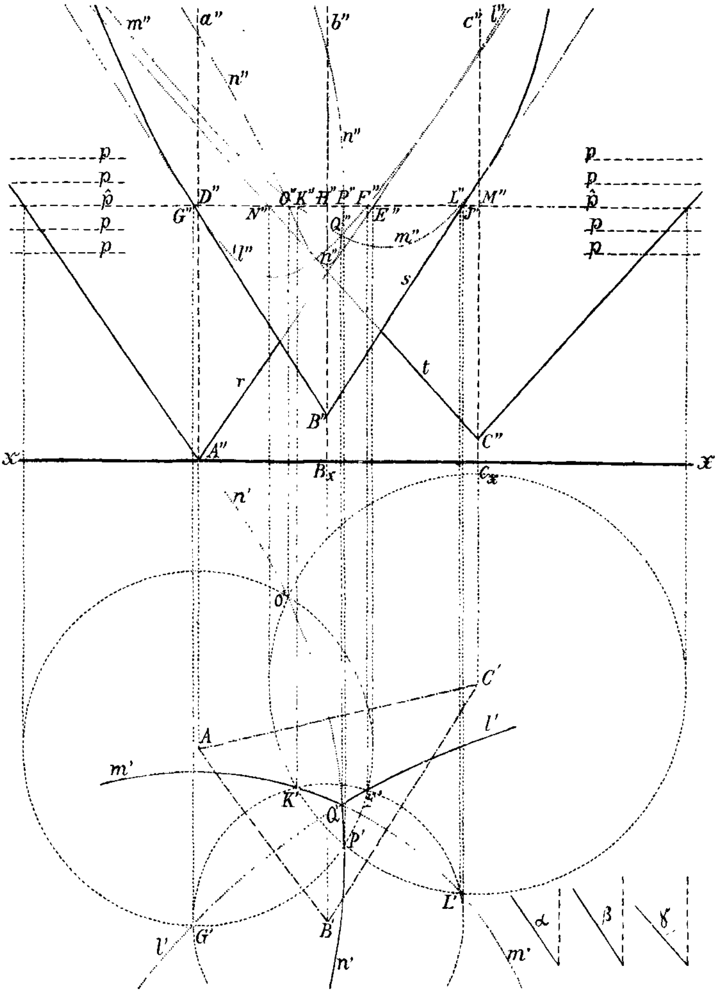

Fig. 55.

die horizontalen Projectionen der von der Ebene $\hat{\Pi}$ aus den drei Kegeln ausgeschnittenen Kreise sind. Die eben construirten Kreise schneiden sich zu je zweien in den Punkten F', G'; K', L'; O', P', welche die horizontalen Projectionen von ebenso vielen Schnittpunkten der Schnitte je zweier der drei Kegel ergeben. Projicirt man diese Punkte in die Punkte F'', G''; K'', L''; O'', P'' auf der Geraden $\hat{p}$, so erhält man die verticalen Projectionen derselben Schnittpunkte.

Verfährt man in gleicher Weise für die anderen Geraden p, so findet man für jede derselben andere Punkte F', G'; K', L'; O', P' und F'', G''; K'', L''; O'', P'' in der horizontalen und verticalen Projectionsebene. Darauf zieht man durch alle Punkte F', G' eine Curve l', welche die horizontale Projection [**98**] des Schnittes l des ersten und zweiten Kegels ist, ferner durch alle Punkte K', L' eine zweite Curve m', welche die horizontale Projection des Schnittes m des zweiten und dritten Kegels ist, und endlich durch alle Punkte O', P' eine dritte Curve n', welche die horizontale Projection des Schnittes n des dritten und ersten Kegels sind. Die Punkte Q', in denen sich alle drei Curven schneiden, sind die horizontalen Projectionen von Punkten Q, welche der gestellten Aufgabe genügen.

Ebenso zieht man in der verticalen Projectionsebene durch alle Punkte F'', G'' eine Curve l'', durch alle Punkte K'', L'' eine zweite Curve m'' und endlich durch alle Punkte O'', P'' eine dritte Curve n'', welche Curven die verticalen Projectionen der drei Schnittcurven l, m, n sind. Die Punkte Q'', in denen sich die verticalen Projectionen l'', m'', n'' schneiden, bestimmen die verticalen Projectionen aller Punkte Q, welche den Forderungen der gestellten Aufgabe entsprechen.

Nachdem der Beobachter unter allen Punkten Q denjenigen herausgefunden hat, welcher seinem Standorte entspricht, giebt ihm die zugehörige horizontale Projection Q' unmittelbar die Lage seines Standortes auf der Karte an. Die Höhe der zugehörigen verticalen Projection Q'' über der Axe x bestimmt die Erhebung des Standortes über den beobachteten Punkt A und damit also die Kote des Standortes.

97. Wir haben im Vorstehenden die Projectionen der drei Schnitte l, m, n construirt, während zwei schon ausgereicht hätten. Es empfiehlt sich aber, immer in dieser Weise zu verfahren, weil die Projectionen von zwei Curven doppelter Krümmung sich in Punkten schneiden können, welche nicht Punkten des Schnittes entsprechen; um die Projectionen von Punkten des Schnittes zu bekommen, muss man nur solche Zweige beider Curven betrachten, welche auf derselben Schale einer der

Flächen liegen. Dies erfordert aber ein mühsames Aufpassen, von welchem man fast stets befreit ist, wenn man alle drei Schnittcurven construirt; die Punkte, in welchen sich alle drei Curven schneiden, sind wirkliche Schnittpunkte der drei Flächen.

98. **Fünfte Aufgabe.** (Fig. 56 u. 57) Die Sachlage ist dieselbe wie bei der vorigen Aufgabe bis auf den einzigen Umstand, dass das Winkelmessinstrument [**99**] nicht mit einem Lothe versehen ist, und dass infolge dessen die Winkel der Visirlinien mit der Lothrichtung nicht gemessen werden können. Trotzdem aber soll der Ingenieur, ohne seinen Standort zu verlassen, die Lage desselben auf der Karte und seine zugehörige Kote, d. h. seine Höhe über der Niveaufläche, auf welche alle Punkte der Karte bezogen sind, bestimmen.

Lösungsverfahren. Nachdem der Ingenieur drei auf der Karte genau verzeichnete benachbarte Terrainpunkte, welche mit seinem Standorte nicht in derselben Ebene liegen, ausgewählt hat, misst er die drei Winkel, welche die Visirlinien nach diesen drei Punkten miteinander bilden, und ist durch diese Messung allein in den Stand gesetzt, die Aufgabe zu lösen.

Bezeichnet man die drei beobachteten Punkte wieder mit A, B, C und denkt man sich die Geraden AB, BC, CA gezogen, so kann der Ingenieur die horizontalen Projectionen dieser drei Strecken unmittelbar aus der Karte entnehmen, während er aus den Koten der drei Punkte die Höhendifferenzen der Endpunkte dieser drei Strecken berechnen kann; folglich sind die wahren Längen der drei Strecken bekannt.

(Fig. 56) Dann construirt man in einer beliebigen durch die Gerade AB gehenden Ebene ein rechtwinkliges Dreieck BAD, dessen eine Kathete AB ist, und in welchem der Winkel in B gleich dem Complement des Winkels λ, unter welchem die Seite AB gesehen wurde, also der Winkel in D gleich dem Winkel λ selbst ist. Der durch die drei Punkte A, B, D gehende Kreis hat die Eigenschaft, dass der Winkel, welchen zwei von einem beliebigen Punkte E des Kreisbogens ADB nach den Punkten A und B gezogene Geraden AD und BD miteinander bilden, ebenfalls gleich dem gemessenen Winkel λ ist. Lässt man nun den Kreisbogen ADB sich um die Gerade AB als Axe drehen, so erzeugt er eine Umdrehungsfläche, deren sämmtliche Punkte dieselbe Eigenschaft haben, wie die Punkte des Kreisbogens

ADB; d. h. wenn man von einem beliebigen Punkte dieser Umdrehungsfläche nach den Punkten A und B zwei gerade Linien zieht, so schliessen sie den Winkel λ miteinander ein.

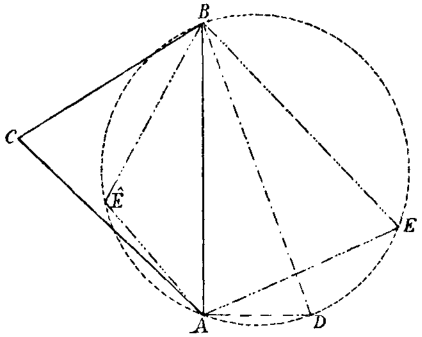

Fig. 56.

Offenbar sind aber die Punkte dieser Umdrehungsfläche auch die einzigen Punkte des Raumes, welche diese Eigenschaft besitzen, und folglich muss diese Fläche durch den zu bestimmenden Standpunkt hindurchgehen. Stellt man die gleiche Betrachtung für die beiden anderen Geraden BC und CA an, so erhält man noch zwei Umdrehungsflächen, auf deren jeder der Standort ebenfalls liegen muss. Derselbe ist daher [**100**] gleichzeitig auf drei Umdrehungsflächen, welche ihrer Gestalt und Lage nach völlig bestimmt sind, gelegen. Wenn man also die horizontalen und verticalen Projectionen der Schnitte je zweier der drei Umdrehungsflächen construirt, so sind die Punkte, in denen sich alle drei Projectionen schneiden, die Projectionen des Punktes, welcher den Forderungen der gestellten Aufgabe genügt.

99. Wenn man diese Aufgabe analytisch behandelt, so führt sie im Allgemeinen zu einer Gleichung vom 64. Grade. Denn jede der drei Umdrehungsflächen hat vier verschiedene Schalen [18]); betrachtet man z. B. die erste Fläche, so werden zwei Schalen von dem Bogen ADB, zwei andere von dem Bogen $A\hat{E}B$ erzeugt. Da jede Schale der ersten Umdrehungsfläche von jeder Schale der zweiten geschnitten werden kann, so ergeben sich daraus im Allgemeinen für die Schnittcurven sechzehn Zweige; jeder dieser sechzehn Zweige kann wieder von jeder der vier Schalen der dritten Umdrehungsfläche geschnitten werden, wodurch sich vierundsechzig Schnittpunkte aller drei Umdrehungsflächen ergeben können. Aber nicht alle diese Punkte genügen der Aufgabe. Denn zieht man von irgend einem Punkte $\hat{E}$ des Bogens $A\hat{E}B$ die beiden Geraden nach den Endpunkten der Strecke AB, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel

$A\hat{E}B$ nicht gleich dem gemessenen Winkel λ, sondern gleich seinem Supplementwinkel. Die von dem Bogen $A\hat{E}B$ erzeugten zwei Schalen der ersten Umdrehungsfläche und die analogen Schalen der beiden anderen Umdrehungsflächen können daher zur Lösung der Aufgabe nicht benutzt werden, und alle diejenigen der gefundenen vierundsechzig Schnittpunkte, welche auf einer dieser Schalen liegen, genügen folglich der Aufgabe nicht.

Bei der Lösung mit Hülfe der darstellenden Geometrie kann man also den Bogen $A\hat{E}B$ und die entsprechenden Bogen der beiden andern Kreise von vornherein ausser Betracht lassen. Dann hat jede der Umdrehungsflächen nur zwei Schalen, und die Anzahl der allen drei Flächen gemeinsamen Schnittpunkte reducirt sich auf acht. Von diesen acht Punkten liegen vier auf der einen Seite der Ebene, welche durch die drei Umdrehungsaxen bestimmt ist, und vier auf der anderen Seite derselben. Da der Beobachter nun leicht feststellen kann, auf welcher Seite dieser Ebene sein Standort liegt, so braucht er die Schnittpunkte, welche auf der entgegengesetzten Seite der Ebene liegen, überhaupt nicht zu construiren, und folglich reducirt sich die Zahl der Schnittpunkte, welche er gebrauchen kann, auf vier. Unter diesen vier Punkten — wenn sie überhaupt sämmtlich existiren — erkennt er aber dann leicht denjenigen, welcher in Bezug auf die drei Punkte A, B, C ebenso liegt, [**101**] wie sein Standort in Bezug auf die drei entsprechenden Terrainpunkte.

100. **Construction.** Die Lage der beiden Projectionsebenen wählt man so, dass die erste Projectionsebene durch die drei beobachteten Punkte geht und die zweite Projectionsebene senkrecht auf der Verbindungsgeraden zweier dieser Punkte steht. Es sei also ABC das von den drei beobachteten Punkten gebildete Dreieck in seiner wahren Gestalt; ferner seien λ, μ, ν die drei gemessenen Winkel.

Dann zieht man senkrecht zu der Geraden AB durch einen beliebigen Punkt derselben die Gerade x, welche die Projectionsaxe sein soll und also die Lage der zweiten Projectionsebene bestimmt, und construirt, wie in Art. 98 [S. 135—136] angegeben ist, die erzeugenden Kreisbogen AEB, BJC, CLA der drei Umdrehungsflächen, deren Axen die Dreiecksseiten AB, BC, CA sind. Um den Punkt A als Mittelpunkt beschreibt man darauf beliebig viele concentrische Kreise und führt für jeden von ihnen die im Folgenden für einen solchen Kreis

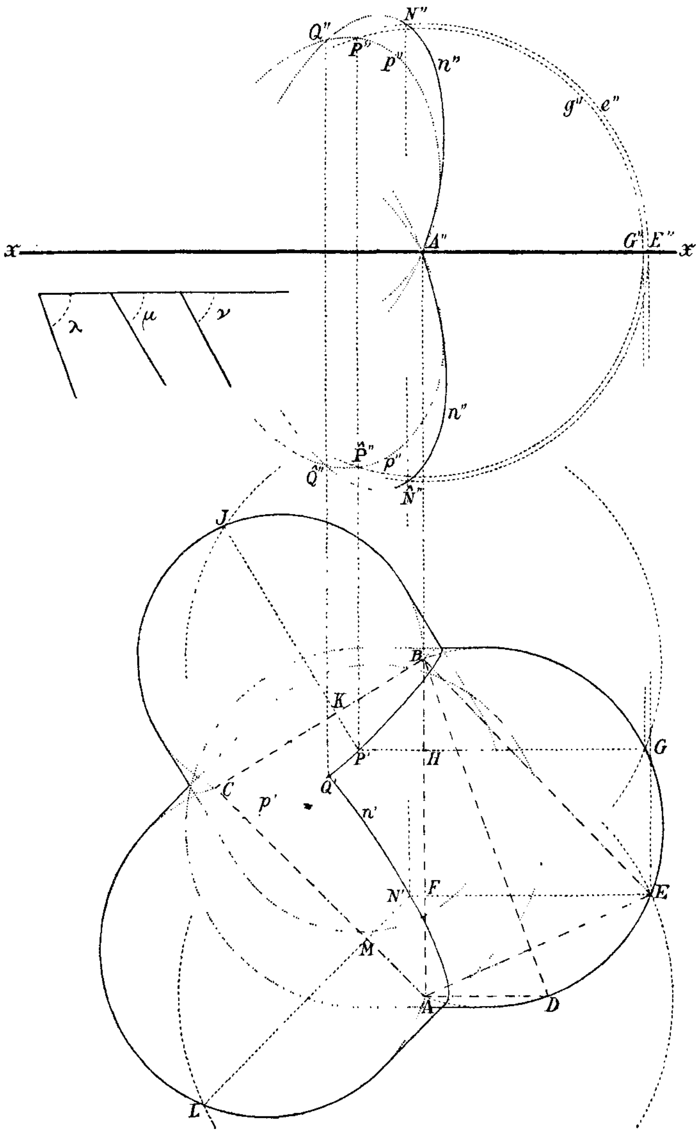

Fig. 57.

angegebene Construction durch. Von den Punkten E und L, in welchen dieser Kreis die beiden erzeugenden Kreise, deren Axen in dem Punkte A zusammenstossen, schneidet, fällt man die Lothe EF und LM auf die zugehörigen Axen; beide Lothe schneiden sich in einem Punkte N', welcher die horizontale Projection eines dem Schnitte der beiden Umdrehungsflächen angehörigen Punktes N ist. Jeder der concentrischen Kreise bestimmt einen solchen Punkt N', und die durch alle diese Punkte N' gehende Curve n' ist die horizontale Projection des Schnittes n der beiden Umdrehungsflächen mit den Axen AB und AC. Nachdem man noch die zweite Projection A'' der Axe AB bestimmt hat, beschreibt man um den Punkt A'' als Mittelpunkt mit dem Radius EF einen Kreisbogen e'', auf welchem die zweite Projection N'' des Punktes N (und zwar auf der durch N' gehenden Verticalen) liegen muss. In gleicher Weise construirt man für alle übrigen Punkte der Curve n' die zugehörigen zweiten Projectionen und zieht durch dieselben die Curve n'', welche dann die zweite Projection des Schnittes n ist.

Dieselbe Construction führt man ferner für die beiden Umdrehungsflächen, deren Axen AB und BC sind, aus. Man beschreibt also um den Schnittpunkt B beider Axen als Mittelpunkt beliebig viele concentrische Kreise, welche die beiden erzeugenden Kreise in Punkten G, J schneiden, und fällt von diesen Punkten die Lothe GH und JK auf die entsprechenden Axen; diese Lothe schneiden sich in Punkten P', und die durch alle so erhaltenen Punkte P' gezogene Curve p' ist die horizontale Projection des Schnittes p der ersten und dritten Umdrehungsfläche. [**102**] Beschreibt man schliesslich um den Punkt A'' als Mittelpunkt mit den Radien GH Kreise g'' und projicirt auf diese alle Punkte P'', so erhält man die zweiten Projectionen P'' aller Schnittpunkte P, und die durch sie gezogene Curve p'' ist die zweite Projection des Schnittes p.

Die Punkte Q', in welchen sich die horizontalen Projectionen n' und p' der beiden Schnitte n und p schneiden, sind die horizontalen und die Punkte Q'', in welchen sich die zugehörigen verticalen Projectionen n'' und p'' schneiden, sind die verticalen Projectionen der Punkte, welche den von der Aufgabe gestellten Forderungen genügen.

Die so gefundenen Projectionen geben weder unmittelbar die Lage des Standortes auf der Karte, noch seine Höhe an, weil die horizontale Projectionsebene nicht mit der Niveauebene, auf welche die Karte bezogen ist, zusammenfällt; es bietet aber keine Schwierigkeiten, aus den gefundenen Projectionen die wirkliche Lage des Standortes auf der Karte und seine Kote zu bestimmen.

101. **Sechste Aufgabe.** Ein Feldherr, welcher mit der von ihm befehligten Armee dem Feinde gegenübersteht, besitzt keine Karte des von diesem besetzten Gebietes; er bedarf aber einer solchen Karte, um für einen beabsichtigten Angriff den Plan entwerfen zu können. Da er einen Fesselballon zu seiner Verfügung hat, so befiehlt er einem seiner Ingenieure mit demselben aufzusteigen und alle nöthigen Messungen auszuführen, um eine Karte herstellen und ein annähernd richtiges Nivellement geben zu können. Er hat jedoch Grund zu glauben, dass der Feind seine Absicht erkennt, wenn der Luftballon seine verticale Aufsteigungslinie verlässt, und erlaubt deshalb dem Ingenieur nur, mit dem Luftballon in verschiedene Höhen, wenn es nöthig ist, aufzusteigen, verbietet ihm aber, sich mit dem Ballon seitlich zu bewegen. Der Ingenieur ist mit einem geeigneten Winkelmessinstrumente, an welchem ein Loth angebracht ist, versehen. Wie kann der Ingenieur den Befehl seines Vorgesetzten ausführen?

Lösungsverfahren. Der Ingenieur macht in derselben senkrechten Aufsteigungslinie an zwei Stellen Halt, deren Abstand ihm dadurch bekannt ist, dass er die bei der Erhebung von dem einen zu dem anderen Haltepunkte abgelaufene Seillänge messen lässt. Auf der einen dieser Stationen, z. B. der tiefer gelegenen, misst er dann die Winkel zwischen der Lothrichtung und den Visirlinien, welche nach den Punkten, deren Lage er auf der Karte einzeichnen will, gerichtet sind. Unter allen diesen Punkten wählt er einen beliebigen Punkt aus, welchen er als Hauptpunkt ansieht und welchen wir mit A bezeichnen wollen, [**103**] und misst allmählich alle Winkel, welche die Visirlinie nach dem Punkte A mit den Visirlinien nach den anderen Punkten bildet. Auf der anderen, höher gelegenen Station misst er dann noch die Winkel zwischen der Lothrichtung und den Visirlinien nach allen in Betracht gezogenen Terrainpunkten. Mit Hülfe dieser Beobachtungen ist er im Stande, die verlangte Karte zu entwerfen.

Da man nämlich die Winkel β_1 und β_2, welche von der Lothrichtung mit den von den beiden Stationen nach ein und demselben Terrainpunkte B gehenden Visirlinien gebildet werden, kennt, so liegt derselbe gleichzeitig auf zwei bestimmten und bekannten geraden Kreiskegeln, deren Axen in derselben verticalen Geraden liegen, deren Spitzen um den Höhenunterschied beider Stationen von einander entfernt liegen und deren von der Axe und den Seitenlinien eingeschlossene Winkel gleich den beiden gemessenen Winkeln β_1, bez. β_2 sind. Da ferner der Winkel φ bekannt ist, welchen die von der unteren Station nach den Punkten A und B gehenden Visirlinien miteinander bilden, so liegt der Punkt B noch auf einem dritten geraden Kreiskegel, dessen geneigt liegende Axe die von der unteren Station nach dem Punkte A gehende Visirlinie ist und dessen von der Axe und den Seitenlinien gebildeter Winkel gleich dem gemessenen Winkel φ ist. Der Punkt B liegt also gleichzeitig auf drei ihrer Gestalt und Lage nach bestimmten geraden Kreiskegeln und ist folglich ein Punkt ihres gemeinsamen Schnittes.[19]) Construirt man daher die horizontalen und verticalen Projectionen der drei Schnitte, in denen sich je zwei Kegel durchdringen, so findet man die Lage des Punktes auf der Karte und um wieviel er höher oder tiefer als der Punkt A liegt.

102. Ohne die Betrachtungen abzuändern, kann man die Construction mit Hülfe einiger früher auseinandergesetzten Methoden vereinfachen. Da die Winkel, welche die von der unteren Station nach dem Punkte A gehende Visirlinie mit den nach allen übrigen Punkten gehenden einschliesst, und auch alle Winkel, welche diese sämmtlichen Visirlinien mit der Lothrichtung bilden, bekannt sind, so ist es leicht die letzteren Winkel auf den Horizont zu reduciren, d. h. ihre horizontalen Projectionen zu construiren [Vgl. Art. 22, S. 32—33]. Wählt man also auf der Karte einen Punkt P' willkürlich aus, welcher die Projection [**104**] der verticalen Erhebungslinie des Luftballons darstellen soll, zieht durch denselben eine beliebige Gerade a', welche die Projection der von den beiden Stationen nach dem Punkte A gehenden Visirlinien vorstellen soll, und endlich durch denselben Punkt P' gerade Linien, b', c', . . ., deren mit der Projection a' gebildete Winkel gleich jenen auf den Horizont reducirten Winkeln sind, so muss offenbar auf jeder dieser Geraden die Horizontalprojection A', B', . . . eines beobachteten Terrainpunktes A, B, . . . liegen. Jetzt ist nur noch die Entfernung der Projection eines jeden

Terrainpunktes, z. B. des Punktes B' von dem Punkte P' zu bestimmen. Zu dem Zwecke wählt man auf der verticalen Projection der Geraden, in welcher der Ballon aufgestiegen war, zwei Punkte aus, deren Abstand in Einheiten des Maassstabes der Karte gleich dem Höhenunterschiede der beiden Ballonstationen ist, und zieht durch diese Punkte Gerade unter Winkeln gegen die Verticale, welche gleich den von den beiden Stationen nach dem Punkt B hin gemessenen Winkeln β_1 und β_2 sind; diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte B'', dessen senkrechter Abstand von der verticalen Projection der Erhebungslinie des Luftballons gleich der gesuchten Entfernung ist. Trägt man also diese Strecke auf der Geraden b' von dem Punkte P aus bis B' ab, so erhält man in dem Punkte B' den dem Terrainpunkte B entsprechenden Punkt der Karte. Die beiden in der verticalen Projectionsebene gezogenen Geraden bestimmen durch ihren Schnittpunkt B'' auch die Höhe des Terrainpunktes B. Wenn man also aus der verticalen Projection die Höhen aller Terrainpunkte über derselben Horizontalebene entnimmt, so erhält man dadurch die Koten aller in die Karte eingetragenen Punkte und damit das gewünschte Nivellement des Terrains.[20])

Diese Construction ist so einfach, dass eine Figur zu derselben nicht nöthig ist.

Da die Lage der von der Projection P' des Luftballons nach der Projection A' des Punktes A gezogenen Geraden a' willkürlich auf der Karte gewählt war, so folgt, dass die Karte nicht orientirt ist. Und in der That ergiebt sich aus den von uns angegebenen Messungen kein Umstand, welcher die Lage der beobachteten Terrainpunkte in Bezug auf die vier Himmelsrichtungen bestimmen könnte. Misst der Ingenieur, nachdem er wieder auf ebener Erde angelangt ist, den Winkel, welchen die von der Aufstiegstelle P' nach einem der beobachteten Terrainpunkte gerichtete Visirlinie mit dem Meridiane einschliesst, und trägt er diesen Winkel noch auf seiner Karte ein, so kennt er dann die Richtung des Meridians auf der Karte und damit ist dieselbe orientirt.

[105]

Fünfter Theil.

Krümmung doppelt gekrümmter Curven und krummer Flächen.

Nützlichkeit des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie auf den Mittelschulen.

103. Die bisherigen Vorträge über darstellende Geometrie enthalten die hauptsächlichsten Methoden, deren Kenntniss man in den Künsten nöthig haben kann.

