Anschauliche additive Zahlentheorie

Oliver Knill, Uhwiesen (1962)

In meinem Leben gibt es drei Dinge, die mich besonders fasziniert haben: die Mathematik, die Musik und die Bergwelt. Meine Liebe zur Mathematik erklärt, weshalb ich diese Arbeit überhaupt begonnen habe. Die Musik gibt mir einen gewissen Ausgleich zum streng geordneten Denken. So bin ich fast ebensooft am Klavier wie am Computer anzutreffen. Und wie die Mathematik meinen Geist und die Musik meine Sinne in Anspruch nimmt, fordert die Bergwelt meinen Körper und begeistert mich mit ihrer Schönheit. Ich fahre aber auch gern Velo, wobei ich die Passfahrten am meisten mag. Mit der grössten Leidenschaft widme ich mich jedoch der Königin der Wissenschaften, und so ist auch klar, was ich diesen Herbst zu studieren begonnen habe: Mathematik.

Einleitung

Diese Arbeit gehört in ein Spezialgebiet der Mathematik, in die additive Zahlentheorie, die sich mit der Zerlegung von natürlichen Zahlen in Summanden beschäftigt. Da man in der Mittelschule noch sehr wenig von diesen Problemstellungen hört, war ich beim Einstieg auf mich selbst angewiesen. Zum Glück eignet sich jedoch die Materie vorzüglich für empirische Untersuchungen, die durch das Einsetzen von Computern gewaltig erleichtert werden.

Problemstellung

Auf wieviele Arten kann eine natürliche Zahl in natürliche Summanden zerlegt werden, wenn

- die Auswahl der Summanden
- die Anzahl der Summanden
- die Anordnung der Summanden

vorgeschrieben sein kann?

Zielsetzung

Ich hoffte

- geeignete Bezeichnungen zu finden
- Antworten auf die Problemstellung zu geben
- eine verständliche Darstellungsmöglichkeit zu finden. Der Schwerpunkt der Arbeit sollte auf Anschaulichkeit liegen.

Methoden und Hilfsmittel

Darstellung

Um Anschauungsmaterial zu haben, benützte ich das Cuisenaire-Material, farbige Stäbchen, mit denen sich die Zerlegungen praktisch darstellen lassen. Fig. 1 zeigt die Zerlegung der Zahl 5.

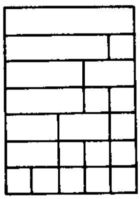


Fig. 1: Zerlegung der Zahl 5 in natürliche Summanden, wenn auf die Reihenfolge der Summanden nicht geachtet wird.

Methoden

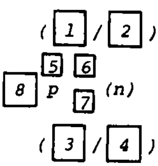
Die Cuisenaire-Stäbchen und der Computer spielten die wichtigste Rolle. Mit diesen Hilfsmitteln konnten empirisch Hypothesen aufgebaut werden, die dann bewiesen wurden.

Material

- Cuisenaire-Material
- Computer: TI 59 und Drucker
  Olivetti 6040 Tischrechner
  EG 3003 "Genie I" Microcomputer

Bezeichnungen

Um Resultate formulieren zu können, musste ich geeignete Bezeichnungen erfinden. Dazu erweiterte ich die zahlentheoretische Funktion p(n), welche angibt, auf wieviele Arten sich eine natürliche Zahl in natürliche Summanden zerlegen lässt, wenn der Reihenfolge der Summanden keine Beachtung geschenkt wird. In Fig. 1 können wir z. B. sehen, dass sich die Zahl 5 auf 7 verschiedene Arten so zerlegen lässt. Es gilt also: p(5) = 7. Fig. 2 zeigt die durch Bedingungen erweiterte Funktion. Fig. 3 illustriert die Bedingungen an Beispielen.



