# {Algebraische Topologie}

## Resultate u. Fragestellungen :

1) $f: D^n \to D^n$ stetig $\to f$ hat Fixpunkt

2) $U \subset \mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^m$ $\exists\ h: U \to V$ $\to n=m$
U, V offen

3) $\exists!$ 5 reguläre Polyeder im $\mathbb{R}^3$

4) $K \subset \mathbb{R}^n$ $K \sim S^{n-1}$ $\Longrightarrow$ $\mathbb{R}^n - K$ hat zwei zush. komponenten

5) Auf $S^{2n}$ jedes stetig. Vektorfeld hat Singularität

6) $\exists$ $\varphi: S^2 \to PP^2$ lokale Homöomorph. proj. Ebene
$\nexists$ $\varphi: PP^2 \to S^2$ lokale Homöomorph.

7) ~~$\nexists$~~ $\exists!$ Differentialstruktur in $\mathbb{R}^n$ $n \neq 4$
$\exists$ mehrere in $\mathbb{R}^4$

**Idee** :

$X \rightsquigarrow$ alg. Obj
$X \to Y \longrightarrow$ Homomorph.

$$\begin{tikzcd} H_n(X) & X \arrow[l] \arrow[d, "f"] \\ H_n(Y) & Y \arrow[d, "g"] \\ H_n(Z) & Z \arrow[from=1-1, to=2-1, "f_*"'] \arrow[from=2-1, to=3-1, "g_*"'] \end{tikzcd}$$

$H_n(S^n) = \mathbb{Z}$
$H_n(D^{n+1}) = 0$

$f: D^{n+1} \xrightarrow{\text{st.}} D^{n+1}$ hat fixp.

$\Gamma$ — kein Fixp

hat Abb. $F: D^{n+1} \to \partial D^{n+1}$
mit $F|_{\partial D^{n+1}}$ = Ident.

$$S^n = \partial D^{n+1} \xrightarrow{id} D^{n+1} \xrightarrow{F} \partial D^{n+1} = S^n$$

$$\mathbb{Z} = H_n(S^n) \longrightarrow H_n(D^{n+1}) = 0 \longrightarrow H_n(\partial D^{n+1}) = \mathbb{Z} \quad \lrcorner$$

---

## 1. HOMOTOPIE

Alle Abbild. stetig

**Def**

Si $f, g: X \to Y$
eine Homotopie $F$ der $f$ à $g$
ist eine Abb. $F: X \times [0,1] \to Y$
$F|X \times \{0\} = f \wedge F|X \times \{1\} = g$

$F_t = F|_{X \times \{t\}}$

**Bem** $\exists$ der Homotopie ist Äquivalenzrelation "$f \sim g$"

**Lemma**

$f: X \to Y$ (nicht unb. stetige Abb.)
$X = A_1 \cup A_2$ ($A_1, A_2$ offen oder abgeschl.)
$f|_{A_1}$ stetig $f|_{A_2}$ stetig $\longrightarrow$ $f$ stetig

zeigt Transitivität d. Äquirel. für $H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$

**Def** X homotop Y $\Leftrightarrow$

$\exists f \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \qquad g \cdot f \sim Id_X \qquad f \cdot g \sim Id_Y$

**Bsp 1** $p \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$

$F : p \times [0,1] \to X$

**Bsp 2** $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}^n$ Sternkonvexe Menge $\qquad F : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$F(x,t) = t \cdot f(x) + (1-t)\, g(x)$

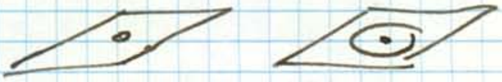
**Bsp 3**

$f : S^1 \to S^1 \quad f(x) = x$

$g : S^1 \to S^1 \quad g(x) = a$

$f \simeq g$

**Bsp 4** $f,g \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$



$g : \vec{x} \to \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

$f :$ ident. $\qquad f \sim g$

$F(x,t) = (1-t)\vec{x} + t\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

**Rem** (0) homotop $\mathbb{R}^2$ :

$(0) \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} (0)$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} (0) \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2$

$S^1 \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{p} S^1$

$\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

## La Groupe fondamentale

Soit X un espace top.

$x, y \in X$

$\Omega(x,y) := \{ \alpha : [0,1] \to X \mid \alpha(0) = x \quad \alpha(1) = y \}$

$x, y, z \in X$ 1) $\Omega(x,y) \times \Omega(y,z) \to \Omega(x,z)$

$\alpha \qquad \beta \qquad \alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$

2) $\Omega(x,y) \to \Omega(y,x)$

$\alpha \qquad \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$

3) $\alpha, \beta \in \Omega(x,y) \qquad \alpha \sim \beta \Rightarrow \exists F : [0,1] \times [0,1] \to X$

$F(t,0) = \alpha(t) \quad F(0,s) = x$

$F(t,1) = \beta(t) \quad F(1,s) = y$

**Prop 1** Homotopierelation Äquivrel. $\sim$

$\hat{\Omega}(x,y) = \Omega(x,y)/\sim$

**Prop 2** $\alpha \sim \alpha' \wedge \beta \sim \beta' \to \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ $\hat{\Omega}(x,y) \times \hat{\Omega}(y,z) \to \hat{\Omega}(x,z)$

**Prop 2'** $\alpha \sim \alpha' \longrightarrow \alpha^{-1} \sim \alpha'^{-1}$

**Prop 3** $\alpha \in \Omega(x,y)$ $\beta \in \Omega(y,z)$ $\gamma \in \Omega(z,u)$

1) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$

2) $\alpha * \alpha^{-1} - e_x$

3) $\alpha * e_y \sim \alpha$ $e_x * \alpha \sim \alpha$

ako:

$\hat{\Omega}(X,X)$ bildet gruppe. man schreibt $\pi_1(X,x)$
Man nennt sie Fundamentalgruppe oder Poincaré gruppe

**Prop 4** $\hat{\Omega}(x,y) \neq \emptyset \Rightarrow \pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$

$\ulcorner \alpha_\# : \Omega(x,x) \longrightarrow \Omega(y,y)$

$\gamma \longmapsto \alpha^{-1} * \gamma * \alpha = \gamma'$

$\gamma \sim \gamma' : (\alpha^{-1} * \gamma) * \alpha \sim (\alpha^{-1} * \gamma') * \alpha \lrcorner$

**Prop** $\forall \alpha \in \hat{\Omega}(x,y)$ definiert $\alpha_\# : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,y)$

$\ulcorner$. $\alpha_\#$ Homomorphismus: $\alpha_\#(\gamma * \gamma') \sim \alpha_\#(\gamma) * \alpha_\#(\gamma')$ ⊣

$\alpha_\#(\gamma * \gamma') = \alpha^{-1} * (\gamma * \gamma') * \alpha$

$\sim \alpha^{-1} * (\gamma * (\alpha * \alpha^{-1}) * \gamma') * \alpha$

$\sim \alpha^{-1} * (\gamma * \alpha)) * (\alpha^{-1} * (\gamma' * \alpha))$

- $(\alpha * \beta)_\# : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,z)$ $\alpha \in \Omega(x,y)$, $\beta \in \Omega(y,z)$
  ist gleich $\beta_\# \circ \alpha_\#$

· $(\beta_\# \circ \alpha_\#) \gamma = (\alpha * \beta)_\# (\gamma)$ ⊣

$(\beta_\# \circ \alpha_\#) \gamma = \beta_\# \circ (\alpha^{-1} * \gamma * \alpha) = \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma * \alpha * \beta$
$\sim (\beta^{-1} * \alpha^{-1}) * \gamma * (\alpha * \beta) \sim (\alpha * \beta)_\# \gamma$

- $Id = (\alpha * \alpha^{-1})_\# = \alpha_\#^{-1} \circ \alpha_\#$

**Prop** $X$ wegzus.h. $\to \pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$ $\forall x,y \in X$

Eigenschaften:

① $f : (X,x) \longrightarrow (Y,\overset{f(x)}{y})$ induziert Homomorph.
$f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x))$ $f_*(\alpha) := f \circ \alpha$

$\Omega^X(x,x) \longrightarrow \Omega^Y(y,y)$
$\alpha$ $f \circ \alpha$

② $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$x \quad f(x)=y \quad f(y)=z$

$f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$
$g_* : \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(Z,z)$
$(g\circ f)_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Z,z)$

$\boxed{(g\circ f)_* = g_* \circ f_*}$

⌈ $(g\circ f)_*(\tilde{\alpha}) = \widetilde{g\circ f\circ\alpha} = g\circ(\widetilde{f\circ\alpha}) = g_*(\widetilde{f\circ\alpha})$
$= g_* f_*(\tilde{\alpha}) = (g_*\circ f_*)\tilde{\alpha}$ ⌋

③ $F : X\times[0,1] \longrightarrow Y$
$F|_{X\times\{0\}} = f \qquad F|_{X\times\{1\}} = g$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X,x) \arrow[dl, "g_*"'] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(Y,g(x)) & & \pi_1(Y,f(x)) \arrow[ll, "\alpha_\#"]
\end{tikzcd}$$

$\alpha = F|_{\{x\}\times[0,1]}$
$\alpha(0) = f(x)$
$\alpha(1) = g(x)$
$\alpha \in \Omega(f(x), g(x))$

Satz $\boxed{\alpha_\# \circ f_* = g_*}$ $\alpha_\#$ ist Isomorphismus

Corollar $\boxed{X, Y \text{ homol. äquiv. topol. Räume } \overset{\text{weg}}{\text{zush}} \Longrightarrow \pi_1(X,x) \sim \pi_1(Y,y)}$

⌈ sans Details
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \qquad g\circ f \sim id_X, \quad f\circ g \sim id_Y$

$(g\circ f)_* : \pi_1(X,x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(x)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X,\overset{(g\circ f)(x)}{x'})$

$(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$

$F : g\circ f \to Id \qquad \alpha = F|_{\{x\}\times[0,1]}$

$\alpha_\# \circ (g\circ f)_* = Id_*$

$\text{''} \ \alpha_\# \circ (g_*\circ f_*) = (\alpha_\# \circ g_*)\circ f_* \implies f_*^{-1} = \alpha_\# \circ g_*$

umgekehrt ebenfalls $\qquad g_*^{-1} = \alpha_\# \circ f_*$

$f_*, g_*$ sind Isomorphismen ⌋

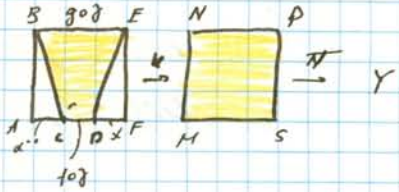
Bew. Satz

⌈ zeigen $\alpha_\# \circ f_*(\tilde{\gamma}) = g_*(\tilde{\gamma}) \qquad \gamma : [0,1] \to X, \ \gamma(0) = \gamma(1) = x$

also $\alpha' * ((f\circ\gamma) * \alpha \to g\circ\gamma$

Konstruktion von $H: [0,1] \times [0,1] \to X$

$H := T \circ k$



$T(t,s) = F(\gamma(t), s)$

$k: [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$

$k:$ BEDC $\to$ NPSM

$$k(t,s) = \begin{cases} \left(0, \frac{1-2s}{2}\right) & t \le \frac{1+s}{2} \\ \left(\frac{4t-2-2s}{1-s}, s\right) & \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{3+s}{4} \\ (1, 4t-3) & \frac{3+s}{4} \le t \end{cases}$$

? Details

$H(t,0) = \alpha^{-1} * ((f \circ \gamma) * \alpha$
$H(1,1) = g \circ \gamma$

⌟

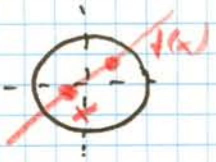
**Theorem**

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \pi_1(S^1, x) = \mathbb{Z} \\ (2) & \pi_1(S^n, x) = 0 \quad n \geq 2 \end{array}}$$

**Coroll. 1**

$$\boxed{f: D^2 \to D^2 \implies \exists \text{ Fixpunkt}}$$

Brouwer'sche Fixpunktsatz



⌐ $f(x) \neq x \quad \forall x \in D^2$ ⊥

$h: D^2 \to S^1$
$\vec{x} \mapsto t\vec{x} + (1-t) f(\vec{x})$

$t$ kleinste Lösung von $|t\vec{x} + (1-t) f(\vec{x})| = 1$

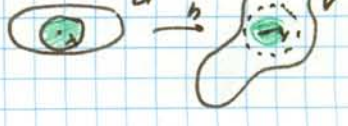
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id"'] & D^2 \arrow[r, "h"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, x) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \pi_1(D^2, x) \overset{}{\underset{0}{\parallel}} \arrow[r] & \pi_1(S^1, x = h(x)) = \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

⌟

**Coroll 2**

$$\boxed{\begin{array}{l} U \subseteq \mathbb{R}^2 \quad V \subseteq \mathbb{R}^n \quad U, V \text{ offen} \\ \exists\, h: U \to V \text{ homöomorph} \implies n = 2 \end{array}}$$



⌐ $h(x) =: y$ Betrachte $D(y, \varepsilon)$

$\exists d) \quad h(D(x,d)) \subseteq D(y, \varepsilon)$

$$\begin{tikzcd} D(x,d) \setminus \{x\} \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & D(y,\varepsilon) \setminus \{y\} \arrow[d, "h^{-1}"] \\ & \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S^1_1 \arrow[d, "i"] & = & S^1_{\frac{1}{2}} \arrow[d] \\ D^2 \setminus \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\pi"'] & & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ S^1_{\frac{1}{2}} & & S^1_{\frac{1}{2}} \end{tikzcd}$$

$\pi(v) = \frac{1}{2} \frac{v}{|v|}$

$$\mathbb{Z} = \pi_1(D(x,d) \setminus \{x\} \to \underset{\substack{\parallel \\ 0 \text{ - für } n \neq 2}}{\pi_1(D(y,\varepsilon) \setminus \{y\})} \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x\} = \mathbb{Z}$$

$(\cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x\})$

$\implies n = 2$

⌟

Bew Theorem (2) $\pi_1(S^n, x) = 0 \quad n \neq 1$

$$\alpha : [0,1] \to S^n \qquad \alpha(0) = x = \alpha(1)$$

$$S^n \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^n \qquad \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$$

(i) $\to \quad \alpha[0,1] \neq S^n \Rightarrow q \in S^n \setminus \alpha[0,1]$

(ii) $\to \quad \alpha[0,1] = S^n \quad \to \quad \alpha \sim \beta$ sodass $\beta[0,1] \neq S^n \setminus \{q\}$

existieren solche Wege

Lemma: Jeder geschlossene Weg $\alpha$ ist homotop einem Weg $\beta$, der in einer endlichen Vereinigung von Gross kreisen defin. ist

$\Gamma$ 1. $\exists \mathring{D}(x_i, \frac{1}{4}) \quad x_i \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \qquad S^n \subset \bigcup D^\circ(\alpha_i, \frac{1}{4})$

un recouvrement fini de $S^n$ par des boules de rayon $\frac{1}{4}$

2. On découpe $[0,1]$ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$ de sorte que $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset \mathring{D}(x_{j(i)}, \frac{1}{4})$

3. On definit $\beta$: 
$$\beta(t) := \frac{\left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \vec{\alpha}(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \vec{\alpha}(t_{i+1})\right)}{|\ldots|}$$

$\beta$ est continu dans $V$ bien defini
est constitué avec de grand cercles sur la sphère.

4. $\beta$ homotop $\alpha$:
$$F(t,s) = \frac{s\,\vec{\alpha}(t) + (1-s)\,\vec{\beta}(t)}{|s\,\vec{\alpha}(t) + (1-s)\,\vec{\beta}(t)|} \qquad \lrcorner$$

Bew Theorem (1) $\pi_1(S^1, x) = \mathbb{Z}$

Soit $\pi : \mathbb{R} \to S^1 \qquad \theta \to e^{i\theta} \in \mathbb{C}$

propriétes:

1) $[0,1] \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R} \qquad \pi \circ f = \pi \circ g \quad f(t_0) = g(t_0)$
$\to f = g$

$\Gamma$ $A := \{ t \in [0,1] \; f(t) = g(t)$ est fermé car
$A = (f \times g)^{-1}$ (diagonale $\quad [0,1] \xrightarrow{f \times g} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fermée
est aussi ouvert, car $\pi$ est un homeomorph.
$[0,1]$ connex $\to A = [0,1]$ c.à.d $\lrcorner$

2)

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] & S^1 \\ \{0\} \arrow[u, "\theta"] \arrow[r] & {[0,1]} \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[ul, "\tilde{\alpha}"']\end{tikzcd}$$

si le carré est commutatif (c'est à dire étant donné un chemin de $S^1$ et un point de $\mathbb{R}$)

alors il existe un et un seul relèvement $\tilde{\alpha}$ de ce chemin dans $\mathbb{R}$ commençant en $p$

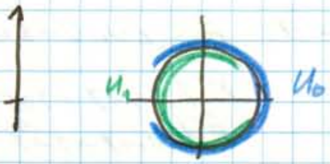
(cela definie un isomorphisme entre $\pi_1(S^1)$ et $\mathbb{R} / [a2\pi] = \mathbb{Z}$ )

anders herum

$\alpha : [0,1] \to S^1 \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \pi(\theta) = \alpha(0)$

$\Rightarrow \exists!\ \tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \pi \cdot \tilde{\alpha} = \alpha \quad \tilde{\alpha}(0) = \theta$

⌜ ! folgt aus 1)



$U_0 = \{ z = e^{i\theta} / \ -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \}$

$U_1 = \{ z = e^{i\theta} / \ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4} \}$

$\pi^{-1}(U_0) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} U_0^k \qquad U_0^k = ( -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k )$

$\pi_0^k : U_0^k \to U_0$ homéomorphismes

de même :

$\pi^{-1}(U_1) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} U_1^k \qquad U_1^k = ( \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi )$

$\pi_1^k : U_1^k \to U_1$ homeomorphisme

$\alpha : [0,1] \to S^1 \Rightarrow \exists\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = 1$
$\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset U_0$ ou $U_1$

Annahme: $\theta \in U_0^{s}$ $\quad \tilde{\alpha} / _{[0,t_1]} = (p_0^{s})^{-1} \circ \alpha$
$\alpha[t_0,t_1] \subset U_0$

$\alpha[t_1,t_2] \subset U_1$ $\quad \tilde{\alpha} / _{[t_1,t_2]} = (p_1^{ss})^{-1} \circ \alpha$
$\tilde{\alpha}(t_1) \in U_1^{ss}$

u.s.w. (nombre fini d'étapes ⌟

3)

Si $f, F$ sont tels que $p \circ f = F /_{Y \times \{0\}}$ alors il existe une unique $\tilde{F} : Y \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $F = p \circ \tilde{F}$ si $Y$ est connexe et localement connexe

⌜

⌟

Bew. d. Theor. $\pi_1(S^1, *) = \mathbb{Z}$ $\quad *$ point 1 sur $S^1$

soit $\alpha \in \Omega(*,*) \Rightarrow \exists!\ \tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad \tilde{\alpha}(0) = 0$, $\alpha = p\tilde{\alpha}$

$\pi\, \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = * \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = 2\pi k \in \mathbb{Z}$

On definit $\Omega(*,*) \xrightarrow{\#} \mathbb{Z}$ $\quad \#(\alpha) := \dfrac{\tilde{\alpha}(1)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

propr.

1) $\#(\alpha * \beta) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)$

2) $\#(\alpha * \alpha^{-1}) = 0$ $\quad \#(\alpha^{-1}) = -\#(\alpha)$

3) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ : $\alpha \sim \beta \Rightarrow \#(\alpha) = \#\beta$

$\Gamma$ $\alpha \sim \beta \Rightarrow \exists F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$

$F/_{[0,1]\times\{0\}} = \alpha$

$F[0,1] \times \{1\} = \beta$

$3) \Rightarrow \exists!\ \tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$\tilde{F}/_{[0,1]\times\{0\}} = \tilde{\alpha}$

$\tilde{F}/_{[0,1]\times\{1\}} = \tilde{\beta}$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(1,0)$

$\tilde{\beta}(1) = \tilde{F}(1,1)$

$\Rightarrow v : s \mapsto \tilde{F}(1,s)$ est un chemin continue avec valeurs dans $\{2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow v$ const.

$\Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ $\quad +$

$\# : \tilde{\Omega}(*,*) \to \mathbb{Z}$ ist Homomorphismus von Gruppen

surjektiv : $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \tilde{\alpha}(1) := 2\pi k$ $\quad \alpha = p \circ \tilde{\alpha}$

injektiv : $\alpha, \beta \in \Omega(*,*)$ $\quad \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$

Soit $F : (t,s) \mapsto s\tilde{\alpha}(t) + (1-s)\tilde{\beta}(t)$ $\quad$ homotopie $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$

$\pi \circ F \quad [0,1] \times [0,1] \to S^1$ $\quad$ ist homotopie $\alpha \sim \beta$

also $\pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$ $\quad \perp$

**Théorem** $\quad x \in X \quad y \in Y \quad \pi_1(X \times Y, (x,y)) = \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$

**Théorem**

van Kampen

Campbell

$X$ conn par arcs
loc conn par arcs
loc simplem. connexe

$U_1\ U_2$ ouverts connexes t.q. $\quad$ a) $U_1 \cap U_2$ connex
b) $U_1 \cup U_2 = X$

alors le diagramme suivant est une somme amalgamée :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_2"'] & \pi_1(U_1) \arrow[d, "i_1"] \\
\pi_1(U_2) \arrow[r, "i_2"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(X, x)$ est somme amalgamée de $\pi_1(U_1)$ $\pi_2(U_2)$

possibilité de construire le groupe fondamentale d'un espace composite par recollement.