Man sollte in allen ein wenig bedeutenderen Städten Mittelschulen errichten, in welchen die jungen Leute, welche sich der Ausübung einer Kunst widmen wollen, im Alter von zwölf Jahren während zweier Jahre in den graphischen Constructionen unterrichtet und geübt und mit den wichtigsten Naturerscheinungen, deren Kenntniss ihnen unerlässlich ist, vertraut gemacht werden. Dieser Unterricht würde, da er den Verstand der Schüler schärft und sie an Genauigkeit und Bestimmtheit gewöhnt, in sicherster Weise zu der fortschreitenden Hebung der nationalen Industrie beitragen, und die Schüler würden, da sie daran gewöhnt werden, volle Einsicht in die Dinge zu verlangen, später davor geschützt sein, von Betrügern irgend welcher Art getäuscht zu werden. Hätten wir uns nun nur das Ziel gesteckt, ein elementares Lehrbuch, welches dem Unterricht an diesen Mittelschulen zur Grundlage dienen sollte, zu schreiben, so müssten wir hiermit die allgemeinen Betrachtungen abschliessen und sofort zu den nützlichsten und am häufigsten gebrauchten Anwendungen übergehen. Wir müssen aber nicht nur auf die Schüler dieser Mittelschulen, sondern auch auf die Lehrer Bedacht nehmen.

In den Lehrplan des Volksunterrichtes soll man nur einfache Dinge, deren Kenntniss täglich nützlich sein kann, aufnehmen. Wen anders aber als den Lehrer kann ein Künstler um Rath fragen, wenn ihm gelegentlich in seinem Leben eine Schwierigkeit entgegentritt, von welcher in dem Schulunterrichte keine Rede gewesen ist? Und wie kann der Lehrer im Stande sein, die ihm vorgelegte Frage zu beantworten und die erbetene Auskunft zu geben, wenn er nicht mit weit allgemeineren Betrachtungen und Untersuchungen als denen, welche den gewöhnlichen Gegenstand des Unterrichtes bilden, vertraut ist?

Um die Lehrer mit einigen allgemeinen Eigenschaften der Curven und Flächen — Eigenschaften, für deren Verwendung man in den Künsten oft Gelegenheit findet — bekannt zu machen, wollen wir einige Vorlesungen auf die Untersuchung der Krümmung von doppelt gekrümmten Curven und krummen Flächen verwenden.

[**106**] Ebene und doppeltgekrümmte Curven, ihre Evoluten, Evolventen und Krümmungsradien.

104. Wenn eine in einer Ebene liegende Gerade sich um einen bestimmten ihrer Punkte dreht, so beschreiben bekanntlich ihre sämmtlichen anderen Punkte concentrische Kreise um jenen Punkt. Jede Curve kann man sich in ähnlicher Weise durch Bewegung eines Punktes erzeugt denken.

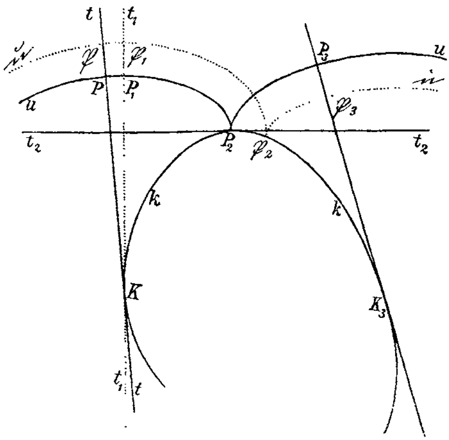

Fig. 58.

(Fig. 58) Es sei k eine beliebige ebene Curve. Lässt man nun eine Gerade t, welche eine Tangente an die Curve k ist, sich so bewegen, dass sie, ohne zu gleiten, die Curve k stets berührt, so beschreibt bei dieser rollenden Bewegung jeder Punkt P dieser Geraden eine Curve u, welche offenbar die folgenden Eigenschaften besitzt.

Jedes Element PP_1 der erzeugten Curve u steht senkrecht auf der entsprechenden Richtung der Geraden t, da es dieselbe Richtung hat, welche das Element eines um den Punkt K als Mittelpunkt mit dem Radius KP beschriebenen Kreisbogens in dem Punkte P besitzt. Folglich ist die Tangente in dem Punkte P an die Curve u senkrecht zu der durch diesen Punkt gehenden und die Curve k berührenden Geraden t.

Liegt der Punkt P auf der Seite der Geraden t, mit welcher sie sich bei ihrer rollenden Bewegung der Curve k nähert, so läuft die Curve u auf die gegebene Curve k zu und trifft sie schliesslich, wenn der erzeugende Punkt mit dem Berührungspunkte der Geraden, welche dann die Lage t_2 angenommen haben mag, in dem Punkte P_2 zusammenfällt. Die Curve u schneidet aber in diesem Punkte P_2 nicht die Curve k, sondern der erzeugende Punkt und mithin auch die Curve u wird in demselben von der Curve k reflectirt. Und da die erzeugte Curve u immer senkrecht auf der bewegten Geraden t ist, so treffen die beiden Curvenzweige PP_2 und P_2P_3 unter rechten Winkeln auf die Gerade t_2 und folglich auch auf die Curve k auf; die beiden Zweige der Curve u berühren sich also in dem Punkte P_2.[21])

Den Punkt P_2, in welchem die Curve u in der Weise sich wieder zurückwendet, dass sich ihre beiden Zweige berühren, nennt man Rückkehrpunkt.

Die Curve k, auf welcher die Gerade t abrollt, heisst die Evolute der Curve u, weil ein beliebiger Bogen KP_2 derselben gleich [**107**] dem abgewickelten Theile KP der beweglichen Geraden t ist, und umgekehrt heisst die Curve u die Evolvente der Curve k. Weil man nun ebenso viele Curven u, $\mathfrak{u}$, . . . in dieser Weise erzugen kann, als man Punkte P, $\mathfrak{P}$, . . . auf der Geraden t als erzeugende Punkte annimmt, so leuchtet unmittelbar ein, dass zu einer Evolute k unendlich viele verschiedene Evolventen gehören, so z. B. zu der Evolute k die Evolventen u, $\mathfrak{u}$, . . ., welche die Eigenschaft haben, sämmtlich dieselben Normalen zu besitzen. Wir werden binnen Kurzem zeigen, dass umgekehrt auch jede Curve, als Evolvente betrachtet, unendlich viele Evoluten besitzt.

105. Man verwendet in der Technik einige Evolventen und vorzüglich die Kreisevolvente; diese ist eine spiralförmige Curve mit unendlich vielen Windungen, von denen je zwei aufeinanderfolgende einen constanten Abstand gleich dem Umfange des Evolutenkreises von einander haben. Die Gestalt von

Kreisevolventenbogen giebt man z. B. den Hebedaumen von rotirenden Wellen, welche in den Pochwerken und Stampfmühlen Stampfbalken heben, weil dann der Berührungspunkt des Hebedaumens mit dem Hebezapfen des Stampfbalkens stets in derselben Verticalen liegt und dadurch die Kraft, welche die Daumenwelle ausübt, um den Stampfbalken in die Höhe zu heben, constant ist. *Vaucanson*[22]) gebrauchte häufig die Kreisevolvente als Verzahnungscurve, um die Bewegung einer rotirenden Welle auf eine andere, ihr parallele zu übertragen, besonders wenn die Verzahnung genau angefertigt sein musste und die Bewegung der einen Welle auf die andere plötzlich, ohne den geringsten Zeitverlust, übertragen sollte.

106. Wir haben in dem Artikel 104 gezeigt, wie die Evolvente aus der Evolute erzeugt werden kann. Es ist leicht zu zeigen, wie umgekehrt die Evolute aus der Evolvente ent-

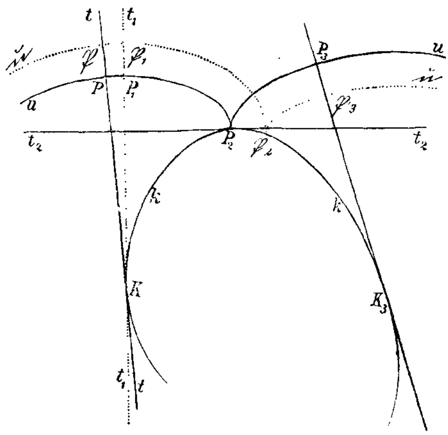

Fig. 59.

steht. Wie wir gesehen haben, sind alle Normalen der Evolvente Tangenten an die Evolute. Zieht man also (Fig. 59) durch alle Punkte P, P_1, ... einer gegebenen Curve u die Normalen, so ist die Curve k, welche von allen diesen Normalen berührt wird, die Evolute der Curve u, und die Normalen t, t_1 zweier unendlich benachbarten Punkte P, P_1 schneiden sich in einem Punkte K der Evolute; dieser Punkt K kann betrachtet werden als Mittelpunkt eines kleinen Kreisbogens, welcher mit dem Radius KP beschrieben ist [**108**] und also dieselbe Krümmung hat wie der zugehörige Bogen PP_1 der betrachteten Curve u. Der Radius KP des Kreises, welcher dieselbe Krümmung besitzt wie der unendlich kleine Bogen PP_1 der Curve u, heisst der Krümmungsradius dieses Bogenelementes, und der Punkt K, in welchem sich die beiden unendlich benachbarten Normalen t, t_1 schneiden, der Krümmungsmittelpunkt. Die Krümmung eines Bogenelementes ist bekannt, wenn man die Lage seines Krümmungsmittelpunktes kennt.

107. Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Curven ebene sind, und nur das betrachtet, was in ihrer Ebene geschieht. Jetzt gehen wir aber zu Curven doppelter Krümmung, wie sie durch den Schnitt zweier krummer Flächen erzeugt werden, über.

Denkt man sich durch den Mittelpunkt eines Kreises und senkrecht zu seiner Ebene eine Gerade gezogen und beiderseits in das Unendliche verlängert, so hat bekanntlich jeder Punkt derselben von allen Punkten der Kreisperipherie gleichen Abstand. Wenn sich also eine Strecke, deren einer Endpunkt auf der senkrechten Geraden und deren anderer Endpunkt auf der Kreisperipherie liegt, so um die Senkrechte als Axe dreht, dass sie beständig denselben Winkel mit ihr einschliesst, so erzeugt ihr bewegter Endpunkt die Peripherie des Kreises mit der gleichen Genauigkeit, als wenn man den Radius des Kreises sich um seinen Mittelpunkt drehen lässt. Die Zeichnung des Kreises mit Hülfe seines Radius ist nur ein specieller Fall der obigen Erzeugung, durch ihre Einfachheit aber geeigneter, eine Vorstellung von dem Verlaufe des Kreises zu geben. In gewissen Fällen jedoch kann die allgemeinere Erzeugungsweise Vortheile gegenüber der speciellen mittelst des Radius gewähren; wählt man nämlich auf der senkrechten Axe zwei Punkte als Pole, welche auf entgegengesetzten Seiten der Kreisebene liegen, zieht man dann von ihnen zwei sich in einem Punkte der zu erzeugenden Kreisperipherie schneidende Gerade, welche man in diesem Punkte fest miteinander verbunden denkt, und lässt man sich das ganze System um die Axe drehen, so erzeugt der feste Schnittpunkt beider Geraden die Kreisperipherie, ohne dass es nöthig ist, die Ebene, in welcher der Kreis liegen muss, vorher wirklich herzustellen.

108. (Fig. 60) Es sei u eine beliebige Curve doppelter Krümmung. Durch irgend einen Punkt P derselben legt man eine Ebene N senkrecht zu der Curventangente in P [**109**] und ebenso

durch den unendlich benachbarten Punkt P_1 eine Ebene N_1 senkrecht zu der Curventangente in P_1. Beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden t, welche die Axe des Kreises ist,

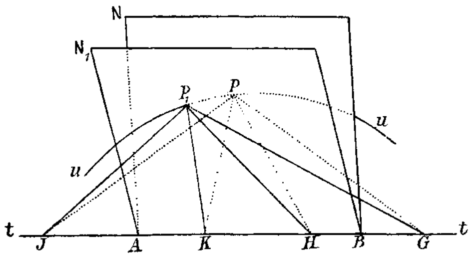

Fig. 60.

als dessen Theil das Bogenelement PP_1 aufgefasst werden kann; fällt man also von den Punkten P und P_1 Lothe auf die Axe t, so haben dieselben gleiche Länge und schneiden sich in demselben Punkte K der Axe, welcher der Mittelpunkt des Kreises ist. Jeder der anderen Punkte G, H, J, ... der Geraden t hat von allen Punkten des Bogenelementes PP_1 ebenfalls gleiche Entfernung und kann daher als Pol desselben betrachtet werden. Zwei von einem beliebigen Punkte G der Axe t nach den Punkten P, P_1 gezogene Gerade GP, GP_1 haben folglich gleiche Länge und schliessen mit der Axe t gleiche Winkel $\measuredangle PGA = \measuredangle P_1GA$ ein. Um also die Krümmung der Curve in dem Punkt P zu bestimmen, muss man die Länge des Krümmungsradius KP und, um den Sinn der Krümmung zu bestimmen, die Lage des Punktes K im Raume angeben. Handelt es sich aber nur darum den kleinen Kreisbogen PP_1 zu beschreiben, so ist es gleichgültig, ob man die Gerade GP um die Axe t, ohne den Winkel AGP zu verändern, oder den Krümmungsradius KP senkrecht zu der Axe sich drehen lässt.

Die Gerade t kann daher als der geometrische Ort der Pole des Bogenelementes PP_1 betrachtet werden; der Krümmungsmittelpunkt dieses Bogenelementes ist derjenige Pol, dessen Abstand von dem Bogenelement ein Minimum ist, und der zugehörige Krümmungsradius das von dem Bogenelement auf die Axe t gefällte Loth.

109. Führt man jetzt für alle Punkte einer Curve doppelter

Krümmung u (Fig. 61) die Construction durch, welche wir soeben für eines ihrer Elemente beschrieben haben, d. h. legt man durch alle Punkte P, P_1, P_2, P_3, ... Ebenen N, N_1 N_2, N_3, ... senkrecht zu den Tangenten in den zugehörigen Cur-

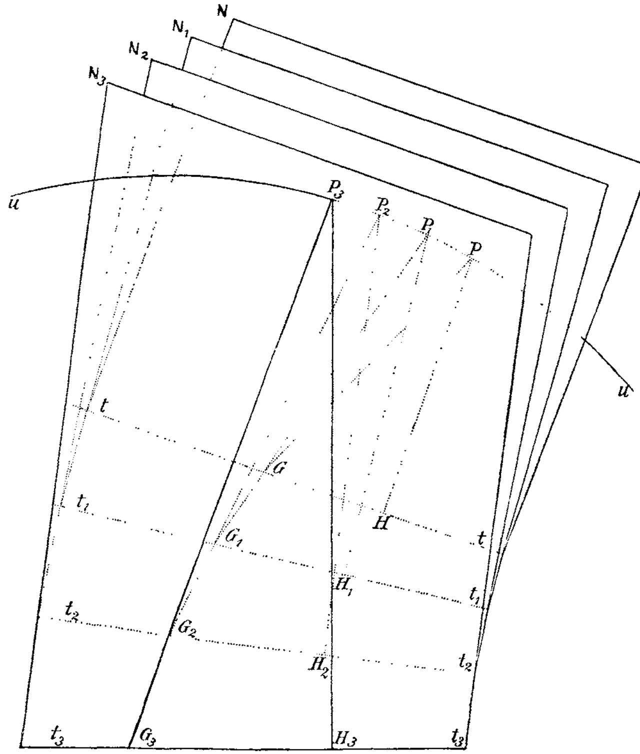

Fig. 61.

venpunkten, so schneidet die erste dieser Ebenen die zweite in einer Geraden t, welche der geometrische Ort aller Pole des Bogens PP_1 ist, und die zweite Ebene die dritte in einer Geraden t_1, welche der geometrische Ort aller Pole des Bogens $P_1 P_2$ ist, und so fort. Die Schaar aller dieser Schnittgeraden oder die krumme Fläche, welche sie in ihrer Gesammtheit bilden, ist der geometrische Ort aller Pole der ganzen Curve

u, da die Curve keinen Pol hat, welcher nicht auf dieser Fläche liegt, und umgekehrt die Fläche keinen Punkt enthält, welcher nicht der Pol irgend eines Elementes der Curve u ist.[23])

[110]

Die krumme Fläche, welche der geometrische Ort der Evoluten einer Curve doppelter Krümmung ist. Bemerkenswerthe Eigenschaft der Evoluten auf dieser Fläche. Erzeugung einer doppeltgekrümmten Curve durch stetige Bewegung.

110. Ehe wir weitergehen, müssen wir einige Eigenschaften auseinandersetzen, welche die Flächen der vorstehend erwähnten Art, ganz unabhängig von der zu ihrer Erzeugung benutzten Curve u, besitzen.

Diese Flächen können ohne Zerreissung und ohne Faltung in die Ebene abgewickelt werden. In der That sind die von den erzeugenden Geraden begrenzten Elemente der Fläche tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ... (Fig. 62) unendlich schmale ebene Streifen, welche längs dieser Geraden aneinandergrenzen. Man kann sich daher immer denken, dass das erste Element tt_1 sich um die Gerade t_1 als Axe dreht, bis es in der Ebene des folgenden Elementes t_1t_2 liegt; dass sich dann beide Elemente zusammen um die Gerade t_2 drehen, bis sie in der Ebene des dritten Elementes t_2t_3 liegen, und so fort. Daraus ergiebt sich die Möglichkeit, auf die Weise alle Elemente der krummen Fläche ohne Zerreissung in eine Ebene abzuwickeln.

In gleicher Weise wie die Normalebenen der Curve u durch ihre aufeinanderfolgenden Schnittgeraden eine krumme Fläche, an welche sie selbst Tangentialebenen sind, bilden, schneiden sich die aufeinanderfolgenden Schnittgeraden in Punkten einer Curve doppelter Krümmung, deren Tangenten die Schnittgeraden selbst sind. Denn zwei aufeinanderfolgende dieser Geraden sind Schnitte derselben Normalebene mit der unmittelbar vorhergehenden und der unmittelbar folgenden Normalebene; diese beiden Geraden liegen also in einer Ebene und schneiden sich daher in einem Punkte. Die Gesammtheit aller dieser Schnittpunkte aber bildet eine bemerkenswerthe Curve auf der abwickelbaren Fläche. Verlängert man nämlich alle Geraden, nachdem sie sich auf dieser Curve geschnitten haben, darüber hinaus, so bilden ihre Verlängerungen eine zweite Schale der Fläche, und diese Schale ist von der ersten, welche von den Theilen der Geraden, die vor den Schnittpunkten liegen', gebildet wird', verschieden. Die beiden Schalen grenzen längs der Curve aneinander, welche in Bezug auf die ganze Fläche eine wirkliche Rückkehrkante ist.

(Fig. 62) Von dem Punkte P der Curve u, durch welchen die erste Normalebene N hindurchgelegt ist, werde in dieser Ebene

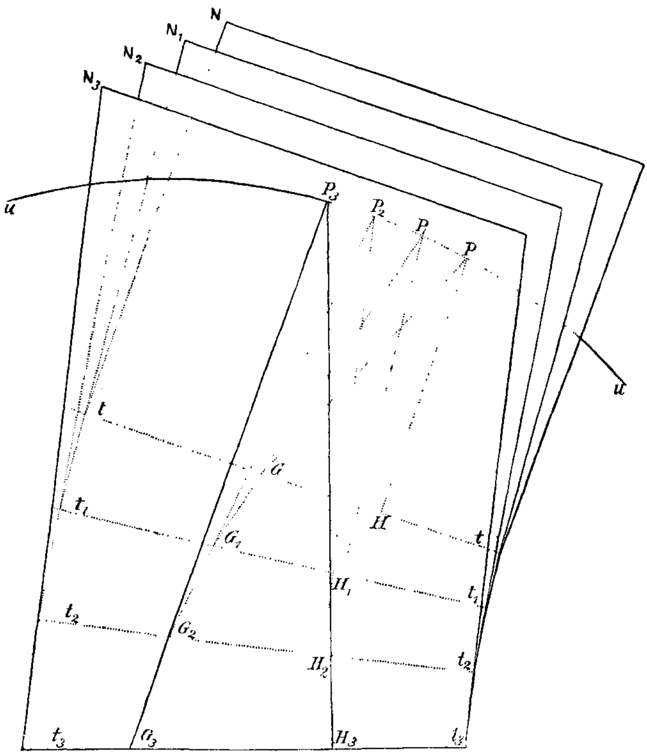

Fig. 62.

in beliebiger Richtung die Gerade PG gezogen, bis sie die Gerade t in dem Punkte G schneidet; dann ziehe man in der zweiten Normalebene N_1 durch die Punkte P_1 und G eine

Gerade und verlängere sie bis zu ihrem Schnittpunkte G_1 mit der Geraden t_1; ferner ziehe man in gleicher Weise die Gerade $P_2 G_1 G_2$, und fahre so fort. [111] Die Curve, welche durch alle Punkte G, G_1, G_2, ... geht, ist eine Evolute der Curve u; denn alle Geraden PG, $P_1 G_1$, $P_2 G_2$, ... sind Tangenten an die Curve $G G_1 G_2$ ..., da sie die geradlinigen Verlängerungen von Elementen dieser Curve sind. Denkt man sich ferner, dass die erste dieser Geraden PG sich um die Gerade t als Axe dreht, bis sie mit der folgenden Geraden $P_1 G$ zusammenfällt, so bleibt sie dabei stets Tangente an die Curve $G G_1 G_2$ ..., und ihr Endpunkt P fällt, nachdem er den Bogen PP_1 durchlaufen hat, mit dem Endpunkte P_1 der zweiten Geraden PG zusammen. Lässt man dann die zweite Gerade $P_1 G_1$ sich um die Gerade t_1 als Axe drehen, bis sie mit der dritten Geraden $P_2 G_1$ zusammenfällt, so bleibt sie dabei ebenfalls immer Tangente an die Curve $G G_1 G_2$ ... und ihr Endpunkt P_1 liegt immer auf dem Curvenelement $P_1 P_2$. Die Curve $G G_1 G_2$ ... hat also die Eigenschaft, dass ein bestimmter Punkt einer beliebigen ihrer Tangenten die Curve u erzeugt, wenn diese Tangente sich an der Curve $G G_1 G_2$, dieselbe stets berührend, entlang bewegt, ohne in ihrer Längsrichtung zu gleiten. Folglich ist die Curve $G G_1 G_2$ ... eine Evolute der Curve u. Da aber die Richtung der ersten Geraden PG ganz willkürlich angenommen war, so kann man in der ersten Normalebene N statt PG auch irgend eine andere Gerade ziehen und erhält dann eine andere Curve, welche ebenfalls eine Evolute der Curve u ist. Jede Curve besitzt mithin unendlich viele Evoluten, welche sämmtlich auf der von den Schnittgeraden der Normalebenen gebildeten krummen Fläche liegen.

Da die Geraden $P_1 G_1$ und $P_2 G_1$ mit der Geraden t_1 gleiche Winkel einschliessen und das Element $G_1 G_2$ die Verlängerung der Geraden $P_2 G_1$ ist, so folgt, dass die beiden aufeinanderfolgenden Elemente $G G_1$ und $G_1 G_2$ der Evolute $G G_1 G_2$ ... gleiche Winkel mit der Geraden t_1 bilden. Bei der Abwickelung der krummen Fläche in die Ebene werden diese Winkel nicht geändert und bleiben einander gleich; daher müssen zwei aufeinanderfolgende Elemente der mit der krummen Fläche in die Ebene abgewickelten Curve $G G_1 G_2$ ... gleiche Winkel mit der Geraden t_1 bilden und mithin dieselbe Richtung haben. Daraus folgt, dass jede Evolute einer doppelt gekrümmten Curve eine gerade Linie wird, wenn die Fläche, auf welcher alle

Evoluten der Raumcurve liegen, in die Ebene abgewickelt wird, und daher ist jede Evolute die kürzeste Linie, welche man auf der abwickelbaren Fläche zwischen zwei Punkten ziehen kann.

Aus dieser Eigenschaft ergiebt sich ein bequemes Verfahren, um eine beliebige Evolute [**112**] einer Curve doppelter Krümmung zu erhalten, wenn die abwickelbare Fläche, auf welcher alle Evoluten liegen, gegeben ist. Man braucht nur durch irgend einen Punkt der Curve u einen Faden als Tangente an die gegebene Fläche zu führen, ihn von dem Berührungspunkte an um die Fläche herumzubiegen und zu spannen. Durch die Spannung nimmt der Faden auf der Fläche die Richtung einer kürzesten Linie an und schmiegt sich folglich der Fläche längs einer Evolute an.

111. Man erkennt hieraus, wie es möglich ist, eine beliebige Curve doppelter Krümmung durch eine stetige Bewegung zu erzeugen. Denn wenn eine abwickelbare Fläche, welche von allen Normalebenen der zu erzeugenden Curve berührt werden soll, und ausserhalb derselben ein Punkt, durch welchen die Curve gehen soll, gegeben sind, so legt man von demselben an die gegebene Fläche zwei tangirende Fäden, wickelt sie auf die Fläche auf, spannt sie und befestigt sie mit ihren Enden; dann hat der Punkt, in welchem sich die beiden Fäden vereinigen, die Möglichkeit, sich mit der Tangentialebene an die gegebene krumme Fläche zu bewegen, ohne auf einem der Fäden zu gleiten, und erzeugt bei dieser Bewegung die verlangte Curve.