Bereich 1: *Anzahl Summanden pro Zerlegung*

Bereich 2: *Anzahl verschiedene Summanden pro Zerlegung*

Bereich 3: *Mögliche Summanden*

Bereich 4: *Obligatorische Summanden*

Bereich 5: *Verschiedenartigkeit der Summanden*
- *Alle Summanden sind verschieden*
^ *Alle Summanden sind verschieden. Zwischen dem kleinsten und dem grössten Summanden müssen alle möglichen Summanden vorkommen*

Bereich 6: *Anordnung der Summanden*

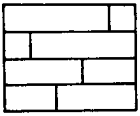
* *Reihenfolge der Summanden wird beachtet*

Bereich 7: *Dimension*
^{2} *Die "Summanden" sind Quadrate*
^{3} *Die "Summanden" sind Würfel*

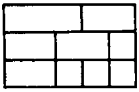
Bereich 8: *Andere Fragestellung*
$|f|\downarrow$ *Anzahl der Summanden f in allen Zerlegungen wird gesucht*

Fig. 2: Bedingungen zur Funktion p(n)

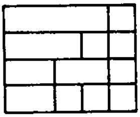
$$\underset{(1,2,3/)}{\overset{(2,3/)}{p}}(5) = 3$$



$$\bar{p}^*(5) = 4$$



$$\underset{(/2)}{\overset{(2,3,4/)}{\hat{p}}}(5) = 3$$



$$/2/{\downarrow}\underset{(/1)}{\overset{(/2)}{p}}(5) = 3$$

Fig. 3: Beispiele zur erweiterten Funktion

Ergebnisse

Hier soll versucht werden, die schönsten und interessantesten Ergebnisse herauszupicken.

Problem 1

Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Betrag von n Franken mit den in der Schweiz gebräuchlichen Geldeinheiten zu wechseln?

a) Wir achten auf die Reihenfolge der Münzen- und Notenausgabe:

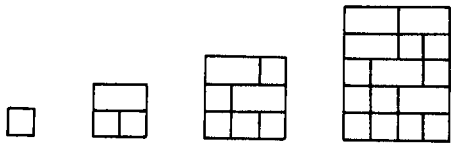
Dazu müssen wir nun folgendes Problem lösen: Wie gross ist

$$\underset{(1,2,4,10,20,40,100,200,400,1000,2000,4000,10000,20000/)}{p^*(20n)} \quad ?$$

Die Werte in der Klammer sind die schweizerischen Geldeinheiten mit 5 Rappen als Einheit. Das Sternchen bedeutet, dass es auf die Reihenfolge der Summanden ankommt. Wie berechnet man nun aber diesen Ausdruck? Wir lösen zuerst ein einfacheres Problem:

Wie gross ist $\underset{(1,2/)}{p^*(n)}$?

Fig. 4 zeigt die Zerlegungen für n = 1,2,3,4.



$\underset{(1,2/)}{p^*(1)}$ $\underset{(1,2/)}{p^*(2)}$ $\underset{(1,2/)}{p^*(3)}$ $\underset{(1,2/)}{p^*(4)}$

Fig. 4: Die $\underset{(1,2/)}{p^*(n)}$ Zerlegungen für n = 1,2,3,4

In Tab. 1 können wir die Entwicklung der ersten 10 Werte verfolgen. Manchem werden diese Zahlen bekannt vorkommen. Es handelt sich um die berühmten *Fibbonaccizahlen*. Wir vermuten also folgendes Bildungsgesetz:

Satz '1: $\underset{(1,2/)}{p^*(n)} = \underset{(1,2/)}{p^*(n-1)} + \underset{(1,2/)}{p^*(n-2)}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
$\underset{(1,2/)}{p^*(n)}$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89...

Tab. 1: Die ersten 10 Funktionswerte von $\underset{(1,2/)}{p^*(n)}$

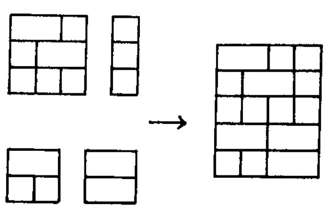


Fig. 5: Beweis von Satz ('1):
An jede Zerlegung mit der Länge n-1 hängen wir einen Summanden 1 an. Analog setzen wir hinter jede Zerlegung mit der Länge n-2 einen Summanden der Länge 2. So erhalten wir alle Zerlegungen der Länge n.

In Fig. 5 können wir sehen, in welche Richtung der Beweis mit dem Cuisenaire-Material geht. Induktiv können wir den Hilfssatz ('1) verallgemeinern:

<u>Satz 1:</u>

$$\underset{(g_1,\, g_2,\ldots\ldots g_m/)}{p^*(n)} = \sum_{i=1}^{m} \underset{(g_1,\, g_2,\ldots\ldots g_m/)}{p^*(n-g_i)}$$

Den Beweis können wir genau gleich mit den Cuisenaire-Stäbchen führen. Nun haben wir einen rekursiven Algorithmus, der uns erlaubt, für einen beliebigen Geldbetrag die Anzahl Ausgabemöglichkeiten zu berechnen. Tab. 2 zeigt ein paar Werte.