**Def**

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{I}"] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "j_2"'] \arrow[drr, bend right, "\lambda_2"'] & G \arrow[dr, dashed, "\lambda"] & \\
& & H
\end{tikzcd}$$

On dit, que ⓘ est une somme amalgamée, si pour tout $\lambda_i : G_i \to H$ t.q. $\lambda_1 \circ i_1 = \lambda_2 \circ i_2$

$\lambda_i$ Homomorphi

$\exists\, \lambda : G \to H$ unique tel que $\lambda j_1 = \lambda_1$ $\lambda j_2 = \lambda_2$

Pour démontrer le théorème de camptell, nous utiliserons la théorie des revêtement (coverings)

**Def**

Un revêtement d'un espace $X$ est un espace $\tilde{X}$ avec une appl. continue $p : \tilde{X} \to X$ telle que

1) $X$ est connexe par arcs et localement connexe par arcs
2) $p$ : surj. (suit de 1) 3) $\tilde{X} \neq \phi$)
3) $\forall x \in X$ $\exists\, U \ni x$ ouvert $h_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ Homeomorph

telle que

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "h_U"] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d, "\text{proj sur } U"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

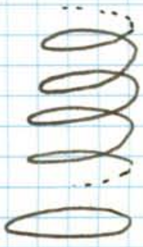
est commutatif

$F$ un espace topol. discret.

**Ex** $X \times F \xrightarrow{pr} X$ revêtement triviale

"famille continue d'espaces discrets qui est localement triviale"

$X$ s'appelle la base du revêtement
$U$ = ouvert spécial
$h_U$ homéomorphisme spécial



**Ex 1** $p : \mathbb{R} \to S^1$ est un revêtement

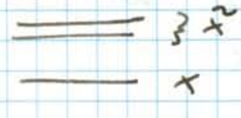
**Ex** $F = \mathbb{Z}$ $p^{-1}(U_0) = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} U_0^n$

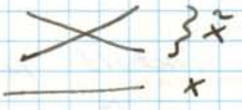
**Ex 2** $p : S^1 \to S^1$ $r(e^{i\theta}) \to r(e^{in\theta})$

$F = \{1, \dots, n\}$

**Ex 3** $(-1000, 2000) \xrightarrow{p} S^1$ n'est pas un revêtement
propr 3

**Ex 4** $F = \{0, 1\}$





pas un revêtement

**Prop.** $p : \tilde{X} \to X$ revêtement

a) $p$ offen

b) $f, g : Y \to \tilde{X}$   $Y$ connex et loc. connex

$p \circ f = p \circ g$, $f(y_0) = g(y_0) \Rightarrow f = g$

c)

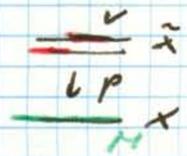
$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "p"] & X \\
Y \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "i_0"'] & Y \times [0,1] \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, "\tilde{F}"']
\end{tikzcd}$$

pour chaque tel diagramme commutatif

$\exists!\ \tilde{F} : Y \times [0,1] \to \tilde{X}$

t.q. $p\tilde{F} = F$ et $F \circ i_0 = f$

⌐ a) $V \subseteq \tilde{X}$ offen $p(V)$ offen



$x \in p(V) \Rightarrow \exists M \subset p(V)$ offen $x \in M$

$\exists\ U$ offen special $x \in U$   $M = p(V \cap p^{-1}U)$

$\Rightarrow M = p(V \cap \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} p_\alpha(V \cap U_\alpha)$ ouvert

b)

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, shift left, "pf"] \arrow[dr, shift right, "pg"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

c) c°) $\alpha : [0,1] \to X$   $\theta \in \tilde{X}$   $p(\theta) = \alpha(0)$

$\Rightarrow \exists \tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$   $\tilde{\alpha}(0) = \theta$   $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "p"] & X \\
 & {[0,1]} \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[ul, "\tilde{\alpha}"] \\
\{0\} \arrow[uu] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

c°) se demontre exactement comme dans le cas $\tilde{X} = \mathbb{R}$ $X = S^1$ $p(\theta) = e^{i\theta}$ (plus haut)

c°) → c)   $\tilde{F}$ definie par c°) comme application et on applique

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \tilde{X} \arrow[d, "f"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

$Y$ connexe et l.c.

$f : Y \to \tilde{X}$ telle que $p \circ f$ contin. $\Rightarrow f$ continue

(exercice on utilise que $p$ est un homeomorphisme local) ⌟

**Def.** 1) Deux revêtement $\tilde{X}_1, p_1$   $X_2, p_2$ de $X$ sont equivalents s'il existe un homeomorphisme $\theta : X_1 \to X_2$ tel que $p_2 \circ \theta = p_1$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\theta"'] & X \\
\tilde{X}_2 \arrow[ur, "p_2"']
\end{tikzcd}$$

2) revêtement induit par une application $f : Y \to X$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "p"] & X \\
Y \arrow[r, "\tilde{p}"'] & Y \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{Y} := \{ (\tilde{x}, y) \in \tilde{X} \times Y \mid p(\tilde{x}) = f(y) \}$

$\tilde{p} : \tilde{Y} \to Y$   $\tilde{p}(\tilde{x}, y) = y$

ouverts speciaux : $y \in Y$ soit $U \ni f(y)$ ouvert spécial de $X$ et $h_U$ :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "h_U"] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d] \\ & U \end{tikzcd}$$

$U' := f^{-1}(U)$ $h'_U$ :

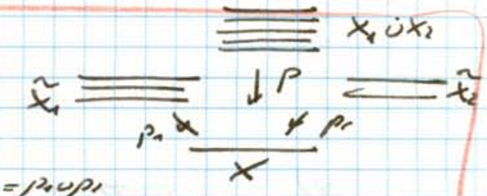
$$\begin{tikzcd} \tilde{p}^{-1}(U') \arrow[r] \arrow[dr] & U' \times F \arrow[d] \\ & U' \end{tikzcd}$$

défini

$\tilde{p}^{-1}(U') = \{(\tilde{x}, y) \in p^{-1}(U) \mid p(\tilde{x}) = f(y)\}$

verifier bijectivité de $h'$

3) somme de revêtements



$\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X$

$\tilde{X}_2 \xrightarrow[p_2]{} X$

$\underset{\text{union disjointe}}{\tilde{X}_1 \dot\cup \tilde{X}_2} \xrightarrow{p = p_1 \cup p_2} X$ est un revêtement somme

4) produit de revêtements

$\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X$

$\tilde{X}_2 \xrightarrow{p_2} X$

rev.

$\tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 \xrightarrow{p} X$

$\tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 := \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \mid p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)\}$

$= p_1 \times p_2$ diagon de $X_1 \times X_2$

$= \{p_1^{-1}(x) \times p_2^{-1}(x) \mid x \in X\}$

= revêtement induit par $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "p_1"] & X \\ \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \arrow[u] \arrow[r] & \tilde{X}_2 \arrow[u, "p_2"'] \end{tikzcd}$$

comp. 2)

5) collage de revêtements :

$X = U_1 \cup U_2$ $U_1, U_2$ ouverts $X$ connex et loc.conn

$\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} U_1$

$X_2 \xrightarrow{p_2} U_2$

rev.

$\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cup_\theta \tilde{X}_2$ $p : \tilde{X} \to X$

$$\begin{tikzcd} \theta : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "p_1"'] & p_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \arrow[d, "p_2"] \\ & U_1 \cap U_1 \end{tikzcd}$$

(les deux revêtements sont equivalents sur $U_1 \cap U_2$

note : le collage depond de l'equivalence $A : U_1 \to U_2$

**Def** 1) $G$ groupe On appelle G-ensemble la paire $\tilde{F} := (F, \mu : G \times F \to F)$ $F$ est un ensemble et $\mu$ une action de $G$ sur $F$ i.e.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \mu(g_1, \mu(g_2, f)) = \mu(g_1 g_2, f) \\ 2) & \mu(e, f) = f \end{array}\right\} \forall f \in F$$

Définition équiv. $\tilde{\mu} : G \xrightarrow{\text{homom.}} \mathrm{Aut}(F)$

$$\tilde{\mu}(g)(f) = \mu(g, f)$$

2) deux $G$-ensembles $\tilde{F_1}, \tilde{F_2}$ sont équivalents, s'il existe $\theta : F_1 \to F_2$ bij. telle que

(on écrit $\tilde{F_1} \sim \tilde{F_2}$)

$$\mu_2(g, \theta(f_1)) = \theta(\mu_1(g, f_1))$$

c.à.d.

$$\begin{tikzcd} G \times F_1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "id"'] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\downarrow\theta"] & F_1 \arrow[d, "\theta"] \\ G \times F_2 \arrow[r, "\mu_2"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

3) somme de deux $G$ ensembles $\tilde{F_1}$ et $\tilde{F_2}$.

$$\tilde{F_1} \cup \tilde{F_2} = (F_1 \cup F_2, \mu)$$

4) produit de deux $G$ ensembles $\tilde{F_1}$ et $\tilde{F_2}$.

$\tilde{F_1} = (F_1, \mu_1)$

$\tilde{F_2} = (F_2, \mu_2)$

$$\tilde{F_1} \times \tilde{F_2} = (F_1 \times F_2, \mu(g, (f_1, f_2)))$$
$$= (\mu_1(g, f_1), \mu_2(g, f_2))$$

"action diagonale de $G$ sur $F_1 \times F_2$"

Ex 1) action triviale : $F$, $\varepsilon : G \times F \to F$ $\varepsilon$ = projektion sur $F$

$G \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \mathrm{Aut}(F)$ $\tilde{\varepsilon}(g) = \mathrm{id}$ $\forall g$

Ex 2) $G \times G/H \to G/H$ $\mu(g, [g']) = [gg']$

action standard

$\widetilde{G/H}$ désigne le $G$-ensemble $G/H$ muni de l'action standard

Prop 1

1) $H_1, H_2 \overset{ug}{<} G$ $\widetilde{G/H_1} \sim \widetilde{G/H_2} \Longleftrightarrow H_1$ konj $H_2$

$\widetilde{G/H_1} \xrightarrow{\theta} \widetilde{G/H_2}$

$[g] \longmapsto [g']$ alors $H_2 = C_{[g'g^{-1}]} H_1$

2) chaque $G$-ensemble est (à une équivalence près) est isomorphe à une somme d'actions standards ~~t~~ près

Bem 2) $\mu : G \times F \to F$ action $f \in F$

$G_f := \{ g \in G \mid \mu(g, f) = f \}$ stabilisateur groupe d'isotropie

$O_f := \{ \mu(g, f) \mid g \in G \}$ Orbite de $f$

- les orbits sont des classes d'équivalence de F par rapport à l'action de G
- les orbits sont des sous ensembles invariants, sont donc elles même des G-ensembles dont $\hat{F}$ est la somme
- On montre que $\tilde{O}_f$ est équivalent $\widehat{G/G_f}$ :

$\theta : G \to O_f \quad \tilde{\theta}(g) = \mu(g, f)$
factorisé de façon unique in $\hat{\theta}$

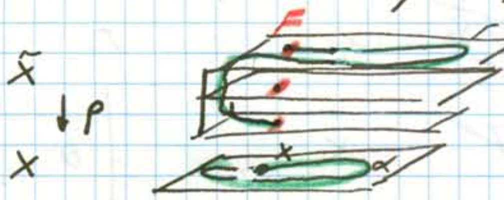
$\hat{\theta} : G/G_f \to O_f$

$$\begin{tikzcd} G \times O_f \arrow[r] & O_f \\ G \times G/G_f \arrow[u, dash] \arrow[r] & G/G_f \end{tikzcd}$$

Donc la classification des actions d'un groupe se réduit à la détermination des classes d'équivalence de sous groupes conjugés. ?

Nous allons à présent définir une correspondance entre les revêtement et les G-ensembles

$p : \tilde{X} \to X$ un revêtement $x \in X$
$G = \pi_1(X, x) \quad F = p^{-1}(x)$ F fibre de p pour x



$p(\tilde{\alpha}_\theta(0)) = x \Rightarrow \tilde{\alpha}_\theta(0) \in F$

$[\alpha] \in G$

Pour des raisons techniques nous considérons le relèvement de chemin avec condition finale :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "p"] & X \\ \{1\} \arrow[u] \arrow[r, hook] & {[0,1]} \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\alpha}_\theta$ le chemin dans $\tilde{X}$ tel que $p(\tilde{\alpha}_\theta) = \alpha$
$\tilde{\alpha}_\theta(1) = \theta$

l'action est défini : $\mu([\alpha], f) = \tilde{\alpha}_f(0)$

Notation pour les relèvements de chemin $\alpha : [0,1] \to X$

condition initiale $\omega \in \tilde{X}$ $\quad \tilde{\alpha}_\omega(0) = \omega$
$p(\tilde{\alpha}_\omega) = \alpha$

condition finale $\eta \in \tilde{X}$ $\quad \tilde{\alpha}^\eta(1) = \eta$
$p\,\alpha^\eta = \alpha$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_\omega(1) = \alpha^{-1}{}^{\omega}(0)}$

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement $x \in X \quad G = \pi_1(X, x)$
$F = p^{-1}(x) \to$ action $\mu^p : G \times F \to F$
$\mu^p([\alpha], f) = \tilde{\alpha}^f[0]$

Bien défini : soit $\alpha \sim \alpha'$ $\quad \exists$ homotopie $(\alpha_s)_{s \in I}$ $\alpha_0 = \alpha,$
$\alpha_1 = \alpha'$
$\Rightarrow s \mapsto \tilde{\alpha}_s^f(0)$ est une applic continue de $[0,1]$ dans F discrète
$\Rightarrow \tilde{\alpha}_s^f(0) = \text{const} \Rightarrow \tilde{\alpha}^f(0) = \tilde{\alpha}'^f(0)$

- action $\mu^{p}([\alpha*\beta],f) = \widetilde{\alpha*\beta}^{f}(0) = \tilde{\alpha}^{\tilde{\beta}^{f}(0)}$

$= \mu(\alpha,\mu(\beta,f))$

**Théorème**

1) $p_1 \sim p_2 \Longrightarrow \mu^{p_1} \simeq \mu^{p_2}$

$p_1 : \tilde{X}_1 \to X$

$p_2 \; \tilde{X}_2 \to X$

2) $\mu^{p_1} \sim \mu^{p_2} \Longrightarrow p_1 \sim p_2$

3) soit $\mu$ une action $\longrightarrow \exists$ revêtement $p$ t.q $\mu^{p} = \mu$

Γ 1)

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_2 \arrow[dr, "p_1"] & \\
 & X \\
X_1 \arrow[ur, "p_2"'] \arrow[uu, dash, "\theta"] &
\end{tikzcd}$$

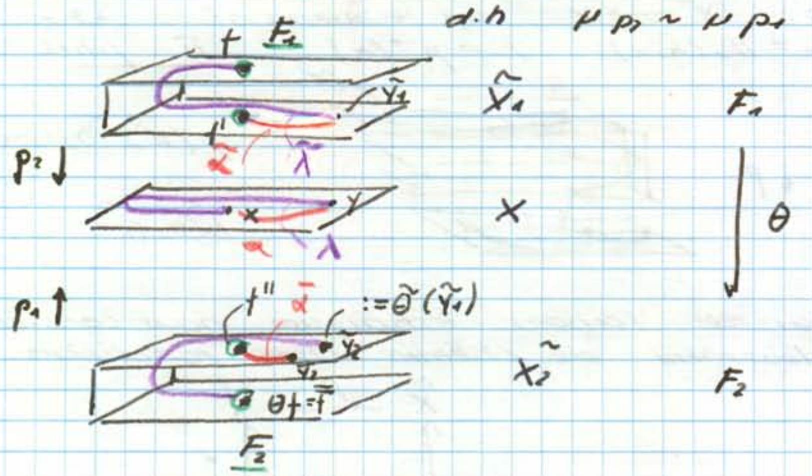
$\tilde{\alpha}_2^{\theta\omega} = \theta \circ \tilde{\alpha}_1^{\omega}$

$\underline{\mu p_2(\alpha_2,\theta f)} = \tilde{\alpha}_2^{\theta f}(0) =$

$= \theta \circ \tilde{\alpha}_1^{f}(0) = \underline{\theta\, \mu p_1(\alpha, f)}$

d.h $\mu p_2 \sim \mu p_1$

2)



$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 \; . \; \exists$ bij. $\theta : F_1 \to F_2$

on construit un homomorphisme $\tilde{\theta} : \tilde{X}_1 \xrightarrow{\simeq} \tilde{X}_2$

soit $\tilde{y}_1 \in \tilde{X}_1$ $\quad y = p_1 \tilde{y}_1$ $\quad \lambda : [0,1] \to X$

$\lambda(0) = x \quad \lambda(1) = y$

$f = \tilde{\lambda}^{\tilde{y}_1}(0) \in F_1 \xrightarrow{\theta} \theta f \in F_2$

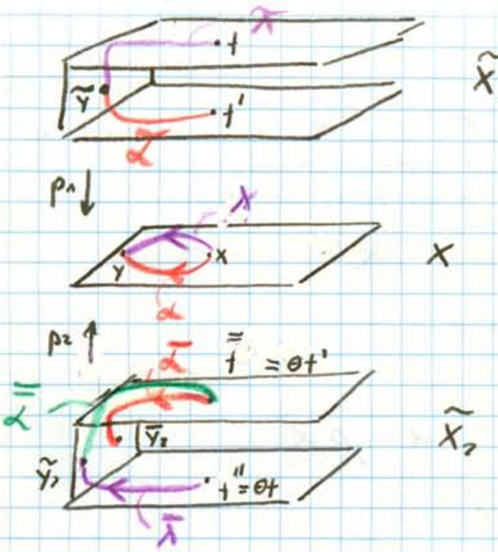
$\tilde{\theta}(\tilde{y}_1) := \bar{\lambda}_{\underset{= f''}{\theta f}} \underset{= \tilde{y}_2}{(1)} \in \tilde{X}_2$

bien definie : soit $\alpha \in \Omega^{*}(x,y)$

un autre chemin

$f' = \tilde{\alpha}^{\tilde{y}_1}(0) \qquad \theta f' = \bar{\bar{f}}$

$\bar{\alpha}_{\bar{\bar{f}}}(1) = \bar{y}_2 \overset{?}{=} \tilde{y}_2$



Hallen Frage : $\tilde{y_2} = \overline{y_2}$

Gleichbedeutend :

$$\overline{(\alpha * \lambda^{-1})}^{\theta(t)}(0) = \theta t'$$

$$\mu^{p_2}(\alpha * \lambda^{-1}, \theta(t))$$

$$\overset{\text{nach def}}{=} \theta(\mu^{p_1}(\overline{\alpha * \lambda^{-1}}, t)) = \theta[\underbrace{(\widetilde{\alpha * \lambda^{-1}})^{t}(0)}_{t'}]$$

$$= \theta t'$$

$$\Longrightarrow \bar{\alpha} = \bar{\bar{\alpha}}$$

- $\tilde{\theta}$ est un homeomorph., car on peut definir une inverse on partant de $\theta^{-1}$ (bijectivité de $\theta$)

Pour la continuité de $\tilde{\theta}$, il suffit de le verifier sur les preimages de U ouverts speciaux de $X$ pour $p_1$ et $p_2$

3) i) à toute action standard correspond un revêtement

soit $\mu$ une action standard alors par defin.

$\mu : G \times (G/H) \to G/H \quad \mu(g, [g']) = \mu([gg']$

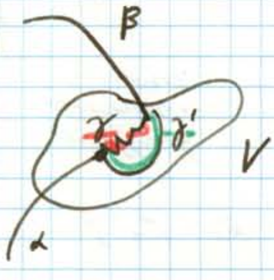
On defini

$\tilde{X} := \{ \alpha : [0,1] \to X \mid \alpha(0) = x \} / R$

$\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha(1) = \beta(1), \ \alpha * \beta^{-1} \in H < G$

$G = \pi_1(X, x) \quad p : \tilde{X} \to X \quad p[\alpha]_R) = \alpha(1)$

On munit $\tilde{X}$ de la topologie "compacte ouverte"



Soit $\alpha : [0,1] \to X \quad \alpha(0) = x$

$V \ni \alpha(1)$ ouvert t.q $\pi_1(V, \alpha(1) = 0$

on definit $U(\alpha, V) := \{ \beta[0,1] \to X \mid \beta(0) - x$
$\beta(1) \in V \quad \beta * \gamma * \alpha^{-1} \in H \}$

$\gamma$ : chemin de $\beta(1)$ à $\alpha(1)$ dans $V$

(ne dépend pas du choix de $\gamma$ puisque $\pi_1(\alpha(1), V) = 0 \Rightarrow \gamma o \gamma^{-1} \sim 0$

ii) $\mu^{p_1 \cup p_2} = \mu^{p_1} \cup \mu^{p_2}$ (exercice

action $\to$ somme d'actions standard
$\to$ union disjointe de revêtements

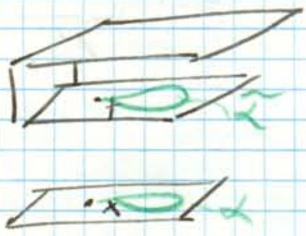
? en detail

application : 1) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ revêt

$\tilde{X}$ connexe $\Longleftrightarrow$ $\mu^p$ a une seule orbite (est donc équivalente à l'action standard)

2) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ $\quad F = p^{-1}(x) \quad f \in F$

$\Rightarrow \pi_1(\tilde{X}, f) = G_f$



Γ $\tilde{\alpha} \in \Omega(f, f) \quad \alpha = p\tilde{\alpha}$

$\Rightarrow \mu^p(\alpha, f) = f$

$\rightarrow \pi_1(\tilde{X}, f) \rightarrowtail \pi_1(X, x)$

inversement :

$\alpha \in G_f \rightarrow \tilde{\alpha}^f(0) = f$

$\rightarrow [\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X}, f)$ ┘

homomorphism

**Def**

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, phantom, "Ⓘ"] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \\ G_2 \arrow[r, "j_2"'] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dd, "i_2"'] & & G_1 \arrow[dd, "j_1"] \arrow[dl, "\lambda_1"'] \\ & H & \\ G_2 \arrow[rr, "j_2"'] \arrow[ur, "\lambda_2"] & & G \arrow[ul, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

On dit que Ⓘ est une somme amalgamée, si pour tout $\lambda_i : G_i \to H$ t.q. $\lambda_1 \circ i_1 = \lambda_2 \circ i_2$ il existe $\lambda : G \to H$ unique tel que $\lambda j_1 = \lambda_1 \quad \lambda j_2 = \lambda_2$

**Bsp**

$$\begin{tikzcd} \{e\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & G_1 \arrow[dd] \arrow[dl] \\ & H & \\ G_2 \arrow[rr] \arrow[ur] & & G_1 * G_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$G_1 * G_2$ produit libre