112. Alles was wir soeben für die Curven doppelter Krümmung gesagt haben, gilt in gleicher Weise für ebene Curven, mit dem einzigen Unterschiede, dass alle Normalebenen und folglich auch alle ihre Schnittgeraden auf der Ebene der gegebenen Curve n senkrecht stehen. Diese Geraden sind mithin zu einander parallel, und die abwickelbare Fläche, welche von allen Normalebenen berührt wird, ist eine Cylinderfläche, deren senkrechter Schnitt die gewöhnliche Evolute der Curve ist. Diese Cylinderfläche enthält aber ebenso alle doppelt gekrümmten Evoluten der ebenen Curve, und jede Evolute schliesst mit allen geradlinigen Erzeugenden der Cylinderfläche gleiche Winkel ein. So z. B. ist die gewöhnliche Schraubenlinie eine Evolute der Evolvente desjenigen Kreises, welcher die Basis der Cylinderfläche, auf der die Schraubenlinie liegt, ist; und zwar ist jede Schraubenlinie, welche Ganghöhe sie auch

haben mag, wenn nur der Durchmesser des Cylinders stets der gleiche bleibt, eine Evolute dieser Kreisevolvente.

[113]

Krumme Flächen. Die beiden Krümmungen in einem Punkte der Fläche.

113. Nachdem wir die Theorie der Curven doppelter Krümmung entwickelt haben, wollen wir uns noch mit den krummen Flächen beschäftigen. Dieser Gegenstand gehört zwar zu denen, welche sich weit leichter mit Hülfe der Analysis, als durch einfache geometrische Betrachtungen behandeln lassen; da aber die Resultate, zu denen dieser Gegenstand führt, für viele Künstler, von welchen man nicht annehmen kann, dass sie mit analytischen Operationen vertraut sind, von grossem Nutzen sein können, so wollen wir hier versuchen, sie auf Grund von geometrischen Betrachtungen allein zu erhalten. Dieses Verfahren bringt in die Theorie der Flächenkrümmung die ihm eigenthümliche Durchsichtigkeit und Verständlichkeit, führt aber dafür auch langsamer zum Ziele.

In Bezug auf ihre Krümmungen können die Flächen in drei Klassen eingetheilt werden. Die erste derselben umfasst alle Flächen, welche in jedem ihrer Punkte keine Krümmung besitzen, und enthält also als einzige Art die Ebene, welche natürlich beliebig im Raume liegen kann. Die Flächen der zweiten Klasse haben in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Krümmung; hierher gehören im Allgemeinen alle abwickelbaren Flächen, bei welchen man zwei aufeinanderfolgende Elemente — diese Elemente in der Richtung der Erzeugenden der Kegelfläche als unbegrenzt gross gedacht — als Theile einer Kegelfläche ansehen kann. Alle übrigen Flächen endlich bilden die dritte Klasse; in jedem Punkte einer solchen Fläche giebt es zwei bestimmte Krümmungen, welche, im Allgemeinen unabhängig von einander, sich von Punkt zu Punkt ändern.

114. Es sei (Fig. 63) $ABCD$ eine unbegrenzte Cylinderfläche mit beliebiger Basis, auf welcher wir einen Punkt P beliebig wählen. Durch diesen Punkt P ziehen wir die geradlinige Erzeugende g und schneiden durch eine zu dieser Geraden senkrechte Ebene die Curve DPE aus. Dieser Schnitt ist parallel und congruent zu der Basislinie des Cylinders. End-

lich ziehen wir durch den Punkt P die Flächennormale PK, welche senkrecht zu der Erzeugenden g ist und folglich in der Ebene des Schnittes DPE liegt. Da die Normale ferner senkrecht auf der im Punkte P an die Schnittcurve gezogenen Tangente steht, so muss sie senkrecht zur Tangentialebene an die Cylinderfläche in dem Punkte P sein. Wählt man auf der Fläche noch zwei, dem Punkte P unendlich benachbarte Punkte, und zwar den einen Punkt Q auf derselben Erzeugenden g, den andern R auf dem [114] senkrechten Schnitte DPE, und zieht man in jedem dieser beiden Punkte die Normale zu der Fläche, so liegt jede der beiden Normalen QL, RK in einer Ebene mit der ersten Normalen PK; die Ebene, in welcher die Normalen PK, QL liegen, ist aber verschieden von der Ebene der Normalen PK, RK. Denn da die Tangentialebene in dem Punkte P auch im Punkte Q die Cylinderfläche berühren muss, so sind die beiden Geraden PK, QL senkrecht zu derselben Ebene, folglich zu einander parallel und daher in einer Ebene gelegen; diese beiden parallelen Geraden können wir als sich im Unendlichen schneidend betrachten. Die Normalen PK, RK liegen offenbar in der Ebene des zu den Erzeugenden senkrechten Schnittes DPE und schneiden sich also in einem bestimmten Punkte K dieser Ebene. Daraus folgt, dass die beiden Ebenen, welche je zwei der drei Normalen enthalten, nicht nur von einander verschieden, sondern auch zu einander senkrecht sind.

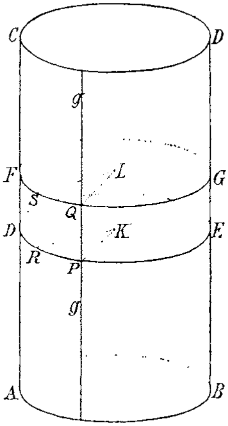

Fig. 63.

115. Wählt man dagegen auf der Cylinderfläche einen beliebigen anderen Punkt S, welcher dem Punkte P ebenfalls unendlich nahe liegt, so liegt die Flächennormale dieses Punktes mit der ersten Normale PK nicht in einer Ebene, und folglich können sich beide Normalen nicht schneiden. Denn wenn man durch den Punkt S senkrecht zu der Fläche einen neuen Schnitt FSG führt, welcher die durch den Punkt P gehende geradlinige Erzeugende in einem Punkte Q schneidet, so liegt die Normale SL in der Ebene dieses Schnittes. Die

beiden Normalen PK und SL liegen also in zwei parallelen Ebenen und würden folglich nur dann in einer Ebene liegen können, wenn sie selbst zu einander parallel sind, was aber nicht der Fall sein kann; denn wie wir gesehen haben, ist die Normale QL in dem Punkte Q wohl parallel zu der Normalen PK in dem Punkte P, nicht aber parallel zu der Normalen SL in dem Punkte S. Es können also die beiden Normalen PK, SL nicht zu einander parallel sein, folglich auch nicht in derselben Ebene liegen und sich daher niemals schneiden.

116. Will man also von einem beliebigen Punkte einer Cylinderfläche zu einem unendlich benachbarten übergehen, sodass die in den beiden Punkten gezogenen Normalen der Fläche in einer Ebene liegen und sich im Endlichen oder, wenn nöthig, im Unendlichen schneiden, so kann man nur dies in zwei verschiedenen Richtungen [**115**] thun:

1) in der Richtung der geradlinigen Erzeugenden der Fläche, in welchem Falle die zweite Normale die erste im Unendlichen schneidet, und

2) längs des zu den geradlinigen Erzeugenden senkrechten Schnittes, in welchem Falle die zweite Normale die erste in einem Punkte schneidet, dessen Abstand von der Fläche von der Krümmung der Cylinderbasis in dem entsprechenden Punkte abhängt; die beiden Richtungen stehen auf einander senkrecht.

Die beiden Schnittpunkte der drei Normalen sind also die einzig möglichen Krümmungsmittelpunkte des betrachteten Flächenelementes. Die beiden verschiedenen Ebenen, welche durch die erste Normale und eine der beiden anderen gehen, geben die Richtungen dieser beiden Krümmungen an, und die Abstände des Oberflächenpunktes von den beiden Normalenschnittpunkten sind die beiden Krümmungsradien. Bei den Cylinderflächen ist, wie aus dem Vorstehenden unmittelbar folgt, einer dieser Krümmungsradien stets unendlich gross, während die Grösse des anderen von der Gestalt der Cylinderbasis abhängt; in jedem Punkte der Fläche giebt es daher nur eine endliche, von Null verschiedene Krümmung, während die andere unendlich klein ist.

Die soeben gegebenen Betrachtungen lassen sich leicht auf alle abwickelbaren Flächen ausdehnen, da bei diesen zwei benachbarte, in der Richtung der erzeugenden Geraden unbegrenzte Elemente stets als Theile einer bestimmten Cylinderfläche betrachtet werden können.

Wir gehen sofort zu dem allgemeinen Falle beliebiger krummen Flächen über.

117. Es sei (Fig. 64) $HJKL$ eine beliebige krumme Fläche, an welche man durch einen willkürlich auf ihr gewählten Punkt P eine Tangente g zieht; die Lage dieser Geraden ist nicht bestimmt, sondern kann in der Tangentialebene, welche die Fläche in dem Punkte P berührt, beliebig gewählt werden. Lässt man dann die Gerade g sich so bewegen, dass sie stets zu sich selbst und zu der Tangente an die Fläche parallel bleibt, so erzeugt sie eine gewisse Cylinderfläche, deren Basis von der Gestalt der krummen Fläche abhängt, und welche die krumme Fläche längs einer durch die Bewegung des Berührungspunktes der Geraden g erzeugten Curve $PKQHP$ berührt. Diese Berührungslinie ist im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung.

118. In dem ganz speciellen Falle der Flächen zweiten Grades [**116**], d. h. der Flächen, welche von einer beliebigen Ebene stets in einem Kegelschnitte geschnitten werden, ist die Berührungslinie mit einer einhüllenden Cylinderfläche immer eine ebene Curve, welche Richtung auch die erzeugende Gerade der Cylinderfläche haben mag.

119. Ein wenig allgemeiner ist der folgende Fall. Die betrachtete krumme Fläche entsteht durch die Bewegung einer ebenen Curve, welche in ihrer Ebene fest liegt, aber mit dieser zusammen beweglich ist, und zwar geschieht die Bewegung so, dass die Ebene auf zwei gegebenen krummen Flächen rollt. In jedem Punkte einer so erzeugten Fläche giebt es dann eine bestimmte der Geraden g zu gebende Richtung, für welche die von dieser Geraden g erzeugte Cylinderfläche die krumme Fläche in einer ebenen Curve berührt; die erzeugende Gerade dieser Cylinderfläche muss senkrecht auf der beweglichen Ebene, welche durch den betrachteten Punkt geht, stehen. Die Umdrehungsflächen bilden nur einen speciellen Fall der hier betrachteten krummen Flächen. Denn zieht man durch einen beliebigen Punkt einer Umdrehungsfläche die Tangente g an die Fläche, welche senkrecht auf der Ebene des durch den betrachteten Punkt gehenden Meridians steht, und lässt die Gerade g sich dann so bewegen, dass sie stets Tangente an die Fläche und senkrecht zu derselben Meridianebene bleibt, so durchläuft ihr Berührungspunkt mit der Fläche genau die Peri-

pherie des Meridians selbst, und die Gerade g erzeugt eine Cylinderfläche, welche die gegebene Umdrehungsfläche längs dieses Meridians, also längs einer ebenen Curve berührt.

120. In jedem anderen Falle berührt eine Cylinderfläche, welche einer beliebigen krummen Fläche $HJKL$ umschrieben ist, dieselbe in einer doppeltgekrümmten Curve $PKQHP$.

Die Tangente g, welche man zunächst willkürlich in der Tangentialebene in dem Punkte P der Fläche gezogen hat, schliesst mit der Tangente t, welche die Berührungscurve $PKQHP$ in dem Punkte P berührt, einen Winkel $GPT = \gamma$ ein, dessen Grösse von der Beschaffenheit der krummen Fläche und der willkürlich gewählten Richtung der Geraden g abhängt. Ändert man, was in jedem einzelnen Falle immer möglich ist, diese Richtung so, dass die Gerade noch Tangente an die Fläche in dem Punkte P ist, [117] und lässt man sie sich parallel zu dieser neuen Lage g_1, die gegebene krumme Fläche stets berührend, bewegen, so entsteht ein zweiter, der gegebenen Fläche umschriebener Cylinder, welcher sie längs einer anderen Curve doppelter Krümmung berührt. Diese neue Berührungslinie geht auch durch den Punkt P und ihre Tangente t_1 in diesem Punkte schliesst mit der neuen Richtung g_1 der erzeugenden Geraden einen Winkel ein, welcher von dem Winkel γ, gebildet von den Geraden g und t, verschieden ist.

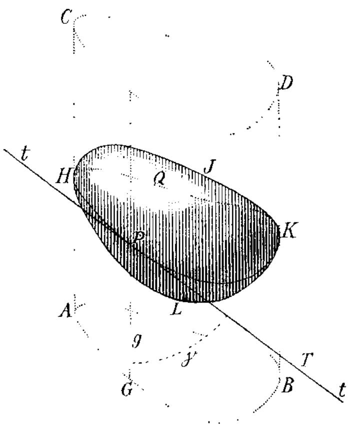

Fig. 64.

Wir variiren nun die Richtung der berührenden Geraden g so lange, bis dass der von ihr erzeugte Cylinder die gegebene Fläche in einer Curve berührt, deren Tangente im Punkte P senkrecht zu der erzeugenden Geraden g des Cylinders ist.

Es sei irgend eine krumme Fläche gegeben, auf welcher man einen bestimmten Punkt P ins Auge fasst. In der folgenden Figur 65 sei BPE die Tangente an die Fläche in dem

Punkte P, deren Richtung die vorstehend gewünschte ist; d. h. bewegt sich die Gerade BE parallel zu sich selbst und immer die gegebene Fläche berührend, so erzeugt sie die Cylinderfläche $ABCDEF$, welche die gegebene Fläche in einer Curve

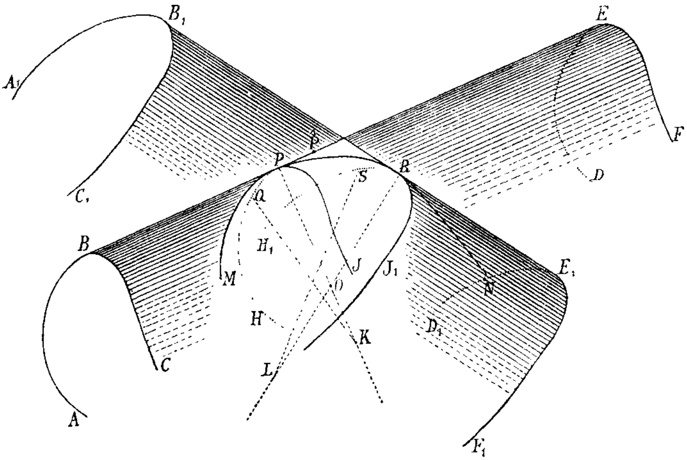

Fig. 65.

berührt, deren Tangente in dem Punkte P senkrecht zu der Geraden BE ist. Die Berührungslinie der beiden Flächen ist zwar eine Curve doppelter Krümmung, aber in dem Punkte P fällt ihr Bogenelement zusammen mit dem Elemente PQ der Schnittcurve $HQPJ$ der Cylinderfläche mit der zu der geradlinigen Erzeugenden BE senkrechten Ebene. Die beiden Endpunkte P, Q dieses Elementes liegen gleichzeitig auf beiden Flächen, da sie auf der Berührungslinie beider liegen; zieht man durch die Punkte P, Q die Normalen PK, QK des Cylinders, so sind dieselben auch Normalen der Berührungslinie. Nun liegen die beiden Normalen in derselben, zu der Erzeugenden BE des Cylinders senkrechten Ebene und müssen sich daher in einem Punkte K schneiden, welcher der Krümmungsmittelpunkt des Bogens PQ ist. Wählt man also auf einer beliebigen krummen Fläche zwei Punkte P und Q, welche auf der Berührungslinie der Fläche mit demjenigen Cylinder, dessen geradlinige Erzeugende senkrecht auf dem Elemente PQ dieser Berührungslinie steht, gelegen sind, so liegen die Normalen der gegebenen Fläche in diesen Punkten in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte, welcher der Krümmungsmittelpunkt der Fläche in der Richtung der durch die beiden Normalen bestimmten Ebene ist.

[**118**] 121. Wenn man (Fig. 66) auf der Geraden BE einen unendlich benachbarten Punkt $\hat{P}$ nimmt und durch denselben eine Normale zu der Cylinderfläche zieht, so ist diese Normale parallel zu der Normalen PK, ist aber nicht auch Normale der gegebenen Fläche. Die durch die Geraden BE und PK bestimmte Ebene schneide die gegebene Fläche in der Curve $MPRN$; lässt man nun die Gerade BE sich so, dass sie stets Tangente an die gegebene Fläche ist, bewegen, bis sie die unendlich benachbarte Lage B_1E_1 annimmt und die Fläche in dem P unendlich nahe liegenden Punkte R berührt, und lässt man dann die Gerade sich weiter so bewegen, dass sie der Geraden B_1RE_1 stets parallel und Tangente an die Fläche bleibt, so erzeugt sie eine zweite Cylinderfläche $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, welche sowohl der Gestalt als der Lage nach nur unendlich wenig von der ersten Cylinderfläche verschieden ist, und deren Berührungslinie mit der gegebenen krummen Fläche durch den Punkt R geht. Die Normale RL der zweiten Cylinderfläche ist zugleich auch die Normale der gegebenen krummen Fläche in dem Punkte R. Sie liegt mit der durch den Punkt P gezogenen ersten Normalen PK in einer Ebene, da beide in der durch die Geraden BE und B_1E_1 bestimmten Ebene liegen, und diese Ebene steht senkrecht auf der durch die beiden Normalen PK, QK gehenden Ebene. Die beiden Normalen PK, RL schneiden sich mithin in einem Punkte O, welcher der Krümmungsmittelpunkt des Bogens PR und folglich auch der gegebenen krummen Fläche in der Richtung der durch die Geraden BE, B_1E_1 gehenden Ebene ist.

Man kann also, wie man sieht, von einem beliebigen Punkte P einer krummen Fläche stets in zwei verschiedenen Richtungen zu unendlich benachbarten Punkten Q und R übergehen, sodass jede der beiden Normalen in diesen letzteren Punkten mit der Normale in dem Punkte P in einer Ebene liegt; die beiden Richtungen schneiden sich, da sie in zu einander senkrechten Normalebenen liegen, auf der krummen Fläche ebenfalls unter rechten Winkeln.

122. Diese beiden Richtungen sind nun im Allgemeinen die einzigen, welche die Eigenschaft haben, dass sich in ihnen zwei

unendlich benachbarte Normalen schneiden; geht man auf der krummen Fläche in irgend einer anderen Richtung von dem Punkte P zu einem ihm unendlich benachbarten Punkte S über und zieht in ihm die Normale SL der Fläche, so liegt die Normale SL nicht in einer Ebene mit der Normalen PK und kann sie folglich auch nicht schneiden.

In der That, wenn — wie wir jetzt annehmen wollen — die zweite Cylinderfläche so geneigt liegt, [**119**] dass ihre Berührungslinie mit der krummen Fläche durch den Punkt S

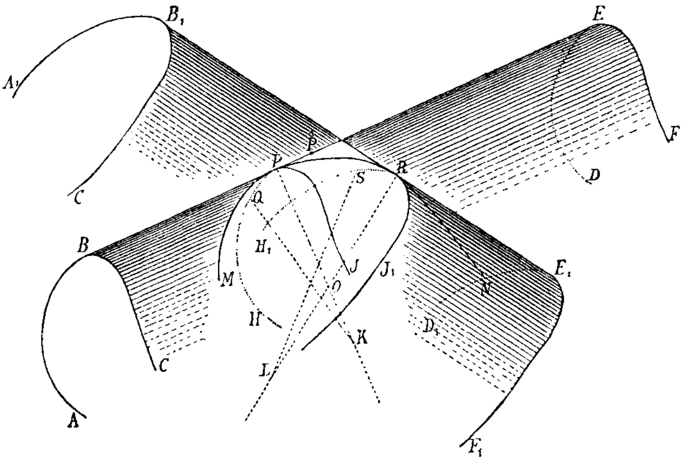

Fig. 66.

geht, so fällt der Bogen SR dieser Berührungslinie mit dem Bogen des zur Cylinderfläche senkrechten Schnittes H_1SRJ_1 zusammen; es sind also die beiden Flächennormalen in den Punkten S und R auch Normalen des Cylinders, und da beide in der Ebene des senkrechten Schnittes liegen, schneiden sie sich in dem Punkte L. Aber die Normale SL schneidet nicht die Normale PK. Denn damit diese beiden Normalen sich schneiden, ist nothwendig, dass der Punkt L der Normalen RL zusammenfällt mit dem Punkte O, in welchem diese letztere die Normale PK schneidet. Dies kann im Allgemeinen aber nicht der Fall sein, weil dies voraussetzen würde, dass die beiden Bogen PR und PQ gleiche Krümmung haben, was [abgesehen von der Kugel] nur für einzelne Punkte mancher krummen Flächen statt hat. Bei der Kugel ist die Krümmung, in welcher Richtung man auch von einem beliebigen Punkte zu einem unendlich benachbarten übergehen mag, stets dieselbe und folglich liegen die durch zwei solche Punkte gezogenen Normalen in einer Ebene; die Kugel ist die einzige Fläche, deren sämmtlichen Punkten diese Eigenschaft zukommt. Bei denjenigen Umdrehungsflächen, deren erzeugende Curve die Axe senkrecht schneidet, ist die Krümmung in den Scheitelpunkten auch nach allen Richtungen die gleiche und daher liegt die Scheitelnormale mit der Normale eines jeden unendlich benachbarten Punktes in einer Ebene; diese Eigenschaft gilt aber bei diesen Flächen nur für die Scheitelpunkte der Umdrehungsaxe. Endlich giebt es krumme Flächen, bei welchen diese Eigenschaft für sämmtliche Punkte einer bestimmten Curve statthat, und nur für diese; in allen anderen Punkten der Fläche schneidet die Normale diejenige eines unendlich benachbarten Punktes nur dann, wenn der benachbarte Punkt in einer der beiden von uns bestimmten Richtungen von dem ersten Punkte aus liegt.[24])

123. Daraus folgt, dass eine beliebige krumme Fläche im Allgemeinen in jedem ihrer Punkte nur zwei Krümmungen besitzt; jede dieser Krümmungen hat ihren besonderen Mittelpunkt und Radius und die beiden Bogen, auf welche sich diese Krümmungen beziehen, schneiden sich auf der Fläche rechtwinklig. Die besonderen Fälle, in welchen wie bei der Kugel und in den Scheitelpunkten der Umdrehungsflächen zwei beliebige benachbarte Normalen sich schneiden, bilden von dem vorstehenden Satze keine Ausnahme. Es folgt nur, dass in diesen Fällen die beiden Krümmungen einander gleich sind [**120**] und dass die Richtungen, in welchen man sie messen muss, beliebige sind.

124. Obgleich die beiden Krümmungen einer krummen Fläche durch das Gesetz ihrer Erzeugung mit einander verknüpft sind, können sie von einem Punkte der Fläche nach einem anderen Veränderungen erleiden, welche in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne vor sich gehen. Wir können uns hier in dieser Beziehung nicht auf weitere Einzelheiten einlassen, welche auch weit weniger mühsam mit Hülfe der Analysis gefunden werden. Hier sei nur Folgendes bemerkt. Bei gewissen Flächen, wie z. B. den Sphäroiden, haben in jedem Punkte die beiden Krümmungen gleichen Sinn, d. h. beide Krümmungen sind nach derselben Seite convex; bei

anderen Flächen haben die beiden Krümmungen in gewissen Punkten entgegengesetzten Sinn, d. h. nach derselben Seite ist die eine convex und die andere concav, zu welchen Flächen z. B. die Kreisringfläche gehört; bei noch anderen Flächen haben die beiden Krümmungen in allen Punkten entgegengesetzten Sinn, wie z. B. bei der Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden, die immer drei andere, beliebig im Raume gegebene Geraden schneiden soll, entsteht. Eine besondere Art dieser letzteren Flächen sind diejenigen, bei welchen in jedem Punkte die entgegengesetzt gerichteten Krümmungen der Grösse nach einander gleich sind; diese Flächen sind diejenigen, deren Flächeninhalt ein Minimum ist.[25]

Krümmungslinien einer beliebigen Fläche; hre Krümmungsmittelpunkte und die Fläche, welche der geometrische Ort derselben ist.

125. Gehen wir jetzt zu einigen Folgerungen über, welche aus den beiden Krümmungen einer krummen Fläche sich ergeben, und deren Kenntniss für die Künstler wichtig ist.