Fr. 0.20	*6*
Fr. 1.00	*48'008*
Fr. 2.00	*3'846'364'040*
Fr. 5.00	$\sim 2\cdot 10^{24}$
Fr. 10.00	$> 10^{100}$

<u>Tab. 2:</u> Ein paar Resultate, einen Betrag mit Berücksichtigung der Reihenfolge auszuzahlen.

b) <u>Wir achten nicht auf die Reihenfolge der Geldausgabe</u>

Jetzt müssen wir

$$\underset{(1,2,4,10,20,40,100,200,400,1000,2000,4000,10000,20000/)}{p(20n)}$$

berechnen können. Dazu fand ich folgendes rekursive Verhalten:

<u>Satz 2:</u>

$$\underset{(g_1,\, g_2,\ldots\ldots g_m/)}{p(n)} = \sum_{i=1}^{m} \underset{(g_i,\, g_{i+1},\ldots\ldots g_m/)}{p(n-g_i)}$$

Ich habe den Computer ein paar Geldbeträge wechseln lassen. In Tab. 3 können wir sehen, was dabei herausgekommen ist.

Fr. 0.20	*4*
Fr. 1.00	*50*
Fr. 2.00	*293*
Fr. 5.00	*6'149*
Fr. 10.00	*104'561*

<u>Tab. 3:</u> Ein paar Resultate, einen Betrag ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu wechseln.

Problem 2

Wieviele verschiedene Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und Umfang n gibt es, wenn Dreiecke als identisch gelten sollen?

Fig. 6 zeigt alle Möglichkeiten, die wir für n = 9 haben. Wir müssen die Zahl 9 in drei Summanden aufteilen, also betrachten wir zuerst einmal die $p^{(3/)}(n)$ Zerlegungen, die diese Bedingung erfüllen. In Fig. 7 sehen wir die 7 Zerlegungen für n = 9. Aber erst, wenn zusätzlich die Bedingung erfüllt ist, dass die grösste Seite kleiner ist als n/2, können wir ein Dreieck zusammenbauen. Fig. 8 zeigt die drei Möglichkeiten, die für n = 9 noch übrigbleiben. Die Lösung lässt sich jetzt schon formulieren:

Satz '3:

$$x = p^{(3/)}_{(1,2,\ldots \mathrm{Int}(\frac{n-1}{2})/)}(n)$$

x bezeichnet die Anzahl Möglichkeiten. Die Funktion "Int" nimmt den ganzzahligen Teil einer Zahl (z. B. Int(5.7) = 5).

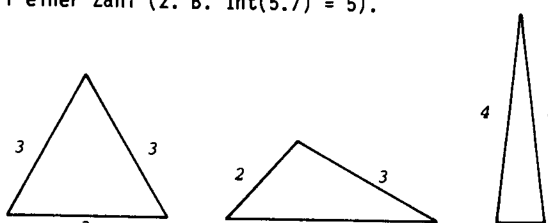


Fig. 6: Die drei Möglichkeiten, ein Dreieck mit Umfang 9 und ganzzahligen Seiten zu bilden.

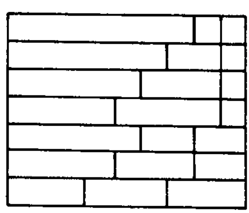


Fig. 7: Die Zerlegungen der Zahl 9 in 3 Summanden $p^{(3/)}(9) = 7$

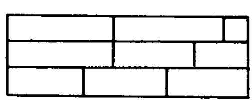


Fig. 8: Die Zerlegungen der Zahl 9 in 3 Summanden, die sich zu einem Dreieck zusammensetzen lassen.

Mit Hilfe von anderen Sätzen können wir noch umformen und erhalten schliesslich das folgende Endresultat:

Satz 3:
$$x = \sum_{i=0}^{Int(\frac{n-1}{3})} Int(\frac{n-1-3i}{2}) - \sum_{i=0}^{Int(\frac{n}{2})} Int(\frac{i}{2})$$

Tab. 4 zeigt die ersten 20 Werte.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3	5	4	7	5	8	7	10	8

Tab. 4: Die ersten 20 Funktionswerte der Funktion, die angibt, auf wieviele Arten sich ein Dreieck mit Umfang n und ganzzahligen Seiten bilden lässt.