$G_1 = \{g_\alpha' \quad R_m'\}$

$G_2 = \{g_\beta' \quad R_n'\}$

endl. repräsent gruppen

$G_1 * G_2 = \{g_\alpha', g_\beta' \mid R_m' \, R_n'\}$

$$\omega = \overset{G_1}{\underset{\omega}{g_1}} \overset{G_1}{\underset{\omega}{g_2}} \overset{G_2}{\underset{\omega}{g_3}} \overset{G_1}{\underset{\omega}{g_4}} \overset{G_1}{\underset{\omega}{g_5}}$$

$$\lambda(\omega) = \lambda_1(g_1)\, \lambda_1(g_2) \cdot \lambda_2(g_3)\, \lambda_1(g_4)\, \lambda_2(g_5)$$

**Bsp**

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, bend left, "l_1"] \arrow[dr, bend right, "l_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \\ G_2 \arrow[r, "i_2"'] & G_1 *_{G_0} G_2 \end{tikzcd}$$

notation classique, mais dépend aussi de $i_1, i_2$

$$G_1 *_{G_0} G_2 = G_1 * G_2 / \underbrace{\{l_1(g) \cdot l_2(g)^{-1}\}}$$

sous groupe normale engendrée par les éléments $l_1(g)(l_2^*(g))^{-1}$

& kleinste Untergruppe von erzeugt von $G_1, G_2$ sodass $l_1(g) = l_2(g)$

Bsp

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d] \\ \{e\} \arrow[r] & G/\{\alpha\} \end{tikzcd}$$

$\tilde{\alpha}(1) = \alpha$

normale Ub erzeugt durch α

## Théorème de van Kampen

$X$ espace topol. connexe par arcs
loc connexe par arcs
loc simplem. connexe
$U_1, U_2$ deux ouverts t.q. $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ connexe
$U_1 \cup U_2 = X$

→

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \pi_1(U_1) \arrow[d, "j_1"] \\ \pi_1(U_2) \arrow[r, "j_2"'] & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

est une somme amalgamée

tout groupe se laisse plongé dans le groupe des automorphismes de l'ensemble sous jacent

Γ 1. Soit $\lambda_i : \pi_1(U_i) \to Aut(F)$

actions : $\mu^{\lambda_i} : \pi_i(U_i, x) \times F \to F$

theor 3) → ∃ revêtements $\tilde{U}_i \xrightarrow{p_i} U_i$ $p_i^{-1}(x) = F$

par hypoth. $\lambda_1 \circ i_1 = \lambda_2 \circ i_2$ → les actions coïncident sur $U_1 \cap U_2$

→ collage: $p : \tilde{U}_1 \cup_\theta \tilde{U}_2 \to U_1 \cup U_2 = X$
revêtement de $X$

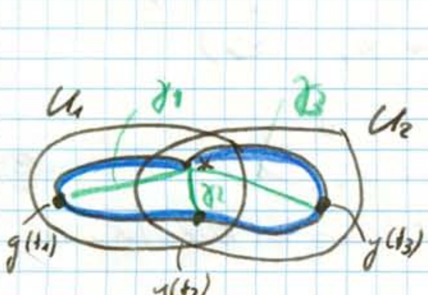
→ action de $X$ sur $F$ $\lambda : \pi_1(X) \to Aut\, F$

2. Démonstration de l'unicité dans le théorème de van Kampen

on démontre que $\pi_1(X, x)$ est engendré par $j_1(\pi_1(U_1) \cup j_2(\pi_1(U_2))$

Γ alors $\lambda$ est trivialement unique :

$\lambda(j_1(\alpha_1) j_2(\beta_2) j_1(\alpha_2) j_2(\beta_2)) \doteq \lambda_1(j_1(\alpha_1))\lambda_2(j_2(\beta_2)$



Soit $g \in \pi_1(X, *)$ $* \in U_1 \cap U_2$

∃ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ t.q.

$g[t_i, t_{i+1}] \subset U_1$ ou bien du $U_2$

$\gamma_i : [0,1] \to X$

$\gamma_i(0) = *$ $\gamma_i(1) = g(t_i)$

Si $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$ on choisi $\gamma$ continue dans $U_1 \cap U_2$

Si $g(t_i) \in U_1 \setminus U_2$ on choisi $\gamma$ continue dans $U_1$

Si $g(t_i) \in U_2 \setminus U_1$ on choisi $\gamma$ continue dans $U_2$

$g_i = g / [t_i, t_{i+1}]$

$g_0 g_1 \cdots g_N \sim \underbrace{g_0 * \gamma_1^{-1}} * \underbrace{\gamma_1 * g_1 * \gamma_2^{-1}} \cdots$

chemins fermé ou bien dans $U_1$ ou dans $U_2$

#

application:

Bsp cherchons Fundamentalgruppe von

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Def 1 $X$ contractible à $*$ $\Longleftrightarrow$ $\exists F: X \times [0,1] \to X$

$F(y,0) = y$

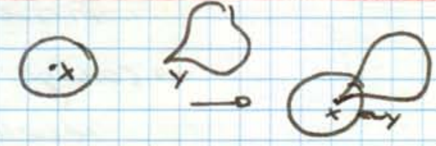
$F(y,1) = *$

$F(*,1) = *$

Def 2 $x \in X$ est regulière s'il existe une enoiron $U$ s. t. q $U$ est contractible à $x$

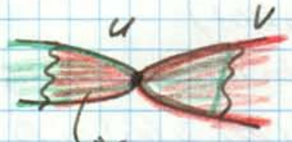
Def 3 $(X,x)$ $(Y,y)$

$X \vee Y$ le bouquet



Prop $X, Y$ homotopiquement reguliers, alors $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$

Γ



$\mathcal{X}_1 = X \vee V$

$\mathcal{X}_2 = U \vee Y$

$\mathcal{X} = X \vee Y$

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \pi_1(X) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
\pi_1(U \vee V) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathcal{X}_1) \arrow[d] \\
\pi_1(\mathcal{X}_2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \pi_1(\mathcal{X}) \\
\pi_1(Y) &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$

$\perp$

Zusammenfass.

1) $\pi_1(X \times X) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

2) $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ si $X, Y$ connex p. arcs
loc connex p. arc
loc s connex
$x, Y$ regulier

# complexes cellulaires finies

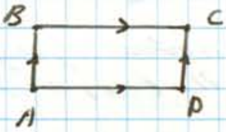
$f : S^{n-1} \longrightarrow X$

$\tilde{X} = X \cup_f D^n = X \sqcup D^n / R$

**Def.** X est un complex cellulaires finie s'il peut être donné en ajoutant des cellules à Y, Y une espace discrète fini

(nicht unbedingt eindeutige Aufbau)

**Bsp**



$T = * \cup D^1 \cup D^1 \cup D^2$

Torus

**Théorème**

X un espace connex par arcs
loc. conn p.a. loc. simplement connex

$\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X \quad \longrightarrow \quad \tilde{X} = X \cup_\alpha D^n$

1) $n \geq 3$ $\quad X \hookrightarrow \tilde{X}$ induite

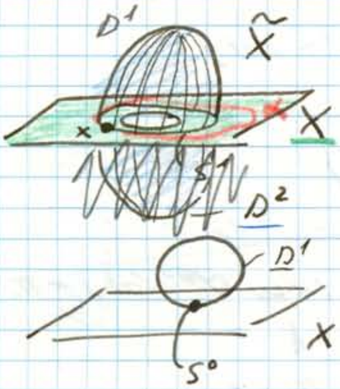
$\pi_1(x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\tilde{x})$

2) $n = 2$ $\quad \alpha : S^1 \longrightarrow X$

$\bar{\alpha} \in \pi_1(X, x) \quad x = \alpha(0)$

$\pi_1(\tilde{x}) = \pi_1(x) / \{\bar{\alpha}\}$

3) $n = 1$ $\quad \pi_1(\tilde{x}) = \pi_1(x) * \mathbb{Z}$

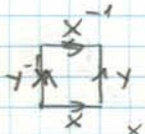


**Bsp** Torus $\quad T = \underbrace{* \cup D^1 \cup D^1}_{X_1} \cup D^2$

$\pi_1(X_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$\pi_1(T) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \{\beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$

groupe commutative libre



$= (x, y : xy = yx)$

$xyx^{-1}y^{-1} = 1$

**Prop**

1) $\alpha, \beta : S^{n-1} \longrightarrow X$ homotop

$\longrightarrow X \cup_\alpha D^n \simeq X \cup_\beta D^n$

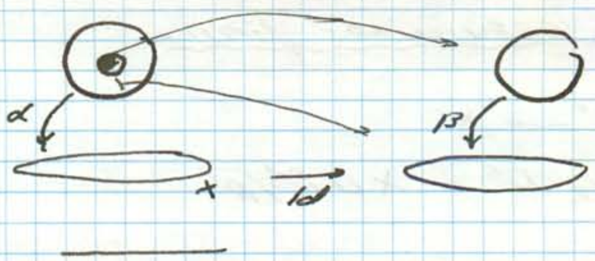
2) $X \xrightarrow{f} Y$ equiv homotopique

alors si $\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X$

$X \cup_\alpha D^n \xrightarrow{\tilde{f}} Y \cup_{f\alpha} D^n$ est une equiv homotopique

exercice

dew Idee 1)



Theorem

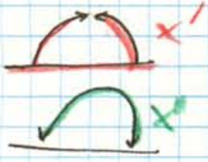
$X$ connex p. arcs
loc conn. par arcs
loc simpl. connex $\Big\}$ non

$\alpha : S^n \to X \qquad X_\alpha = X \cup_\alpha D^{n+1}$

a) $X_\alpha$ verifie les mêmes prop.
b) $\pi_1(X, *) \longrightarrow \pi_1(X_\alpha, *)$

① $n \geq 2$ est un isomorph.
② $n = 1 \qquad \alpha = \alpha_*(1) \in \pi_1(X) \qquad \pi_1(X) \to \pi_1(X)/\{\bar{\alpha}\}$
③ $n = 0 \qquad \pi_1(X, *) \to \pi_1(X, *) * \mathbb{Z} = \pi_1(X_\alpha)$

image dugerack der $\pi_1(S^1)$



Γ $X_\alpha = X_\alpha' \cup X_\alpha'' \qquad X_\alpha' = X \underset{\alpha}{\cup} D^{n+1} - \{0\}$

$X \qquad X_\alpha'' = \mathring{D}^{n+1}$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(D^{n+1} \setminus \{0\}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X \cup_\alpha D^{n+1} - \{0\}) \arrow[d] \\
& \simeq \pi_1((D^{n+1} \setminus \{0\}) \arrow[d] \\
& \not\simeq \pi_1(D^{n+1}) \arrow[r] & \pi_1(X_\alpha) \\
\pi_1(\mathring{D}^{n+1}) \arrow[rr] & & \pi_1(X_\alpha)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overset{\pi_1(S^n)}{\overset{\parallel}{\pi_1((D^{n+1} \setminus 0))}} \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d] & \pi_1(X \cup_\alpha D^{n+1} - (0)) \underset{*}{=} \pi_1(X) \arrow[d] \\
(0) \arrow[r] & \pi_1(X_\alpha)
\end{tikzcd}$$

homotop: $* \quad X \cup_\alpha D^{n+1} - \{0\} \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} X$

definition de $\pi$ : $\pi(x) = x \qquad x \in X$
$\pi(v) = \alpha\left(\frac{v}{|v|}\right) \qquad v \in D^{n+1} - \{0\}$

$\pi \circ i = id$
$i \circ \pi \simeq id$

Homotopie : $F : X_\alpha' \times [0,1] \to X_\alpha'$

$F(x,t) = x$
$F(v,t) = ((1-t) \cdot |v| + t) \frac{v}{|v|}$

Fall ①

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \pi_1(X_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Fall ②

$$\begin{tikzcd}
\overset{\mathbb{Z}}{\overset{\parallel}{\pi_1(S^1)}} \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d] & \pi_1(X) \arrow[d] \\
(0) \arrow[r] & \pi_1(X_\alpha)
\end{tikzcd}$$

vgl. Bsp

Fall ③

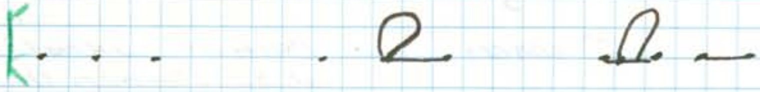
Problem : wissen nicht
ob Prund (regular) existiert

nur möglich falls homotopie
regulärer Punkt existiert

## Application algebrique :

**Def** Un graph fini est un complexe cellulaire avec touts les cellules de dimens 1

**Bsp**

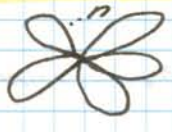


Chaque subgroupe d'une groupe libre est une groupe libre ([illegible] schreier)

**Cor** Nielsen Schreier

Si G est libre à nombre fini de generateur alors $G' \subset G$ d'indice fini est libre à nombre fini de generateur

Γ $G : \langle g_1 \cdots g_n \rangle$ $X =$



$G = \pi_1(X)$

un revêtement d'un graphe est un graph

**Prop** Si X est un graphe et $\tilde{X} \to X$ un revêtement de fibre fini
$\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ est un graph

"revêtement fini"

Γ exercice ⌟

$G \times G/G' \to G/G'$
$F$

on peut construire un revêtement qui est attaché a l'action en dessus

$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$

$\pi_1(\tilde{X}, f) = G'_f$

tous les stabilisateurs isomorph parce que c'est l'action standard

$G'$ est une groupe de nombre fini de generateur parceque (Prop) $\tilde{X}$ est un graph ⌟

beaucoup d. théorie d. groupes se prouvent avec des méthodes géométriques topologiques.

repetition :

1) $\pi_1(X \times Y, x \times y) = \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$
2) $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ ( X, Y bonnes espaces x, y regulières )

3) $$\pi_1(X_\alpha) = \begin{cases} \pi_1(X) * \mathbb{Z} & \alpha : S^0 \to X \\ \pi_1(X)/\langle\langle\alpha\rangle\rangle & \alpha : S^1 \to X \\ \pi_1(X) & \alpha : S^n \to X \ n \geq 2 \end{cases}$$

4) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rev.
$\pi_1(X, x) \times F \xrightarrow{op} F$ $F = p^{-1}(x)$

① $\tilde{X}$ est connexe $\Longleftrightarrow$ a une seule elem.

② $\pi_1(\tilde{X}, x) \cong$ ~~stabilis.~~ $= G_f$

( $\mathbb{R}P^n$ espace proj.

groupe fondam. de $\mathbb{R}P^n$

Idee : $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$ revêtement ($\longleftrightarrow$ [illegible])

$G \times F \to F$ $\quad |F|=2$

$$G \times G/\underset{\underset{0}{\|}}{G_0} \to G/G.$$

cardinalité 2

$S^n$ connexe → l'action admet un seul orbit d.h. l'action standard )

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{R}P^n &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim \\ \mathbb{R}P^{n+1} &= D^{n+1} \cup_\alpha \mathbb{R}P^n \end{aligned}}$$

$\vec{x} \sim \lambda \vec{x}$ si $\lambda \neq 0$

$n=1$ : $\mathbb{R}P^1 = S^1$

$\alpha: S^n \to \mathbb{R}P^n$

$\mathbb{R}P^n = \{x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\}/\sim$

$\varphi: D^n \to \mathbb{R}P^n$

$\varphi(x_1 \dots x_n) = (x_1 \dots x_n, \sqrt{1-\sum x_i^2}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

1) $\varphi/_{D^{\circ n}}$ est injectif

2) $\varphi(D^n) = \mathbb{R}P^n$

3) $\varphi(\partial D^n = S^{n-1}) = \mathbb{R}\mathbb{R}^{n-1}$

Bsp $\varphi$ $D^2 \to \mathbb{R}P^1$

$\varphi: S^1 \to \mathbb{R}P^1 = S^1$

$e^{i\theta} \leftarrow e^{2i\theta}$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r] \arrow[urr, "\hat{i}"] & S^1 \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

→ groupe fond. de $\mathbb{R}P^1$ : $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

vgl. $\mathbb{R} \to S^1$
$\theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$
relèvement

# Variétés differentiables

## Théorèmes fondamentales

1) $U, V \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f : U \to V$ $\underset{\text{diffeom.}}{\in C^\infty}$ $\to$ $df_x$ est isomorphismus

2) Si $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isom. $\to \exists$ voisinages ouverts $x \in U, V \ni f(x$
$f(U) \subset V$ tels que $f : U \to V$ soit un diffeom.

**Exemple** $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme

**Def** $f : \overset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}{U \to V}$ $\quad x \in U$ s'appelle un point critique, si
$df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ n'est pas de rang max

**Exemple** 1) $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad x$ critique $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \forall i$

2) $f : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}^2$
$a$ critique $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} \frac{\partial f}{\partial x} < 2$

**Def** $\Sigma(f) = \{x \in U \mid x \text{ critique}\}$
$C(f) = f(\Sigma(f))$ valeurs critiqu.

**Theoréme (Sard)** $f : U \to V$ differentiable alors $C(f)$ est de mesure nulle

**Theoréme Weierstrass** $f : \overset{\mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^m$ continue $f|_{\overset{\text{vois. comp. de } x}{K}}$ diff.ble
$\to \forall \varepsilon : U \to \mathbb{R}_+$ $\exists$ $g : U \to \mathbb{R}$ diff.ble
t.q. $g|_K = f|_K$ $\quad \|g(x) - f(x)\| < \varepsilon(x)$

$f : U \to \mathbb{R}$ $\quad \forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(lemme)
**Theoréme de Morse**

1) $\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\varphi : U' \xrightarrow{0 \mapsto a} U_a$ diffeo
$V \supset U_a \ni U_x$ t.q. $(f \circ \varphi)(y_1 \cdots y_n) =$
$y_1 + f(\vec{0})$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ $(\forall i)$ et $\det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right\| \neq 0$
$\to$ $\exists$ diffeom. $\varphi : U \xrightarrow{0 \mapsto a} U$
$f \circ \varphi(y_1 \cdots y_n) = f(a) + y_1^2 + \cdots y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_n^2$
où $k$ = dim max des sous espaces $V \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ soit posit. définie

Obs. $\vec{0}$ point critique def $\left\| \frac{\partial^2 f \circ \varphi}{\partial y_i \partial y_k} \varphi^{-1}(a) \right\| = A^T \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right\| A$
$A = \left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} \right\|$

**Def**

$\overset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}{f : X \to Y}$ est différentielle si pour chaque $x \in X$ $\exists\ U(x)$ et $\exists\ F : U \to \mathbb{R}^n$ different.

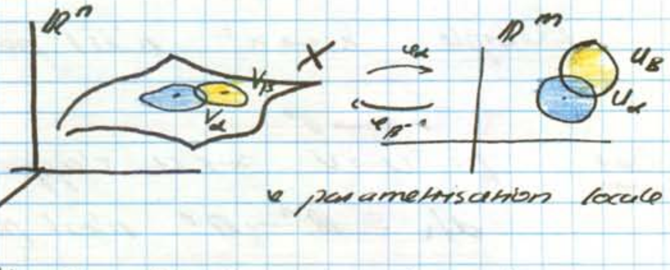
$F|_{X \cap U} = f|_{X \cap U}$

**Def**

$f$ Diffeomorph. $f : X \to Y$ — $f^{-1}\ \exists$ dif' differentielle

**Def**

$X \subset \mathbb{R}^n$ est une sousvariété diff. si chaque $x \in X$ admet une voisinage $X \supset U \ni x$ diffeomorph à à un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$



$\varphi$ paramétrisation locale

d.h $\exists\ \underbrace{(\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}, \varphi_\alpha)}_{\text{Atlas}}$ $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = X$ $V_\alpha \subset X$ $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$

Atlas : collection de cartes avec deux fonctions de coordinates

$$\begin{tikzcd}
 & V_\alpha \cap V_\beta & \\
\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] & & \varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \arrow[ul, "\varphi_\beta"'] \arrow[ll, "\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta"]
\end{tikzcd}$$

$:= \varphi_{\alpha\beta}$ diffeom.

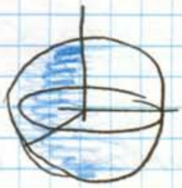
$\forall\ (\alpha, \beta) \in A^2$ $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ est diffeomorphism

**Exemp.**

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une sousvariété

$V_1^+\ V_1^-\ \ V_2^+\ V_2^-\ \ V_3^+\ V_3^-$

$V_1^+ = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0 \}$
$V_1^- = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 < 0 \}$
$\vdots$
$V_3^+ = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0 \}$
$V_3^- = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 < 0 \}$



$\varphi_1^+(x, y) \longmapsto (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$

**Def**

$X$, $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$

1) $X$ Hausd. + paracomp.
2) $\bigcup V_\alpha = X$
$\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ sont des diff.

s'appelle variété différentielle

**Obs**

- atlas pas unique
- chaque variété different. peut être un ~~[illegible]~~ sousvariété diff. de $\mathbb{R}^n$

**Exemple**

$\mathbb{R}P^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \sim$

$V_i := \{ (x_1 \dots x_n) \mid x_i \neq 0 \} / \sim$

$\varphi_i : \mathbb{R}^{n-1} \to V_i$ $\varphi_i (x_1 \dots x_{n-1})$ ~~$= \left(\frac{x_1}{x_i} \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_i}{x_i} \dots \frac{x_{n-1}}{x_i}\right)$~~

$\longrightarrow (x_1 \dots x_{i-1}, 1, x_i \dots x_{n-1})$

$\longrightarrow \left(\frac{x_1}{x_i} \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i} \dots \frac{1}{x_i} \dots \frac{x_{n-1}}{x_i}\right)$

**Def**

espace tangentiale $T_x X$

$\varphi : U \longrightarrow V \subset X \subset \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$d\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$TX_x := d\varphi_x(\mathbb{R}^n)$

$f : X \to Y$

$df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & V \\ U \arrow[u, "x"] \arrow[r, "\varphi'"] & V \end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1}\circ\varphi = x$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "d\varphi"] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "dx"] \arrow[ur, "d\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

vgl. Farkey

## Beweis d. Theorems von Sard

$f : \underset{\mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^p$
$C = \{\vec{x} \in U \,/\, \text{rang}(df_x) < p\}$
$\Rightarrow f(C)$ est de mesure nule

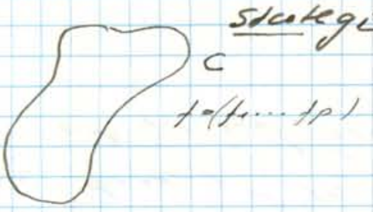
a) Théorème de fonction Invers
$\varphi : U \to V$ $\det(d\varphi_x) \neq 0$
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \exists\, U_x \ni x$ offen $\varphi(x) \in V_{\varphi(x)}$ avec
$\varphi : U_x \to V_{\varphi_x}$ diffeom.

b) Théorème de Fubini
Soit $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ t.q
$\{C \cap \mathbb{R}^n \times t\}$ est de mesure nule
dans $\mathbb{R}^n \times t$
$\longrightarrow$ C est de mesure nule dans $\mathbb{R}^n \times 1$.

c) Taylor
$f : \underset{k}{U \subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^p$
k kompacte
$\longrightarrow \exists$ un compakt constant $c(f, k)$ t.q
si $\vec{x} \in k$ $\dfrac{d^i f}{dx_{s_1} \dots dx_{s_i}}(x) = 0$ $i \leq r$

alors $f(\vec{x} + h) = f(x) + R(x,h)$ avec $\|R(x,h)\| \leq c\|h\|^{k}$
si $(\vec{x} + h) \in k$

observation . il suffit à demontrer que pour chaque
$\vec{x} \in C$ , il existe un voisinage
$V \ni \vec{x}$ t.q. $f(V \cap C)$ est de mesure nul.
(car C kompakt est la
réunion de finit m.n est d m.n.