Die nebenstehende Figur (Fig. 67) stelle einen Theil einer beliebigen krummen Fläche dar, auf welcher wir einen willkürlich gewählten Punkt P ins Auge fassen und uns in ihr die Normale der Fläche gezogen denken. Man kann, wie wir soeben gesehen haben, in zwei verschiedenen Richtungen von dem Punkte P zu benachbarten Punkten Q und P_1 übergehen, sodass die Normalen in diesen Punkten die Normale in dem Punkte P schneiden; diese beiden Richtungen auf der Fläche schneiden sich unter rechten Winkeln. Es seien also PQ und PP_1

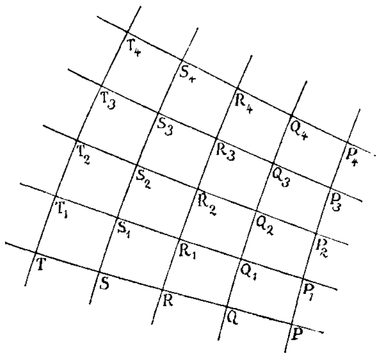

Fig. 67.

diese beiden, in P auf einander senkrechten Richtungen. Von dem Punkte Q kann man ebenfalls in zwei verschiedenen Richtungen zu zwei anderen benachbarten Punkten R und Q_1

übergehen, sodass die Normale in P die Normalen in diesen neuen Punkten schneidet; es seien QR und QQ_1 diese zwei zu einander senkrechten Richtungen. Verfährt man in gleicher Weise [**121**] für den Punkt R, so findet man zwei Richtungen RS und RR_1, welche sich in R rechtwinklig schneiden; für den Punkt S findet man die beiden zu einander senkrechten Richtungen ST und SS_1, und so fort. Die Punktreihe P, Q, R, S, T, . . ., für welche je zwei benachbarte Normalen in einer Ebene liegen, bilden auf der krummen Fläche eine Curve, welche in jedem ihrer Punkte den Sinn einer der beiden Krümmungen der Fläche angiebt; diese Curve ist also eine Linie der ersten Krümmung der Fläche und zwar die durch den Punkt P gehende. Stellt man die gleiche Betrachtung, wie für den Punkt P, jetzt für den Punkt P_1 an, so kann man wiederum in zwei zu einander senkrechten Richtungen zu neuen Punkten Q_1 und P_2 übergehen, sodass die Normalen in diesen Punkten die Normale in P_1 schneiden; geht man in gleicher Weise, wie vorhin, weiter, so findet man eine neue Punktreihe P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, . . ., welche auf der Fläche eine andere Linie der ersten Krümmung und zwar die durch den Punkt P_1 gehende bildet. Verfährt man in gleicher Weise für die Punkte P_2, P_3, P_4, . . ., welche man auf dieselbe Weise wie die Punkte P_1, P_2 gefunden hat, so erhält man neue Linien der ersten Krümmung, $P_2 Q_2 R_2 S_2 T_2$ . . ., $P_3 Q_3 R_3 S_3 T_3$ . . ., $P_4 Q_4 R_4 S_4 T_4$ . . ., welche durch die Punkte P_2, P_3, P_4, . . . gehen. Diese Linien der ersten Krümmung theilen die Fläche in Zonen ein. Die Punktreihe P, P_1, P_2, P_3, P_4, . . . hat die gleiche Eigenschaft, dass die Normalen je zweier aufeinanderfolgenden Punkte in einer Ebene liegen, und bildet auf der Fläche eine Curve, welche in jedem ihrer Punkte den Sinn der anderen Krümmung der Fläche angiebt; diese Curve ist also eine Linie der zweiten Krümmung der Fläche. Die Punkte Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, . . . bilden eine andere

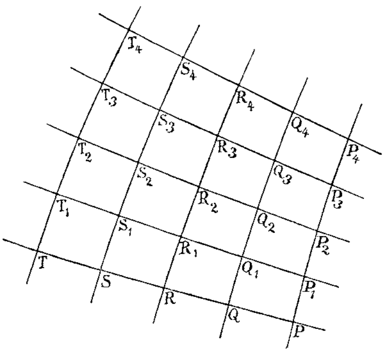

Fig. 68.

Linie der zweiten Krümmung und zwar die durch den Punkt Q gehende. Ebenso bildet die Punktreihe R, R_1, R_2, R_3, R_4, ... eine weitere Linie der zweiten Krümmung, nämlich diejenige, welche durch den Punkt R geht, und so fort. Alle Linien der zweiten Krümmung theilen die Fläche ebenfalls in Zonen ein. Da ferner alle Krümmungslinien der ersten Art alle der zweiten Art unter rechten Winkeln schneiden, so theilen diese beiden Curvensysteme die ganze Fläche in rechteckige Flächenelemente. Diese Eintheilung der Fläche in rechteckige Elemente findet auch dann statt, wenn man nicht aus jedem von beiden Systemen unendlich benachbarte Krümmungslinien, sondern solche in endlichem Abstande von einander nimmt. Bevor wir weitergehen, wollen wir hierfür ein schon bekanntes Beispiel anführen.[26])

126. Wenn man eine beliebige Umdrehungsfläche durch eine Schaar von Ebenen, welche durch die Axe gehen, schneidet, so erhält man in den Schnittcurven die Linien der einen Krümmung der Fläche. [**122**] Denn damit eine Curve Krümmungslinie einer Fläche ist, muss in jedem ihrer Punkte das Element des Cylinders, welcher die Fläche in dem betreffenden Curvenelemente berührt, eine zu dieser Curve senkrechte erzeugende Gerade besitzen. Diese Bedingung findet hier aber nicht nur in jedem Punkte der Curve für ein Element eines diesem Punkte zugehörigen besonderen Cylinders statt — was völlig genügend wäre —, sondern sogar in allen Punkten der ganzen Curve für denselben Cylinder.

Schneidet man ferner die gegebene Umdrehungsfläche durch eine Schaar von zur Axe senkrechten Ebenen, so erhält man als Schnittcurven Kreise, welche die Linien der anderen Krümmung der Fläche sind. Denn wenn man in einem Punkte eines dieser Kreise die Tangente an den durch ihn gehenden Meridian der Fläche zieht und durch Bewegung dieser Tangente parallel zu sich selbst das Element eines die gegebene Fläche berührenden Cylinders erzeugt, so berührt dieses Element die Umdrehungsfläche in dem betrachteten Kreise, welcher senkrecht auf der erzeugenden Geraden des Cylinders steht.

Bei jeder Umdrehungsfläche sind also die Meridiane die Krümmungslinien der einen Art und die Parallelkreise diejenigen der anderen Art, und es ist ohne weiteres ersichtlich, dass sich diese beiden Curvenschaaren auf der Fläche unter rechten Winkeln schneiden.

127. Zieht man in allen Punkten einer der Krümmungs-

linien, z. B. $PQRST\ldots$ die Normalen zu der gegebenen Fläche, so schneidet, wie wir wissen, die zweite Normale die erste in einem bestimmten Punkte, die dritte Normale die zweite in einem anderen Punkte, und so fort. Die Gesammtheit aller dieser Normalen, von denen je zwei aufeinanderfolgende in einer Ebene liegen, bildet mithin eine abwickelbare Fläche, welche immer senkrecht auf der krummen Fläche steht und sie in einer Krümmungslinie schneidet. Da diese Krümmungslinien überall auf den Normalen, welche die abwickelbare Fläche bilden, senkrecht steht, so ist sie auch eine Krümmungslinie dieser letzteren Fläche. Die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche wird von den sämmtlichen Schnittpunkten je zweier benachbarten Normalen, welche zugleich Tangenten der Rückkehrkante sind, gebildet und ist eine Evolute der Curve $PQRST\ldots$; sie ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Punkte dieser Curve und zugleich auch der geometrische Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung [**123**] in allen Punkten der Fläche, welche auf der Curve $PQRST\ldots$ liegen. Stellt man für alle anderen Krümmungslinien derselben Art, also für $P_1Q_1R_1S_1T_1$, $P_2Q_2R_2S_2T_2, \ldots$ dieselbe Betrachtung an, so erhält man eine Schaar von abwickelbaren Flächen, deren jede durch die Normalen längs einer dieser Krümmungslinien gebildet wird und in derselben die gegebene Fläche senkrecht durchdringt. Die Gesammtheit der Rückkehrkanten aller dieser abwickelbaren Flächen bildet eine neue krumme Fläche, welche der geometrische Ort von allen Mittelpunkten der ersten Krümmungen der gegebenen Fläche ist.

Was wir soeben für die eine der beiden Flächenkrümmungen bemerkt haben, gilt in gleicher Weise auch für die andere. Denn zieht man durch alle Punkte einer Krümmungslinie der anderen Art, z. B. der Linie $PP_1P_2P_3P_4\ldots$ die Flächennormalen, so liegen je zwei benachbarte in einer Ebene. Die sämmtlichen Normalen bilden mithin eine abwickelbare Fläche, welche die gegebene krumme Fläche in der Krümmungslinie $PP_1P_2P_3P_4\ldots$ senkrecht schneidet, und für welche diese Curve ebenfalls eine Krümmungslinie ist. Die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Curve $PP_1P_2P_3P_4\ldots$ und zugleich der geometrische Ort der Mittelpunkte der zweiten Krümmung in allen denjenigen Flächenpunkten, welche auf dieser Curve liegen. Die Betrachtung der anderen Krümmungslinien der zweiten Art, $QQ_1Q_2Q_3Q_4\ldots$, $RR_1R_2R_3R_4\ldots, \ldots$ führt zu analogen Resultaten. Es bilden somit alle Normalen noch eine zweite Schaar von abwickelbaren Flächen, welche sämmtlich auf der gegebenen krummen Fläche senkrecht stehen; die Rückkehrkanten dieser neuen abwickelbaren Flächen bilden eine zweite krumme Fläche, welche der geometrische Ort von den Mittelpunkten der zweiten Krümmungen der gegebenen Fläche ist.

128. In einigen besonderen Fällen sind die Mittelpunktsflächen der beiden Krümmungen einer und derselben krummen Fläche von einander verschieden, d. h. sie können getrennt erzeugt werden oder sie haben getrennte Gleichungen. Ein Beispiel hierfür bieten die Umdrehungsflächen; bei diesen reducirt sich eine der Krümmungsmittelpunktsflächen auf die Rotationsaxe, während die andere die Umdrehungsfläche ist, welche durch Rotation der zum Meridian der ursprünglichen Fläche gehörenden Evolute um dieselbe Axe erzeugt wird. Im Allgemeinen aber sind diese beiden [**124**] Krümmungsmittelpunktsflächen nicht von einander verschieden, können nicht getrennt erzeugt werden, haben dieselbe Gleichung und sind nur zwei verschiedene Schalen der nämlichen krummen Fläche.

129. Alle Normalen einer krummen Fläche können daher, wie man sieht, als die Schnitte von zwei Schaaren abwickelbarer Flächen betrachtet werden, deren jede die gegebene krumme Fläche unter rechtem Winkel in einer Curve, welche gleichzeitig eine Krümmungslinie der gegebenen und der abwickelbaren Fläche ist, durchdringt und von denen jede Fläche der einen Schaar jede der anderen Schaar rechtwinklig und in einer geraden Linie schneidet.[27])

Anwendungen der Krümmungslinien auf den Steinschnitt der Gewölbe und auf die Radirkunst.

130. Wir führen zwei Beispiele an, um zu zeigen, wie nützlich diese allgemeinen Resultate in bestimmten Fällen sein können. Das erste Beispiel entnehmen wir der Baukunst.

Die Quadersteingewölbe sind aus einzelnen Steinen erbaut, welche man als Gewölbsteine bezeichnet. Jeder Gewölbstein hat mehrere Seitenflächen, auf deren Herstellung die grösste Sorgfalt verwendet werden muss, nämlich 1. die vordere Seitenfläche, welche, da sie einen Theil der sichtbaren Oberfläche des

Gewölbes bilden soll, mit der grössten Genauigkeit gearbeitet werden muss und douelle genannt wird; 2. die Seitenflächen, mit welchen die benachbarten Gewölbsteine aneinandergrenzen und welche Fugen heissen. Die Herstellung dieser letzteren Flächen erfordert ebenfalls die grösste Genauigkeit; denn damit der Gewölbdruck des einen Quadersteines auf den benachbarten senkrecht zu der Fuge gerichtet ist, müssen die beiden Steine sich in einer möglichst grossen Anzahl von Punkten berühren, damit in allen der Druck möglichst klein und annähernd gleich ist. Man muss also bei jedem Gewölbstein den Fugen so genau, als es erreichbar ist, die Gestalt der Fläche wirklich geben, von welcher sie einen Theil bilden sollen, und um diesen Zweck leichter zu erreichen, müssen die Fugen die einfachste Gestalt besitzen und so genau als möglich leicht herstellbar sein. Aus diesem Grunde giebt man den Gewölbsteinen gewöhnlich ebene Fugen; aber nicht alle Gewölbflächen gestatten diese Anordnung, und bei manchen würde man den harmonischen Anblick, von welchem wir [**125**] sofort sprechen werden, zu sehr beeinträchtigen, wenn man die Fugen nicht als krumme Flächen gestalten würde. In diesem Falle muss man von allen krummen Flächen, welche überdies noch den anderen obigen Bedingungen genügen, diejenigen auswählen, deren Erzeugungsweise die einfachste und deren Herstellung am genauesten möglich ist. Von allen krummen Flächen lassen sich aber diejenigen am leichtesten herstellen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, und von diesen vornehmlich die abwickelbaren Flächen. Wenn also die Fugen krumme Flächen sein müssen, so gestaltet man sie — sofern es möglich ist — als abwickelbare Flächen.

Eine der Hauptbedingungen, denen die Gestalt der Fugen der Steine genügen muss, ist die, dass sie überall senkrecht auf der von diesen Quadersteinen gebildeten Gewölbfläche stehen müssen. Denn wenn die beiden Flächenwinkel, welche die sich berührenden Fugen zweier benachbarten Gewölbsteine mit der Oberfläche des Gewölbes bilden, merklich ungleich sind, so kann der Stein, dessen Winkel einen rechten überschreitet, dem Gegendrucke des angrenzenden Gewölbsteines einen grösseren Widerstand entgegensetzen als dieser ihm, und dadurch ist der andere der Gefahr ausgesetzt, an dieser Kante zu zersplittern. Eine solche Zersplitterung aber verunstaltet nicht nur das Gewölbe, sondern kann sogar seine Festigkeit beeinträchtigen und die Dauerhaftigkeit des Gebäudes verringern.

Wenn also die Fuge eine krumme Fläche sein muss, so ist es rathsam, dieselbe durch eine zur Oberfläche des Gewölbes senkrechte Gerade zu erzeugen, und wünscht man ferner, dass die Fuge eine abwickelbare Fläche ist, so müssen je zwei benachbarte dieser Normalen der Gewölbfläche, welche sozusagen die Fugen bilden, in einer Ebene liegen. Nun haben wir soeben gezeigt, dass diese Bedingung nur erfüllt sein kann, wenn alle Normalen durch eine Krümmungslinie der Gewölbfläche gehen. Wenn also bei einem Gewölbe die Fugen der Gewölbsteine abwickelbare Flächen sein sollen, so müssen sie nothwendiger Weise die Oberfläche des Gewölbes in Krümmungslinien schneiden.

Mit welcher Genauigkeit auch immer die Quadersteine eines Gewölbes hergestellt sein mögen, ihre Anordnung ist immer auf der Gewölbfläche zu erkennen und bringt auf ihr sehr in die Augen fallende Linien hervor, welche nach allgemeingültigen Gesetzen verlaufen und ausserdem noch besonderen, von der Art des Gewölbes abhängigen, Bedingungen genügen müssen. Von den allgemeingültigen Gesetzen beziehen sich die einen auf die Stabilität, die anderen auf die Dauerhaftigkeit des Gebäudes. Zu den Gesetzen dieser Art gehören die Vorschriften, dass die Fugen eines jeden einzelnen Gewölbsteines senkrecht aufeinander stehen [**126**] und senkrecht zu der Oberfläche des Gewölbes verlaufen müssen. Auch müssen die Linien, in welchen die Fugen der Steine die Oberfläche des Gewölbes schneiden, so verlaufen, dass diejenigen, welche die Gewölbfläche in Schichten eintheilen, senkrecht auf den anderen stehen, welche Linien eine Schicht wieder in einzelne Steine theilen. Was die besonderen Bedingungen anbetrifft, so giebt es deren verschiedene, und es kann hier nicht unsere Absicht sein, sie sämmtlich aufzuzählen. Die hauptsächlichste dieser besonderen Bedingungen ist, dass die beiden Schaaren von Fugenlinien, welche sich sämmtlich rechtwinklig schneiden, dem Charakter der Gewölbfläche angepasst sind. Auf der Gewölbfläche giebt es aber keine anderen Curven, welche gleichzeitig alle diese Bedingungen erfüllen, als die beiden Schaaren von Krümmungslinien; diese erfüllen aber alle Bedingungen vollkommen. Der Steinschnitt einer Gewölbfläche muss demnach immer nach ihren Krümmungslinien geschehen, und die Fugen der Gewölbsteine müssen Theile der abwickelbaren Flächen sein, welche von den längs dieser Krümmungslinien errichteten Normalen der Gewölbfläche gebildet werden. Für jeden Gewölbstein haben dann die vier Fugen und die einen Theil des Gewölbes bildende Vorderfläche sämmtlich rechteckige Gestalt.

Bevor die geometrischen Betrachtungen, auf denen alles von uns soeben Gesagte beruht, entdeckt waren, hatten die Künstler nur eine dunkle Vorstellung von diesen Gesetzen und dieser waren sie zu folgen gewöhnt. Hatte also z. B. die Gewölbfläche die Gestalt einer Umdrehungsfläche, wie z. B. bei Kuppelgewölben oder bei Tonnengewölben, so vollführten sie den Steinschnitt derselben nach Meridianen und Parallelkreisen, also nach den Krümmungslinien der Gewölbfläche.

Die Fugen, welche den Meridianen entsprechen, sind Theile von Ebenen, welche durch die Axe gelegt sind, und diejenigen, welche den Parallelkreisen entsprechen, Theile von Rotationskegelflächen mit derselben Axe. Diese beiden Arten von Fugen sind zu einander und zu der Gewölbfläche senkrecht.

Wenn aber die Gewölbflächen nicht eine so einfache Gestalt besassen und ihre Krümmungslinien sich nicht in so hervorstechender Weise darboten, wie z. B. bei elliptischen Gewölben und bei einer grossen Anzahl anderer, so waren die Künstler nicht im Stande, allen Bedingungen zu genügen, [127] und sie liessen in jedem besonderen Falle diejenigen unberücksichtigt, welche ihnen die grössten Schwierigkeiten darboten.

Es würde sich also empfehlen, dass in jeder Schule, welche in den Departements für den Unterricht in der darstellenden Geometrie errichtet würde, der Lehrer sich mit der Bestimmung und der Construction der Krümmungslinien von den Flächen, welche häufig in den Künsten Verwendung finden, beschäftigt, damit im gegebenen Falle die Künstler, welche solchen Untersuchungen nicht viel Zeit widmen können, sich mit Erfolg Rath holen und einfach die Resultate dieser Untersuchungen benutzen könnten.

131. Das zweite Beispiel, welches wir geben wollen, entlehnen wir der Radirkunst.

In der Radirkunst giebt man die Helligkeitsgrade, welche die verschiedenen Theile der Oberflächen der dargestellten Gegenstände zeigen, durch Schraffirungen wieder, welche man um so stärker und enger ausführt, je dunkler der Ton sein soll.

Wenn die Entfernung, aus welcher der Stich betrachtet werden soll, gross genug ist, dass die einzelnen Schraffirungsstriche nicht mehr wahrgenommen werden, so ist die Art der Schraffirung fast ganz gleichgültig; der Künstler kann die

Schraffirungslinien, welche Gestalt er ihnen auch geben mag, stets so stark und so dicht ziehen, dass er den gewünschten Helligkeitsgrad erzielt und die beabsichtigte Wirkung erreicht. Wenn aber — und dies ist der häufigere Fall — der Stich aus solcher Nähe betrachtet werden soll, dass die einzelnen Schraffirungslinien erkennbar sind, so ist ihr Verlauf nicht mehr gleichgültig. Es giebt vielmehr für jeden Gegenstand und für jeden Theil seiner Oberfläche Schraffirungslinien, welche durch ihren Verlauf geeigneter als alle anderen sind, um eine Vorstellung von der Krümmung der Fläche zu geben. Solcher besonderen Schraffirungslinien giebt es immer zwei Arten und einige Radirer gebrauchen, um den gewünschten Helligkeitsgrad leichter zu erzielen, beide Arten gleichzeitig, indem sie die Schraffirungslinien sich kreuzen lassen. Diese besonderen Schraffirungslinien, für deren Verlauf die Künstler nur ein unbestimmtes Gefühl haben, sind aber keine anderen als die Projectionen der Krümmungslinien der darzustellenden Flächen.

Da die Oberflächen der meisten Gegenstände nicht mathematisch streng definirt werden können, so können auch ihre Krümmungslinien nicht genau — weder durch Rechnung noch durch graphische Constructionen — bestimmt werden. Wenn aber die Künstler in ihrer Jugend geübt worden sind, die Krümmungslinien [**128**] von einer grossen Anzahl verschiedener Flächen, welche mathematisch streng definirt werden können, zu bestimmen, so werden sie später sogar bei weniger exact bestimmbaren Flächen ein empfindlicheres Auge und Gefühl für die Gestalt und die Lage dieser Linien besitzen. Sie werden die Schraffirungslinien mit grösserer Sicherheit richtig zu ziehen wissen, und ihre Werke werden dadurch ausdrucksvoller.

Wir gehen nicht weiter auf diesen Gegenstand ein, welcher vielleicht nur den geringsten von allen den Vortheilen darstellt, die sowohl die Künste als die Industrie aus der Errichtung einer Schule für darstellende Geometrie in jedem Distrikte der Republik ziehen würden.

[129] Zusätze.[28])

I. Ueber die Schnittpunkte dreier Kreiscylinder.

In dem Artikel 4 (S. 7) wurde behauptet, dass drei gerade Cylinder mit Kreisgrundfläche im Allgemeinen acht gemeinsame Schnittpunkte haben. Die folgende Darlegung will diese Behauptung nicht beweisen, sondern nur an einem Beispiele zeigen, dass acht Schnittpunkte möglich sind.

Betrachten wir zunächst zwei Cylinder und nehmen wir an, dass der eine einen merklich kleineren Durchmesser als der andere besitzt, und dass die Axen beider Cylinder sich schneiden und einen Winkel, welcher bedeutend kleiner als ein rechter ist, mit einander bilden. Dann durchdringt offenbar der Cylinder, dessen Durchmesser der kleinere ist, den anderen auf entgegengesetzten Seiten, indem er auf dessen Vorderseite und Rückseite zwei Schnittcurven erzeugt, welche einander gleich und ziemlich langgestreckt sind. Nehmen wir dann weiter an, dass der dritte Cylinder einen Durchmesser hat, dessen Länge zwischen den Durchmesserlängen der beiden ersten Cylinder liegt, dass seine Axe diejenige des Cylinders mit dem grössten Durchmesser unter einem Winkel schneidet, welcher weniger von einem rechten Winkel abweicht als der Winkel zwischen den Axen der beiden ersten Cylinder, und dass er die auf dem grössten Cylinder liegenden Schnittcurven ungefähr in ihrer Mitte durchschneidet, so ist klar, dass jede der beiden neuen Schnittcurven, welche durch den Schnitt des mittleren mit dem grössten Cylinder entstehen, die beiden alten Schnittcurven in vier Punkten schneidet, da die neuen Curven breiter und weniger lang gestreckt als die alten sind. Es giebt mithin auf der Vorderseite des grössten Cylinders vier allen drei Cylindermänteln gemeinsame Punkte und ebensoviele auf seiner Rückseite, also im Ganzen acht derartige Punkte. In gewissen besonderen Fällen kann diese Zahl kleiner sein und kann sich, je nach der Lage der drei Cylinder zu einander und den Grössenverhältnissen ihrer Durchmesser, auf sechs, vier, zwei und sogar auf Null reduciren.

[130]

II. Viertes Beispiel für die Erzeugung krummer Flächen (Fortsetzung des Artikels 12).

Geradlinige Flächen. Diese Flächen können immer durch eine unbegrenzte Gerade erzeugt werden, welche sich so bewegt, dass sie beständig drei gegebene Curven, welche ihre Bewegung leiten, schneidet. Denkt man sich eine Schaar von Kegeln construirt, deren Scheitel die Punkte der ersten Curve k_1 sind und welche sämmtlich die zweite Curve k_2 als Leitlinie haben, so bestimmen die Punkte, in welchen diese Flächen von der dritten Curve k_3 geschnitten werden, die verschiedenen Lagen der die geradlinige Fläche erzeugenden Geraden. In der nebenstehenden [ebenso wie Fig. 70 perspectivisch gezeichneten] Figur 69 seien k_1, k_2, k_3 die drei gegebenen Leitcurven. Hat man auf der Curve k_1 einen Punkt A_1 willkürlich als Scheitel eines durch die Curve k_2 gelegten Kegels gewählt, so schneidet dieser die dritte Curve in einem Punkte A_3, welcher auf dem Kegel die Mantellinie $A_1 A_3$ bestimmt. Diese Mantellinie ist zugleich die durch den Punkt A_1 gehende erzeugende Gerade der geradlinigen Fläche.

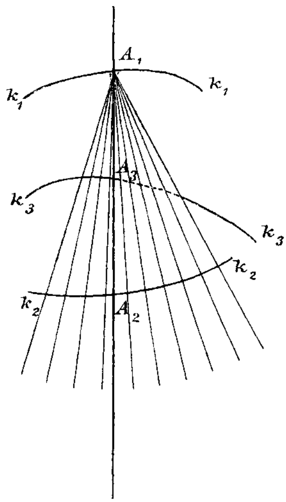

Fig. 69.

Sind die drei Leitlinien k_1, k_2, k_3 Gerade, so erhält man eine windschiefe Fläche, welche die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, dass sie durch die bewegliche Gerade auf zwei verschiedene Weisen erzeugt werden kann. Die erste Erzeugungsweise stimmt mit der obigen allgemeinen Bestimmung derartiger Flächen überein: die bewegliche Gerade schneidet bei ihrer Bewegung beständig drei gegebene gerade Linien k_1, k_2, k_3.

Die zweite Erzeugungsweise ergiebt sich aus der ersten. Unter allen Geraden, welche die drei gegebenen Geraden k_1,

k_2, k_3 (Fig. 70) schneiden, wählt man drei, g_1, g_2, g_3, willkürlich aus und betrachtet sie als neue Leitlinien. Dann kann sich die erzeugende Gerade auch so bewegen, dass sie beständig die drei Geraden g_1, g_2, g_3 schneidet.

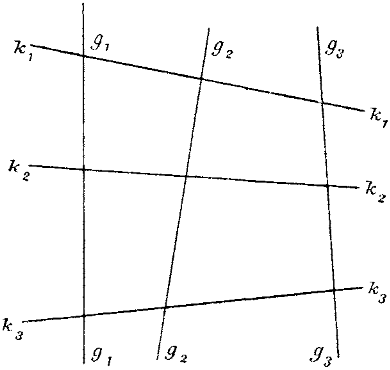

Fig. 70.

Gleichgültig nun ob man die drei gegebenen Geraden k_1, k_2, k_3 oder die drei Geraden g_1, g_2, g_3 als Leitlinien benutzt, die bewegliche Gerade erzeugt dieselbe windschiefe Fläche.

Aus dieser doppelten Erzeugungsweise folgt, dass die Fläche als ein Gewebe dargestellt werden kann. Die Kettenfäden gehen durch die gegebenen Geraden und die Einschlagfäden durch die Geraden g_1, g_2, g_3; [**131**] durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Gerade, von denen die eine der Kette, die andere dem Einschlage angehört.[29])

III. Bestimmung der Tangentialebene an eine geradlinige Fläche. (Fortsetzung des Artikels 30.)

Aufgabe. (Fig. 71) In einem gegebenen Punkte P einer geradlinigen Fläche die Tangentialebene an dieselbe zu legen.