Problem 3

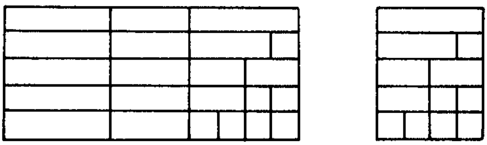
Wie berechnet man p(n)?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten: Formel 2 liefert ein Verfahren zum Berechnen von p(n), indem für g_1, g_2,......g_m die Zahlen 1 bis n eingesetzt werden. Wir erhalten:

Satz 2':
$$p(n) = \sum_{i=1}^{m} \underset{(i,i+1,\ldots\ldots n/)}{p(n-i)}$$

Der grosse Rechenaufwand bei Anwendung dieser Formel macht einen anderen Lösungsweg erforderlich: Ich gebe ein Verfahren an, das den Umweg über den Flächeninhalt der Cuisenairedarstellung aller Zerlegungen macht. Dazu müssen wir aber recht weit ausholen. Zuerst schauen wir uns unseren ersten Hilfssatz an (Fig. 9 demonstriert diesen Satz):

Satz 4:
$$\underset{(/e_1,\ e_2,\ldots\ldots e_m/)}{p(n)} = p(n-e_1-e_2-\ldots\ldots-e_m)$$



$\underset{(/3,4)}{p(11)} = p(4)$

Fig. 9: Beweis von Satz 4: Wir schieben die obligatorischen Summanden an den Rand. In unserem Beispiel haben wir die Summanden 4 und 3 an den linken Rand geschoben. Dann entfernen wir diese Summanden. Was übrigbleibt sind alle Zerlegungen der Differenz. Hier haben wir alle Zerlegungen der Zahl 4.

Mit diesem Hilfssatz können wir nun die Anzahl, die angibt, wie oft ein bestimmter Summand f in allen Zerlegungen auftritt, bestimmen. Es gilt nämlich

$$|f|\downarrow p(n) = \underset{(/f)}{p(n)} + \underset{(/2f)}{p(n)} + \underset{(/3f)}{p(n)} + \ldots$$

Nach Satz 4 können wir diesen Ausdruck anders schreiben:

$$|f|\downarrow p(n) = p(n-f)+p(n-2f)+p(n-3f)+\ldots$$

Und erhalten so Satz 5:

<u>Satz 5:</u>

$$|f|\downarrow p(n) = \sum_{i=1}^{\mathrm{Int}(\frac{n}{f})} p(n-1\cdot f)$$

Jetzt haben wir die Möglichkeit, den Flächeninhalt aller Zerlegungen zu bestimmen:

<u>Satz '6:</u>

$$p(n)\cdot n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left[\sum_{j=1}^{\mathrm{Int}(\frac{n}{1})} p(n-j\cdot i)\right]\cdot i\right]$$

Schliesslich können wir noch zusammenfassen und erhalten endlich das Endresultat:

<u>Satz 6:</u>

$$p(n) = 1/n\cdot \sum_{k=1}^{n} \sigma(k)\cdot p(n-k)$$

wobei $\sigma(k)$ eine zahlentheoretische Funktion ist, die die Summe aller Teiler von k angibt.

Zuletzt erwähnen wir noch ein drittes Verfahren zum Berechnen von p(n):

<u>Satz 7:</u>

$$p(n) = \sum_{k=1} (-1)^{(k-1)}\cdot p(n-\frac{3k^2-k}{2}) + \sum_{k=1} (-1)^{(k-1)}\cdot p(n-\frac{3k^2+k}{2})$$

Dieses Verfahren erhält man so, dass man die Zerlegungen nach der Grösse des kleinsten Summanden pro Zerlegung zählt. Satz 7 habe ich noch nicht beweisen können. Er ermöglicht aber eine äusserst schnelle Berechnung der Funktion p(n). Tab. 5 zeigt die ersten 20 Funktionswerte.

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
p(n)	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*7*	*11*	*15*	*22*	*30*	*42*	*56*	*77*	*101*	*135*	*176*	*231*	*297*	*385*	*490*	*627*

<u>Tab. 5:</u> Die 20 ersten Funktionswerte von p(n).