Strategie $C \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots$

$C^1 = \{\vec{x} \in C \,/\, d_x f = 0\}$
$C^2 = \{\vec{x} \in C^1 \,/\, \dfrac{d^2 f_i}{dx_{j_1} dx_{j_2}}(\vec{x}) - 0\}$
$\vdots$
$C^{r+1} = \{x \in C^r \,/\, \dfrac{d f_i}{dx_{e_1} \dots dx_{e_{r+1}}}(\vec{x}) = 0\}$

Etape 1 : $f(C \setminus C^1)$ est de mesure nule $n>1$

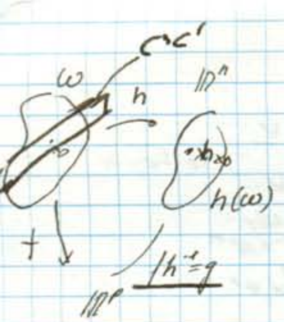
Etape 2 : $f(C^r - C^{r+1})$ est de mesure nule

Etape 3 : $r > \frac{n}{p} - 1$ $f(C^{r+1})$ est de mesure nule

Etape 1 $\vec{x} \in C - C^1$

$\exists f_r \ \dfrac{df_r}{dx_j}(\vec{x}) \neq 0$ o.B.d.A $r = j = 1$

$\rightarrow$ soit alors $\dfrac{df_1}{dx_1}(\vec{x_0}) \neq 0$



aussi $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_V \neq 0$ $V = V(\vec{x_0})$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $h(x_1, \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), x_2, \dots x_n)$

det $h_x(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists \omega$ $h : \omega \to h(\omega)$ est un difféomorphisme $\omega \cap C = \omega \cap (C \setminus C')$

$\vec{x} \in C \setminus C'$ implique $h(\vec{x}) = \{t, x'\}$ $x' \in C(g(t, \cdot)$

$g = f h^{-1} : \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

étape 1 demontré avec induction : Theoreme vrai pour $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ $\Rightarrow f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$

rang $dg < p$ $\Rightarrow$ rang $g < p-1$

$g(x_1, \dots x_n) = (x_1, g_2(x_1 \dots x_n) \dots g_p(x_1 \dots x_n))$

$f(C(f)) = g(h(C(f)))$
$= g(C(g))$
$g(C(g)) \cap t \times \mathbb{R}^{p-1}$
$\subseteq \{t\} \times g(t, \cdot)(C(g(\dots)$
Fubini

~~$h(C \times \dots) \subset \bar{C}$ $\bar{C} \cap \{t \times \mathbb{R}^n\} \subset C(g(t, \cdot))\}$~~

~~$f(C \setminus C') = g(h(C \setminus C'))$ est de mesure nul~~

~~car $g(h(C \setminus C') \cap t \times \mathbb{R}^{p-1} \subseteq g(t, \dots)(\underline{C(g(t, \dots))})$~~

~~induct. = mesure 0~~

~~$\overset{\text{Fubini}}{\Rightarrow}$ mesure nul $\Rightarrow f(C \setminus C')$ de mesure nul~~

~~$\rightarrow$ après~~

**Etape 2** $f(C_k \setminus C_{k+1})$ est de mesure nul

$\vec{x_0} \in C_k \setminus C_{k+1}$ $\frac{\partial^k f_1}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\vec{x}) = 0$ et $\frac{\partial f_1^{k+1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}}(\vec{x}) \neq 0$

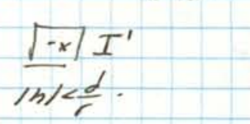
↑ avec rénumeration

$w = \frac{\partial^k f_1}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k+1}}}$ $\frac{\partial w}{\partial x_1}(\vec{x}) \neq 0$

on choisi $V \ni \vec{x}$ t.q. $h(x_1, \dots x_n) = (w(x_1 \dots x_n), x_2, \dots x_n)$ est un difféomorphisme

$f(C^k \setminus C^{k+1}) \cap V = g(\underbrace{h(C^k \setminus C^{k+1}) \cap V}_{\subset \{0\} \times C(g(0, \dots))})$

**Etape 3** $k > \frac{n}{p} - 1$ alors $f(C^k)$ est de mesure nul



$f(C^k \cap I_\delta)$ est de mesure nule

$f(x+h) = f(x) + R(x, h)$ $|R(x,h)| \leq C(f, I) \cdot \|h\|^{k+1}$

$x \in I' \cap C^k$ $\leq k\left(\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$

$\boxed{\cdot x} I'$
$|h| < \frac{d}{r}$.

$f(x+h)$ dans un cube centré a $f(x)$ de coté $\leq k\left(\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$

donc de volume $\leq \left(k\left(\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}\right)^p$

$f(C^k \cap I) \subseteq$ de volume $\left(k\left(\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}\right)^{(p)} \cdot r^n$

$= \underbrace{k^{(k+1)p}}_{fix} r^{n-(k+1)p} \underbrace{\delta^{(k+1)p}}_{fix}$

$n - (k+1)p < 0 \Rightarrow k > \frac{n}{p} - 1 \Longrightarrow$ Rad. ex volume peut être petit si petit quand veu

## Demonstration du théorème de Morse

$f : U \to \mathbb{R}$ $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ diff
$df_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $df_0 = 0$
$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \neq 0$ Hessienne Matrix
$\Rightarrow \exists \varphi : (U', 0) \to (U'', 0)$
t.q. $(f \circ \varphi^{-1})(y_1 \dots y_n)$
$= f(0) \pm y_1^2 \pm y_2^2 \dots \pm y_n^2$

Observ $\frac{\partial^2 (f\varphi^{-1})}{\partial y_i \partial y_j}(0) = \sum_{1\le r,s\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}(0)\, \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial y_j}(0)$

$$= A^* \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_s} \right\| \cdot A$$

changé de variable laisse les valeurs propres et positives est negative.

Observ $f(x_1, \dots, x_n) = f(0) + \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \, H_{ij}(x_1 \dots x_n)$   $H_{ij} = H_{ji}$

car:

$$f(x_1 .. x_n) = f(0) + \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}\, dt$$

$$= f(0) + \int_0^1 \sum \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i \, dt$$

$$= f(0) + x_i \int_0^1 \sum \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \, dt$$

$= f(0) + \sum x_i P_i(x)$   $P_i(0) = 0$

$= f(0) + \sum x_i x_j P_{ij}(x)$   $P_i(x) = P_i(0) + \sum x_j P_{ij}(x) = \sum x_j P_{ij}(x)$

$H_{ij}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$

o.B.d.A. $H_{11} \neq 0$

1. Fall $H_{rr} \neq 0$ → change

2. Fall $H_{rr} = 0$ $\forall$ [illegible]

$H_{1r} \neq 0$ pour un r

$y_i = x_i$ $i \neq 1, r$

$y_1 = x_1 + x_r$

$y_r = x_1 - x_r$

symmetrisation:

$$= f(0) + \sum x_i x_j \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2}$$

supposons qu'on a (*) $f(x_1, \dots, x_n) = f(0) \pm x_1^2 \pm x_2^2 \dots \pm x_{r-1}^2 + \sum_{r\le i,j} x_i x_j H_{ij}(x)$   $H_{ij} = H_{ji}$   $H_{rr}(x) \neq 0$

on peut avoir φ t.q. $f\varphi^{-1}(y_1 \dots y_n) = f(0) \pm y_1^2 + \dots \pm y_r^2 + \sum_{r+1\le i,j} y_i y_j \, G_{ij}(y)$   $G_{r+1\,r+1}(y) \neq 0$   $G_{ij} = G_{ji}$

où φ est donné comme ça: $y_i = x_i$   $i \neq r$

$y_r = |H_{rr}(x)|^{1/2} \left(x_r + \sum_{r<j} x_i H_{ir}(x)/H_{rr}(x)\right)$

φ est difféom.: $d\varphi_x = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 \dots 0 & & & |H_{rr}(0)|^{1/2} & \dots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} r$   $\det \neq 0$

dans (*) $\dots = f(0) \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_{r-1}^2 + 2 \sum_{r<i} x_r x_i H_{ir}(x) + \sum_{r\le i,j} x_i x_j H_{ij}(x)$

$$\pm y_r^2 = |H_{rr}(x)| \left( x_r^2 + 2 x_r \sum_{r<i} x_i \, H_{ir}(x)/H_{rr}(x) + \sum_{r<i,j} x_i x_j \, H_{ir}(x)/H_{rr}(x) \cdot H_{jr}(x)/H_{rr}(x) \right)$$

$$= x_r^2 H_{rr} + 2x_r \sum_{r<i} x_i H_{ir}(x) + \sum_{r<i,j} x_i x_j \, H_{ir}(x) \cdot H_{jr}(x)/H_{rr}(x)$$

$f\varphi^{-1}(y_1 \dots y_r) = f(0) \pm y_1^2 \pm y_2^2 \dots y_{r-1}^2 \pm y_r^2 - \sum_{r<i,j} y_i y_j \cdot$ ~~$(H_{rr}(\varphi^{-1}(x))$~~

$$\cdot \underbrace{\left( \frac{H_{ir}(\varphi^{-1}(x)) \cdot H_{jr}(\varphi^{-1}(x))}{H_{rr}(\varphi^{-1}(x))} + H_{ij}\, \varphi^{-1}(x) \right)}_{:= F_{ij}(y)}$$

* et changement de variable que $P_{r+1\,r+1} \neq 0$ et induction

et symmetriser de $F_{ij}$ → $P_{ij}$

vérifier que $P_{ij}(0) = \frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial y_i \partial y_j}(0)$ a un déterm. ≠ 0 car $\det \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & P_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$ *

**Def**

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad 0 \in U$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0 \qquad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \neq 0$

alors 0 est appelé point critique nongénérée

**Obs**

$\varphi : U, 0 \to U', 0$ diffeom.

0 p.c. nongénér. par $f$.

$\Rightarrow$ 0 p.c. nongénér. pour $f \circ \varphi^{-1}$

Morse : $f\varphi^{-1} = f(0) - y_1^2 - y_2^2 \dots - y_r^2 + y_{r+1}^2 + \dots + y_n^2$

index d'un point critique

(pas unique) $f\varphi'^{-1} = f(0) - y_1'^2 - y_2'^2 \dots - y_r'^2 + y_{r+1}'^2 + \dots y_n'^2$

index invariant

**Def**

index r d'un point critique nongénérée $f$ :

$r = \#$ valeurs propres negatives de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$

**Def**

une fonction de Morse differenciable

$f : M \to \mathbb{R}$ est une fonc. de Morse si

1) $f(m) > k$ pour toute $m \in M$

borné inférieur

2) $f$ est propre

$f^{-1}$(compact) compact

3) Chaque point critique de $f$ est nongénérée

fonction d'altitude

fonction de distance

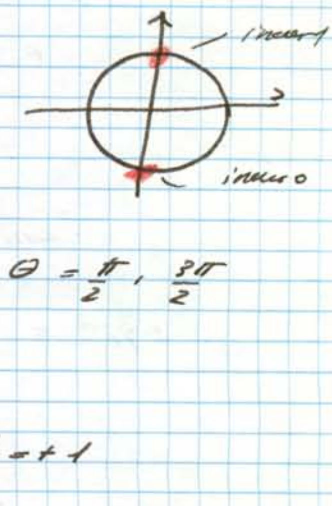
géométriques

$\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to M$

$f \circ \varphi$ different.

0 p.c. de $f\varphi$

**Obs** point critique isolées (Morse)



**Ex**

$f : S^1 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = y$

$\varphi(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta) \qquad \varphi : \mathbb{R} \to S^1$

$\ell = f \circ \varphi(\theta) = \sin\theta \qquad \frac{d\ell}{d\theta} = \cos\theta. \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

alors on a deux Points critiques

$\ell''(\theta) = -\sin\theta \qquad \ell''(\frac{\pi}{2}) = -1 \qquad \ell''(\frac{3\pi}{2}) = +1$

**Ex**

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = z$

est une fonction de Morse

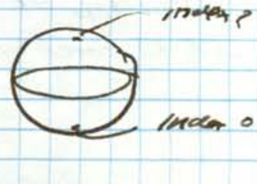
sphère compact

$\varphi_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}$

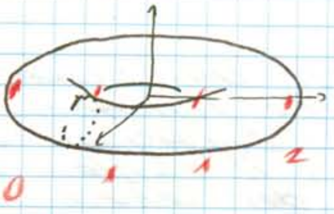
$\varphi_2(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}$

$f \circ \varphi_1 = \sqrt{1-u^2-v^2}$

$f \circ \varphi_2 = -\sqrt{1-u^2-v^2}$



**Ex**



$T^2$

Parametrisation :

$x(\theta,\varphi) = (3+\cos\varphi)\cos\theta$
$y(\theta,\varphi) = (3+\cos\varphi)\sin\theta$
$z(\theta,\varphi) = \sin\varphi$

$\ell = f\cdot\varphi(\theta,\varphi) = (3+\cos\varphi)\cos\theta$

$\ell_\theta = -(3+\cos\varphi)\sin\theta$

$\ell_\varphi = \cancel{3} -\sin\varphi\cos\theta$

$\theta = 0,\pi \ldots k\pi$
$\varphi = 0,\pi \ldots k\pi$

Point critiques $\begin{pmatrix} 0,\pi \\ \pi\;0 \\ 0\;0 \\ \pi\;\pi \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$ index

vergl. 1 cellule dim 1
1 cellule dim 2
1 cellule dim 0

**Ex**

$PR^2 = \{x,y,z \in S^2 \subset R^3\}/_{(x,y,z)\sim(-x,-y,-z)}$

$\alpha<\beta<\gamma$ $\quad f(x,y,z) = \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2 \quad 0<\alpha<\beta<\gamma$

encore : bij. points critiques ⟶ cellulai

$\varphi_1(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \frac{u,v}{\sqrt{u^2+v^2+\ldots}}\right)$

$\varphi_2(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{\ldots}}, \frac{1}{\sqrt{\ldots}}, \frac{v}{\sqrt{\ldots}}\right)$

$\varphi_3(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{\ldots}}, \frac{v}{\sqrt{\ldots}}, \frac{1}{\sqrt{\ldots}}\right)$

Morse function : $f([x,y,z]) = \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2$

$\ell_1 = f\circ\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\ell_2 = f\circ\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\ell_3 = f\circ\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\ell_1(u,v) = \frac{\alpha+\beta u^2+\gamma v^2}{1+u^2+v^2} =: \frac{P}{Q}$

$\ell_2(u,v) = \frac{\alpha u^2+\beta+\gamma v^2}{1+u^2+v^2}$

$\ell_3(u,v) = \frac{\alpha u^2+\beta v^2+\gamma}{1+u^2+v^2}$

$\frac{\partial\ell}{\partial u} = \frac{P_u\cdot Q - 2Pu}{Q^2}$ ①

$\frac{\partial\ell}{\partial v} = \frac{P_v Q - 2Pv}{Q^2}$ ②

points critiques : ① $2\beta u(1+u^2+v^2) - 2u(\alpha+\beta u^2+\gamma v^2) = 0$
d.h. $2u(\beta+\beta u^2+\gamma v^2 - \alpha - \beta u^2 - \gamma v^2) = 0$
d.h. $2u((\beta-\alpha) + v^2(\beta-\gamma)) = 0$

② $2\gamma v(1+u^2+v^2) - 2v(\alpha+\beta u^2+\gamma v^2) = 0$
$2v((\gamma-\alpha)+(\gamma-\beta u^2)) = 0$

alors $u=0 \wedge v=0$

$\ell_1$ : Points critiques $(0,0)$ $\quad (1,0,0) \in V_1$
$\ell_2$ : " $(0,0)$ $\quad (0,1,0) \in V_2$
$\ell_3$ : " $(0,0)$ $\quad (0,0,1) \in V_3$

nondégénérées : $\frac{d^2\ell}{du^2}(0,0) = (P_{uu} - 2P)_{0,0}$

$\frac{d^2\ell}{dv^2}(0,0) = P_{vv}(0,0) - 2P(0,0)$

$\frac{d^2\ell}{du\,dv}(0,0) = 0$

$\ell_1$: Hessien $\begin{pmatrix} 2\beta-2\alpha & 0 \\ 0 & (2\gamma-2\alpha) \end{pmatrix}$ Index 0

$\ell_2$: Hessien $\begin{pmatrix} 2\alpha-2\beta & 0 \\ 0 & 2\gamma-2\beta \end{pmatrix}$ Index 1 → *

*

$\ell_3$: H. $\begin{pmatrix} 2\alpha-2\gamma & 0 \\ 0 & 2\beta-2\gamma \end{pmatrix}$

Index 2

de même pour les plans projectives de dimension n

## Theoreme

Si $M^n$ est une variete different muni d'une fonction de Morse à points critiques d'indexes $i_1, i_2, \dots$, il existe un complex cellulaires des cellules en correspondance bijective aux points critiques
(dim des cellule = index de point critique
$M^n$ homotope à cet complex.)
equivalent

même : homoeomorph
(mais plus compliqué a démontrer)

**Def**

un ensemble fini

$X : X_{-1} = \phi \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$

1) $X_{i+1} = X_i \underset{e_1}{\cup} D_1^{i_1} \cup_{e_2} D_2^{i_2} \dots D_j^{i_j}$

$\partial S^{i_j - 1} \xrightarrow{e_i} X_i$

2) $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ ouvert $\sim \cap$ ouvert

complex cellulaire (general)

**Def**

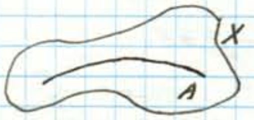
$X \xrightarrow{f} Y$ est une equivalence homotopique, il exist $h$ $f \circ h \sim id$ $h \circ f \sim id$

**Def**

$A \hookrightarrow X$ A s'appelle retract de X s'il existe $p : X \to A$ t.q $p \cdot i_n = id$

n'est pas necessairement une equiv homotopique

**Def**



$A \hookrightarrow X$ A s'appelle retract par déformation s'il existe $p : X \to A$ $p \cdot i_n = id$

$F : X \times I \to X$

$F/_{X \times \{0\}} = i \circ p$ $F/_{X \times \{1\}} = id$

$F/_{A \times \{t\}} = id$

**Def**

Une v.d. à bord X (Hausd, paracompact (metrisable))

$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset X$ homeom.

$U_\alpha \subset \mathbb{R}_+^m$

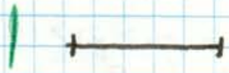
1) $\cup V_\alpha = X$

2) $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ difeom.

$\{ x \mid \varphi_\alpha^{-1}(x) \in \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}_+^m \} = \partial X$

partition de l'unité $\cup V_\alpha = X$
$\sup f_\alpha \in V_\alpha$
$\{\sup \varphi_\alpha\}$ localement fini
$\sum \varphi_\alpha = 1$

**Ex**



$\subseteq \mathbb{R}$

Consec. $\partial X$ variete diff de dimens $(m-1)$

**Def**

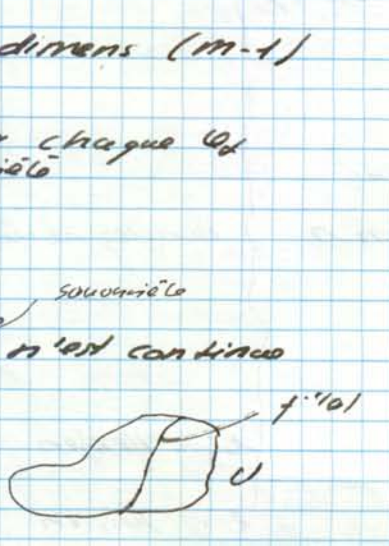
$M \subset X$ souvariété si pour chaque $\varphi_\alpha$ $\varphi_\alpha^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^m$ est une souvariété

$f : M \to \mathbb{R}$

suppose que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur reguliere $f^{-1}(a)$ souvariété n'est contineo pas des points critique.

suffit

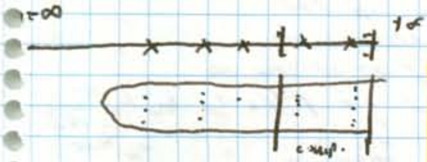
$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



$x : U \to \mathbb{R}^n$ $(x_1 \dots x_n) \to (x_1 \dots x_{r-1}, f(x_1 \dots x_n), x_{r+1} \dots)$
diffeom. dans une voisinage de $(x_1 \dots x_n)$

$$x^{\sim}(f^{-1}(0)) = x(U') \cap (\mathbb{R}^{r-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-r})$$

cons. de la défin. des fonctions de Morse

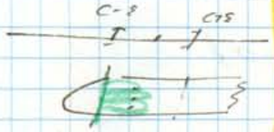


1) Les p.c. sont critiques isolés
2) Chaque valeur critique admet un nombre fini de points critiques
3) Pour chaque valeurs critique il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ ne contient pas une autre valeur critique.