Lösung. Es seien k_1, k_2, k_3 die drei gegebenen Leitcurven der erzeugenden Geraden, P sei der auf der geradlinigen Fläche gegebene Punkt*); ferner seien A_1, A_2, A_3 die Punkte, in welchen die durch den Punkt P gehende geradlinige Erzeu-

*) Die Figur ist perspectivisch gezeichnet zu verstehen. Wenn die gegebene geradlinige Fläche durch die Projectionen der drei Geraden auf zwei Projectionsebenen bestimmt worden wäre (wie es in den Beispielen des Artikels 30 und der vorhergehenden Artikel geschehen ist), so würde eine einzige Projection eines Punktes der windschiefen Fläche bereits die Lage des Punktes völlig bestimmen.

gende die drei Leitcurven schneidet, und t_1, t_2, t_3 die Tangenten an diese Leitcurven in den Punkten A_1, A_2, A_3.

Construirt man die geradlinige Fläche, für welche die drei Tangenten t_1, t_2, t_3 Leitcurven sind, und stellen die Geraden

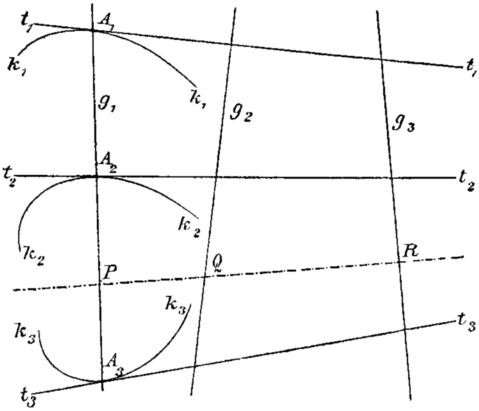

Fig. 71.

g_1, g_2, g_3 drei beliebige Lagen der Erzeugenden dieser Fläche vor, so erkennt man leicht, dass diese windschiefe Fläche mit der gegebenen die Gerade g_1, längs welcher sich beide Flächen berühren, gemeinsam hat. Die Tangentialebene in dem Punkte P ist daher beiden Flächen gemeinsam und berührt beide längs der Geraden g_1. Um aber in dem Punkte P die Tangentialebene an die zweite geradlinige Fläche, deren Leitlinien die drei Tangenten t_1, t_2, t_3 sind, zu construiren, muss man zwei gerade Linien bestimmen, welche in dieser Ebene liegen. Nach dem zweiten Zusatze kann man aber durch jeden Punkt P dieser letzteren Fläche zwei Gerade ziehen, welche ganz auf der Fläche liegen; die eine derselben $A_1 A_2 P A_3$ schneidet die drei Geraden t_1, t_2, t_3 und die andere PQR schneidet die drei erzeugenden Geraden g_1, g_2, g_3. Mithin ist die durch die beiden Geraden $A_1 A_3$ und PR gelegte Ebene die Tangentialebene im Punkte P an die gegebene geradlinige Fläche.

[**132**] Diese Lösung setzt voraus, dass man Tangenten an die Leitcurven zu ziehen versteht. In dem dritten Theile ist

aber gezeigt worden, wie man Tangenten an Curven ziehen kann, welche durch den Schnitt zweier bekannten krummen Flächen entstehen oder welche durch die nach einem gegebenen Gesetze erfolgende Bewegung eines Punktes erzeugt werden.

Nachdem so die Aufgabe, in einem gegebenen Punkte einer geradlinigen Fläche eine Tangentialebene an sie zu legen, gelöst worden ist, kann man sich die umgekehrte Aufgabe stellen: »Die Tangentialebene einer geradlinigen Fläche ist gegeben; man soll ihren Berührungspunkt finden.«

Die **Lösung** derselben ergiebt sich leicht aus dem Vorhergehenden. Die Tangentialebene der geradlinigen Fläche geht nämlich sicher durch eine der geradlinigen Erzeugenden der Fläche; es sei die Gerade g_1 diejenige, durch welche die Tangentialebene gehen muss. Dann bringt man die gegebene Tangentialebene zum Schnitt mit den Geraden g_2, g_3. Die durch diese beiden letzten Schnittpunkte gezogene Gerade schneidet die Gerade g_1 in einem bestimmten Punkte, welcher der gesuchte Berührungspunkt ist.

Hierzu ist noch zu bemerken, dass, wenn eine Ebene eine abwickelbare Fläche berührt, die Berührung längs der ganzen Geraden, welche der Ebene und der Fläche gemeinsam ist, stattfindet. Wenn eine Ebene dagegen eine windschiefe Fläche berührt, so findet nur in einem Punkte der gemeinsamen Geraden Berührung statt, in allen anderen Punkten derselben aber schneidet die Ebene die Fläche.

Anmerkungen.

Aufgaben, wie sie die darstellende Geometrie zu lösen lehrt, wurden von der Baukunst frühzeitig dem Menschen gestellt. Deshalb reichen auch die Anfänge der darstellenden Geometrie, trotzdem sie als Wissenschaft verhältnissmässig jungen Ursprunges ist, ebenso weit zurück, als die alten Culturvölker bei ihren Bauten Grundrisse, Aufrisse, Querschnitte und ähnliche geometrische Hülfsmittel zu benutzen gelernt hatten. Ohne Kenntniss dieser Mittel würde ihnen in der That die Errichtung ihrer grossartigen Tempel- und sonstigen gewaltigen monumentalen Bauten unmöglich gewesen sein. Es sind sogar von den Aegyptern auf Papyrus ausgeführte Grund- und Aufrisszeichnungen, sowie auf Wänden aufgezeichnete Aufrisse von Säulencapitälen noch erhalten. Der römische Schriftsteller *Vitruvius* (*Pollio*), dessen zehn, dem *Augustus* gewidmete Bücher über Architektur vermuthlich im Jahre 10 v. Chr.*) vollendet wurden, sagt, dass zu Entwürfen die Ichnographie, die Orthographie und die Scenographie verwendet würden, von denen die erste die Abbildung auf dem Boden, die zweite die Abbildung der Frontfläche und die letzte die Ansicht der Front- und der zurückweichenden Seitenflächen**) liefere, und lässt damit ebenfalls erkennen, dass das Grund- und Aufrissverfahren zu damaliger Zeit schon längst bekannt gewesen ist.

Wie praktische Bedürfnisse die Grundlagen der darstellenden Geometrie geschaffen hatten, so ist auch ihre Fortentwickelung bis in das vorige Jahrhundert hinein auf das engste mit der Praxis, vornehmlich mit der Baukunst und Malerei verknüpft geblieben. Das Bestreben, möglichst naturgetreue

---

*) *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Aufl. 1894. Bd. I, S. 507.

**) *Chr. Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1884. Bd. I, S. 5.

Bilder zu liefern, zwang die Maler, den geometrischen Gesetzen des Sehens nachzuspüren, und so entstand allmählich die Lehre von der Perspective, welche die erste der beiden Aufgaben, die *Monge* in dem vorliegenden Werke (S. 3) der darstellenden Geometrie zuweist, löst. Die Baukunst dagegen war bemüht, die Lösung der zweiten Aufgabe, nämlich Aufgaben über räumliche Dinge auf Grund ihrer Abbildung auf eine Ebene durch Constructionen in dieser Ebene zu lösen, zu erreichen. Auf die historische Entwickelung der Lehre von der Perspective kann ich nicht eingehen, da es hier nur meine Aufgabe sein kann, kurz zu skizziren, wie sich das Grund- und Aufrissverfahren bis zu *Monge*'s Zeit entwickelt hatte. In Bezug auf die Geschichte der Perspective, sowie auf die ausführlichere Darstellung der Entwickelung der speciellen darstellenden Geometrie verweise ich auf den zwar kurzen, aber erschöpfenden geschichtlichen Abriss, welchen *Chr. Wiener* in dem ersten Bande seines bekannten Lehrbuches der darstellenden Geometrie (Leipzig, 1884) S. 5—61 gegeben hat und welchem ich — bei der Unzugänglichkeit der Originalwerke — hier öfter ausschliesslich folgen muss. Es existirt zwar noch die Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Oesterreich (Brünn, 1897) von *F. J. Obenrauch*, welche aber den Titel einer Geschichte nicht zu rechtfertigen vermag. Der Verfasser gebietet über eine bedeutende Litteraturkenntniss, und das Buch enthält daher viele Einzelheiten, welche in dem *Wiener*'schen Abrisse nicht enthalten sein können. Diese sind aber nicht leicht aufzufinden, weil das Buch ziemlich unübersichtlich ist, und da ferner das Material nicht kritisch gesichtet ist, so findet sich Werthvolles und Werthloses in bunter Reihenfolge. Das Fehlen eines einheitlichen Planes in der Anlage des Werkes, sowie eine oft ermüdende Darstellungsweise und vielfache Wiederholungen bedingen es, dass das *Obenrauch*'sche Buch trotz seines bedeutenden Umfanges von 442 Seiten — oder vielmehr gerade wegen dieses — dem Leser nicht im Entferntesten eine solche klare Kenntniss von der geschichtlichen Entwicklung der darstellenden Geometrie geben kann, wie der vorzügliche *Wiener*'sche Abriss. Von den beiden Theilen, in welche das *Obenrauch*'sche Buch zerfällt, lässt der erste Theil, welcher eine ausführliche Biographie von *Monge* giebt, die angeführten Mängel noch in geringerem Maasse hervortreten.

Die Fortentwicklung des Grund- und Aufrissverfahrens im Mittelalter haben wir in den Bauhütten der damaligen Zeit zu suchen. Ausser Grundriss und Aufriss verwendete man noch horizontale und verticale Querschnitte; besondere Aufmerksamkeit aber widmete man den Aufgaben über den sogenannten Steinschnitt der Gewölbe, auf welchen auch *Monge* in dem vorliegenden Werke wiederholt Bezug nimmt. Eine Menge von empirisch gefundenen Constructionen, welche nicht immer streng richtig waren, wurden zur Lösung der sich darbietenden Aufgaben benutzt. Nach den Gepflogenheiten der Bauhütten wurden die in einer Hütte verwendeten Constructionen den anderen gegenüber möglichst geheim gehalten, weshalb sich ihre Kenntniss nur langsam verbreitete.

Als erstes Werk, welches die — bis dahin nur mündlich überlieferten — Constructionen über den Steinschnitt mittheilt, nennt *Wiener* (a. a. O., S. 22) den Traité de l'architecture von *Philibert de l'Orme* aus dem Jahre 1576. Ferner sind zu nennen *Mathwin Jousse*, Secrets de l'architecture, 1642, und *Derand*, L'architecture des voûtes ou l'art des traits, et coupes des voûtes, 1643. Alle diese Werke theilen die Constructionen mit, ohne den Versuch zu machen, sie als richtig nachzuweisen; wie *Wiener* angiebt, werden in dem letztgenannten Werke Durchdringungen von Flächen, Bestimmungen wahrer Gestalten, Umlegungen und Abwickelungen bereits benutzt.

Einen wesentlichen Fortschritt in theoretischer Hinsicht bezeichnen die Schriften von *Girard Desargues* *) aus Lyon (1593—1662), von welchen aber nur die von seinem begabtesten Schüler *Abraham Bosse* (1611—1678) herausgegebene Schrift: La pratique du trait à preuves, de Mr. *Desargues*, *Lyonnois*, pour la coupe des pierres en l'architecture; Paris 1643, hier zu nennen ist. Diese Schrift ist auf Grundlage von *Desargues*' Gedanken verfasst, welcher auch eine Vorrede dazu geschrieben hat**). Wie *Chr. Wiener*

*) *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. II, 1892. S. 617—621.

**) Herrn *M. Cantor* verdanke ich die freundliche Mittheilung, dass von *Bosse*'s Schrift in Band II, S. 5—11 der Oeuvres de *Desargues* réunies et analysées par M. *Poudra* (Paris 1864) die angiebt, enthält dieselbe ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der wahren Gestalt der Gewölbsteinflächen, welches auf einer allgemeinen Veränderung der Projectionsebene beruht. Das Verfahren ist aber nicht einfach, und da es *Bosse* auch noch schwer verständlich beschrieben hat, so überrascht es nicht, dass *Desargues*, als sein geistiger Urheber, von den Praktikern, welche »die geometrische Auffassung zu Gunsten der handwerksmässigen, wenn auch nachweislich nicht selten irrigen Uebung bekämpften« (*Cantor*), heftig angefeindet wurde. Nur in einfachen Fällen wird das Verfahren der Aenderung der Projectionsebenen jetzt noch angewendet; im Allgemeinen führen andere Methoden schneller und einfacher zum Ziele.

Ich erwähne nur kurz den 1671 und 1676 erschienenen Euclides adauctus et methodicus des Italieners *Camillo Guarino Guarini*, in welchem ein Abschnitt Betrachtungen aus der darstellenden Geometrie enthält*), und den Traité de la coupe des pierres von *de la Rue* aus dem Jahre 1728 mit vielen sehr genauen Zeichnungen, welche bei Herstellung der Vorlagen für die École polytechnique benutzt wurden, und wende mich dann zu dem französischen Officier und Ingenieur *Frézier* (1682—1773), welcher der weitaus bedeutendste Schriftsteller auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie vor *Monge* ist. Sein Werk: La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de stéréotomie erschien 1738 und 1739 in zwei Bänden in Strassburg (Zweite Auflage in drei Bänden in Paris, 1754, 1768, 1769). Das Werk scheint jetzt sehr selten geworden zu sein; es ist mir trotz vieler Bemühungen nicht gelungen, dasselbe zu erhalten, und ich muss mich daher streng an den von *Chr. Wiener* gegebenen Bericht**) halten, dem auch *M. Cantor* aus dem gleichen Grunde zu folgen gezwungen war***). *Frézier* behandelt in dem ersten Bande die Theorie für sich, wobei er zu

---

Rede ist, und dass die von *Desargues* selbst verfasste Vorrede ebendaselbst im Band I, S. 469—478 abgedruckt ist. Ich habe mich auf den Bericht von *Chr. Wiener* (a. a. O., Bd. I, S. 23), welcher die *Bosse*'sche Schrift selbst gesehen und ihr seine Angaben entnommen zu haben scheint, gestützt, zumal da *Poudra*, wie mir Herr *Cantor* mittheilte, im Allgemeinen von vollendeter Unklarheit und nicht immer zuverlässig ist.

*) *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1898. Bd. III, S. 13.

**) *Chr. Wiener*, a. a. O., Bd. I, S. 23—24.

***) *M. Cantor*, a. a. O., Bd. III, S. 767—768.

allen Constructionen die zugehörigen Beweise giebt, und in dem zweiten Bande die Anwendungen auf die Praxis, welche Trennung bis dahin noch kein Schriftsteller vorgenommen hatte. Zur Darstellung der räumlichen Gebilde benutzt *Frézier* in erster Linie die orthogonale Parallelprojection, welche »man sich durch herabfallende Tropfen Tinte veranschaulichen soll«. Die Projectionsebene ist, je nachdem es sich um den Grundriss (ichnographie, projection horizontale) oder um den Aufriss (orthographie) handelt, horizontal oder vertical gestellt. Dann betrachtet *Frézier* die ebenen krummen Linien und die krummen Flächen, welche er durch Bewegung einer erzeugenden Curve entstehen lässt und von welchen er die windschiefen Flächen besonders eingehend bespricht; zu den letzteren zählt er noch Flächen, welche jetzt nicht mehr dazu gerechnet werden. Ferner construirt er die Durchdringungen von Körpern, indem er durch parallele Ebenen auf ihren Oberflächen Curven ausschneidet, deren Durchschnittspunkte dem zu bestimmenden Schnitte angehören; hier betrachtet er vornehmlich die Schnitte von Cylindern, Kegeln, Kugeln und Ellipsoiden und classificirt die hierbei erzeugten Curven. Es folgen dann die Abwickelungen von Polyedern und krummen Flächen, so z. B. wickelt *Frézier* den schiefen Kreiskegel ab, indem er ihn durch eine eingeschriebene Pyramide von genügend grosser Seitenzahl ersetzt. Schliesslich bestimmt er die Neigungswinkel von Flächen und löst dabei verschiedene Aufgaben über das Dreikant.

Die Lehre von der Parallelprojection war also zu *Monge*'s Zeiten bereits weit entwickelt und ein reiches Material an Sätzen und Constructionen, die zum Theil geometrisch streng begründet, zum Theil aber auch nur praktisch erprobt waren, vorhanden. Der mächtigen geometrischen Begabung *Monge*'s aber blieb es vorbehalten, aus den vorhandenen Bausteinen, denen er selbst noch viele hinzufügte, die darstellende Geometrie als selbständige mathematische Disciplin auf wissenschaftlicher Grundlage systematisch aufzubauen. Es sei hier nebenbei bemerkt, dass diese Disciplin auch ihren Namen »géométrie déscriptive« *Monge* verdankt. Bevor wir uns aber näher mit seinem Werke beschäftigen, mögen kurz seine äusseren Lebensverhältnisse geschildert werden.

Gaspard Monge wurde am 10. Mai 1746 in Beaune, einem burgundischen Städtchen in dem Département Côte d'or geboren, wo sein Vater *Jacques Monge* als Handwerker lebte. Trotz seiner ärmlichen Verhältnisse suchte dieser aber seinen drei Söhnen *Gaspard*, *Louis* und *Jean* eine gute Ausbildung angedeihen zu lassen und schickte sie auf die von den Oratoristen, einer geistlichen Brüderschaft, geleitete gelehrte Schule seiner Heimathstadt. Dort zeichnete sich *Gaspard Monge* in hervorragender Weise vor seinen Mitschülern aus, und jeden Augenblick seiner freien Zeit benutzend, suchte er sich in den auf der Schule wenig gepflegten exacten Wissenschaften gute Kenntnisse zu verschaffen. Mit Hülfe eines selbstverfertigten Winkelmessinstrumentes verfertigte er einen genauen (noch jetzt in Beaune aufbewahrten) Plan seiner Vaterstadt, welchem er es zu verdanken hatte, dass er mit 16 Jahren bereits Lehrer der Physik an der Oratoristenschule in Lyon wurde. Es kann deshalb nicht Wunder nehmen, dass die Oratoristen sich bemühten, ihn ganz für ihren Orden zu gewinnen, was aber glücklicher Weise an dem einsichtsvollen Widerspruche seines Vaters scheiterte.

Monge kehrte in Folge dessen bald nach seiner Vaterstadt zurück und trat kurze Zeit später in die berühmte militärische Genieschule zu Mézières ein, welche im Jahre 1748 gegründet worden war, um tüchtige Officiere zur Leitung der Fortificationsarbeiten in Frankreich heranzubilden. Die Aufnahme der Zöglinge, welche nach erfolgreich beendigten Studien sofort als Genieleutnants in die französische Armee eingestellt wurden, war aber an die Bedingung geknüpft, dass sie adliger Herkunft seien. Mit der Schule war noch eine Hülfsschule verbunden, welche geschickte Werkmeister für die Festungsbauten ausbilden sollte; an die Zöglinge dieser Hülfsschule wurde bei der Aufnahme keinerlei Bedingung hinsichtlich ihrer Herkunft gestellt, und in diese nur konnte daher *Monge* eintreten. Die Schüler der Hülfsschule wurden in den Elementen der Mathematik und in der Bauconstructionslehre unterrichtet, und mussten dabei Modelle von Gewölbsteinen und anderen Constructionstheilen aus Gyps anfertigen. Wegen dieser letzteren Thätigkeit hatten die Zöglinge der eigentlichen Genieschule der Hülfsschule den Spottnamen »Gypsschule« beigelegt.

Eine der Hauptaufgaben der Befestigungskunst in jener Zeit bestand in dem Defiliren eines Festungswerkes, von welchem *Monge* auch in dem vorliegenden Werke (S. 51—52) ausführlicher spricht. Diese Aufgabe verlangt alle Theile einer Befestigung so anzulegen, dass keiner derselben von der Artillerie eines belagernden Feindes direct bestrichen werden kann. *Monge* gab, als eine solche Aufgabe, welche man bis dahin nur durch umständliche Rechnungen zu lösen vermocht hatte, gestellt war, eine einfache geometrische Lösung. Hierdurch erkannten seine Vorgesetzten *Monge*'s aussergewöhnliche Befähigungen und ernannten ihn im Jahre 1765 zum Repetitor an der Anstalt. Achtzehn Jahre lang, bis 1783, wirkte *Monge* nun als Lehrer in Mézières, wo er 1768 die Professur für Mathematik und drei Jahre später auch noch die für Physik erhielt. In Mézières schuf er, abgesehen von hervorragenden analytischen Abhandlungen, seine darstellende Geometrie und unterrichtete auch in derselben. Vor die Oeffentlichkeit durfte *Monge* aber mit diesem von ihm geschaffenen Wissenszweige erst dreissig Jahre später treten, da ihm von seinen Vorgesetzten dessen Geheimhaltung aufs Strengste anbefohlen war; diese sonderbare Maassregel entsprang der Rivalität, welche zwischen den verschiedenen französischen Militärschulen bestand und jede ihre Vortheile sorgsam vor den anderen verborgen halten liess. Auf Grund seiner analytisch-geometrischen Untersuchungen, deren Veröffentlichung ihm gestattet war, wurde *Monge* im Jahre 1780 zum Mitgliede der Pariser Akademie ernannt und erhielt gleichzeitig die Professur für Hydraulik im Louvre, welche er bis zum Jahre 1783 gemeinsam mit seiner Stellung in Mézières inne hatte, indem er die eine Hälfte des Jahres in Paris, die andere Hälfte in Mézières lehrte. Als er im Jahre 1783 noch zum Examinator der Marinezöglinge ernannt worden war, verliess er seine Stellung in Mézières und siedelte ganz nach Paris über.

Dass die wenige Jahre später ausbrechende Revolution von *Monge* mit Freuden begrüsst wurde, kann nicht überraschen, wenn man bedenkt, wie sehr er gerade unter den Privilegien der bevorrechteten Stände und dem Jahrzehnte lang auf ihn ausgeübten geistigen Drucke gelitten hatte; bald genug lernte er freilich die Kehrseite kennen und erfuhr an sich selbst, dass die Revolution alles Andere, nur keine wahre Freiheit für den Einzelnen gebracht hatte. Vielleicht war diese Erkenntniss der wesentlichste Grund dafür, dass er sich später so schnell mit dem Kaiserthume aussöhnte. Gegen seinen Willen wurde *Monge* nach der Entthronung Ludwigs XVI. im August des Jahres 1792 von der Nationalversammlung zum Marineminister in jenem Ministerium ernannt, dessen Seele der furchtbare *Danton* als Justizminister war. Sobald er es wagen konnte, ohne befürchten zu müssen, deshalb des Landesverrathes beschuldigt zu werden, suchte er seine Entlassung als Minister nach, welche er aber erst im April 1793 erlangen konnte. Er übernahm dann die Leitung der staatlichen Gewehrfabriken, Geschützgiessereien und Pulvermühlen, in welcher Stellung er sich — trotz grösster Nothlage, da ihm die Republik wegen Geldmangels den Gehalt nicht zahlen konnte — die grössten Verdienste um die Vertheidigung des Landes erwarb und noch Zeit fand, ein umfangreiches Werk über die Fabrikation der Kanonen zu verfassen. Alle diese Verdienste hinderten jedoch nicht, dass er unter *Robespierre*'s Schreckensherrschaft im Juli 1793 von seiner Stellung enthoben und in Anklagezustand versetzt wurde; es genügte, dass er im Convente gegen das Todesurtheil Ludwig's XVI. gesprochen hatte, um ihn verdächtig erscheinen zu lassen. Dem ihm drohenden Verhängnisse entging er noch rechtzeitig durch die Flucht in das Ausland.

Nach dem Sturze der Schreckensregierung des Wohlfahrtsausschusses kehrte *Monge* in sein Vaterland zurück. Da unter den Revolutionswirren fast alle Schulen im Lande eingegangen waren und nun ein grosser Lehrermangel sich fühlbar machte, so suchte der Convent nach Mitteln, um so schnell als möglich neue Lehrkräfte zu bekommen, und verfügte durch einen Erlass vom 30. Oct. 1794 die Errichtung der École normale, welche aber nur während der ersten vier Monate des Jahres 1795 wirklich bestanden hat. Funfzehnhundert durch Begabung ausgezeichnete Jünglinge wurden aus allen Departements ausgewählt, um in dieser Schule von den ersten Gelehrten Frankreichs unterrichtet zu werden. *Lagrange* und *Laplace* lehrten an derselben Mathematik, während *Monge* hier zum ersten Male seine darstellende Geometrie öffentlich vortragen durfte, in deren Unterricht ihn *Lacroix* und *Hachette* unterstützten. Die Vorträge fanden in dem Amphitheater des Jardin des plantes statt, während die constructiven Uebungen zu der darstellenden Geometrie in der zu Zeichensälen umgebauten Kirche der Sorbonne abgehalten wurden. *Monge* eröffnete am 19. Januar 1795 seine Vorträge mit einer programmartigen Rede, in welcher er in der nachdrücklichsten Weise auf die Nothwendigkeit einer Aenderung des öffentlichen Unterrichtes hinwies.