Problem 4

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Summe n zu würfeln?

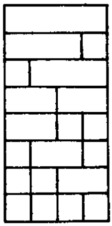


Fig. 10: Alle Möglichkeiten, die Summe 4 zu würfeln

Fig. 10 zeigt alle Möglichkeiten, die wir haben, um z. B. die Summe 4 zu würfeln. Es gibt $p^*(n)_{(1,2...6/)}$ solche Fälle. Diese Fälle treten aber nicht alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Wir müssen jedesmal noch schauen, aus wievielen Summanden eine Zerlegung besteht. Besteht eine Zerlegung aus z Elementen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieser Zerlegung $1/6^z$. Für n = 4 berechnet sich die Wahrscheinlichkeit so:

$$W = 1/6 + 3/36 + 3/216 + 1/1296 = 343/1296$$

Allgemein erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit:

Satz 8:

$$W = \sum_{z=1}^{n} p^{*(z/)}(n)_{(1,2,3,4,5,6/)} \;/\; 6^z$$

$p^{*(z/)}(n)_{(G/)}$ berechnen wir rekursiv mit folgendem Satz, der mit Satz 1 verwandt ist:

Satz 1':

$$p^{*(z/)}(n)_{(g_1,\, g_2, \ldots g_m/)} = \sum_{i=1}^{m} p^{*(z-1/)}(n-g_i)_{(g_1,\, g_2, \ldots g_m/)}$$

Diskussion

Im nachhinein kann ich sagen, dass ich die mir gesteckten Ziele im grossen und ganzen erreicht habe. Die Bezeichnungen haben sich bewährt. Es haben sich Möglichkeiten zur Berechnung ergeben und mit der Cuisenaire-Darstellung liess sich manches Problem vereinfachen. Nachdem ich mich aber später etwas in der Fachliteratur umgesehen habe, weiss ich, dass viel raffiniertere Methoden existieren, um die gestellten Probleme zu lösen. Dennoch machte es mir grosse Freude, mich mit einem mir unbekannten Stoffgebiet zu messen, ein Stoffgebiet, das ständig neue Fragestellungen eröffnet. So könnte man beispielsweise viele Probleme im Zwei- oder Dreidimensionalen stellen, wo sie schwieriger zu lösen sind und sicher für Jahre neuen Forschungsstoff liefern würden. Man braucht aber gar nicht so weit zu gehen. Berühmte Probleme wie der grosse Satz von Fermat und die Goldbach'sche Vermutung, die heute noch einer Lösung harren, gehören auch in dieses Gebiet der Mathematik. In der Literatur fanden sich einzelne Hinweise auf die von mir bearbeiteten Aspekte der additiven Zahlentheorie (Kleine Enzyklopädie Mathematik; Ostmann, 1956).

Literatur

"Kleine Enzyklopädie Mathematik", Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/M

Ostmann, Hans Heinrich (1956): Additive Zahlentheorie, Springer Verlag

---

Expertenbericht

Die Arbeit von Oliver Knill wurde von den Herren Dr. Walter Honegger, Zürich (am Regionalwettbewerb) und Dr. Hans Giger, Bern (am schweizerischen Wettbewerb) begutachtet. Die Arbeit wurde am schweizerischen Wettbewerb mit dem Prädikat "sehr gut" ausgezeichnet. Im folgenden ist das anlässlich des schweizerischen Wettbewerbs erstellte Gutachten wiedergegeben.

Ausgehend von der Frage, auf wieviele Arten eine Geldrückgabe von der Kassiererin oder der Registrierkasse an einen Kunden ausbezahlt werden kann, befasst sich die Arbeit mit Problemen der abzählenden Kombinatorik im Zusammenhang mit bedingten Partitionen. Das Thema war den Möglichkeiten des jungen Mathematikers gut angepasst.

Oliver Knill hat aufgrund seiner erarbeiteten zahlentheoretischen Erfahrung und mit Hilfe eines grossen, dem Computer geschickt abgeforderten Zahlenmaterials die Zerlegungsbedingungen systematisch geordnet und untersucht.