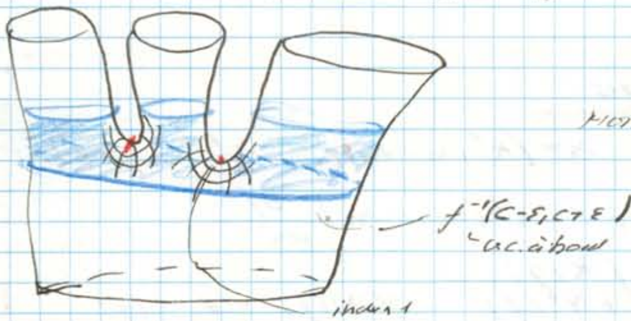
**Théorème** $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse

1) $f^{-1}[a,b]$ est une variété compact à bord si $a$ et $b$ sont des valeurs régulière

2) S'il n'existent pas de valeurs critiques dans $[a,b]$ alors $f^{-1}[a,b] \xrightarrow{x} f^{-1}(a) \times [a,b]$ > diffeom.

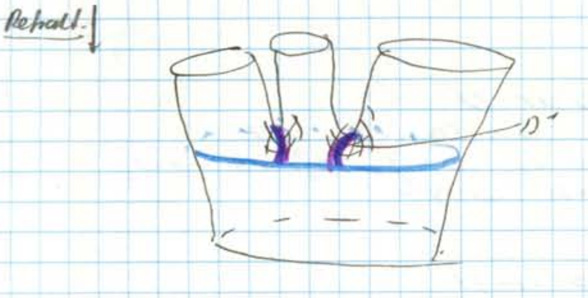


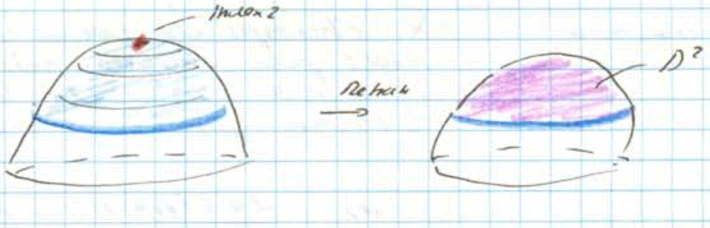
3) Pour chaque $c$ valeur critique il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ se retracte par déformation à $f^{-1}(c-\varepsilon) \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \cup_{\varphi_2} D^{\lambda_2} \cup \dots \cup_{\varphi_k} D^{\lambda_k}$

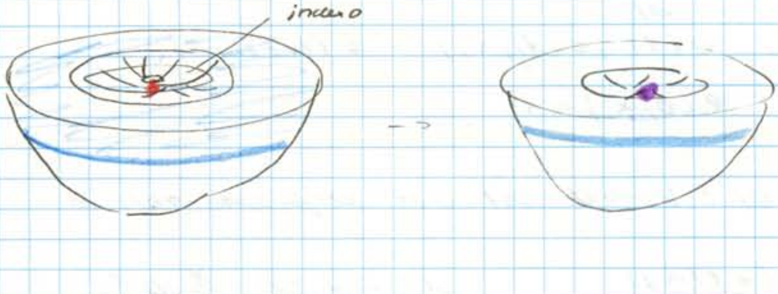


Morse $f(x_1 \dots x_n) = C - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + \dots + x_m^2$

$D^{\lambda} = \{x_1 \dots x_n / x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0, \ \Sigma x_i^2 \le \varepsilon\}$







**Theorème**

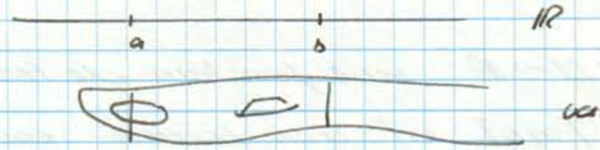
$f : M \to \mathbb{R}$ fonction d. Morse

1) Si $a, b \in \mathbb{R}$ valeurs régulière $f^{-1}[a,b]$ est une variété à bord

2) Si l'interval $[a,b]$ ne contient pas de valeurs critiques alors
$f^{-1}[a,b] \cong f^{-1}(a) \times [a, b-a]$

3) Si c est un point critique ($x_1 \dots x_k \in M$ avec indices $n_1 \dots n_k$) alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ ne contien pas d'autres valeurs critiques et $f^{-1}[c-a, c+a] \to f^{-1}(c-\varepsilon) \cup_{e_1} D_1^{n_1} \cup \dots \cup_{e_k} D_k^{n_k}$
retract par déformation

**Dém** 1) trivial



$x \in f^{-1}[a,b]$   $f(x) \neq a, b$ ✓
$f(x) = a$ (ou bien $f(x) = b$)

$\varphi^{-1}(f^{-1}]-\infty, b] \cap V) = \{(x_1 \dots x_k : x_k \leq 0\}$

2)

**Def** Champs de vecteurs

Arnold S. 208

$U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$   $X = (X^1(x_1 \dots x_n), \dots X^n(x_1, \dots x_n))$

$f : U \to \mathbb{R}$   $X(f) = \sum X^i(x_1, \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$X(f \cdot g) = X f\, g + f\, X(g)$
$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$   $(\alpha X)(f) = \alpha X(f)$

**Théorème**

X champs de vecteurs sur U
Alors pour chaque point $a = (a_1 \dots a_n) \in U$
il existe $\varepsilon > 0$ $U \supseteq V \ni a$ et $\varphi : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times V \to U$
$\varphi(t, x_1 \dots x_n)$   $\Rightarrow \varphi$ est unique

1) $\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = X(\varphi(t, x))$

2) $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$

3) $\varphi(0, x) = x$

**conséquence** : $\varphi_t : V \to U$ est un difféomorphisme

$X(f) = \frac{d f(\varphi(t,x))}{dt}$   $U' \xrightarrow{u} U \xrightarrow{X} \mathbb{R}^n$

$\varphi^{X \circ u}(t, x') = \varphi^X(t, u(x'))$   (vérifier ~~tque~~ que tous les deux satisfaient 1) 2) 3) et remarques l'unicité dans le théorème

$M$   $V_\alpha$   $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$

$u_\alpha : U_\alpha \to u_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subseteq M$

$u_\beta^{-1} \circ u_\alpha$   difféo

Def

$X$ champs de vecteurs sur $M$ $= X_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$
tel que $X_\beta(u_\beta^{-1} \circ u_\alpha) = \cancel{X}_\alpha\, d(u_\beta^{-1} \circ u_\alpha) X_\alpha$

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M$$

1) $X(\lambda f) = \lambda X(f)$

2) $X(fg) = X(f)g - f(Xg)$

Théorème

Soit $X$ c.d.v. sur $M$... ~~1) 2) 3)~~ à support compact
Alors il existe une unique $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ avec

1) $X(f)_{\varphi(t,x)} = \frac{d}{dt} f(\varphi(t,x))$

2) $\varphi(0,x) = x$

3) $\varphi(t_1, \varphi(t_2,x)) = \varphi(t_1+t_2, x)$

Dem de 2) du théorème

$f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse

**Def** Un champ de vecteur $X$ sur $M$ s'appelle de typ gradient par rapport à $f$ si les conditions suivants sont rempli :

1) $X(f)_{(x)} > 0$

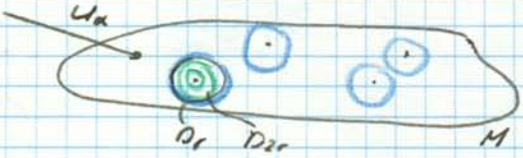
2) Pour $x \in M$ ~~x contin~~ a critique
il exist $u : (U, 0) \to u(U) \ni x$ t.q

i) $(f \circ u)(x_1, \dots x_n) = f(a) - x_1^2 - x_2^2 \dots - x_\gamma^2 + x_{\gamma+1}^2 + \dots + x_n^2$

ii) $X(x_1 \dots x_n) = (-x_1, -x_2, \dots -x_\gamma, x_{\gamma+1} \dots x_n)$

**Prop** Si $f : M \to \mathbb{R}$ il existe des champs de vecteurs de type gradient

$\Gamma$ $u_\alpha$
construction de $x(f) > 0$



fonction propre et seulement fini nombre fini de $\alpha$

$V_2 = \bigcup u_\alpha(D(2r_\alpha))$ ouvert

$V_1 = M \setminus \bigcup u_\alpha(D(r_\alpha))$ ouvert

$M = V_1 \cup V_2$

si $f$ n'est pas critique $df \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \neq 0$

pour chaque point sur $V_1$

$x(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} > 0$

$X = (\frac{X_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, 0 \dots 0)$

partition de l'unité, permet de faire le collage

$X_2$ sur $V_2$ donné par $X_2 / u_\alpha(\mathring{D}(2r_\alpha))$ :
$X_2(x_1, \dots x_n) = (-x_1, \dots -x_{\gamma_\alpha}, x_{\gamma_\alpha+1} \dots x_n)$

on prend $\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 = X$

$\perp$

Dem de 2) du théorème

on regarde $X / x(f)$ est un c.d.v. sur

$Y : Y/_{f^{-1}[a,b]} = X / x(f)$

supp $Y$ voisin. de $f^{-1}[a,b]$

~~Y~~ soit $\varphi^Y : \mathbb{R} \times M \to M$

$\mathcal{X} : f^{-1}[a] \times [0, b-a] \to f[a,b]$

$$\boxed{\chi(x,t) = \varphi^Y(t,x)}$$

$f(\varphi(t,x)) = t+a$ car $\frac{df(\varphi(t,x))}{dt} = Y(t)$

$= \frac{X}{X(t)}(t) = 1$

$\Rightarrow f(\varphi(t,x)) = t + c$

$t=0 \quad f(\varphi(0,x)) = f(x) = a$

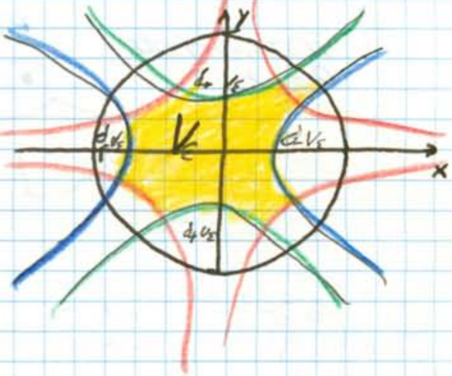
$\chi$ est difféomorph.

$$\chi^{-1}(x) = (\underbrace{\varphi(-f(x)+a, x)}_{\in f^{-1}[a]}, f(x)-a)$$

car $f(\varphi(-f(x),x)) = f(x)+f(\varphi(\ldots)) = 0$

---

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ $\quad x = (x_1 \ldots x_r)$
$\quad y = (y_{r+1} \ldots y_n)$



$D(a) = \{(\vec{x},\vec{y}) \mid |x|^2+|y|^2 \le a\}$

$V_\varepsilon = \{(\vec{x},\vec{y}) \mid -\varepsilon^2 \le -|x|^2+|y|^2 \le +\varepsilon^2$
$|x||y| < \varepsilon^2$

$V_\varepsilon \to \bar{D}$ $\quad \bar{D} = \{(x,y) \mid y=0\} \cup \partial_- V_\varepsilon$

sera donné en deux étapes :

$V_\varepsilon \to \bar{D}'$ $\quad \bar{D}' = \{(x,y) \in V_\varepsilon \mid |y| \le \frac{\varepsilon}{10}\} \cup \partial_- V_\varepsilon \} \subset \bar{D}$

$r_t \mid \bar{D}' = id$ $\quad r_t' \ \bar{D}' \to \bar{D}$

$r_0 = id$ $\quad r_t' \mid \bar{D} = id \quad r_0' = id$

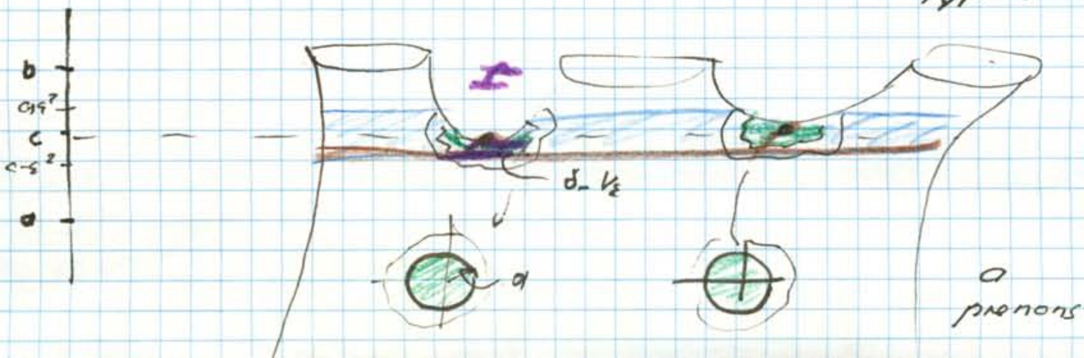
$r_1 : V_\varepsilon \to \bar{D}'$ $\quad r_1'(\bar{D}') \subset \bar{D}$

$$r_t(\vec{x},\vec{y}) = r(t,\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} (\vec{x},\vec{y}) & ; \ y \le \varepsilon/10 \\ \left(\frac{\vec{x}}{\rho(t,x,y)}, \rho(t,x,y)\ \vec{y}\right) & |y| \ge \frac{\varepsilon}{10} \end{cases}$$

$\rho(t,x,y) = \max\{\frac{\varepsilon}{10|y|}$, l'unique solution positive de l'équation
$-\frac{|x|^2}{\rho^2} + \rho^2|y|^2 = (-|x|^2+|y|^2)(1-t) - t\varepsilon)$

$$r_t'(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} (\vec{x}, (1-t)\vec{y}) & ; \ |\vec{x}| \le \varepsilon \\ (x, \alpha(t,x,y)\,\vec{y}), & |\vec{x}| > \varepsilon \end{cases}$$

$$\alpha(t,x,y) = (1-t) + t\left(\frac{|x|^2-\varepsilon^2}{|y|^2}\right)^{1/2}$$



a
prenons $\varepsilon^2 < a$

$f^{-1}[c-\varepsilon^2, c+\varepsilon^2] = M^{[c-\varepsilon^2, c+\varepsilon^2]}$

$r_t : M^{[c-\varepsilon^2, c+\varepsilon^2]} \to M^{[c-\varepsilon^2, c+\varepsilon^2]}$

$r_0 = id$

$r_t / f^{-1}(c-\varepsilon^2) \cup \bar{D}_1^{n_1} \cup \bar{D}_2^{n_2} \dots \bar{D}_k^{n_k} = id$

$r_1 / M^{[c-\varepsilon^2, c+\varepsilon^2]} \to M^{+}$

$r_t' : M' \to M'$ $\quad r_0' = id$ $\quad r_t' / f^{-1}(c-\varepsilon^2) \cup \bar{D}_1^{n_1} \dots D_n^{n_i} = id$

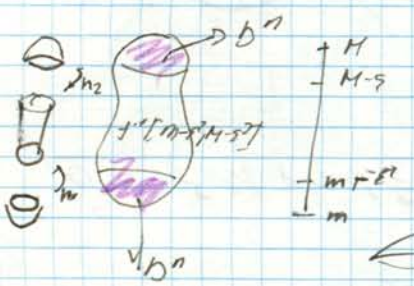
$r_t' / f^{-1}(c-\varepsilon^2) \cup \bar{D}_1^{n_1} \dots \bar{D}_j^{n_j} = id$

en dehors de la région vert : $r_t(x) = \varphi(t(\varepsilon^2 - f(x)), x)$
où $\varphi(x)$ est associé au champs de vecteurs $Y$ a
support compact ($Y = X/|X(t)|$ ~~en de~~ sur $f^{-1}[c-\varepsilon, \varepsilon]$
$- U_1(V_\varepsilon) \cup U_2(U_\varepsilon)$) ⌟

**Theorem de Reeb**

Si $M$ est compact avec deux points critique pour une f. de Morse alors $M \sim S^n$

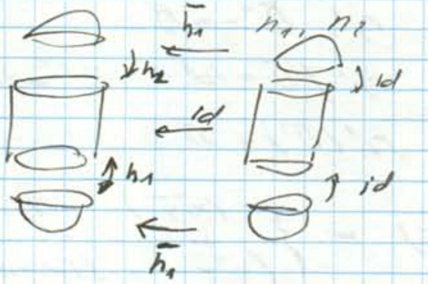
⌜ immédiat : l'un point a index 0 $\quad \times f(x) = m - x_1^2 \dots - x_n^2$
l'autre index n $\quad f(x) = c + x_1^2$



$f : M \to [m, M]$

$f^{-1}(m-\varepsilon^2, m+\varepsilon^2)$

$f^{-1}(M-\varepsilon^2, M+\varepsilon^2)$



$h_1, h_2$ homöomorphime

homöomorf. de la sphère
s'étend a un homöom. de disk.

au difféomorph. cela ne marche pas

**lemma**

Chaque $h : S^n \to S^n$ s'étend à un homoomorphime $\bar{h} : D^n \to D^n$

⌜ $\bar{h}(\vec{x}) = \begin{cases} |x|\, h(\frac{x}{|x|}) & |x| \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad$ continue mais pas differentiable

Théorème : Chaque v. diff. a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire.

[Soit $f : M^n \to \mathbb{R}$ une fonction d. Morse
Soit $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$ les valeurs critiques
choisisson $a_i = \frac{c_{i+1} + c_i}{2}$ $\quad a_N = c_N + 1$

$- \overset{c_i}{\cdot} - - \underset{a_i}{\cdot} - - \overset{c_{i+1}}{\cdot}$

$c_0 < a_0 < c_1 < a_1 < \ldots \quad c_n < a_n < c_{n+1} \ldots \quad < c_N < a_N$

$M^{a_i} := f^{-1}(-\infty, a_i]$ $\qquad X_{n+1} = X_n \cup D_1^{r_1} \cup D_2^{r_2} \ldots D_k^{r_k}$

$r_1 \ldots r_k$ indexes des points critiques qui correspondent à la valeur critique $c_n$.

$$\begin{tikzcd}
M^{a_0} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\theta_0"] & M^{a_1} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\theta_1"] & \ldots \arrow[r, phantom, "\subset"] & M^{a_n} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\theta_n"] & M^{a_{n+1}} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\theta_{n+1}"] & \ldots & M \\
X_0 \arrow[r, phantom, "\subset"] & X_1 \arrow[r, phantom, "\subset"] & \ldots \arrow[r, phantom, "\subset"] & X_n \arrow[r, phantom, "\subset"] & X_{n+1} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \ldots & \lim X_n = X
\end{tikzcd}$$

$M^{a_n} = f^{-1}(-\infty, a_n]$

$f^{-1}[c_{n+1}-\varepsilon, c_{n+1}+\varepsilon] \hookrightarrow f^{-1}(c_{n+1}-\varepsilon) \cup D^{r_1} \cup D^{r_2} \ldots$

$f^{-1}[c_{n+1}^{-\varepsilon}; a_n] \to f^{-1}(a_n) \times$

$\to M^{c_{n+1}-\varepsilon} \to M^{a_n}$

$- M^{c_{n+1}+\varepsilon} \to M^{c_{n}-\varepsilon} \cup D^{r_1} \cup D^{r_2} \ldots$

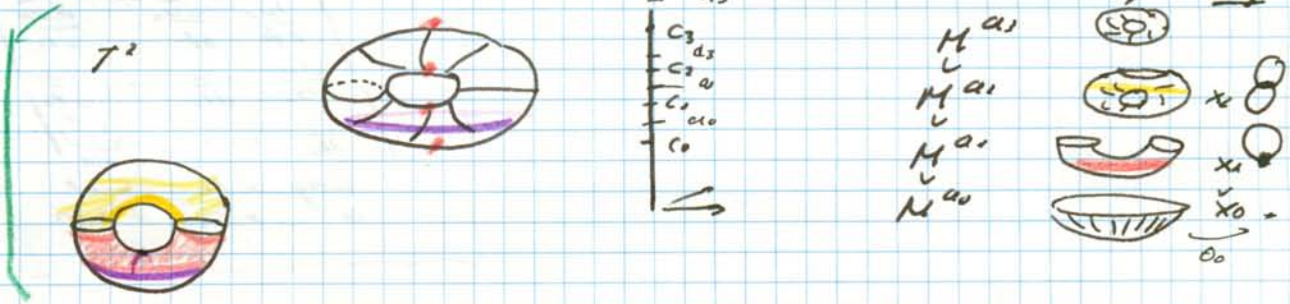
$$\begin{tikzcd}
M^{a_n} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dd, "\theta_n"] & M^{c_{n+1}-\varepsilon} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[ddl, "\theta_n'"] \arrow[dr] & M^{c_{n+1}+\varepsilon} \arrow[d] \\
 & & M^{c_{n+1}-\varepsilon} \cup D^{r_1} \cup \ldots \cup D^{r_m} \arrow[dl] \\
X_n & X_n \cup D^{r_1} \ldots &
\end{tikzcd}$$

$e_i : \partial(D^{r_i}) \to M^{c_{n+1}-\varepsilon} \xrightarrow{\theta_n'} X_n$

$$\begin{tikzcd}
M^{a_n} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dd, "\theta_n"] & M^{c_{n+1}-\varepsilon} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[ddl, "\theta_n'"] \arrow[dr, "c_0"] & M^{c_{n+1}+\varepsilon} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & M^{a_{n+1}} \arrow[ddll, bend left, "\theta_{n+1}"] \\
 & & M^{c_{n+1}-\varepsilon} \cup_{e_i} D^{r_1} \ldots \cup D^{r_m} \arrow[dl, "\theta_{n+1}''"] & \\
X_n \arrow[r] & X_n \cup_{e_1} D^{r_1} \ldots \cup_{e_n} D^{r_n} & &
\end{tikzcd}$$

→ Milnor Morse theorie Appendix
en cas non compact ⊥

Exemple



Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ Alors pour presque chaque $v \in \mathbb{R}^N$ la fonction
$F_v : M \to \mathbb{R}$
$F_v(m) = \langle \vec{v}, \vec{m} \rangle$ ~~a toutes les p.c nonde~~
a tous les points critiques nondégénérés. $\Sigma$ l'ensem de mesure nulle.