Um die französische Nation von der Abhängigkeit, in welcher sie sich von der ausländischen Industrie befinde, zu befreien, müsse, so führte *Monge* aus, der öffentliche Unterricht in Frankreich bestrebt sein, Dinge zu lehren, welche Genauigkeit erfordern und dadurch die Schüler an sorgfältiges und exactes Arbeiten gewöhnen; es seien daher auch die Schüler mit dem Gebrauche von Instrumenten, welche zur Herstellung präciser Arbeiten dienen, vertraut zu machen. Ferner müssen die Ergebnisse der Naturforschung immer weiteren Kreisen bekannt werden, da gerade diese Kenntnisse für den Fortschritt der Industrie von höchster Bedeutung seien. Schliesslich sei auch die Kenntniss der Maschinen nöthig, welche entweder Naturkräfte zu benutzen ermöglichen oder dazu dienen, die Handarbeit zu vermindern und die Arbeitserzeugnisse gleichförmiger und genauer zu machen. Zur Erreichung dieser Ziele sei aber die Kenntniss der darstellenden Geometrie, dieser für den Ingenieur unerlässlich nothwendigen Sprache, von ganz besonderer Wichtigkeit. Sie sei leicht zu erlernen, gewöhne die Schüler durch die mit dem Unterrichte zu verbindenden constructiven Uebungen an Präcision und wecke den Forschungstrieb, da sie sich immerfort damit beschäftige, Unbekanntes aus Bekanntem zu ermitteln. Ferner ermögliche sie ein klares Verständniss der Elemente der Maschinenlehre. Bis jetzt sei aber kein gutes elementares Werk über darstellende Geometrie vorhanden, entweder weil derselben von den Gelehrten zu wenig Interesse entgegengebracht, oder weil sie nur in mangelhafter Weise von Leuten gepflegt worden sei, deren ungenügende Vorbildung sie hinderte, die Ergebnisse ihrer Betrachtungen Anderen mitzutheilen. Deshalb seien mündliche Vorträge ohne wirklichen Nutzen, wenn nicht constructive Uebungen, welche zugleich die Schüler mit dem Gebrauche von Cirkel und Lineal vertraut machen, ergänzend hinzutreten. In diesen Uebungen seien auch die wesentlichsten Anwendungen der Projectionsmethode z. B. auf die Perspective, die Schattenlehre, den Steinschnitt und die Maschinenlehre eingehender zu berücksichtigen. —

Noch ehe die École normale ihren ersten Cursus beendigt hatte, fiel sie bereits den politischen Missverhältnissen zum Opfer, weil die Schüler dem Convente nicht demokratisch genug gesinnt erschienen*). Im Jahre 1794 war aber bereits der Plan zur Gründung einer neuen Schule entstanden, welche die früheren, in der Revolution sämmtlich eingegangenen Militärschulen ersetzen sollte, und bereits am 28. Sept. 1794 ge-

---

*) *Ch. Dupin*, Essai hist. sur les services et les travaux scientifiques de G. M. Paris 1819. S. 40.

nehmigte der Convent die für die geplante Anstalt nöthigen, sehr bedeutenden Geldsummen. Die Schule selbst wurde erst im Jahre 1795, nach Schliessung der École normale unter dem Namen École polytechnique eröffnet. *Monge*, welcher von Anfang an das Unternehmen eifrigst gefördert hatte und nach dessen Plänen die Schule eingerichtet war, sollte ihr erster Präsident werden; da er aber ablehnte, wurde *Lagrange* dazu ernannt. Bis zum Jahre 1809 war *Monge* als Professor für darstellende Geometrie an der École polytechnique thätig und trug nicht zum wenigsten dazu bei, dass dieselbe wenige Jahre nach ihrer Gründung sich in ganz Europa den glänzendsten Ruf erworben hatte, welchen sie auch viele Jahrzehnte hindurch sich unvermindert zu erhalten wusste. Wir finden in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts unter ihren Lehrern der Mathematik die berühmtesten französischen Mathematiker, welche zum grossen Theile früher selbst Schüler der Anstalt gewesen waren; aus den an ihr gehaltenen Cursen entstanden Lehrbücher, von denen viele zu den klassischen Werken der mathematischen Litteratur gezählt werden. Nach dem Vorbilde der École polytechnique wurden später die technischen Hochschulen in Deutschland, Oesterreich und der Schweiz gegründet.

Monge's eifrige Thätigkeit an der École polytechnique wurde nur durch verschiedene politische Missionen unterbrochen, welche ihn nach Italien und später mit der napoleonischen Expedition nach Aegypten, wo er bis zu seiner Heimkehr Präsident des dort gegründeten ägyptischen Institutes war, führten. Gelegentlich der ersten Sendung *Monge*'s nach Italien lernte ihn Napoleon kennen und hochschätzen. Auch nach seiner Thronbesteigung bewahrte ihm Napoleon seine Freundschaft und überhäufte ihn mit Titeln und Ehren. Aber selbst dem Kaiser gegenüber bewahrte *Monge* seinen Freimuth und verhinderte dadurch manche Gewaltmaassregel, die derselbe in der ersten Zeit seiner Regierung gegen die polytechnische Schule ausführen wollte, weil ihre Schüler seiner Thronusurpation anfänglich feindlich gegenüber gestanden hatten.

Diese nahen persönlichen Beziehungen zu Napoleon waren jedoch auch die Ursache, dass nach seinem Sturze *Monge* unter der Verfolgung der Bourbonen zu leiden hatte. Er wurde im Jahre 1816 aller seiner Aemter und Würden für verlustig erklärt und aus der Liste der Mitglieder der Pariser Akademie gestrichen. In Folge dieser Schicksalsschläge fiel er in geistige Umnachtung und verbrachte seine beiden letzten Lebensjahre in völliger Theilnahmlosigkeit, bis ihn der Tod am 28. Juli 1818 von seinen Leiden erlöste.

Wegen ausführlicherer Mittheilungen über *Monge*'s Leben und Wirken verweise ich noch auf die folgenden Biographien und Abhandlungen:

Ch. Dupin, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de *Gaspard Monge*. Paris, 1819.

Fr. Arago, *Gaspard Monge* (Biographie lue en séance publique de l'Académie des sciences, le 11 mai 1846). Oeuvres complètes de *Fr. Arago*, T. II, S. 427—592, Paris 1854. Deutsche Ausgabe von *W. G. Hankel*, Bd. II. S. 347—484, Leipzig 1854.

K. Fink, *Monge*. Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, 1892, 7.—10. Heft.

C. G. J. Jacobi, Ueber die Pariser polytechnische Schule. Gesammelte Werke, Bd. VII, S. 355. Berlin 1891.

Auf diese Darstellungen muss ich auch hinsichtlich *Monge*'s unsterblicher Leistungen auf anderen Gebieten der Mathematik, vornehmlich in der analytischen Geometrie, welcher sein berühmtestes Werk (Application de l'analyse à la géométrie) gewidmet ist, verweisen, da hier nur seine Verdienste um die darstellende Geometrie zu würdigen sind.

Die darstellende Geometrie nahm in den Lehrplänen der École normale und École polytechnique einen breiten Raum ein, indem ihr die halbe Unterrichtszeit gewidmet war. »Die Zahl der von den Schülern in einem Jahre hergestellten Zeichnungen übertrafen durch ihre Zahl und Schwierigkeit jede Vorstellung; es lassen sich diese Leistungen nur durch das Beispiel des Lehrers *M.* erklären«*). *Monge*'s Vorträge, welche wie alle Vorträge an der École normale von den Professoren frei gehalten werden mussten, wurden, von Stenographen nachgeschrieben und von *Monge* revidirt, zum ersten Male im Jahre 1795 in dem Journal des écoles normales Bd. I—IV gedruckt veröffentlicht unter dem Titel: Leçons de géométrie descriptive, données à l'École normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes. Die erste Ausgabe dieser Vorlesungen in Buchform erschien im Jahre VII der Republik (22. Sept. 1798 bis 22. Sept. 1799) unter dem Titel: Géo-

*) *Jacobi*, Werke, Bd. VII, S. 363.

métrie descriptive (Leçons données aux écoles normales, l'an III de la république). Das Werk erschien in einer Reihe von Auflagen in den Jahren 1800, 1811, 1820, 1827, 1837, 1847 (7. Aufl.). Abgesehen von einzelnen Worten, deren Aenderung wie z. B. république in empire, bez. royaume die inzwischen veränderte Staatsform erkennen lässt, stimmen die verschiedenen Auflagen fast völlig überein; es sind auch stets dieselben Figuren benutzt. Den einzelnen Auflagen sind verschiedene Supplemente angefügt, so z. B. der 3. Auflage (1811) ein Supplement von *Hachette*, der 4. und 5. Auflage (1820 und 1827) ein solches von *Brisson*.

Monge sagt in dem Vorworte der Ausgabe von 1798/99, dass das Buch nur den ersten Theil eines umfassenden Werkes über darstellende Geometrie bilden solle; in einem zweiten Theile würde er die gegebenen Constructionen auf den Steinschnitt, das Fachwerk, die Perspective, Schattenconstructionen und Maschinenlehre anwenden. Die dazu gehörigen Zeichnungen seien auch schon gestochen und dienten jetzt den Schülern der polytechnischen Schule als Modelle; verschiedene von der Regierung ihm ertheilte Missionen, deren eine ihn jetzt nach Aegypten führe, hinderten ihn aber an der Vollendung des Werkes, welche auch nie erfolgte.

In dem der vierten Auflage angefügten Supplement theilt *Brisson* einige dieser Anwendungen mit, welche er nach *Monge*'s hinterlassenen Aufzeichnungen bearbeitet hat, nämlich die Grundlagen der Schatten- und Beleuchtungslehre und der Perspective.

Für die vorliegende erste deutsche Ausgabe von *Monge*'s Géométrie descriptive ist die Ausgabe von 1798/99 benutzt, da dieselbe einerseits als von *Monge* selbst redigirt zu betrachten und andrerseits die erste selbständige Buchausgabe ist. Die am Schlusse befindlichen drei Zusätze fehlen in den späteren Auflagen (wenigstens von der dritten an; die zweite war mir unzugänglich). Die 50 Figuren des Originals, welche für dasselbe von hervorragenden Künstlern gezeichnet und dort auf 24 besonderen Tafeln abgedruckt sind, zeichnen sich durch vorzügliche Ausführung, geschickte Annahmen und schöne Verhältnisse aus. Die Originalfiguren sind auf photographischem Wege verkleinert und als Textfiguren in diese deutsche Ausgabe aufgenommen. Dem liebenswürdigen Entgegenkommen des Herrn Verlegers ist es zu danken, dass viele Figuren sich doppelt vorfinden, um das lästige Umblättern beim Vergleiche von Figur und Text so viel als möglich zu vermeiden. Dass es an einzelnen Stellen doch noch nöthig ist, hat seinen Grund einerseits darin, dass eine andere typographische Anordnung nicht möglich war, andrerseits darin, dass die doppelt aufzunehmenden Figuren vor Beginn des Druckes bezeichnet werden mussten. Nur wenige neue Figuren mussten zur Ergänzung hinzugefügt werden; es sind dies die Figuren Nr. 2, 34, 56, 69, 70. Es lassen sich also, wenn nöthig, leicht die ursprünglichen Nummern der Figuren ermitteln, wenn man diese Figuren nicht mitzählt und jede der mehrfach vorhandenen übrigen Figuren nur einfach zählt. In allen Figuren ist aber die Bezeichnung in systematischer Weise abgeändert, da die ursprüngliche nicht immer consequent durchgeführt und sehr wenig übersichtlich war. Ueber die Art der neuen Bezeichnung ist in der Anmerkung 1 (S. 193) das Nöthige gesagt; ich hoffe, dass durch die sehr mühsame Arbeit, welche die Umänderung der Bezeichnung natürlich verursachte, leichte Uebersichtlichkeit erzielt ist. — Die Uebersetzung schliesst sich thunlichst getreu dem Texte der Originalausgabe an, wenn auch die vorgenommene Aenderung der Bezeichnung in den Figuren öfter kleine Aenderungen im Texte nothwendig zur Folge hatte und manche Flüchtigkeiten, welche auf Rechnung der Stenographen zu setzen sind, beseitigt werden mussten. Die in eckigen Klammern eingefügten Zahlen sind die Seitenzahlen der Originalausgabe von 1798/99; sie beginnen mit [**5**], da die Aufnahme der (S. 184) erwähnten Eröffnungsrede *Monge*'s, welche der Originalausgabe vorgedruckt ist, sich hier nicht empfahl.

Von den Supplementen, welche den späteren Ausgaben angehängt sind, habe ich keines in die Ausgabe aufgenommen, da sie ausser dem erwähnten Supplemente von *Brisson* zu *Monge* überhaupt in keiner directen Beziehung stehen. Aber auch das von *Brisson* verfasste Supplement glaubte ich ausschliessen zu sollen, obgleich es nach den hinterlassenen Papieren *Monge*'s verfasst ist; denn abgesehen davon, dass die Darstellung nicht von *Monge* selbst herrührt, hat *Brisson* auch seine eigene Theorie über die Stärke der Farbentöne hineinverflochten und dadurch enthält auch dieses Supplement zu viel fremdartiges.

Durch seine Géométrie descriptive ist *Monge* der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft geworden, indem er nach Sammlung und Sichtung des vorhandenen

Materials dasselbe durch eigne Sätze und Constructionen ausserordentlich bereicherte, alles systematisch ordnete und wissenschaftlich vertiefte. Als wesentlichster Schritt, den *Monge* hierbei that, ist wohl seine Einführung der Schnittlinie der Grund- und Aufrissebene als Projectionsaxe anzusehen, welcher Name aber von *Monge* nicht gebraucht wurde; wie *Wiener* angiebt, bezeichnete *Monge* diese Axe mit dem aus der Perspective entlehnten Namen ligne de terre, welcher in der Géométrie descriptive sich nicht findet. Um diese Axe legte er dann die eine Projectionsebene in die andere um und erreichte dadurch die Vereinigung von Grund- und Aufriss in ein und derselben Ebene. Hieraus ergaben sich eine Menge von Vortheilen, so z. B. dass die beiden Projectionen eines Punktes in einer Senkrechten zu der Projectionsaxe liegen, dass eine Ebene durch ihre beiden Spuren, welche sich auf der Projectionsaxe schneiden, bestimmt ist, dass die Projectionen der Normalen einer Ebene senkrecht auf ihren gleichnamigen Spuren stehen, und andere mehr. Ferner ist seine Darstellung krummer Flächen hervorzuheben, welche er durch ihre scheinbaren Umrisse und die Projectionen ihrer Erzeugenden, von denen er gegebenen Falles zwei verschiedene Systeme von Erzeugenden benutzt, bestimmt. Durch alle diese Maassnahmen konnte er nicht nur die früher bereits gelösten Aufgaben einfacher lösen, sondern noch ungelöste und neue Aufgaben in einfacher Weise erledigen. Von besonderem Interesse ist der letzte Theil, in welchem *Monge* von der Krümmung der Curven und Flächen, den Evoluten, Krümmungslinien und abwickelbaren Flächen spricht; die Theorie der Krümmung hat er in seinen analytischen Abhandlungen, besonders in dem schon genannten Werke: application de l'analyse à la géométrie geschaffen und eingehend begründet. Es ist interessant, wie er dagegen hier diese Begriffe und ihre gegenseitigen Beziehungen auf Grund rein geometrischer Betrachtungen zu erklären versucht.

Die Form, in welcher *Monge* die darstellende Geometrie schuf, war eine so vorzügliche, dass seine Nachfolger bis über die Mitte dieses Jahrhunderts hinaus nichts wesentliches daran ändern konnten. Seine Vorlesungen lagen entweder direct oder in freien Bearbeitungen (wie z. B. in dem ersten grösseren deutschen Werke über darstellende Geometrie: *G. Schreiber*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach *Monge*'s géométrie descriptive vollständig bearbeitet 1828/29) überall dem Unterrichte in der darstellenden Geometrie zu Grunde. In der neueren Zeit wurde der wissenschaftliche Ausbau der darstellenden Geometrie durch die vornehmlich von deutschen Mathematikern bewirkte Einführung der projectiven Geometrie weiter gefördert und dadurch die analytisch-geometrischen Hülfsmittel, welche *Monge* und seine unmittelbaren Nachfolger oft zur Begründung der Constructionen verwendet hatten, ganz aus der darstellenden Geometrie entfernt, wie es ihrem rein geometrischen Charakter angemessen ist.

Bei der grossen Bedeutung, welche die darstellende Geometrie jetzt für weite Berufskreise hat, und bei der erhöhten Aufmerksamkeit, welche ihr neuerdings erfreulicher Weise auch an unseren deutschen Universitäten, wo sie so lange Zeit als Stiefkind behandelt worden war, zu Theil wird, hoffe ich, dass diese neue Ausgabe von *Monge*'s Vorlesungen Vielen erwünscht kommt. Denn es bildet nicht nur die Géométrie descriptive noch heute die wissenschaftliche Grundlage der darstellenden Geometrie, sondern sie bietet jedem Lehrer dieser Disciplin ein an Eleganz, Klarheit und vollendeter Form der Darstellung schwer erreichbares Vorbild dar. Kein Geringerer als *Gauss* spendet ihr in seiner Besprechung ihrer dritten Auflage in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 31. Juli 1813 das hohe Lob: »Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit und Concision im Vortrage, eines wohlgeordneten Ueberganges vom Leichteren zum Schwereren und der Reichhaltigkeit an neuen Ansichten und gelungenen Ausführungen beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neueren sonst manchmal vermissten geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann*).«

Wenn ich hier auch auf die Weiterentwickelung der darstellenden Geometrie in diesem Jahrhundert nicht eingehen kann, da mir der zur Verfügung stehende Raum kaum eine Namenaufzählung, welche überdies wenig Werth hat, gestatten würde, so muss ich doch dem französischen Mathematiker *Lacroix* (1765—1843) wegen seines Werkes über darstellende Geometrie, welches 1796, also fast gleichzeitig mit den *Monge*schen Vorlesungen erschien, noch einige Zeilen widmen. Dieses

*) *Gauss*, Werke, Bd. IV, S. 359.

Werk trägt den Titel: Compléments des éléments de géométrie. Essais de géométrie sur les plans et les surfaces und deckt sich inhaltlich fast ganz mit *Monge*'s Géométrie descriptive. *Lacroix* betont in dem Vorworte seines Werkes ausdrücklich, dass er die Materialien zu demselben bereits vor dem Erscheinen der *Monge*'schen Vorlesungen gehabt habe, dass mithin in demselben nicht eine blosse Nachahmung dieser erblickt werden dürfte. Die merkwürdige Uebereinstimmung der beiden Werke lässt sich aber wohl folgendermaassen erklären*). Eine Construction, nämlich diejenige des Durchschnittes zweier Umdrehungsflächen, deren Axen sich schneiden, hatte *Lacroix*, wie er selbst angiebt, von einem Schüler der Militärschule in Mézières erfahren. Ferner hatte er dann später zufällig Zeichnungen, welche in Mézières unter *Monge*'s Leitung von den dortigen Schülern angefertigt waren, erhalten und es war ihm gelungen, die in diesen Zeichnungen versteckten Lösungen zu enträthseln. Dabei mag eine von *Monge* früher selbst gethane Aeusserung *Lacroix* auf den richtigen Weg gewiesen haben; *Monge* hatte nämlich in einer Vorlesung über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie, welche *Lacroix* besucht hatte, gesagt, dass er die Lösung von gewissen behandelten Aufgaben mit Hülfe von Zirkel und Lineal ebenfalls besitze, sie aber nicht mittheilen dürfe. Die directe Veranlassung zu der Herausgabe von *Lacroix*'s Werke wurde dann seine Ernennung zum Hülfsprofessor für darstellende Geometrie an der École normale. Man darf demnach meines Erachtens, ohne *Lacroix* Unrecht zu thun, doch sagen, dass sein Werk im Wesentlichen direct *Monge*'s Gedanken wiedergiebt, wenn auch die hervorragende mathematische Geschicklichkeit, welche dazu gehörte, aus den Zeichnungen allein die Methoden herauszulesen, zu bewundern ist.

Ueber die Weiterentwicklung der darstellenden Geometrie in diesem Jahrhundert verweise ich auf den wiederholt genannten geschichtlichen Abriss von *Chr. Wiener* und auf die diesbezüglichen Mittheilungen in den folgenden Werken:

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (Bruxelles, 1837; 2. édit. Paris, 1875) und Rapport sur les progrès de la géométrie (Paris, 1870).

---

*) *Chr. Wiener*, a. a. O. Bd. I, S. 29–30.

E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. V, Leipzig 1898. Bisher ist nur die erste Lieferung erschienen.)

Specielle Textanmerkungen.

1) *Zu S. 11. Monge* hat in seinen Figuren nur die Punkte mit Buchstaben bezeichnet und zwar in der Weise, dass die horizontalen Projectionen derselben mit grossen lateinischen Buchstaben, die verticalen Projectionen mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet sind. Dadurch war er gezwungen, für gerade Linien und Curven stets zwei, oft aber mehr Buchstaben zu verwenden. Die Projectionsaxe ist bei *Monge* stets mit LM bezeichnet. Diese umständliche Bezeichnung erschwert natürlich die Uebersicht sehr; deshalb ist in dieser neuen Ausgabe die Bezeichnung durchweg geändert und der jetzt gebräuchlichen angepasst worden. Wenn auch die verschiedenen neueren Lehrbücher in Einzelheiten in der Bezeichnungsweise von einander abweichen, so haben sie doch alle dieselben Grundsätze anerkannt, welchen ich daher in dem vorliegenden Werke ebenfalls gefolgt bin. (Vgl. z. B. *Rohn-Papperitz*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1893. Bd. I, S. 5—6.)

Es sind durchweg bezeichnet

Punkte mit grossen lateinischen Buchstaben: $A, \ldots P, \ldots,$

Linien (gerade und krumme) mit kleinen lateinischen Buchstaben: $a, \ldots, g, \ldots, k, \ldots,$

Ebenen mit grossen griechischen Buchstaben: $\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{E}, \ldots,$

Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \ldots, \varphi, \ldots;$

die horizontale oder erste Projectionsebene mit Π',
die verticale oder zweite Projectionsebene mit Π'',
die Schnittlinie beider, d. i. die Projectionsaxe mit x;
die horizontale und verticale (erste und zweite) Projection eines Punktes P mit P' und P'', bez. einer Linie g mit g' und g'',

der Schnittpunkt der Ebene $P'P''P$ und der Axe x mit P_x,
die Spurpunkte einer Geraden g mit G_1, G_2,
die Spurlinien einer Ebene E mit e_1, e_2,
der Schnittpunkt beider Spurlinien mit der Axe x mit E_x.

Wenn eine ebene Figur um eine Axe in eine andere Ebene gedreht wird, so sind die gedrehten Elemente wieder mit denselben Buchstaben bezeichnet, aber durch den oben oder unten angehängten Index o oder Δ ausgezeichnet.

Eine bei *Monge* sich häufig findende Ausdrucksweise, welche auch in der Uebersetzung der Kürze wegen beibehalten ist, sei hier noch erwähnt. Ist z. B. von dem Punkte P auf der Geraden g, deren beide Projectionen g' und g'' gegeben sind, die erste Projection P' auf g' bekannt, so findet man, sagt *Monge*, die zweite Projection P'', indem man P' auf g'' projicirt, und meint damit, dass man ein Loth von P' auf die Axe x fällen und bis zum Schnittpunkte mit g'' verlängern soll.

2) *Zu S. 17.* *Monge* unterscheidet nicht in der jetzt gebräuchlichen Weise Analysis und Algebra von einander, sondern braucht beide Wörter abwechselnd nach Belieben, was natürlich in der vorstehenden Ausgabe beibehalten werden musste. — Auf die angedeuteten Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie, welche jetzt ihren Ausdruck in der Formentheorie gefunden haben, weist *Monge* zu wiederholten Malen hin.

3) *Zu S. 34.* Die gesetzmässige Bestimmung der Kopf- und Lager-, Stoss- und Wölbflächen der einzelnen Steine bei Mauern und Gewölben, welche aus behauenen Quadersteinen erbaut werden sollen, bezeichnet man als Stein- oder Fugenschnitt (Stereotomie). Unter Fuge versteht man in der Baukunst zunächst die dünne (mit Mörtel ausgefüllte) Schicht zwischen den aneinanderliegenden Flächen zweier benachbarten Baukörper, ferner aber auch diese Flächen selbst, sowie die Linie, in welcher jene Schicht äusserlich sichtbar wird.

4) *Zu S. 35.* *Monge* gebraucht hier das Wort Philosophie, welches ich aber durch das besser den Sinn wiedergebende Psychologie ersetzt habe.

5) *Zu S. 41.* Man erkennt bei *Monge* immer die Absicht, nur solche Constructionen zu geben, welche immer, auch bei

beschränktem Raume, anwendbar bleiben, wenn sie auch nicht die einfachsten sind. Um hier die zweiten Spurlinien der gesuchten Tangentialebenen zu finden, würde es am einfachsten sein, die zweiten Spurpunkte der Mantellinien, deren erste Projection die Gerade m' ist, zu bestimmen und diese bez. mit den Punkten, in welchen die ersten Spurlinien s_1 und t_1 die Axe x schneiden, zu verbinden; diese zweiten Spurpunkte würden aber oft unzugänglich sein.

In dem von *Hachette* der dritten Auflage der Géométrie descriptive hinzugefügten Supplemente sind einfachere Lösungen für verschiedene der von *Monge* behandelten Aufgaben gegeben.

6) *Zu S. 46—48.* Die hier mitgetheilte Construction des kürzesten Abstandes zweier windschiefen Geraden ist von *Monge* in den späteren Auflagen unter Beibehaltung desselben Gedankenganges in den Einzelheiten etwas abgeändert worden. In der dritten Auflage (S. 44—46) — ob bereits in der zweiten Auflage konnte ich nicht feststellen, da sie mir nicht zugänglich war — findet man statt der Abschnitte 1—3 (S. 46—48) die folgenden und statt der Figur 20 die nachstehende Figur 72.