Weil aus der Literatur kaum elementare Behandlungen der anspruchsvollen Probleme bekannt sind, müssen die in der Arbeit enthaltenen Lösungen, elementaren Lösungsansätze und Algorithmen besonders hervorgehoben werden.

Die Fähigkeit, ein Resultat zu spezialisieren oder zu verallgemeinern, eine Problemstellung einzuschränken oder zu variieren, bezeugen das mathematische Interesse, das Durchhaltevermögen und die Begabung des Autors. Gerade diese Flexibilität und die Absicht, vollständig zu sein, führen aber stellenweise auch zu geringem mathematischen Gehalt. Die aufgeworfenen, ungelösten Probleme werden Oliver Knill aber sicher zu weiteren Forschungen anregen.

Dr. Hans Giger

JAHRBUCH '83

ANNUAIRE '83

ANNUARIO '83

Schweizer Jugend forscht
La science appelle les jeunes
Scienza e gioventù

Herausgegeben von Bruno Röthlin

Redaktion: Andreas Moser
Rédaction: Jean-François Bopp
Redazione: Paolo Mondada

Verlag SCHWEIZER JUGEND FORSCHT, Winterthur

Umschlag: Erich Giesinger, Rheineck
Herstellung: Schönenberger AG, Winterthur
ISBN 3-908504-01-5

Die Autoren / Les auteurs / Gli autori

Deutschschweiz

Christian Bärtschi (1963)	Niedermuhlern
Jürg Beringer (1965)	Fraubrunnen
Ralph Ehrismann (1961)	Riniken
Josef Eicher (1963)	Engelburg
Sandro Friedrich (1964)	Reichenburg
Felix Germann (1962)	Häggenschwil
Joachim Hagger (1965)	Hausen
Robert Hurst (1967)	Küssnacht
Oliver Knill (1962)	Uhwiesen
Andreas Lüscher (1961)	Muttenz
Max Matter (1964)	Kölliken
Daniel Otth (1964)	Rothenfluh
Francesco Papagni (1963)	Schwyz
Christoph Pfistner (1963)	Bern
Christoph Rytz (1963)	Bern
Dieter Spahni (1965)	Schönbühl
Adrian Wenz (1964)	Bellach

Svizzera di lingua italiana

Paolo Caratti (1963)	Bellinzona
Andreas Compagnoni (1962)	Stampa
Lorena Crameri (1961)	San Carlo
Benedetto Lepori (1965)	Manno
Lorenza Mondada (1963)	Minusio
Paolo Rossetti (1968)	Malvaglia

Suisse romande

Raphaël Arlettaz (1961)	Monthey
Sonja Bärlocher (1963)	Fribourg
Colette Bossens (1964)	Avry-dt-Pont
Catherine Chautems (1963)	Môtier-Vully
Marie-Christine Cochet (1963)	Estavayer-le-Gx
Nicole Droux (1965)	La Tour-de-Trême

Laurence Droz (1964)	Châtillon
Fabienne Grand (1965)	La Tour-de-Trême
Brigitte Hauser (1963)	Fribourg
Mania Holzer (1965)	Epagny
Véronique Jaquet (1964)	Bulle
Marlyse Maradan (1964)	Courtion
Philippe Mullhaupt (1968)	Genève
Dominique Philipona (1964)	Villarvolard
Catherine Pittet (1964)	Bulle
Jean-Michel Pulfer (1967)	Crissier
André Rubbia (1966)	Genève
Véronique van der Roer (1964)	Belfaux

Inhalt / Table des matières / Indice

I. Wettbewerbsarbeiten Travaux des candidats Lavori dei concorrenti

II. Stiftung «Schweizer Jugend forscht» Fondation «La science appelle les jeunes» Fondazione «Scienza e gioventù»

Schweizer Jugend forscht

Auskunft erteilt das
Sekretariat «Schweizer Jugend forscht»,
Technoramastrasse 1, 8404 Winterthur,
Telefon 052/27 44 40

La science appelle les jeunes

Tous les renseignements sont fournis
par le secrétariat «La science appelle les jeunes»,
Observatoire de Genève, 1290 Sauverny,
Téléphone 022/55 26 11

Scienza e gioventù

Per ogni informazione rivolgersi al
Segretario ticinese «Scienza e gioventù»,
Ufficio dell'insegnamento medio,
Dipartimento della pubblica educazione,
6500 Bellinzona, Telefono 092/24 34 56