Construct. de $\Sigma$ :

l'idée : 1ère étape $\mathbb{R}^N \times M \supset P = \{ (\vec{v}, m) \mid m$ est p.c pour $F_{\vec{v}} \}$

1) $P$ est une sous variété diff de dim $N$
2) $\underbrace{P \subset \mathbb{R}^N \times M \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^N}_{\tilde{\pi}}$

si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est une valeur regulière de $\tilde{\pi}$, alors $F_v$ a tout les p. crit. nondegeneré.

$\Sigma = \{$valeurs critiques de $\tilde{\pi}\}$

- Il suffit de trouver $M_x$ ouvert de $M$ t.q $M_x \subset \mathbb{R}^N$ . (Poind de vue local suffit / recouvrement)

- Il suffit à prendre $M_x \overset{\text{im}(u_x)}{=} u_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$

$M = u(\mathbb{R}^n \quad u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ Du de rang $n$

$\Gamma$ $M =$ ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^N \times M \\ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \arrow[u] \end{tikzcd} \supset P$$

$$P \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^N$$
$$\xrightarrow[D\hat{\pi}]{}$$

$p \in P$ est un point regulière si $D_p\hat{\pi}$ est de Rang $N$ et pour chaque $p \in \hat{\pi}^{-1}(v)$

$D_p\hat{\pi}$ est de rang $N$

$\to$ $v$ est une valeur regulière

$M = \mu(\mathbb{R}^n)$
$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$

$$\text{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt_1} & \cdots & \frac{du_1}{dt_n} \\ \vdots & & \\ \frac{du_n}{dt_1} & \cdots & \frac{du_n}{dt_n} \end{pmatrix}}_{A} = n$$

$$P = \{ (v_1 \dots v_N, t_1 \dots t_n) \mid \begin{matrix} \sum \frac{\partial u_i}{\partial t_1} v_i = 0 \\ \vdots \\ \sum \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i = 0 \end{matrix} \}$$

$$F_v(t_1 \dots t_n) = \sum_{i=1}^{N} v_i u_i(t_1 \dots t_n)$$

par definition

$\hat{F}^{-1}(0) = P$ ou

$\hat{F} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\hat{F}_i(v_1 \dots v_N, t_1 \dots t_n) = \sum_{i=1}^{N} v_i \frac{du_i}{dt_k}$$

$\hat{F}^{-1}(0)$ est une sous-variété car :

$$D\hat{F}_{(\vec{v},\vec{x})} = \begin{vmatrix} \frac{d\hat{F}_1}{dv_1} & \cdots & \frac{d\hat{F}_1}{dv_N} & \frac{d\hat{F}_1}{dt_1} & \cdots & \frac{d\hat{F}_1}{dt_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{d\hat{F}_n}{dv_1} & - & - & - & - & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \overbrace{\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt_1} & \frac{du_2}{dt_1} & & \frac{du_N}{dt_1} \\ \frac{du_1}{dt_2} & \frac{du_2}{dt_2} & \cdots & \frac{du_N}{dt_2} \\ \frac{du_1}{dt_n} & \cdots & & \frac{du_N}{dt_n} \end{vmatrix}}^{A} \begin{matrix} \cdots \\ \cdot \\ \cdots \end{matrix} \Bigg\} n$$

rang $= n$ car on a rang $A = n$

**Lemma**

$T = \ker \omega : V \to P$
Soit $\pi : V \to Q$
$\tilde{\pi} : T \to Q$ est un isomorphisme si et seulement si
$V \xrightarrow{\pi + \omega} Q \oplus P$ est un isomorphisme

$$\begin{tikzcd} T = \ker \omega \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & Q \arrow[d, dotted] \\ V \arrow[u] \arrow[r, "\pi + \omega"] \arrow[d, "\omega"] & Q \oplus P \arrow[d, "p"] \\ P \arrow[r, "\sim"] & P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, no head] & \mathbb{R}^N \\ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[d, "D\hat{F}"] & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$D\tilde{\pi}$ est une isomorphisme ?

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{D\hat{F}(\vec{v},\vec{t})} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{D\pi, DF} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \quad — \quad \left|\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline & \underbrace{D\hat{F}}_{} \end{array}\right| — \text{Hessien}$$

$D\hat{F}(\vec{v},\vec{t})$ — Hessien de $F_r$ dans le point critique $\vec{t}$

car $DF = \left|\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial t_j} \cdots\right| \ldots = \left|\frac{\partial^2 F_r}{\partial t_i \partial t_j}\right|$

equivalemment sont

I $(\vec{v},\vec{x}) \in P$ $\quad D\tilde{\pi}(\vec{v},\vec{x})$ est de Rang $N$

clair ( II $(\vec{v},\vec{x}) \in P$ $\quad \pi = \left(\frac{I \mid 0}{D\hat{F}}\right)$ est de Rang $N+n$

III $dF_{\vec{r}}^{*}(\vec{x}) = 0$ et $\left|\frac{\partial^2 F_r^{*}}{\partial x_i \partial x_j}\right| \neq 0$

$\vec{x}$ point critique par $F_{\vec{r}}^{+}$ nondegeneree $\longleftrightarrow$

$(\vec{v},x) \in P$ $\quad D\tilde{\pi}_{\vec{v},x}$ isomorph. $\longrightarrow$ ~~ssi~~ $(\vec{v},\vec{x}) \in P$ et est un point regulier par $\pi$

equiv II, III clair

equiv I, II

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[r, "D\tilde{\pi}"] & \mathbb{R}^n \\ P \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \arrow[ur, dash] \arrow[rr, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "DF_{(\vec{v},x)}"'] & & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \arrow[ul, dash] \arrow[d, "\text{proj.}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "id"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$(\vec{v},x)$ $\quad$ → lemme

Rem

$M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

$f : M \to \mathbb{R}$

$M \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ $\quad$ → presque toute fonction est une fonction avec des points critiques nondegenerees

$m \longmapsto (i(m), f(m))$

Preuv

$\underbrace{M \subseteq \mathbb{R}^N \subset S^N}_{} \subset \mathbb{R}^{N+1}$

$f : M \to \mathbb{R}$ une fonct.

1) differ
2) bornes
3) propre

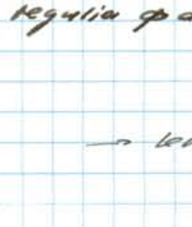
$M \xrightarrow{\tilde{i}} \mathbb{R}^{N+1}$

$\tilde{i}(m) = (i(m), f(m))$

$\vec{v} = (0,0 \ldots 1 1) \in \mathbb{R}^{N+1}$ $\quad v' \in V(v)$

$F_{\vec{v}}$, est propre donc int

graph $f \subset \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}$ reste propre
fermé



Graph comme plongement

en cas d. v. compact pas de probleme.

**Théorème**

Chaque variété comp. diff se "plonge" dans un espace euclidienne.

une positilité dans un espace Hilbert -- codimension

non compacte : au lieu de
$u_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$
$u_\alpha : \cup V_\alpha \to \mathbb{R}^N$
nombre fini de familles (paracompact)

⌈ cas compacte :

⌈ $M^n$ il existe des plongements
$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ $\quad \cup V_\alpha = M^n$
$U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi_\alpha^{-1} = \vec{u}_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \in \mathbb{R}^n \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $\quad \alpha = 1, 2, \dots N$

il existe $\lambda_\alpha : M \to \mathbb{R}_+$ $\quad \Sigma \lambda_\alpha = 1$ $\quad \operatorname{supp} \lambda_\alpha \subset V_\alpha$

$$x : M \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{N}$$

$x(m) = (\lambda_1(m)\vec{u}_1(m), \lambda_2(m) \vec{u}_2(m), \dots \lambda_N(m) \vec{u}_N(m))$

où $\lambda_\alpha(m)\, u_\alpha(m) = 0$ en dehors de $V_\alpha$

$x$ injectif
et $dx$ injectif

$x$ inj :
⌈ ~~mpns~~ $\lambda_\alpha(m) \neq 0$ $\lambda_\alpha(n) \neq 0$
$x(m) = x'(n) \to \lambda_\alpha \vec{u}_\alpha(m) = \lambda_\alpha(m)\, \vec{u}_\alpha(m)$

~~alors~~ $\dfrac{\lambda_\alpha \vec{u}_\alpha(m)}{|\ |} = \vec{u}_\alpha(m)$ $\quad$ car dans $S^n$

$\dfrac{\lambda_\alpha(m)\, \lambda_\alpha(m)}{|\ |} = u_\alpha(n)$

supposons : $\lambda_\alpha(m) \neq 0$ $\quad \lambda_j(m) \neq 0$
$\lambda_\alpha(n) = 0$ $\quad \lambda_j(m) = 0$

alors $x_\alpha(n) = 0$ $\quad x_\alpha(m) \neq 0$ $\quad \perp$

**Théorème**

Chaque v. diff comp. se "plonge" dans un espace euclidienne $\mathbb{R}^{2n+1}$ ← même $2n$ possible

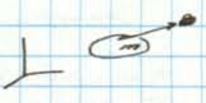
$$M^n \xrightarrow{x} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\pi_v} \mathbb{R}^{N-1}$$
projection orthogonale

$\underbrace{\phantom{M^n \to \mathbb{R}^N \to}}_{x'}$ est plong si $N > 2n+1$

$TM = \cup T_m M$ variété diff.

$F : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$
$G : T(M) \to \mathbb{R}^N$ $\qquad v \in \mathbb{R}^N - (\operatorname{Im} F \cup \operatorname{Im} G)$

$F(m, n, t) = (x(m) - x(n))\, t$
$G(m, \xi) = "m \times \xi"$



$\pi_v x$ injectif ? $\qquad \pi_v\, x(m) - \pi_v\, x(n)$
$\pi_v(x(m) - x(n)) = 0 \to x(m) - x(n) = t\vec{v}$

~~$F(m, n, t) =$~~ $\qquad F(m, n, \frac{1}{t}) = \frac{1}{t}(x_m - x_n) = \vec{v}$
mais $v \notin \operatorname{Im} F$

$d\pi_v x$ injectif $\qquad 0 = d(\pi_v x)\, \vec{a} = \pi_v \cdot dx_m(a) = 0$
$dx_m(\vec{a}) = t\vec{v}$ $\quad dx_m(\frac{\vec{a}}{t}) = \vec{v}$ mais $\vec{v} \notin \operatorname{Im} G$

**Def**

Espace topolog. homot. equiv. aux complexes cellulaires finies :

1) $\chi(pt) = 1 \quad \chi(\emptyset) = 0$

2) $X = X_1 \cup X_2$

$\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2)$

3) $X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y)$

Charactaristique de Poincarée

général. de la cardinalité

Existe

**Ex**

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n\text{-impair} \\ 2 & \text{si } n\text{-pair} \end{cases}$$

$\chi(S^1) = 1+1-2$

$\chi(S^2) = \chi(S^2_+) + \chi(S^2_-) - \chi(S^1) = 2$

Considérons les esp. top. de type d'homologie d'un complexe fini

**Théorème**

Il existe $\chi$ (unique) telle que

1) $X_1 \sim X_2 \Rightarrow \chi(X_1) = \chi(X_2)$

2) $\chi(pt) = 1$

3) $X_1, X_2 \subseteq X \quad X_1 \cup X_2 = X \quad X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ ouverts

$\Rightarrow \chi(X_1 \cup X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2)$

demonst. plus tard

**Propriétés**

1) $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impaire} \\ 2 & n \text{ paire} \end{cases}$

2) $\chi(X) = n_0 - n_1 + n_2 + \dots (-1)^k n_k$

si $X$ est un complexe cellul. fini avec $n_0$ cell. de dim 0

$\vdots$

$n_k$ cell. de dim $k$

3) $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$

$\ulcorner$ 1) $S^n = \mathring{D}_+^n \cup \mathring{D}_-^n \ \cancel{\longrightarrow}$

$\chi(S^n) = 1+1 - \chi(S^{n-1})$

$\chi(S^0) = 2$

2) $\chi(X \cup_e D^n) = \chi(X) + (-1)^{\cancel{n}}$

$X \cup_e D^n = \frac{1}{2}\mathring{D}^n \cup_{\varphi} X \cup_{\varphi} (D^n - \{0\})$

$\chi(X \cup D^n) = 1 + \chi(X) - \chi(\frac{1}{2}\mathring{D}^n - \{0\})$

$= \chi(X) + (-1)^n \qquad \underbrace{\phantom{xxxx}}_{1+(-1)^{n-1}}$

$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$

3) $X$ $e^p$
$Y$ $f^q$
$X \times Y$ $(e \times f)^{p+q}$

**Theorème** Il existent seulement 5 polyedres regulieres dans $\mathbb{R}^3$

**Def** Polyedere convex dans $\mathbb{R}^3$ $\{v_1 \dots v_k\} = \{(t_1 v_1^2 + \dots + t_k v_k)$
les generateurs $v_1 \dots v_k$ sont pas coplanair $0 \le t_i \; \Sigma t_i = 1\}$

Polyedre reguliere : polyèdre avec des faces poligone regulieres et concurent.

$\Gamma$ 1) $n_0 - n_1 + n_2 - 1 = 1 \rightarrow \boxed{n_0 - n_1 + n_2 = 2}$

2) $v_0$ = le nombre des arrets qui viennent dans un sommet
$v_2$ = le nombre des arret qui ... nomment une face

$$\boxed{n_1 = \frac{n_0 \cdot v_0}{2} \qquad n_1 = \frac{n_2 \cdot v_2}{2}}$$

$$n_0 = \frac{2n_1}{v_0} \qquad n_2 = \frac{2n_1}{v_0}$$

$$\frac{2n_1}{v_0} - \frac{2n_1}{2} + \frac{2n_1}{v_2} = \frac{2n_1}{n_1}$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{n_1} \qquad \boxed{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n_1}}$$

$3 \le v_0, v_2 \le 5$

| $v_0$ | $v_1$ | $n_1$ | $n_2$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 6 | 4 |
| 3 | 4 | 12 | 8 |
| 4 | 3 | 12 | 6 |
| 5 | 3 | 30 | 12 |
| 3 | 5 | 30 | 20 |

sousgroups fini de SO(3) :
- 3 Groupes symmetrie des polyèdres
- Groupes cyclic
- Groupe dihedral

→ Weyl : Symmetrie

# Degrée d'une application

variant nonlineaire
de la theorie des
determinants

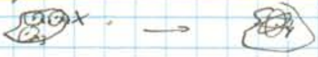
$f : X^n \to Y^p$

- $f^{-1}(y)$ est une sousvariété de dim $n-p$ , si $y$ est reguliere.

Γ ~~∀~~ $x \in f^{-1}(y)$ $df_x$ surjectif
$\varphi : U \to \varphi(U)$
$\psi : V \to \psi(V)$ $\psi^{-1} f \varphi(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \cdots x_p)$ ⅃

Soit $f : X^n \to Y^n$ propre
Si $y \in Y$ valeur regul. $\Rightarrow f^{-1}(y)$ est fini

$y \to \# f^{-1}(y)$ est une fonction localement constant

Γ 

$\to$ diffeom.

**Theorème**

$f : X^n \to Y^n$ $f$ propre $\deg(f) \in \mathbb{Z}_2$
1) $f \sim g \Rightarrow \deg f = \deg g$
2) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$
3) $\deg(id) = 1$
4) $\deg(f \times f') = \deg f \cdot \deg f'$
5) $f$ diffh. alors $\deg f = (\# f^{-1}(y)$ (mod2 pour $y$ valeurs regulieres

**Appliqu**

$f(z) = a_0 z^n + \ldots + a_0 \Rightarrow \exists$ solution complex

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

compactifiqu.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "h_-"] & S^2 \arrow[d, "h_-^{-1}"] \\ \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{tikzcd}$$

① $\hat{f} : S^2 \to S^2$ differentiable

② (critiques de $\hat{f}$) $\subset \{\infty\} \cup \underbrace{\{f'(z) = 0\}}_{\text{fini}}$

$\Rightarrow \hat{f}^{-1}(y)$ = constante mais pas zero
$\Rightarrow \hat{f}$ surjectif Γ car $|\hat{f}^{-1}(y)| \neq 0$ für $y$ critique et $|\hat{f}^{-1}(y)| \neq 0$ für $y$ noncritique ⅃

Γ car $S^2 -$ {critique de f} connex et $\hat{f}^{-1}(e)$ localement constant ⅃

③ $h_- f h_-^{-1}(z) = \dfrac{z^n}{\bar{a}_0 + a_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n}$ $h_- : S^2 - \{s\} \to \mathbb{R}^2$

$h_+ f h_+^{-1}(z) = \dfrac{z^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n}$ $h_+ : S^2 - \{n\} \to \mathbb{R}^2$

(J. Milnor Top of diff point of view. S. 8.9 D3.21)
Guillaume ~~&~~ Pollack

$f(n) = n$
$f(p) = h_-^{-1} f h_+(p)$

$\ell(z) = \frac{1}{z}$

$h_+ \hat{f} h_+^{-1} = f(z)$
$h_- \hat{f} h_-^{-1} = h_- h_+^{-1} f \underbrace{h_+ h_-^{-1}}_{\ell}$
$= 1 / a_0 \frac{1}{(\bar{z})^n} + a_1 \frac{1}{(\bar{z})^{n-1}} \cdots$
$= \dfrac{z^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n}$

$h_+(x,y,z) = \left( \dfrac{x}{1 - \sqrt{1-x^2-y^2}} , \dfrac{y}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$

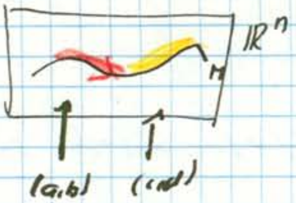
$h_-(x,y,z) = \dfrac{x}{-1-\sqrt{1-x^2-y^2}} , \dfrac{y}{-1-\sqrt{\cdots}}$

Appliqu

$M^1$ est une var. diff. de dimension 1 connexe
$\rightarrow M$ diffeomorph ou bien à $\mathbb{R}$ ou au cercle $S^1$

$\varphi : I \rightarrow \varphi(I) \subset M \subset \mathbb{R}^n$

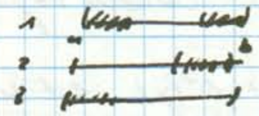
On peut choisir un atlas tell que $|\varphi'(t)| = 1$



$\varphi : I \rightarrow \varphi(I)$
$\psi : J \rightarrow \psi(J)$ deux paramet. local

$\varphi(I) \not\subset \psi(J$ ou $\psi(J) \subset \varphi(I)$

Remarque : Si $\varphi(I) \cap \psi(J) \neq \emptyset$
alors $\varphi^{-1}(\varphi(I) \cap \psi(J)) =$
1 • $(a,a') \cup (b',b)$ $a < a' < b' < b$
2 • $(b',b)$ $a < b' < b$
3 • $(a,a')$ $a < a' < b$



$\varepsilon : (m,n) \rightarrow \varepsilon(m,n)$
$\varepsilon(m,n) = \varphi(I) \cup \psi(J)$

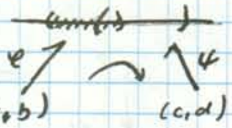
Parametrisation maximal

deux Param. maximal doivent avoir une intersection non vide (connexité)
deux param. Maximales : Cercle
+ une param. maximal : $\mathbb{R}$
l'image envers
l'application est surjectiv

rectangle

Famille de ligne fermé avec tangent 1 (topo. relative)
qui est un graph (intersection avec lignes vertical $\leq 1$

3 Possibilité



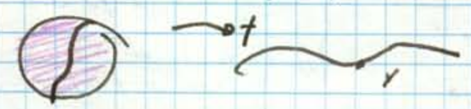
---

Def $X \subset \mathbb{R}^N$ sousvariété à bord $\Leftrightarrow$
$\forall x \in X \; \exists \, U(x) \quad U(x) \overset{\text{diffeom}}{=} V \subset \mathbb{R}^n_+$

$f : X \rightarrow M$ X variété à bord M variété

$y \in M$ est une valeur reguliere si - y est v.reg. de $f : X^\circ \rightarrow M$
- y est v.regul. de $f : \partial X \rightarrow M$

1) $f : X^n \rightarrow N^p$ $X^n$ v.à b. $y \in N^p$ valeur regul.
$\rightarrow f^{-1}(y)$ variété à bord de dim p-n
$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial X$

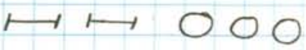


chaque v. à b. ~~connexe~~ compact et diffeom. a une réunion ~~#~~ dénombrable de sercles, [0,1], ~~[0,1)~~, ~~$\mathbb{R}$~~

**Prop** Soit $X^n$ une variété compact à bord
Il n'existe pas d'applic. diff. $r : X^n \to \partial X^{(n-1)}$ t.q.
$r/\partial x = id$

⌜ $r^{-1}_{/\partial x}(y) \cap dX$ a cardinalité pair (y régulier)

$r/_{\partial x}^{-1}(y)$ a seulement un point ⌟



**Theorem d. Brouwer** $f : D^n \to D^n$ contin $\exists x\ f(x) = x$

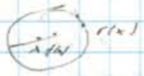
⌜ $\nexists x\ f(x) = x$

$d : D^n \to \mathbb{R}$
$d(x) = d(x, f(x))$
$d(x) \geq \alpha$

Prenons $g$ diffb. t.q. $|g(x) - f(x)| < \frac{\alpha}{2}$

$g$ n'a pas non plus des points fixe,

Construction différentiable $X \to \partial X$ possible :



⌟

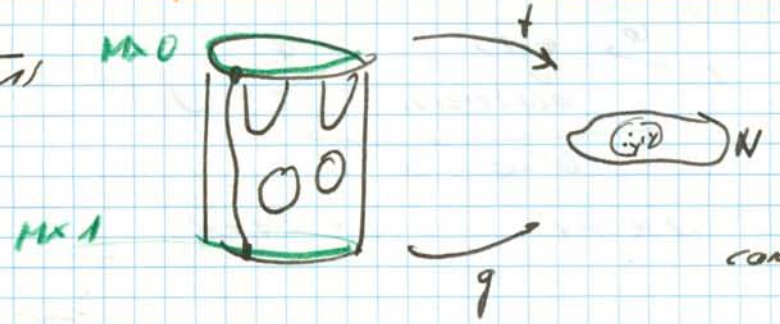
**Def** $f : M^n \to N^n$ propre
Soit $y \in N^n$ une valeur regulier, alors
$\deg f = \# f^{-1}(x)$ modulo 2