1)' »Um die erste Spurlinie s_1 der Ebene Σ, welche durch die Gerade g parallel zu der Geraden h gelegt werden soll, zu finden, zieht man durch einen beliebigen Punkt von g eine Parallele i zu h, deren Projectionen bez. parallel zu h' und h'' sind. Als diesen Punkt wählt man den Punkt A auf g, dessen verticale Projection der Schnittpunkt A'' von g'' mit h'' ist, und dessen horizontale Projection der Schnittpunkt A' des von A'' auf die Axe x gefällten Lothes mit g' ist. Zieht man dann durch A' die Parallele i' zu h', so ist dieselbe die horizontale Projection der Hülfsgeraden i, und ihre verticale Projection i'' fällt mit h'' zusammen. Durch den Schnittpunkt H_1'' von $h'' = i''$ mit der Axe x zieht man ferner eine Senkrechte zu der letzteren, welche i' in dem ersten Spurpunkte J_1 der Geraden i trifft. Die Verbindungslinie der beiden Spurpunkte G_1 und J_1 ist dann die erste Spurlinie s_1 der Ebene Σ.«

2) »Um die geradlinige Erzeugende m, in welcher der um die Gerade h als Axe construirte Kreiscylinder von der Ebene Σ berührt wird, zu erhalten, muss man beachten, dass dieselbe zu h parallel ist und folglich ein Punkt ausreicht, ihre Lage zu bestimmen. Um einen solchen Punkt zu finden, legt man durch einen beliebigen Punkt der Geraden h, z. B. durch ihren ersten Spurpunkt H_1 eine Ebene N senkrecht zu ihr.

Der Schnitt dieser Ebene mit der Ebene Σ ist dann die Berührungslinie dieser letzteren mit dem durch H_1 gehenden Normalschnitte des Cylinders.«

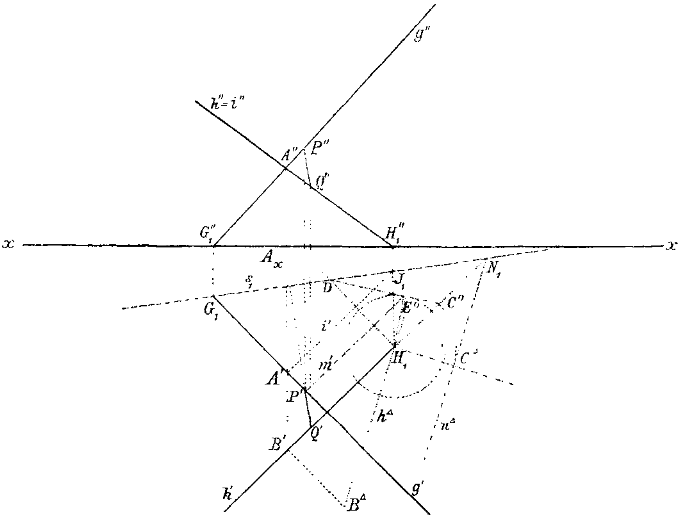

Fig. 72.

»Ferner wird die Ebene Σ von der verticalen Ebene $h'h$ in der zu h parallelen Geraden $n = N_1 C$ $(n' = h')$ geschnitten [, welche von der Ebene N in dem Punkte C getroffen wird]. Die Ebene N schneidet folglich die Ebene $h'h$ in der zu h und n senkrechten Geraden $H_1 C$, die horizontale Projectionsebene in der zu h' senkrechten Geraden $H_1 D$ [und also die Ebene Σ in der Geraden DC]. Wenn man hierauf die Ebene N um ihre erste Spurlinie $H_1 D$ niederlegt, so behält der Punkt D unverändert seine Lage bei, während der Punkt C in den Punkt C^0 auf h' fällt, dessen Lage man folgendermaassen erhält.«

»Man legt die verticale Ebene $h'hn$ um h' in die erste Projectionsebene um und bestimmt zunächst den Neigungswinkel der parallelen Geraden h und n gegen dieselbe. Zu dem Zwecke errichtet man in dem Schnittpunkte B' der verticalen Geraden $A''A'$ mit h' das Loth $B'B^{\Delta} = A_x A''$ und verbindet B^{Δ} mit H_1 durch die Gerade h^{Δ}, welche mit h' den gesuchten Winkel einschliesst. [Hierauf zieht man durch den ersten Spurpunkt N_1 von n die Parallele n^{Δ} zu h^{Δ} und errichtet in H_1 ein Loth auf h^{Δ}, welches die Gerade n^{Δ} in dem Punkte C^{Δ}, dem mit der Ebene $h'h$ niedergelegten Punkte C, trifft. $H_1 C^{\Delta}$ giebt den senkrechten Abstand des Punktes C von der Geraden h; beschreibt man also mit $H_1 C^{\Delta}$ einen Kreisbogen um H_1, so ist der Schnittpunkt desselben mit h' der gesuchte Punkt C^0.]*) Die Gerade DC^0 ist dann die niedergelegte Berührungslinie der Ebene Σ und des von der Ebene N auf dem Cylinder ausgeschnittenen Kreises. Fällt man also von dem Punkte H_1 das Loth $H_1 E^0$ auf die Gerade DC_0 und beschreibt mit $H_1 E^0$ um H_1 als Mittelpunkt einen Kreis, so ist er der niedergelegte Schnittkreis des Cylinders und der Ebene N. Klappt man den Punkt E^0 zurück, so muss durch ihn die Berührungsgerade m gehen, deren erste Projection folglich die durch E^0 parallel zu h' gezogene Gerade m' ist. Die Gerade m schneidet die gegebene Gerade g in dem Punkte P, dessen Projectionen P' und P'' sind und durch welchen die Linie des kürzesten Abstandes geht.«

3) »Fällt man von P' ein Loth auf die Spurlinie s_1, dessen Verlängerung h' in dem Punkte Q' schneidet, so ist Q' der Endpunkt der horizontalen Projection der gesuchten Linie des kürzesten Abstandes. Projicirt man Q' auf die Gerade h'', so erhält man Q'' und folglich in $P''Q''$ die verticale Projection des gesuchten Abstandes.«

7) *Zu S. 62—65. Monge* hat zuerst den Satz bewiesen (Feuilles d'analyse appliquées à la géométrie, à l'usage de l'école polytechnique, publiée la première année de cette école [an III de la république], Paris [an IX] 1800/1801. Nr. 5), dass die Berührungscurve eines Tangentialkegels an eine Fläche n^{ter} Ordnung auf einer Fläche $(n—1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegt. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten der Kegelspitze und $F = 0$ die Gleichung der gegebenen Fläche, so ist die Gleichung jener Fläche $(n—1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(x-\xi)\frac{\partial F}{\partial x} + (y-\eta)\frac{\partial F}{\partial y} + (z-\zeta)\frac{\partial F}{\partial z} - nF = 0\,.$$

*) In der Ausgabe von 1811 ist der Text in diesem und dem vorigen Abschnitte ziemlich unklar. Des leichteren Verständnisses wegen habe ich einige Sätze umgestellt und ergänzende in eckigen Klammern hinzugefügt.

Hieraus folgt für $n = 2$ sofort, dass die Curve, in welcher ein Tangentialkegel an eine Fläche zweiter Ordnung diese berührt, eine ebene Curve, also ein Kegelschnitt ist.

Aus diesem Satze lässt sich aber der Satz in dem Art. 40 ohne Weiteres in derselben Weise folgern, wie dies *Monge* in dem letzten Abschnitte des Art. 39 für die Umdrehungsflächen zweiten Grades thut. Der obige Hülfssatz liegt auch diesem Beweise in dem Art. 39 zu Grunde; ohne die Kenntniss dieses Satzes ist daher auch *Monge*'s Beweis über Pol und Polare nicht überzeugend. Zu vermuthen ist, dass *Monge* den Satz über die Berührungscurve eines Tangentialkegels an eine Fläche zweiten Grades in seinen gleichzeitigen Vorlesungen über analytische Geometrie schon abgeleitet hatte und deshalb in der Vorlesung über darstellende Geometrie ihn als bekannt voraussetzte, zumal er einen rein geometrischen Beweis desselben nicht besass.

Für die Kugel und ihren Tangentialkegel ist der obige Satz sofort evident, und deshalb ist auch *Monge*'s Beweis (S. 62—64) für den Satz, dass sich die Berührungssehne eines von einem ausserhalb gelegenen Punkte an einen Kreis gezogenen Tangentenpaares um einen Punkt dreht, wenn sich der erste Punkt auf einer Geraden bewegt, und für dessen Umkehrung so überaus augenfällig. Man liest darauf weiter mit einiger Verwunderung *Monge*'s aus den obigen Gründen nicht befriedigenden Beweis des analogen Satzes für beliebige Kegelschnitte; man hätte eher erwarten dürfen, dass er den allgemeinen Fall durch Centralprojection aus dem specielleren ableiten würde, zumal dies bereits früher von *Philippe de la Hire* geschehen ist (Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques etc., Paris, 1673 und Sectiones conicae in novem libros distributae, Paris 1685*)).

Da der Kürze wegen im Vorstehenden und auch in dem Inhaltsverzeichnisse die Bezeichnungen Pol und Polare gebraucht worden sind, so sei bemerkt, dass sich dieselben bei *Monge* nirgends finden, sondern erst jüngeren Ursprunges sind. Wie *Dupin* in seinem Essai historique angiebt, findet sich das Wort Pol zuerst in einer Arbeit von *Servois* (*Gergonne*, Annales des mathématiques 1810/11. Bd. 1, S. 337) und das Wort Polare zuerst in einer Arbeit von *Gergonne* (am glei-

*) *E. Kötter*, a. a. O., S. 46—47.

chen Orte, 1812/13. Bd. III, S. 297); sie scheinen sich auch nur langsam eingebürgert zu haben, da sie — wie *E. Kötter* (a. a. O., S. 49) angiebt — *Lamé* 1818 noch nicht gebraucht hat. —

Die Haupteigenschaft der Polaren eines Kegelschnittes, dass sie nämlich für jede Gerade durch den Pol der geometrische Ort des dem Pole und ihren beiden Curvenschnittpunkten zugeordneten vierten harmonischen Punktes ist, war bereits im Alterthume bekannt, und ist von *Apollonius* für einen ausserhalb eines Kegelschnittes gelegenen Pol und von *Pappus* für den Kreis bewiesen. Dann hat *Desargues* in seinem berühmten Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan* vom Jahre 1639 den Satz allgemein mit Hülfe von Involutionen bewiesen. Ferner hat *de la Hire* in den oben genannten Abhandlungen den Satz für den Kreis bewiesen und ihn dann durch Projection verallgemeinert.

Die Entwickelung der Lehre von den Polareigenschaften findet man ausführlich dargestellt in *E. Kötter*'s schon genanntem Berichte (a. a. O. S. 45—52, 83—88). Vgl. auch *W. Fiedler*, Cyklographie (Leipzig 1882, S. 54—105, 156—168).

8) *Zu S. 68—70.* Nach einer Anmerkung in dem Berichte von *E. Kötter* (a. a. O. S. 112, vorletzte Anmerkung) scheinen die Betrachtungen, mit Hülfe deren *Monge* die Sätze von den Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise (S. 68—69) ableitet, auf *d'Alembert* zurückzuführen zu sein (vgl. Nova Acta ac. sc. imp. Petropolitanae 1805, Bd. 14, S. 139—152). —

In dem Satze über die vier Kugeln hat *Monge* die drei Aehnlichkeitsebenen übersehen, welche zwei innere und vier äussere Aehnlichkeitspunkte enthalten. Bezeichnet $A_{\varrho\sigma}$ den äusseren und $J_{\varrho\sigma}$ den inneren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kugeln K_ϱ und K_σ (für ϱ, $\sigma = 1, 2, 3, 4$ und $\varrho \gtrless \sigma$), so erhält man durch Anwendung der Sätze über die Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise leicht die folgenden acht Aehnlichkeitsebenen, in welchen die von je 4 Aehnlichkeitsaxen gebildeten vollständigen Vierseite liegen:

---

*) Oeuvres de *Desargues* réunies et analysées par M. *Poudra*, Bd. I.

$$\left.\begin{array}{cccccc}
S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{23} & S_{24} & S_{34} \\
S_{12} & S_{13} & J_{14} & S_{23} & J_{24} & J_{34} \\
S_{12} & J_{13} & S_{14} & J_{23} & S_{24} & J_{34} \\
J_{12} & S_{13} & S_{14} & J_{23} & J_{24} & S_{34} \\
J_{12} & J_{13} & J_{14} & S_{23} & S_{24} & S_{34}
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
J_{12} & J_{13} & S_{14} & S_{23} & J_{24} & J_{34} \\
J_{12} & S_{13} & J_{14} & J_{23} & S_{24} & J_{34} \\
S_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{23} & J_{24} & S_{34}
\end{array}\right\} \text{fehlen bei } \textit{Monge.}$$

9) *Zu S. 72—77.* Die von *Monge* bei der hier gegebenen Construction benutzte zweite Umdrehungsfläche ist im Allgemeinen, wie leicht nachzuweisen ist, ein einschaliges Rotationshyperboloid, welches mit der gegebenen Umdrehungsfläche dieselbe Axe a besitzt und deren erzeugende Gerade die gegebene Gerade g ist.

Zieht man (vgl. Fig. 32 oder 33) die Linie des kürzesten Abstandes der Geraden g und der Umdrehungsaxe a, so ist, da $a \perp \Pi'$ und $\parallel \Pi''$ ist, ihre erste Projection das von A' auf g' gefällte Loth $A'B'$, welches zugleich auch ihre wahre Länge r angiebt. Der Kreis $B'B_0'$ ist also die erste Projection des Kehlkreises der von der Geraden g erzeugten Rotationsfläche, und die zweite Projection dieses Kehlkreises ist das von B'' auf a'' zu fällende Loth $B''M''$; der Punkt M (mit den Projectionen $M' = A'$, M'') ist der Mittelpunkt des Kehlkreises.

Je zwei Punkte der Geraden g, welche von dem Punkte B gleiche Abstände haben, beschreiben bei der Rotation der Geraden Parallelkreise mit gleichem Radius; daraus folgt, dass für die entstehende Rotationsfläche die Ebene des Kehlkreises eine Symmetrieebene ist.

Um nun noch die Meridiancurve der Fläche zu bestimmen, betrachtet man einen beliebigen Punkt C der Geraden g. Dieser beschreibt bei der Bewegung der Geraden einen Parallelkreis, dessen Radius gleich $A'C'$ ist. Nimmt man dann in der durch die Axe a und den Punkt C gehenden verticalen Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen y-Axe in die Rotationsaxe a und dessen Anfangspunkt in den Mittelpunkt M des Kehlkreises fällt, so ist $A'C'$ gleich der Abscisse x und $C'C - B'B$, d. i. der Abstand des Punktes C von der Ebene des Kehlkreises, gleich der Ordinate y des Punktes C. Bezeichnet noch γ_1 den Neigungswinkel der Geraden g gegen die Horizontalebene, so ist offenbar $B'C' = (C'C - B'B) \operatorname{ctg} \gamma_1 = y \operatorname{ctg} \gamma_1$, und mithin folgt aus dem Dreiecke $A'B'C'$:

$$\overline{A'C'^2} - \overline{B'C'^2} = \overline{A'B'^2}$$

oder

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2 \operatorname{tg}^2 \gamma_1} = 1 .$$

Die Meridiancurve ist also eine Hyperbel und die durch die Rotation der Geraden g erzeugte Fläche folglich ein einschaliges Umdrehungshyperboloid. Die Nebenaxe der Meridianhyperbel fällt in die Rotationsaxe a, ihre Hauptaxe ist gleich der doppelten Länge des kürzesten Abstandes von a und g und ihr Asymptotenwinkel ist gleich $2\gamma_1$.

Wenn sich a und g schneiden, so artet das Rotationshyperboloid in einen geraden Kreiskegel aus.

Nach diesen Angaben ist die Hyperbel l'' leicht zu zeichnen und daher die von *Monge* gegebene Lösung der 6. Aufgabe (Art. 47) ziemlich einfach durchzuführen. Diese Lösung ist wohl für alle Umdrehungsflächen, welche nicht von der zweiten Ordnung sind, die einfachste überhaupt.

10) *Zu S. 78.* Das erste gedruckte Vorkommen des Ausdruckes Curve doppelter Krümmung, welches bis jetzt nachzuweisen ist, findet sich, wie *M. Cantor**) angiebt, in einer Abhandlung von *Henri Pitot* (1695—1771), welche aus dem Jahre 1724 und deren Nachtrag aus dem Jahre 1725 stammt (Histoire de l'Académie des sciences. Année 1724, erschienen 1726. S. 113). *Pitot* spricht dort von der gewöhnlichen Schraubenlinie, welche sich dadurch von der Spirale oder Schneckenlinie — mit welchem Namen die Alten auch jene bezeichneten — unterscheide, dass sie auf der krummen Oberfläche eines Körpers liege und eine Curve doppelter Krümmung sei. Vielleicht würden »diese Arten von Curven doppelter Krümmung eines Tages den Gegenstand von Untersuchungen der Geometer bilden«.

11) *Zu S. 88.* Die jetzt gebräuchlichen Bezeichnungen wahrer und scheinbarer Umriss finden sich bei *Monge* noch nicht. Die äussersten geradlinigen Erzeugenden, von denen er in diesem Falle redet, sind also der zweite wahre Umriss des Cylinders.

12) *Zu S. 91.* Hier gilt wieder das in der Anmerkung 5 Gesagte. Am einfachsten erhält man in dem Punkte D_0'' die

---

*) *M. Cantor*, a. a. O. Bd. II, S. 428.

Tangente an die Curve l_0'', wenn man die Tangente t bis zu ihrem Schnittpunkte S' mit $B'C'$ verlängert und dann den Punkt S' in den Punkt S'' auf e_2 projicirt. Der Punkt S bleibt ungeändert, wenn man die Ebene E um BC parallel zu Π'' dreht; folglich ist die Verbindungslinie von S'' mit D_0'' die gesuchte Tangente. Die Punkte S', S'' werden aber oft ausserhalb der Zeichenfläche zu liegen kommen.

13) *Zu S. 92.* *Monge* giebt nie an, längs welcher Mantellinie er sich die abzuwickelnden Cylinder- und Kegelflächen aufgeschnitten denkt, und auch aus seiner in den Figuren gebrauchten Bezeichnung ist dies nicht ohne Weiteres zu erkennen. Ich habe in den Figuren, welche die Abwickelungen geben, dieselben Buchstaben gesetzt, mit welchen die entsprechenden Punkte auf der Fläche selbst und in dem Grund- und Aufriss bezeichnet sind, und ihnen noch den Index a, bez. b angehängt. Dadurch sind die Figuren der Abwickelungen ohne jeden Commentar verständlich.

14) *Zu S. 112.* Der Punkt J_x, d. i. der Schnittpunkt von $J'J''$ mit der Axe x, ist in die Figuren 44 und 45 im Interesse der Deutlichkeit absichtlich nicht eingetragen. —

Die hier von *Monge* gegebene elegante Construction für die Abwickelung einer beliebigen Kegelfläche und einer auf ihr liegenden Curve mit Hülfe einer concentrischen Kugel ist im Vergleiche mit dem gewöhnlich benutzten, von *Frézier* bereits angewandten Verfahren, nach welchem man den Kegel durch eine eingeschriebene Pyramide von genügend grosser Seitenzahl ersetzt und deren Oberfläche dann abwickelt, umständlicher, da es eine zweifache Abwickelung des sphärischen Kegelschnittes nöthig macht. Ich kann mich auch *Chr. Wiener*'s (a. a. O., Bd. I, S. 28) Meinung nicht anschliessen, dass das *Monge*'sche Verfahren weniger Punkte zu construiren erfordere als das *Frézier*'sche, sondern es scheinen mir beide gleichviele zu verlangen.

15) *Zu S. 118.* *Giles Persone**) (1602—1675) nannte sich nach seinem Heimatorte *Persone de Roberval*, später nur *Roberval*. Er war Professor der Mathematik am Collège Royal in Paris. Seine Schriften sind in dem sechsten Bande der Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, éd. 1730 vereinigt. Dort (S. 3—67) ist auch die von *Roberval*'s Schüler *du Verdus* verfasste Abhandlung O b s e r v a t i o n s sur la com-

---

*) *M. Cantor*, a. a. O., Bd. II, S. 800—814.

position des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes zu finden, in welcher *Roberval*'s Methode der Tangentenbestimmung veröffentlicht worden ist; diese Abhandlung ist von *Roberval*, mit einigen, aber nicht allen nöthigen Verbesserungen versehen, im Jahre 1668 der Akademie vorgelegt. *Mersenne* hatte bereits im Jahre 1644 eine Andeutung der *Roberval*'schen Methode veröffentlicht.

Im Jahre 1644 hatte *Torricelli* eine der *Roberval*'schen sehr ähnliche Methode der Tangentenbestimmung in seinen Opera geometrica mitgetheilt, weshalb ihm *Roberval* in einem gedruckten offenen Briefe, welcher vermuthlich aus dem Frühjahre 1647 stammt, den Vorwurf des geistigen Diebstahles machte. Nach *M. Cantor*'s eingehenden, höchst interessanten Darlegungen ist aber die ganze Anklage *Roberval*'s hinfällig und es haben vielmehr *Roberval* und *Torricelli* unabhängig von einander und annähernd gleichzeitig ihre Methoden gefunden. Zugleich ergiebt sich, dass *Roberval* in seinem offenen Briefe an *Torricelli* nicht immer streng bei der Wahrheit geblieben ist, da er nach seinen Behauptungen 1636 im Besitze des Tangentenverfahrens gewesen sein will, während er es frühestens im Jahre 1639 gefunden hat. —

Roberval hat sein Verfahren auf verschiedene ebene Curven, z. B. die Kegelschnitte, Cycloide, Kreisconchoide, u. a. angewendet, wobei er aber auch auf Fälle stiess, in denen es versagte, (*Montucla*, Histoire des mathématiques, Paris 1799, Bd. II, S. 49). Trotzdem aber sind ihm, wie es scheint, keine Zweifel an der Richtigkeit seines Verfahrens in seiner allgemeinen und zu unbestimmten Fassung gekommen. In der That ist das Verfahren unzuverlässig und führt leicht zu falschen Ergebnissen; es bedarf stets einer genauen Untersuchung, in welcher Weise die Zerlegung der Gesammtbewegung in zwei seitliche Componenten vorgenommen werden muss, damit die *Roberval*sche Methode eine richtige Tangentenbestimmung liefert. Die nothwendige Bedingung dafür ist, dass die Zerlegung der Gesammtbewegung in zwei von einander unabhängige Seitenbewegungen geschieht, dass also der Satz von dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten anwendbar ist.

In der von *Monge* gegebenen Fassung, nach welcher die Gesammtbewegung in jedem Punkte der Bahn in zwei seitliche Bewegungen zerlegt wird, deren jede stets nach einem festen Punkte F_1, bez. F_2 gerichtet ist, also in dem Entfernen von diesem Punkte oder Annähern an ihn besteht, führt die Methode, wenn nicht F_1 und F_2 beide im Unendlichen liegen, sogar nur in einem besonderen Falle zu einem richtigen Ergebnisse.

Legt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen positive x-Axe in die Richtung F_2F_1 und dessen Anfangspunkt in den Halbirungspunkt der Strecke F_2F_1 fällt, und bezeichnet die Winkel, welche die positive x-Axe mit den Radiivectoren r_1 und r_2 von F_1, bez. F_2 nach dem Curvenpunkte P und mit der Tangente in P bildet, mit φ_1, φ_2, und χ, ferner den Winkel, den die Richtung F_2P mit der Tangente in P bildet, mit ψ — alle Winkel im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers durchlaufen —, so ist bekanntlich

$$dr_1 = -\cos\varphi_1 dx + \sin\varphi_1 dy,\ dr_2 = \cos\varphi_2 dx + \sin\varphi_2 dy.$$

Wenn nun die Bewegung des die Curve erzeugenden Punktes dadurch definirt ist, dass in der Zeiteinheit seine m-fache Geschwindigkeit in der Richtung des einen Radiusvector gleich seiner n-fachen in der Richtung des anderen, also

$$m\,dr_1 = n\,dr_2$$

ist, so ergiebt sich hieraus nach leichter Rechnung:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{dy}{dx} = -\frac{m\cos\varphi_1 - n\cos\varphi_2}{m\sin\varphi_1 - n\sin\varphi_2}.$$

Da $\chi = \psi + \varphi_2$ ist, so folgt weiter

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{n - m\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{m\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Berechnet man aber den Winkel $\overline{\psi}$, welchen die Richtung FP_2 mit der nach dem *Roberval*'schen Verfahren construirten Tangente einschliesst, so findet man:

$$\operatorname{tg}\overline{\psi} = \frac{m\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{n + m\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

ψ stimmt also im Allgemeinen nicht mit $\overline{\psi}$ überein, sondern nur für $\frac{n^2}{m^2} = 1$, also $n = \pm m$; d. h. die vorgenommene Zerlegung der Gesammtbewegung ist nur für die Ellipse und Hyperbel zulässig.

Weiter erkennt man sofort, dass das *Roberval*'sche Verfahren anwendbar ist, wenn die Gesammtbewegung in zwei seitliche Bewegungen, welche stets zwei einander schneidenden Geraden bez. parallel sind, zerlegt wird.

Chr. Wiener hat auf Grund eines von ihm gegebenen allgemeinen Verfahrens zur Construction der Tangente einer beliebigen Curve (a. a. O., Bd. I, S. 170—172) eine Kritik des *Roberval*'schen Verfahrens gegeben und kommt dabei zu den gleichen Resultaten. Ich kann mich daher seinem Urtheile, dass es am besten sei, die Anwendung des Verfahrens zu ververmeiden, nur voll anschliessen.

16) *Zu S. 120—121. Monge* hat sich hier geirrt; die so erzeugte Curve ist nicht eine doppeltgekrümmte Curve, sondern eine gewöhnliche Ellipse. Um dies nachzuweisen, muss man die folgenden Sätze zu Hülfe nehmen, welche ich, um den eigentlichen Beweis nicht zu unterbrechen, voranstelle. —

Nimmt man auf der Peripherie einer Ellipse zwei beliebige Punkte E_1, E_2 an und construirt um sie als Mittelpunkte Kreise, welche sich in einem der beiden Brennpunkte, F schneiden, so liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise auf der zu F gehörigen Leitlinie l. (Um diesen Satz zu beweisen, braucht man nur die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke, welche man erhält, wenn man von E_1 und E_2 die Lothe E_1H_1 und E_2H_2 auf l fällt, und die Beziehung $\frac{E_1F}{E_1H} = \frac{E_2F}{E_2H}$ zu berücksichtigen.) Aus diesem Satze folgt aber sofort weiter, dass die zu F gehörige Leitlinie l die äussere Aehnlichkeitsaxe dreier Kreise ist, deren Mittelpunkte auf der Ellipse liegen, und welche sich in dem Brennpunkte F schneiden. Wenn es also überhaupt eine Ellipse giebt, welche durch drei beliebig gegebene Punkte E_1, E_2, E_3 hindurchgeht und einen in ihrer Ebene beliebig gegebenen vierten Punkt F zum Brennpunkte hat, so giebt es auch nur eine Ellipse und ihre zu F gehörige Leitlinie l ist durch den vorigen Satz bestimmt. Hieraus folgt unmittelbar der

Hülfssatz I. Haben zwei in derselben Ebene gelegene Ellipsen einen Brennpunkt gemeinsam, so können sie sich höchstens in zwei Punkten schneiden.

Der zweite Hülfssatz ist zuerst von *Dupin* [Vgl. Corresp. de l'école polyt., Bd. I. S. 22; Bd. II. S. 387 und Développements de Géom., S. 280] aufgestellt worden; er lautet:

Hülfssatz II. Wenn zwei Punkte im Raume in Bezug auf eine beliebig gegebene Ellipse oder Hyperbel die Eigenschaft der Brennpunkte haben, d. h. wenn die Summe, bez. Differenz ihrer Abstände von einem veränderlichen Punkte des gegebenen Kegelschnittes constant ist, so liegen sie auf einem zweiten Kegelschnitte, welcher die Brennpunkte des ersten zu Scheiteln und seine Scheitel zu Brennpunkten hat und dessen Ebene senkrecht auf der Ebene des ersten steht. Sind umgekehrt zwei solche Kegelschnitte, sog. Focalkegelschnitte gegeben, so haben je zwei Punkte des einen die Eigenschaft der Brennpunkte für den andern.

Da die *Ostwald*'schen Klassiker in erster Linie für Studirende bestimmt sind, so halte ich es nicht für überflüssig, den von *Dandelin* (Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, 1822, Bd. 2, S. 171—173 und 1826, Bd. 3, S. 1—14) gegebenen ausgezeichneten Beweis dieses Satzes hier mitzutheilen, zumal derselbe nicht so bekannt zu sein scheint, als er es durch seine ausserordentliche Einfachheit und Anschaulichkeit verdient.

Schneidet man einen geraden Kreiskegel durch eine Ebene, welche nicht einer Mantellinie parallel ist, und construirt die beiden dem Kegel einbeschriebenen Kugeln, welche die schneidende Ebene in den Punkten F und F' und den Kegelmantel in den Kreisen k und k' berühren, so sind F und F' die Brennpunkte des von der Ebene ausgeschnittenen Kegelschnittes. Denn da die von einem Punkte an eine Kugel gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, so ist, wenn man durch die Kegelspitze S eine beliebige Mantellinie zieht, welche den Kegelschnitt in dem Punkte M und die Berührungskreise in K und K' trifft,

$$MF = MK, \quad MF' = MK';$$

da nun KK' constant ist, so ist entweder die Summe oder Differenz von MF und MF' constant, die Schnittcurve also entweder eine Ellipse oder Hyperbel mit den Brennpunkten F und F'.

Im Falle der Ellipse ist für jeden Punkt M derselben

$$SM - MF = SK = \text{const.}, \quad SM + MF' = SK' = \text{const.}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn M' einen zweiten Punkt der Ellipse bezeichnet:

$$SM - SM' = MF - M'F = M'F' - MF'. \tag{1}$$

Legt man dann durch die Ellipse einen zweiten geraden Kreiskegel, dessen Spitze S_1 aus Symmetrierücksichten ebenfalls in der auf der Ellipse senkrecht stehenden Ebene $FF'S$ liegen muss, so ist

$$S_1M - S_1M' = \pm(MF - M'F) = \pm(M'F' - MF'), \tag{2}$$

wo je nach der Lage von S_1 zu S entweder die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind. Lässt man nun die beiden Punkte M und M' in die Scheitel der grossen Halbaxe der Ellipse fallen, so besagen die Gleichungen (1) und (2), dass der geometrische Ort der Kegelspitzen S die zu der Ellipse gehörende Focalhyperbel ist, da die absoluten Beträge von $MF - M'F$, bez. $M'F' - MF'$ gleich der doppelten Excentricität der Ellipse sind. Aus den beiden Gleichungen folgt weiter, dass $SM + S_1M$ oder $SM - S_1M$ constant ist, je nachdem S und S_1 auf verschiedenen Aesten der Focalhyperbel oder auf demselben Aste liegen.

Im Falle der Hyperbel ist

$$SM - MF = SK = \text{const.}, - SM + MF' = SK' = \text{const.}$$

Hat S_1 die analoge Bedeutung wie zuvor und ist M' ein zweiter Punkt der Hyperbel, so ist

$$SM + SM' = MF + M'F = MF' + M'F' = S_1M + S_1M'. \quad (3)$$

Lässt man M und M' in die Scheitel der Hyperbel fallen, so sind die beiden mittleren Summen in (3) gleich der doppelten Excentricität, und folglich ist jetzt der geometrische Ort der Kegelspitzen S die zu der Hyperbel gehörige Focalellipse. Zugleich ergiebt sich aus (3), dass $SM - S_1M$ constant ist.

Bei der von *Monge* angegebenen Construction entsteht die Curve als Schnitt der Rotationshyperboloide mit den Brennpunkten A, B und A, C. Für jeden Punkt M des Schnittes ist daher

$$AM + BM = \text{const.}, \quad AM + CM = \text{const.}$$

Ist M' ein zweiter Punkt der Schnittcurve, so folgen weiter die Gleichungen:

$$AM - AM' = BM' - BM = CM' - CM,$$

welche für je zwei beliebige Punkte des Schnittes gelten. Lässt man jetzt M und M' in die zwei Punkte F und F' fallen, in welchen sich (nach Hülfssatz I) die in der Ebene ABC liegenden Meridianellipsen der beiden Rotationsflächen — wenn sie sich überhaupt schneiden — nur treffen können, so erkennt man, dass die drei Punkte A, B, C auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte F und F' sind, und zwar liegen B, C auf dem einen und A auf dem anderen Aste dieser Hyperbel. Da nun für jeden Punkt der zu dieser Hyperbel gehörigen Focalellipse (nach dem Hülfssatze II) die Summe seiner Abstände von A und B sowohl als A und C constant ist, so folgt, dass sich die beiden Rotationsellipsoide in dieser Focalellipse durchdringen und offenbar auch nur in dieser.

Damit sich die beiden Rotationsellipsoide wirklich schneiden, ist, wie nebenbei bemerkt sein mag, nothwendig und hinreichend, dass der Abstand der beiden Brennpunkte B und C von einander grösser ist als der absolute Betrag der Differenz der beiden Rotationsaxen. —

Zugleich erkennt man aber auch an dem von *Monge* gewählten Beispiele, dass seine Erweiterung der *Roberval*'schen Methode auf die Construction von Tangenten an Raumcurven noch unzuverlässiger ist als die ursprüngliche Methode für ebene Curven. *Monge*'s Erweiterung versagt schon für den hier vorliegenden einfachsten Fall, dass auf den drei Radiivectoren AM, BM, CM gleiche Strecken von M aus abzutragen sind, während in dem analogen Falle bei ebenen Curven die *Roberval*'sche Methode noch richtige Resultate lieferte. Da, wie eben gezeigt ist, die Curve eine Ellipse ist, so muss die Tangente in einem beliebigen Punkte M derselben in ihrer Ebene liegen. Nach *Monge*'s Verfahren kann man aber Tangenten erhalten, welche einen beliebigen Winkel mit dieser Ebene einschliessen. Lässt man z. B. die Punkte A und B in die Brennpunkte der Ellipse fallen und den Punkt C den durch B gehenden Ast der Focalhyperbel durchlaufen, so erzeugt (nach dem Hülfssatz II) der Punkt M zwar stets dieselbe Ellipse; construirt man aber für jede Lage des Punktes C das zugehörige Parallelepipedon in dem Punkte M, so ändert sich augenscheinlich die Richtung der von M ausgehenden Diagonale zugleich mit der Lage des Punktes C, und nur wenn C mit B zusammenfällt, giebt die Diagonale wirklich auch die Curventangente in dem Punkte M.

Das Verfahren ist nur zulässig, wenn die drei Seitenbewegungen des erzeugenden Punktes durch seine Entfernungsveränderungen parallel zu den Axen eines beliebigen räumlichen Parallelcoordinatensystems bestimmt sind.

17) *Zu S. 130.* Nach den Angaben von *de la Gournerie* (Discours sur l'art du trait et de la géométrie descriptive. Paris 1855. S. 22) sind die Niveaucurven zuerst im Jahre 1738 von *Ph. Buache* angewendet worden, welcher durch Zeichnung der Uferlinien zu verschiedenen Zeiten die durch Ebbe und Fluth bewirkte Bewegung des Meereswassers veranschaulichte. Bald darauf verwendete *Ducarla* die Niveaulinien, um die

Grenzen des Ueberschwemmungsgebietes bei verschiedenem Hochwasserstande anzugeben. Auch die Benutzung der Koten stammt ungefähr aus derselben Zeit. *Monge* dürfte mit der Verwendung der Koten, Niveaulinien und den Linien des stärksten Falles in Mézières vertraut geworden sein, wo sie zur Lösung von Defilementsaufgaben vielfach gebraucht wurden.

Näheres über kotirte Darstellung und topographische Flächen findet man in dem ausführlichen Werke von *v. Peschka*, Kotirte Ebenen und deren Anwendung. Brünn, 1882; ferner bei *Wiener* a. a. O., Bd. II, S. 388—402.

18) *Zu S. 136.* *Monge* zählt die beiden Hälften, in welche die durch Rotation des Kreisbogens $ADEB$ um AB als Axe erzeugte Umdrehungsfläche von der Ebene ABC zerschnitten wird, als zwei verschiedene Schalen, sodass also durch Rotation des ganzen Kreises $ADEB\hat{E}A$ um AB als Axe vier Schalen entstehen, während der jetzige Sprachgebrauch nur zwei Schalen unterscheidet. —

Bei der Ausführung der Construction (S. 139) kann man natürlich mit demselben Rechte auch die Punkte $\hat{N}''$, $\hat{P}$, $''\hat{Q}''$ statt N'', P'', Q'' (Fig. 57) verwenden.

19) *Zu S. 141.* In der dritten Ausgabe von *Monge*'s Géométrie descriptive vom Jahre 1811 wird in einer Anmerkung noch besonders darauf hingewiesen, dass die Spitzen zweier von den drei geraden Kreiskegeln in einem und demselben Punkte, nämlich der unteren Ballonstation [irrthümlich ist dort gesagt im Punkte A] liegen, und dass sich daher diese beiden Kegel, da ihre Axen gegeneinander geneigt sind, in zwei geraden Linien schneiden müssen, welche sich nach dem Verfahren des Artikel 83 sehr leicht construiren lassen. Dann sind nur noch die Durchschnittspunkte dieser beiden Geraden mit dem dritten geraden Kreiskegel, dessen Spitze in der oberen Station liegt, zu construiren und derjenige von ihnen, welcher dem Punkte B entspricht, auszuwählen.

20) *Zu S. 142.* Bei diesen Messungen bleibt der Höhenunterschied zwischen dem Punkte A und dem Aufstiegplatze des Ballons unbestimmt; will man diesen ebenfalls erfahren, so muss noch die senkrechte Höhe der unteren Ballonstation über der Erdoberfläche gemessen werden.

21) *Zu S. 145.* *Monge* setzt hier stillschweigend voraus, dass die Curve k auf dem betrachteten Stücke weder einen Wendepunkt noch einen Rückkehrpunkt erster oder zweiter

Art besitzt; nur dann hat die Curve u in dem Punkte P_2, in welchem sie die Curve k trifft, einen Rückkehrpunkt erster Art. Treffen diese Voraussetzungen nicht zu, so kann der Punkt P_2, in welchem die Curve k von der Curve u getroffen wird, für die letztere ein gewöhnlicher Punkt, Wendepunkt oder Rückkehrpunkt zweiter Art (Schnabelspitze) sein. Die verschiedenen möglichen Fälle findet man vollständig aufgezählt bei *Chr. Wiener* (a. a. O., Bd. I, S. 204—207).

22) *Zu S. 146.* *Jacques de Vaucanson* (richtiger *Vocanson*) (1709—1782) war ein berühmter Mechaniker, welcher allerlei mechanische Kunstwerke verfertigt hat; so construirte er in seiner frühesten Jugend eine richtig gehende Uhr von Holz, später einen Flötenbläser, Tambourinschläger und andere Kunstwerke. Dann wendete er sich nützlicheren Dingen zu und construirte Maschinen für verschiedene Industriezweige, so z. B. für die Seidenspinnerei. Nachdem er im Jahre 1746 Mitglied der Pariser Akademie geworden war, hat er in deren Abhandlungen verschiedene der von ihm erfundenen Mechanismen beschrieben. Bei seinem Tode hinterliess er seine reiche Sammlung mechanischer Kunstwerke der Königin Marie Antoinette, welche dieselbe der Akademie überwies. Die Sammlung wurde aber bald verstreut, wohl in Folge von Erbstreitigkeiten, sodass heute von den einst viel bewunderten Kunstwerken kein einziges mehr erhalten ist.

23) *Zu S. 150.* Als »Polcurve« der Raumcurve u bezeichnet man jetzt speciell die auch von *Monge* später (S. 151) erwähnte Rückkehrkante der Evolutenfläche, deren geradlinige Erzeugende t, t_1, . . . die Krümmungsaxen der Curve u heissen. Zwischen einer Raumcurve und ihrer Polcurve besteht bekanntlich eine weitgehende Reciprocität.

Die Begriffe der Rückkehrkante und der Charakteristik, welcher letztere aber in der Géométrie descriptive nicht benutzt ist, sind von *Monge* erst in die Geometrie eingeführt.

24) *Zu S. 162.* Ein einfaches Beispiel für derartige Flächen, bei welchen die sämmtlichen Punkte einer bestimmten Curve die Eigenschaft der Nabelpunkte haben, liefert die Umdrehungsfläche, welche man erhält, wenn man die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $(a>b)$ um die Parallele zur z-Axe $x=\frac{a^2-b^2}{a}$ rotiren lässt. Die von dem kleineren der beiden Theile, in welche die Rotationsaxe den Ellipsenbogen zerschneidet, erzeugte Schale dieser Rotationsfläche besitzt längs des Aequa-

tors lauter Punkte sphärischer Krümmung, wie man sofort erkennt, wenn man beachtet, dass der Punkt $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $z = o$ der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels $x = a$, $z = o$ ist. Wählt man die Gerade $x = c$ $\left(o \leqq c < \frac{a^2 - b^2}{a}\right)$ als Rotationsaxe, so haben auf der jetzt von dem kleineren Ellipsenbogen erzeugten Schale der Fläche zwei symmetrisch zur Ebene $z = o$ gelegene Parallelkreise die Eigenschaft, dass ihre sämmtlichen Punkte Nabelpunkte der Fläche sind; je mehr die Rotationsaxe sich der z-Axe nähert, um so mehr nähern sich diese ausgezeichneten Parallelkreise den Polen der Fläche, bis sie sich schliesslich für das eigentliche Rotationsellipsoid auf diese selbst reduciren.

Das Beispiel ist insofern speciell, als die Linie der Punkte sphärischer Krümmung mit einer Krümmungslinie zusammenfällt, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

25) *Zu S. 163.* Geschichtliche Ueberblicke über die Entwickelung der Theorie der Minimalflächen sind gegeben von *H. A. Schwarz* (Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 168) und *G. Darboux* (Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. I, S. 267). Hier sei nur daran erinnert, dass *Monge* zuerst die von *Lagrange* aufgestellte Differentialgleichung der Minimalflächen integrirt hat (s. Application de l'analyse à la géométrie, § 20).

Der durch *Monge*'s Ausdrucksweise nahe gelegten Frage, ob ein bestimmtes Minimalflächenstück wirklich kleineren Flächeninhalt besitzt als alle demselben benachbarten, von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücke, hat *H. A. Schwarz* mehrere seiner ausgezeichneten Abhandlungen über Minimalflächen gewidmet (Ges. math. Abhandlungen, Bd. I, S. 151, 223, 270).

26) *Zu S. 165.* Der Begriff der Krümmungslinien ist ebenfalls von *Monge* in die Wissenschaft eingeführt worden und findet sich zuerst in dem Mémoire sur la théorie des deblais et des remblais (Mém. de l'acad. des sc. de Paris, 1781. S. 666). In einer seiner berühmtesten Abhandlungen (Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide, Journ. de l'éc. polyt., 1796, Heft 2, S. 145; Appl. de l'analyse à la géom., § 16) stellte er dann die Gleichungen für die Krümmungslinien des Ellipsoides auf.

Die jetzt übliche Bezeichnung Hauptkrümmungen hat *Monge* nirgends gebraucht.

27) *Zu S. 167.* Für jeden Nabelpunkt einer Fläche haben die beiden Schalen ihrer sogenannten Centrafläche einen Punkt gemeinsam; für jede Ortscurve von Punkten sphärischer Krümmung besitzt die Centrafläche eine Doppellinie, in welcher sich ihre beiden Mäntel rechtwinklig durchdringen. Bei gewissen Flächen, z. B. dem dreiaxigen Ellipsoid, durchschneiden sich die beiden Mäntel ihrer Centrafläche noch in anderen Curven, aber nicht rechtwinklig; solchen Curven entsprechen dann auf der Fläche keine Linien sphärischer Krümmung.

Weiteres über Centraflächen findet man bei

Monge, Application de l'analyse à la géométrie, § 22;

Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. III, S. 334.

28) *Zu S. 172.* Diese drei Zusätze fehlen in den späteren Ausgaben der Géométrie descriptive.

29) *Zu S. 173.* Sind die drei Leitcurven k_1, k_2, k_3 bez. von der Ordnung μ_1, μ_2, μ_3, und schneidet keine derselben eine der andern, so ist der Grad der geradlinigen Fläche gleich $2\,\mu_1\mu_2\mu_3$. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass die geradlinige Fläche vom zweiten Grade ist, wenn die drei Leitcurven k_1, k_2, k_3 windschiefe gerade Linien sind, und zwar ein hyperbolisches Paraboloid oder ein einschaliges Hyperboloid, je nachdem die drei Geraden zu einer und derselben Ebene parallel sind oder nicht.

In der Originalausgabe findet sich am Ende des zweiten Zusatzes noch ein kurzer Abschnitt von wenigen Zeilen, in denen *Monge* selbst angiebt, dass die Gleichungen dieser windschiefen Flächen mit doppelter Erzeugungsweise vom zweiten Grade sind und wegen dieses Punktes auf sein oft genanntes Werk Application de l'analyse à la géométrie (§ XXI) verweist. Da dieser Abschnitt aber offenbar verstümmelt ist, so habe ich ihn in dieser Ausgabe fortgelassen.

Giessen, den 1. December 1900.

Robert Haußner.

Inhaltsübersicht.

Erster Theil.

Aufgabe und Methode der darstellenden Geometrie. Elementare Aufgaben.

Artikel		Seite
1.	Aufgabe der darstellenden Geometrie	3
2—9.	Betrachtungen über die Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Projectionsmethode	3
2—5.	Verschiedene Möglichkeiten, die Lage eines Punktes zu bestimmen	3
6—8.	Projectionsmethode	10
9.	Wahre Länge einer durch ihre Projectionen gegebenen Strecke	14
10.	Vergleich der darstellenden Geometrie mit der Algebra	17
11—13.	Grundsätze für die Darstellung der Gestalt und Lage von Flächen. Anwendung derselben auf die Ebene	18
14—22.	Lösung mehrerer elementaren Aufgaben	23
14.	Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt	23
15.	Parallelebene zu einer Ebene durch einen Punkt	23
16.	Loth von einem Punkte auf eine Ebene; Fusspunkt desselben	25
17.	Ebene durch einen Punkt senkrecht zu einer Geraden	27
18.	Schnittgerade zweier Ebenen	28
19.	Neigungswinkel zweier Ebenen	28
20.	Winkel zweier Geraden	30
21.	Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene	31
22.	Reduction eines Winkels auf den Horizont	32

Zweiter Theil.

Tangentialebenen und Normalen krummer Flächen.

Artikel Seite

23—26. Einleitung 34

27—31. Methode für die Bestimmung der Tangentialebenen in gegebenen Punkten krummer Flächen . . . 37

27. Allgemeine Methode 37

28—30. Anwendung derselben auf den Cylinder, Kegel und die Umdrehungsfläche mit verticaler Axe 37

31. Kürzester Abstand zweier windschiefen Geraden 45

32. Bedingungen, welche die Lage der Tangentialebene einer beliebigen krummen Fläche bestimmen. Bemerkung über die abwickelbaren Flächen 48

33—34. Beispiele von Fällen, in denen es nöthig ist, Tangentialebenen an eine Fläche von ausserhalb derselben gelegenen Punkten zu legen 51

35—44. Tangentialebene an eine oder mehrere Kugeln. Bemerkenswerthe Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades 53

36—37. Tangentialebene an eine Kugel und durch eine Gerade gelegt. 54

38—40. Sätze über Pol und Polare 62

41. Tangentialebene an zwei Kugeln und durch einen Punkt gelegt 65

42. Tangentialebene an drei Kugeln. 67

43—44. Aehnlichkeitspunkte von drei Kreisen und von vier Kugeln 68

45—47. Tangentialebenen an Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen von nicht auf ihnen liegenden Punkten aus 70

Dritter Theil.

Schnitte krummer Flächen.

Artikel		Seite
48.	Schnitte krummer Flächen. Definition der Curven doppelter Krümmung	77
49—50.	Gegenseitiges Entsprechen von Operationen der darstellenden Geometrie und der Elimination in der Algebra	78
51—56.	Allgemeine Methode, um die Projectionen der Schnitte krummer Flächen zu bestimmen. Abänderung dieser Methode für einige besondere Fälle	81
57—58.	Tangenten an die Schnitte krummer Flächen	86
59—83.	Schnitte von Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen. Wahre Gestalt des Schnittes. Abwickelung dieser Schnitte, wenn eine der Flächen, auf welcher sie liegen, eine abwickelbare Fläche ist	87
59—68.	Schnitt eines Cylinders und einer Ebene	87
69—72.	Schnitt eines Kegels und einer Ebene	97
73—75.	Schnitt zweier Kreiskegel mit verticalen Axen	100
76—77.	Schnitt zweier beliebigen Kegel mit beliebigen Grundflächen	104
78—80.	Schnitt eines Kegels mit beliebiger Basis und einer Kugel	107
81—82.	Abwickelung eines Kegels mit beliebiger Basis	111
83.	Schnitt zweier Umdrehungsflächen, deren Axen sich schneiden	116
84—87.	*Roberval*'s Methode, um an eine Curve, welche durch das Gesetz der Bewegung eines erzeugenden Punktes gegeben ist, eine Tangente zu ziehen. Anwendung dieser Methode auf die Ellipse und auf die Schnittcurve zweier Rotationsellipsoide mit einem gemeinsamen Brennpunkte	118

Vierter Theil.

Anwendung der für die Construction der Schnitte krummer Flächen gegebenen Methode zur Lösung verschiedener Aufgaben.

Artikel		Seite
88—89.	Einleitung. Analogie zwischen gewissen Constructionen in der Ebene und in dem Raume	122
90—93.	Construction der einem Tetraeder um- und einbeschriebenen Kugel	123
94.	Construction des Punktes, welcher von drei gegebenen Punkten vorgeschriebene Entfernungen besitzt.	128
95—102.	Drei geodätische Aufgaben.	130

Fünfter Theil.

Krümmung doppelt gekrümmter Curven und krummer Flächen.

103.	Nützlichkeit des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie auf den Mittelschulen . . .	143
104—109.	Ebene und doppeltgekrümmte Curven, ihre Evoluten, Evolventen und Krümmungsradien	144
110—112.	Die krumme Fläche, welche der geometrische Ort der Evoluten einer Curve doppelter Krümmung ist. Bemerkenswerthe Eigenschaft der Evoluten auf dieser Fläche. Erzeugung einer doppelt gekrümmten Curve durch stetige Bewegung	150
113—124.	Krumme Flächen. Die beiden Krümmungen in einem Punkte der Fläche	154
125—129.	Krümmungslinien einer beliebigen Fläche; ihre Krümmungsmittelpunkte und die Fläche, welche der geometrische Ort derselben ist	163
130—131.	Anwendungen der Krümmungslinien auf den Steinschnitt der Gewölbe und auf die Radirkunst	167

Zusätze.

Seite
I. Ueber die Schnittpunkte dreier Kreiscylinder 172
II. Viertes Beispiel für die Erzeugung krummer Flächen (Fortsetzung des Art. 12) 173
III. Bestimmung der Tangentialebene an eine krumme Fläche (Fortsetzung des Art. 30) 174

Anmerkungen des Herausgebers.

Historische Einleitung 177
Entwickelung der Parallelprojection vor *Monge* . . . 177
Biographische Mittheilungen über *Monge* 181
Monge's Géométrie descriptive 187
Schlussbemerkungen. 191
Specielle Textanmerkungen
zu dem ersten Theile (1 u. 2) 193
zu dem zweiten Theile (3—9) 194
zu dem dritten Theile (10—16) 201
zu dem vierten Theile (17—20) 208
zu dem fünften Theile (21—27) 209
zu den Zusätzen (28 u. 29). 212

Berichtigung.

S. 97, Z. 7 von oben ist in der Klammer »u. 41« zu streichen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.