$\deg(f, y) := \# f^{-1}(y)$

**Prop 1** Homotopielemma
$f, g$ diff $f, g\ M^n \to N^n$ propre $f \sim g$
Alors si $y \in N$ est une valeur propre pour $f$ et $g$
$\Rightarrow \deg(f, y) = \deg(g, y)$

**Prop 2**
$f : M \to N$ propre et diffb.
alors $\deg(f, y) = \deg(f, y')$ si $y, y'$ sont des valeurs regul.

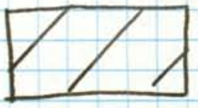
⌜ 1)



cardinalité

encore classification des 1 Manifolds

**lemma 1** $(a,b)\times(c,d)$ $F=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

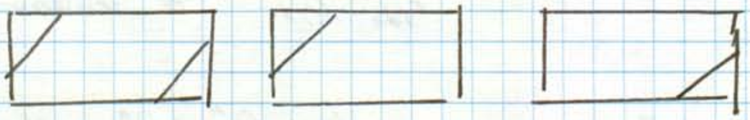


1) $F$ fermé dans $(a,b)\times(c,d)$

2) chaque $A_i$ // diagonal vertical

3) chaque verticale (ou horizontal) coupe $F$ dans au plus un point

$\Longrightarrow$ $F=A_1\cup A_2$ ou bien $F=A$



$M\subset\mathbb{R}^n$ de dim 1 est connexe

~~chaque~~ choisisson un atlas $\varphi_\alpha : I^\alpha \longrightarrow \varphi(I^\alpha)\subset M$
$\bigcup\varphi(I_\alpha)=M$

$I^\alpha=(a,b)$

$|d\varphi_\alpha(t)|=1$

car l'atlas est au maxim. denombrable on peut renumeroter $\varphi_1,\varphi_2\dots$

$\varphi_i(I^i)\cap\varphi_{i+1}(J^{i+1})\neq\emptyset$

**lemme 2**

$\varphi : I\to\varphi(I)$
$\psi : J\to\psi(J)$

$\varphi(I)\cap\psi(J)\neq\emptyset$
$\varphi(I)\not\subset\psi(J)$
$\psi(J)\not\subset\varphi(I)$ $\Longrightarrow\varphi^{-1}(\varphi(I)\cap\psi(J))=$ ①②③

① $(a,a')\cup(b',b)$ $a<a'<b'<b$

② $(a,a')$ $a<a'<b$

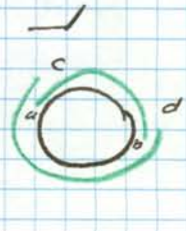
③ $(b',b)$ $a<b'<b$

Γ avec lemme 2

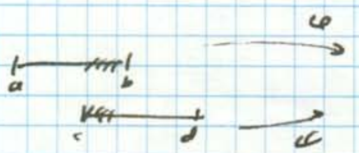
$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\psi^{-1}\circ\varphi=\chi"'] & \varphi(I) \arrow[rr, "\psi^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & & J \\
 & \varphi(I)\cap\psi(J) & &
\end{tikzcd}$$

$d\chi=1$ $\chi=\pm t+\alpha$

cas ① construisons $\lambda : S^1\to M$ surjectiv

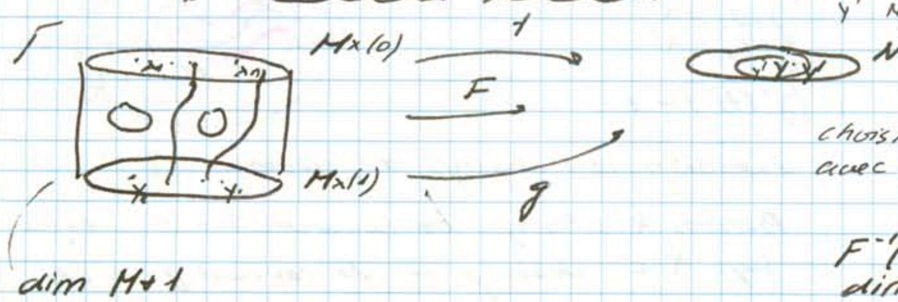


cas ②



maximalise la parametrisation

## Bew d. Homotop-lemmas :



$y'$ regulière pour $F$

choisisson $U(y)$ voisinage
avec $\# f^{-1}(y)$ const dans $U$

$F^{-1}(y')$ variété compact de dimension 1

$$\underbrace{\partial F^{-1}(y')}_{} = F^{-1}(y') \cap (M\times(0) \cup M\times(1)) = f^{-1}(y') \cup g^{-1}(y')$$

avec cardinalité 0 mod 2

$$\rightarrow \# f^{-1}(y') = \# g^{-1}(y')$$

$$\# f^{-1}(y) = \# g^{-1}(y)$$ localement constance

construction de $F$ :

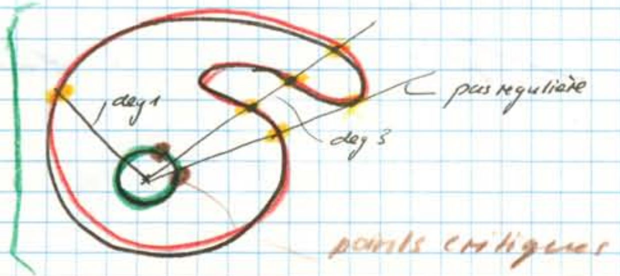
$M\times[\frac{2}{3},1]$ : $F_1 = f\times id$
$M\times[0,1/3]$ : $F_1 = g\times id$

weierstrass ! $F/M\times[0,\frac{1}{3}] \cup M\times[\frac{2}{3},1] = F'$

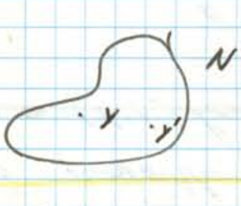
## Bew d. Unabh. v. deg von y

Probl. ensemble des valeurs regulière n'est pas connexe. → Milnor

**Ex**



description de la preuve :



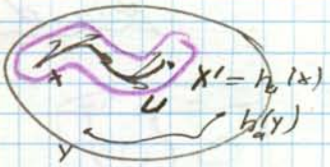
**Lemma**

$h: M \rightarrow N$ $y, y' \in N^\circ$ $\Longrightarrow \exists h$
1) $h$ diffeomorph.
2) $h(y) = y'$
3) $h \sim id$

propriété de homogénité

$h \circ f$ et $f$ sont homotope
$(h \circ f)^{-1}(y') = f^{-1}(y)$
$\# h\circ f^{-1}(y') = \deg f, y$
‖ mod 2
$\# f^{-1}(y') = \deg f, y'$

dém du lemme ⌐ $\gamma : [0, a] \to M$
$\gamma(0) = x$
$\gamma(a) = x'$
$|\gamma'(t)| = 1$



extension du champ de vecteur $X$ :

Prenons $X$ champs de vecteur sur $N$ t.q.
$\operatorname{Sup} X \subset$ Voisinage de la courbe $\gamma$ ($= U$)

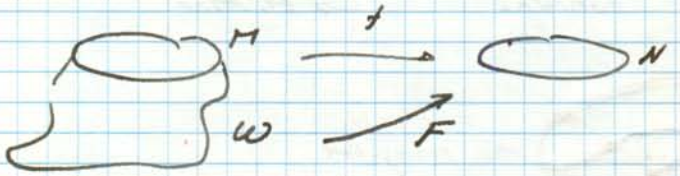
$h : \mathbb{R} \times N \to N$ t.q. $h_t : N \to N$ diffeom.

$h_0 = id$ $h_{t+q} = h_t \circ h_q$

$h_a(x) = x'$ ⌟

Rem extension de la fonction deg sur les fonctions continues :
$f$ contin
$f \sim g$ diff. $f \sim g$ $\deg f = \deg g$

Rem $f : M^n \to N^n$ $\deg f \overset{?}{=} 0$
supposons qu'il existe une variété à bord $\partial W^{n+1} = M^n$
$F : W \to M^n$



⌐ Exerc. ⌟

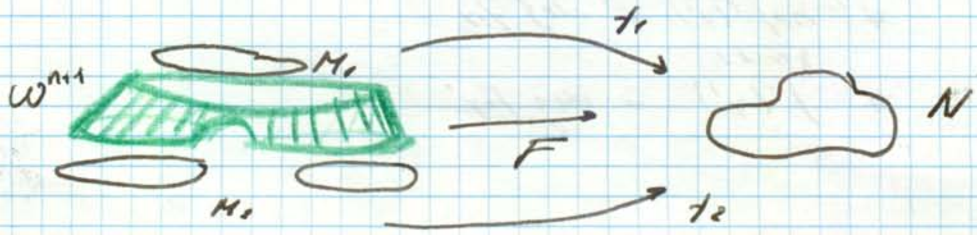
$\to \deg f = 0$

Theorème À chaque $f : M^n \to N^n$ propre $\to \deg f$ avec 1) 2) 3) 4) 5)

1)' $f$ et $g$ sont cobordant $\to \deg f = \deg g$

Def ~~$f, g$ $\deg(f, y) = \deg(g, y)$~~

$f_1, f_2$ s'appellent cobordant, si
$f_i : M_i^n \to N^n$ $M_i$ compactes
~~$f_i$ s'appel~~ Il existe $W^{n+1}$ $F : W^{n+1} \to N$ t.q
1) $W^{n+1}$ comp. $\partial W^{n+1} = M_1^n \sqcup M_2^n$
2) $F/_{M_1^n} = f_1$ $F/_{M_2^n} = f_2$



2) immedial 3) suit
4) 〃

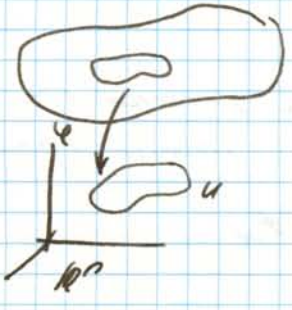
**Def** Soit $V$ un espace vect.

$(b_1 \dots b_n)$
$(b_1' \dots b_n')$ deux bases

$T$ Transformation unique, que $b_i' = Tb$
$b_i' = \sum a_{ij} b_j$

sont equivalent, si del $a_{ij}$ ~~=~~ $>0$

**Def**



$M$ varieté

$d\varphi(x)$ preserve l'orientation

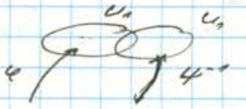
variete s'appelle orientable, s'il existe une famille de parametrisation cohérent

**Ex** [ Espace proj. orientable $n$ impair

**Def** $M$ variete diff. $x \to \sigma_x \in T_x(M)$
une choix s'appelle cohérente si on peut trouver un atlas sur $M$ t.q $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ $d\varphi_x$ preserve l'orientation

$M$ orientable s'il existe une $\overset{\text{atlas}}{\text{choix}}$ cohérente

critaire : $(\varphi \circ \psi^{-1})_x$ positive



$M$ connex orientable, deux possibilité

**Def** $M$ varieté orienté ($M$ avec choix d'orientation) est une pair $(M, \sigma)$ $M$ et avec une orientation $\sigma$

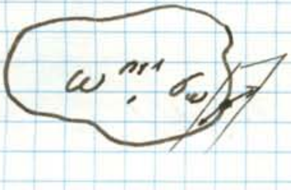
**Degree** $f : (M^n, \sigma^M) \longrightarrow (N^n, \sigma^N)$ $f$ propre (M, N varieté compact)

$\deg f \in \mathbb{Z}$

definit degré uniquement
1) $f \sim g \Rightarrow \deg f = \deg g$
2) $\deg(f \cdot h) = \deg f \cdot \deg h$
3) $\deg(f \times g) = \deg f \cdot \deg g$
4) $\deg(id) = +1$

**Observ.** $f(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \dots$ $f : S^2 \to S^2$
$\deg f = n$

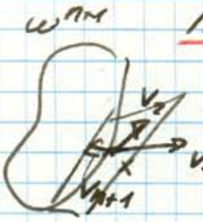
Sphère avec orientation canonique



trois possibilité

$v_1 \dots v_{n+1}$
$(v, v_1 \dots v_{n+1})$

Base de $TM_x$ definit l'orientation de $\partial W$



**Def**

$\{v_2, \ldots v_{n+1}\}$ defini l'orientation de $\delta\omega$ et $\{v_1 \ldots v_{n+1}\}$ $v_1$ dirigé vers l'exterieur defini l'orientation de $\omega^{n+1}$

$f : (M^n, \sigma_M) \longrightarrow (N^n, \sigma_N)$

$y \in N$ valeur reguliere

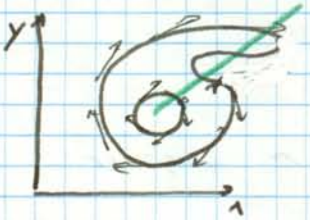
soit $x \in f^{-1}(y)$

$$df_x : \underset{\sigma_{M,x}}{T_x(M)} \xrightarrow{\sim} \underset{\sigma_{N,y}}{T_y(N)}$$

$$\text{sign } f_x = \begin{cases} +1 & df_x \text{ preserve l'orientation} \\ -1 & df_x \text{ inverse l'orientation} \end{cases}$$

$$\rightarrow \deg f,y = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } f_x$$

Ex



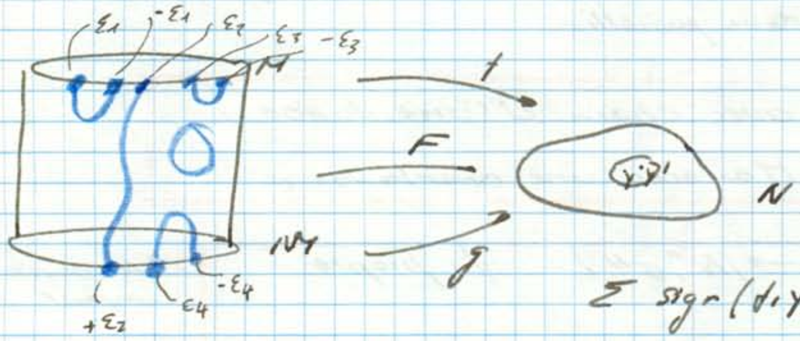
$\deg f \cdot = +1 -1 +1 = +1$

**Lemme 1**

$f,g : (M, \sigma_M) \to (N, \sigma_N)$ de $y \in N$ est une valeur reguliere pour $f,g$ $\rightarrow \deg(f,y) = \deg(g,y)$

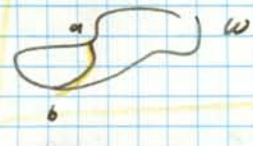
**Lemme 2**

Si $y, y' \in N$ sont deux v. regulière de $f$. alors $\deg(f,y) = \deg(f,y')$



$\sum \text{sign}(f,y) = \sum \text{sign}(g,y)'$

Soit $\omega^{n+1} \xrightarrow{F} N$ $y$ valeur regul. $F^{-1}(y) \in \omega^{n+1}$



sign a + sign b = 0

$f^{-1}(y)$ a une orient. bien determin, si $\omega^{n+1}$ est orient

$\langle v_1 .. v_n \rangle$ $v_i$ vecteur tangent de $F^{-1}(y)$

1/ $dF_x \{v_1, \ldots v_n\}$ est une base de $T_y(N)$

$\rightarrow \{v_1 \ldots v_n\}$ defini l'ensemble de $\omega$

$v_1', v_2' \dots v_n'$ défini l'orient. de $\partial W$
$v_1'', v_2'' \dots v_n''$ défini l'orient de $\partial W$

$f : S^n \longrightarrow S^n$

1) $f = id$ $\deg f = +1$

2) $f = i$ $i(x) = -x$
$\deg i = (-1)^{n+1}$

Prop
$f : S^n \to S^n$ $\deg f \neq (-1)^{n+1}$
$\Rightarrow f$ admet des points fixes

car : $f$ n'admet pas ces points fixes
$\Rightarrow f \sim i$

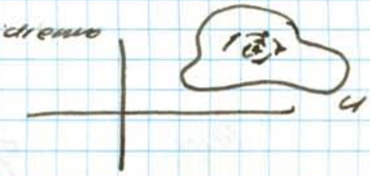
$f(x) \neq x$ $\Rightarrow$
$f(x)$ et $i(x)$ ne sont pas diamentr opposés

alors l'homotopie est donc par une géodésie unique

$h_t(x)$ $\dfrac{t(f(x)) + (1-t)i(x)}{|\qquad|}$

Rem
$f, g : S^n \to S^n$ $\deg f = \deg g$
$\Rightarrow f \simeq g$

construction dépendant de la structure euclidienne
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ voisin.



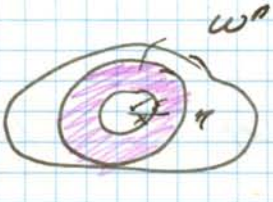
$v : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ champs de vecteur

$x \in U$ est une singularité, si $v(x) = 0$

$S^{n-1}(x, \varepsilon)$ sphère centre à $x$ rayon $\varepsilon$

$S^{n-1}(x,\varepsilon) \longrightarrow S^{n-1}$ $v^{-1}(0) = x$ $\underline{x \text{ isolé}}$

$y \xrightarrow{\tilde{v}_\varepsilon} \dfrac{v(y)}{|v(y)|}$ $\Longrightarrow$ $\deg \tilde{v}_\varepsilon \in \mathbb{Z}$



$\underline{\tilde{v}} : W^n \to S^{n-1}$ $\underline{\tilde{v}}(y) = \dfrac{v(y)}{|v(y)|}$

interprétation de $\underline{\tilde{v}}$ comme homotopie entre ~~les~~ $\tilde{v}_\varepsilon$ et $\tilde{v}_1$

$\Longrightarrow \deg \tilde{v}_\varepsilon = \deg \tilde{v}_\eta$ $\deg \tilde{v}_\varepsilon = \text{index}(v, x)$

Lemme
Soit
$$\begin{tikzcd} x \in U \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\simeq"', "X"] & \mathbb{R}^n \\ x' \in U' \arrow[ru, "v'"'] & \end{tikzcd}$$
$x, x'$ isolé

$\Longrightarrow$ $\text{index}(v, x) = \text{index}(v, x')$

cas trivial
$$\begin{tikzcd} V_\varepsilon : S^{n-1}(x,\varepsilon) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq", "\text{isom}"'] & S^{n-1} \\ S^{n-1}(x', \varepsilon) \arrow[ru] & \end{tikzcd}$$

**Lemme** Soit $f : (\mathring{D}^n, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ un diffeo sur l'image

Alors il existe $h_t : (\mathring{D}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$

t.q. $h_0 = h$

$h_1$ est une transform orthogonale.

$$h_t(x) = \begin{cases} \frac{h(tx)}{x} & t \neq 0 \\ dh_0 & t = 0 \end{cases}$$

$$h : D^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

linéaire est homologue à une transform orthogonales.

1) $f \sim g \Rightarrow \deg f \sim \deg g$

plus fort : $f$ cobord. $g \Rightarrow \deg f \sim \deg g$

1)' $W^{n+1}$ compact orienté, $F : W^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ continue

$\partial W = M_1^n \cup (-M_2^n)$

$\longrightarrow \deg F|_{M_1} = \deg F|_{M_2}$

$U \subset \mathbb{R}^n$ $v : U \to \mathbb{R}^n$ differentiable $v^{-1}(0) = \bar{a} \in U$

**Rem** $\forall \varepsilon$ $B_\varepsilon(a) \subset U$ on peut définir

$\tilde{v}_\varepsilon : S_\varepsilon^{n-1}(a) \longrightarrow S^{n-1}$ $\tilde{v}_\varepsilon(a) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$

$\varepsilon, \eta > 0$ $\deg \tilde{v}_\varepsilon = \deg \tilde{v}_\eta$

**Def** $\boxed{\text{Index}_a V := \deg \tilde{V}_\varepsilon}$

**Propriétés**

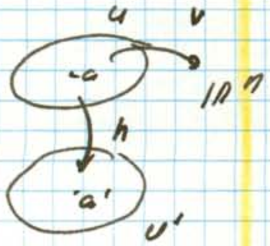
1) $V_t : U \to \mathbb{R}^n$

$V : U \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue

$\forall t$ $V_t$ diff. $V_t^{-1}(0) = a$

$\rightsquigarrow$ $\text{Index}_a V_0 = \text{Index}_a V_1$

3) $U \xrightarrow{v} \mathbb{R}^n$ $h : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{U}} \to \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{U'}}$ $\det(d_x h) > 0$



$h_*(v) : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\text{index}_a v = \text{index}_{h(a)} h_*(v)$

$h_*(v)_y = dh_{h^{-1}(y)}(v(h^{-1}(y))) \in \mathbb{R}^n$

$= dh \circ v \circ h^{-1}$

2) $u > u' \ni a$

$\text{index}_a \, v/_{u'} = \text{index}_a \, v$

3) $h : U(0) \to \mathbb{R}^n \quad h(0) = 0 \quad d_0 h \geq 0$

$\exists h_t : U(0) \to \mathbb{R}^n \qquad h_t(v) = \begin{cases} \frac{h(tv)}{t} & t > 0 \\ d_0 h & t = 0 \end{cases}$

$h_1 = h \quad h_0 = id$

$d_0 h$ avec det ≥ 0 est homotope à l'identité

? choisissons $h_t : U \to \mathbb{R}^n$

$(h_t)_x (v) /_{U^{11} c \, h(u)}$ $\overset{w}{0}$

$\text{Index}_a (h_1)_x = \text{Index}_{(0)} (h_0)_x (v)$

Def

$M^n \subset \mathbb{R}^N$ orienté

$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X \quad (\varphi_\alpha, U_\alpha$ est un Atlas)

$\det(d(\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha)) > 0$

Un champs de vecteur $X$ sur $M$ est donné par $X_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$

$(\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha)_* (X_\alpha) = X_\beta$

$X_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x)) = 0 \implies X_\beta(\varphi_\beta^{-1}(x)) = 0$

$\text{Index}_x X = \text{Index}_{\varphi_\alpha(x)} X_\alpha$

$\| $

$\text{Index}_{\varphi(\beta)} X$

Theorème de Hopf

$M^n$ variété comp. orienté a (orientable)
$X$ un champs de vecteurs avec zeros isolés $(x_1, \dots x_N)$

(1) $\sum_{i=1}^{N} \text{Index}_{x_i} X$ est indépend de champs choisis

2) $f : M \to R$ une fonction d. Morse

$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \text{Index}_{x_i} X = \sum (-1)^i t_i} = \deg(N_\alpha(M^n)$ $M^n \subset \mathbb{R}^N$

$t_i \quad \#$( p.c. d'indice $i$ de $f$)

(1) → (2) $f : M \to R$
$x_1 \dots x_n$ p.c.

→ il existe $\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i) \ni x_i$

$f \cdot \varphi_i(x_1 \cdot \ n) = x_1^2 - x_2^2 \dots < x_r^2 - x_{r+1}^2 \dots - x_n^2 + c$

$X_x(f) \geq 0 \quad X_x = 0$ si $x$ est p.c. pour $f$

$X^{\varphi} \cdot U_1 \to \mathbb{R}$ $\quad X^{\varphi}(x_1 \dots x_n) = -x_{(1)} - x_{(2)} \dots - x_k + x_{k+1} \dots x_n$

$v(x_1, \dots x_n) = (-x_1, -x_2, \dots -x_r, x_{r+1} \dots x_n)$

$\deg \tilde{v}_\varepsilon = \deg \tilde{v}_1 =$
$\tilde{v}_1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ $\qquad \deg v = (-1)^r$

$f$ fonction de Morse $\quad f : M \to \mathbb{R}$
$X$ type gradient $\quad \to \sum_x \text{Index}\, X = \sum_{x_i \in Pt} \text{Index}\, X_i = \sum (-1)^{\text{index}\, x_i}$

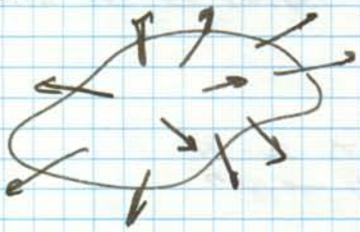
$= \sum_{\text{index}} (-1)^i \lambda_i$

$\lrcorner$

Prop 1

$W^n \subset \mathbb{R}^n$

$X$ un champs de vecteur a zeros isoles qui sur le bord de $W$ pointe vers l'extérieur



$\sum_{x_i \in \text{zeros}} \text{index}_{x_i} X = \deg(g)$

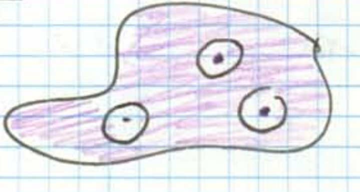
Def

$g : \partial W^n \to S^{n-1}$
est defini par

$g(x) = v(x)$ de longeur 1 qui pointe vers l'extérieur

l'application de gauss

$\Gamma$



$'W^n = W^n - \cup \mathring{B}_\varepsilon(x_i)$

$X : 'W^n \to \mathbb{R}^n$

$F \cdot W^n \to S^{n-1}$

$F(x) = \dfrac{X(x)}{|X(x)|}$

$\partial\, 'W^n = \partial W^n \sqcup (\cup (S_{\varepsilon_i}(x_i)))$

$\Rightarrow \deg F/\partial W = \deg F / \cup S_{\varepsilon_i}^{n-1}(x_i)$

$= \sum \deg F / (S_{\varepsilon_i}^{n-1} \to S^{n-1})$

$= \sum \text{ind}_{x_i} X$

$\langle X(x), \nu(x) \rangle > 0$ car on a un champ de vecteur qui pointe à l'extérieur

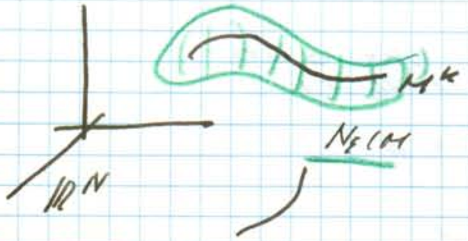
$X^t = t\nu + (1-t)X$ — tend vers l'exterieur pour chaque $t$

$\langle t\nu + (1-t)x, \nu \rangle$
$= t + (1-t)\langle x, \nu \rangle > 0$

$h^t : \partial W \to S^{n-1}$

$h^t(x) = \dfrac{X^t(x)}{|X^t(x)|}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} h^0 = F/\partial W \\ h^1 = g \end{array}\right\} \Rightarrow \deg F/\partial W = \deg g$

Idee :



$N_\varepsilon(M)$

$X \rightsquigarrow U$

$M \qquad N_\varepsilon(M)$

t.q $\Sigma$ index $X = \Sigma$ index $U$

voisinage
tubulaire d'une variété $M$

$M^n \subset \mathbb{R}^N$

1) $N(N^n) = \{(x, \vec{v}) \in M \times \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \,/\, \vec{v} \perp T_x(M)\}$

Exersice : $N(M^n)$ est une variété diff de dim $N$

2) $N(M^n) \xrightarrow{\pi} M$

3) $\varepsilon : N(M^n) \to \mathbb{R}$ ) $\quad \varepsilon(x, v) = |v|^2$

4) $e : N(M^n) \to R^N \quad e(x,v) = \vec{x} + \vec{v}$

Observ. • $\varepsilon$ admet 0 comme la seule val. critique

• $\varepsilon^{-1}(-\infty, \alpha]$ $N_\alpha(M) = \{(x, \vec{v}) \in N(M) \,/\, |v|^2 \leq \alpha\}$
variété à bord dans $N(M)$

• $d_x e$ est inversible $\quad d_{\cdot}e \quad T_x(N(M)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$

consequ. : il existe $\alpha > 0$ t.q.
$e : N_\alpha(M) \to R^N$
est un diffeomorph sur l'image

$\omega_\alpha^N = e(N_\alpha(M))$ ~~[illegible]~~ N

Prop 2 The theoreme de Hopf est vrai pour $X$ champ de vecteur avec tous les zeros non degenerées

Def $v : U \to \mathbb{R}^n \quad a \in$ zero de $v \quad v(a)$ 0
a est une zeros nondegenerés
$d_{\vec{a}} v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme

lemma a zero nondegenerée p. $v : U \to \mathbb{R}^n$
alors
$\text{Index}_a v = \text{sig det } d_a v$

$\Gamma$ on peut supposer que $a = 0$
on peut suppos. $U = D_0(r)$

$v : D_0(1) \to \mathbb{R}^n$

- sign det $d_0 v = 1$

$\forall v \ \exists v^t : D_0(1) \to \mathbb{R}^n$ $\quad v^t(0) = 0$
$\quad v^0 = v$
$\quad v^1 = id$

$index_0(v) = index_0(id) = 1$

- sign det $d_0 v = -1$

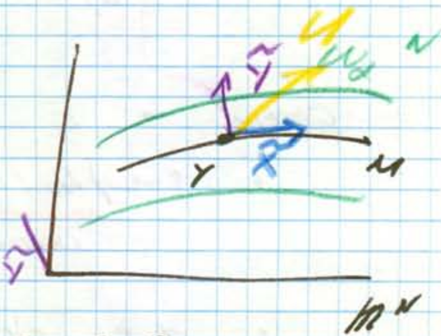
$\forall v \ \exists v^t : D_0(1) \to \mathbb{R}^n$ $\quad v^t(0) = 0$
$\quad v^0 = v$
$\quad v^1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} = J$

$index_0(v) = index_0(J) = -1$ $\quad \lrcorner$

lemme

Si $v : U \to \mathbb{R}^n$ admet $a$ comme zéro nondegen.
et $h : U \to U'$ est un diffeomorph
$h_*(v) : U' \to \mathbb{R}^n$ a $h(a) \in U'$, qui est un zéro nondegeneré

construction de la voisinage tubulaire :



1) $W_\varepsilon^N$ voisinage tubulaire
$M \subset W_\varepsilon^N \xrightarrow{r} M$ — Retraction

2) Sur $W_\varepsilon^N$ $\quad \tilde{X}, \tilde{Y} : W_\varepsilon^N \to \mathbb{R}^N$

$\tilde{Y}(y) = y - r(y)$
$\tilde{X}(y) = X(r(y))$ $\qquad \tilde{U} = \tilde{X} + \tilde{Y}$

ⓐ $\forall y \quad \tilde{Y}_{(y)} \perp \tilde{X}_{(y)}$ $\quad \Rightarrow$ zéros de $\tilde{U}$ sur $M$ = zéros de $X$ sur $M$

ⓑ $\tilde{U}$ pointe vers l'exterieur sur le bord de $W$

ⓒ $d_{y \in M}\tilde{U}(h) = \begin{cases} h & h \in T_x^\perp(M) \\ d_x X & h \in T_x(M) \end{cases}$ $\quad \Rightarrow$ $\tilde{U}$ non-degenerée

ⓓ $\text{Index}\ \hat{U}_{(y)} = \text{index}_y \underline{X}_{\ M}$ $\quad \Rightarrow \sum \text{index}\ \tilde{U} = \sum \text{ind}\ X$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\deg g(W_\varepsilon^N)}$

$r = \pi e^{-1} : W_\varepsilon^N \to M$ $\qquad r(ty + (1-t)r(y)) = r(y)$

$\Gamma\, y \in W^N \quad y = e(x,v) = x + v$
$\qquad ry = ~~et~~\ \pi e^{-1} e(x,v) = x$
$ty + (1-t) r(y) = tx + tv + (1-t)x = x + tv = e(x, tv)$
$r(ty + (1-t) r(y)) = r(e(x,tv)) = \pi e^{-1} e(x,tv) = x = r(y)$ $\lrcorner$

Rem a) $\tilde{Y}(e(x,v)) = v$ $\qquad \Gamma\ e(x,v) - r(e(x,v)) = x + v - x = v$ $\lrcorner$
$\tilde{X}(e(x,v)) = X_x \in T_x(M)$

Rem b) $\langle \tilde{X}(y) + \tilde{Y}(y), \text{gradient}(\varepsilon e^{-1}) \rangle = \underbrace{\langle \tilde{X}(y), \text{grad}(\varepsilon e^{-1}) \rangle}_{d_y(\varepsilon e^{-1}(X(y)))} + \underbrace{\langle \tilde{Y}(y), \text{grad}(\varepsilon e^{-1}) \rangle}_{d_y(\varepsilon e^{-1}(Y(y)))}$
$= d_{e(x,v)}(\varepsilon e^{-1}(\tilde{X}) + d_y(\varepsilon e^{-1}(\tilde{Y}_{e(x,v)}) = d_{(x,v)}\varepsilon(X_x) + d_{(x,v)}\varepsilon(v)) > 0$

dem ③ $T_x(W_x^N) = T_x(M) \oplus T_x^{\perp}(M)$

$d_x U(h) = h \quad h \in T_x^{\perp}(M)$

$d_x U(h) = d_x X \quad h \; T_x(M)$

$\tilde{U}(y) = \underbrace{y - r(y)}_{P_1} + \underbrace{X(r(y))}_{P_2} \quad dU = dP_1 + dP_2$

$P_2 \circ e$ projektio sur $\mathbb{R}^N$

$(P_2 \circ e)(x, v) = v$

dem ④ $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N \xrightarrow{} T_x M$ $\overset{bij}{\curvearrowright}$ $d_x X$ injektiv

$$\operatorname{sign} \left| \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline & d_x X \end{array} \right| = \operatorname{sign} d_x X$$

□ prop. 2

reste encore de passer au cas générale :

**Prop**

$= 0$

sans restrict.

$X$ champs de vecteurs $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$a \in U$ zero isolé. Alors il existe un disc $D_r(a) \subset U$ et un champs de vecteur $v' : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

1) $v' = v \,/_{U \setminus D_r(a)}$

2) les zeros de $v'$ sont non degenerées

avec ça on a

$\operatorname{index}_a v = \sum \operatorname{index}_a v'$
$\quad a \in \text{zero } v' \cap D_r(a)$

$\operatorname{index}_a v = \deg \tilde{v}$
$= \deg \tilde{v}' = \sum \operatorname{index}_a v'$
$\quad a \in \text{zero } v' \cap D_r(a)$

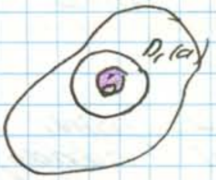
→ Theoreme de Hopf est prouvé.

$\sum\limits_{a \in \text{zero } v} \operatorname{index}_a v =$

$= \sum\limits_{a \in \text{zero } v'} \operatorname{index}_a v' = \chi(M)$

$\ulcorner$

soit $r$ t.q dans $D_r(a)$ $a$ est le seule zero



$M = \inf\limits_{x \in D_r \setminus D^0(r/2)} |v(x)|$

$v : D_r \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad y \in \mathbb{R}^n$ valeur regul pour $v$
$\qquad\qquad\quad \overset{\omega}{y} \qquad\qquad |y| < \frac{M}{2}$

$\lambda : U \longrightarrow [0, 1] \qquad \lambda /_{D_{r/2}} = 1$

$\lambda /_{U \setminus D_{\frac{3r}{4}}} = 0$

$v'(x) = v(x) - \lambda(x) \vec{y}$

$v' /_{D(r/2)} = v(x) - y$ → Tous les zeros sons nondegenerés

$v' /_{D_r \setminus D_{r/2}} \quad |v'(x)| = |v(x) - \lambda(x) y|$

$\geq | \underbrace{|v(x)|}_{\geq M} - |\lambda(x) y| |$

$\to |\lambda(x) y| \leq |y| \leq M/2$

$\to |v'(x)| > 0$ on a pas de zeros

$\lrcorner$

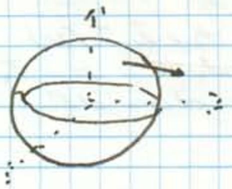
□ Hopf

fixpoint theorem de Lefschetz et Hopf $\Bigg\}$ Theorie des nombres
Geometrie algebrique
analyse functionale nonlineaire

**Ex**

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ $\quad S^2 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+t^2=1\}$

$(x,y,t) \xrightarrow{X} (-y,x,0)$



zeros: $N=(0,0,1)$
$S=(0,0,-1)$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to S^1$
$(x,y) \mapsto (x,y,\underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{t})$

$\vec{v}(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$

$d\varphi_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{dt}{dy} & \frac{dt}{dy} \end{bmatrix}$ $\quad d\varphi \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a(x,y) = -y$
$b(x,y) = x$

$\vec{v}(x,y) = (-y,x)$ $\quad v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$dv = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $\quad$ analog pour sud $1$

Th. d. Hopf. $\quad \sum_{a\ \text{zeros}\ X} \text{index}\ X = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i c_i(f)$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad 2 \qquad\qquad (-1)^0 1 + (-1)^2 1 = 2$

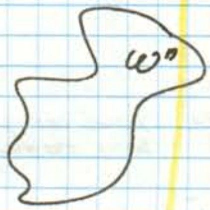
## generalisation du theoreme de Hopf

1) Soit $W^n$ une v. comp. a bord
$f: W^n \to [-a,a]$ fonct. de Morse si

1) $f^{-1}(a) \in \partial W$
2) $f$ a tous les points critiques dans $W - \partial W$ et ils sont nondégénéré

<u>Obs</u>

Soit $W^n$ ~~$\subset \mathbb{R}^n$~~ une variété à bord



~~1) $g: \partial W \to S^{n-1}$~~
2) $X$ champs de vect. qui pointe vers l'exterieur à zeros isolés
3) $f$ fonct. de Morse

$\sum_{a\ \text{zeros}} \text{index}_a X = \cancel{\deg g} = \sum (-1)^i c_i(f)$

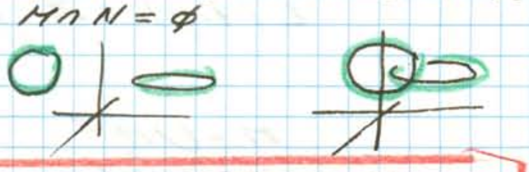
dém : exactement même

# 6 Nombre d'entrelacement

$N^p \subset \mathbb{R}^{p+q+1} \supset N^q$ $\quad$ $M, N$ variétés orientées

$M \cap N = \phi$

voulons comprendre la différence :



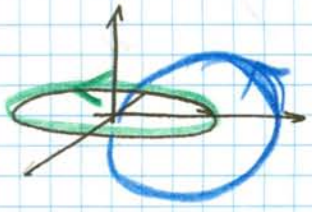
**Def** $\ell(M,N) : M \times N \longrightarrow S^{p+q}$ $\quad$ $\ell(\vec{x},\vec{y}) = \dfrac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

$L(M,N) = \deg(\ell)$ $\quad$ nombre d'entrelacement (linking number)

**Ex**

$S^1 = \{x,y,0 \mid x^2+y^2=1\}$

$S^1 = \{x,0,z \mid (x-1)^2+z^2=1\}$



$S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2$

$d\ell_{(x_0,y_0)} : \underset{T_{x_0}(S^1)\times T_{y_0}(S^1)}{T(S^1\times S^1)} \longrightarrow T_{\ell(x_0,y_0)} S^2$

linking number : $\pm 1$ $\quad$ orientation !

plus général

**Def** $f : M^p \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$

$g : N^q \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$ $\quad$ $f(M) \cap g(M) = \phi$

$\Rightarrow \ell(f,g)(x,y) = \dfrac{g(y)-f(x)}{|g(y)-f(x)|}$

$L(f,g) =$ ~~inde~~ $\deg(\ell)$

propr. comm. $\quad$ 1) $L(f,g) = (-1)^{(p+1)(q+1)} L(g,f)$

invar. homol. $\quad$ 2) suppos $f_t, g_t$ $\quad$ $\hat{f} : M\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$

$\hat{g} : N\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$

$\hat{f}(x,t) = f_t(x)$

$\hat{g}(x,t) = g_t(x)$

$f_t(M) \cap g_t(N) = \phi$

$L(f_0,g_0) = L(f_1,g_1)$

invar à cobordisme $\quad$ 2) $L(f_1,g) = L(f_2,g)$ $\quad$ $F : W^{p+1} \to \mathbb{R}^{p+q+1}$

$\partial W = M_1 \cup M_2$

$f_1 = F|_{M_1}$ $\quad$ $f_2 = F|_{M_2}$ $\quad$ $F(W) \cap g(N) = \phi$

3) $f : \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i \qquad f_i : M_i^p \to \mathbb{R}^{p+q+1}$

$g = \bigcup_{j=1}^{k} g_j \qquad g_j : N_j^q \to \mathbb{R}^{p+q+1}$

$L(f,g) = \sum_{i,j} L(f_i, g_j)$

$M = \bigcup M_i^p$
$N = \bigcup N_j^p \qquad M \times N = \bigcup_{\substack{1 \le i \le \ell \\ 1 \le j \le k}} M_i \times N_j$

⌜

1)
$$\begin{tikzcd}
M^p \times N^q \arrow[r, "\ell(f,g)"] \arrow[d, "T"] & S^{p+q} \arrow[d, "i \text{ (applic. antipodal)}"] \\
N^q \times M^p \arrow[r, "\ell(g,f)"'] & S^{p+q}
\end{tikzcd}$$

$\deg i = (-1)^{p+q+1}$

système de coordonnées
$x_1 \cdots x_p \; y_1 \cdots y_q$
$\downarrow$
$y_1 \cdots y_q \; x_1 \cdots x_p$

$$\left| \begin{array}{c|c} & \overset{p}{I} \\ \hline \underset{q}{I} & \end{array} \right| = (-1)^{pq}$$

$\deg \ell(f,g) = (-1)^{pq+p+q+1} \deg(g,f)$
$= (-1)^{(p+1)(q+1)} \deg(g,f)$

2) $\ell(f_t, g_t)$ est une homotopie entre $\ell(f_0, g_0)$ et $\ell(f_1, g_1)$

3) $\mathcal{L}(F,g) : \underbrace{W^{p+1}}_{M_1 \times N^q \; H^{q_1}} \times N^q \to S^{p+q}$

$\mathcal{L}(F,g)(w,y) = \dfrac{g(y) - F(w)}{|g(y) - F(y)|}$

$\mathcal{L}|_{M_1 \times N^q} = \ell(f,g)$

propriété supplémentaire ⌟

$h : \mathbb{R}^{p+q+1} \to \mathbb{R}^{q+p+1}$ qui préserve l'orientat.
$L(f,g) = L(h \circ f, h \circ g)$

⌜ $h_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$h_0 = id \quad h_1 = h \qquad L(h_0 f, h_0 g) = L(h_1 f, h_1 g)$ ⌟

plus fort

très import !

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{p+q+1} \arrow[r] & \mathbb{R}^{p+q+1} \\ h: U \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r] & h(U) \end{tikzcd}$$

difféomorphisme qui préserve l'orientation

$\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Im}\, g \subset U$

$$L(f,g) = L(hf, hg)$$

esquisser la demonstration :

$$l : M^p \times N^q \to S^{p+q}$$

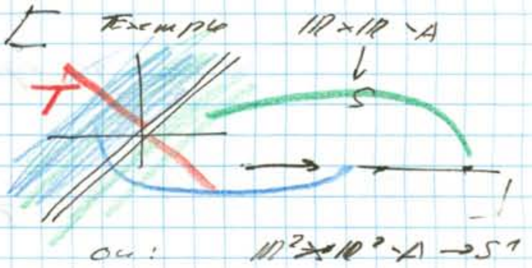
$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f\times g"] \arrow[dr, "l(f,g)"'] & \mathbb{R}^{p+q+1}\times\mathbb{R}^{p+q+1} \setminus \Delta \arrow[d, "p"] & \supset U\times U-\Delta \arrow[dl, "p"] \\ & S^{p+q} & \end{tikzcd}$$

diagonal

applic canonique $(\vec{x},\vec{y}) \to \frac{\vec{y}-\vec{x}}{|y-x|}$ est une équiv homotopique

$h : U \to h(U)$

$$\begin{tikzcd} & S^{p+q} & & S^{p+q} & \\ M\times N \arrow[ur, "l(f,g)"] \arrow[drr, "f\times g"'] & & & & M\times N \arrow[ul, "l(hf,hg)"'] \arrow[dll, "hf\times hg"] \\ & & \mathbb{R}^{p+q+1}\times\mathbb{R}^{p+q+1}-\Delta \arrow[uul, "p"] \arrow[uur, "p"'] & & \\ & U\times U-\Delta \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "h\times h"'] & & U'\times U'-\Delta \arrow[ul, hook'] & \end{tikzcd}$$



ou : $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2-\Delta \to S^1$

$$S^1 \xleftarrow[\text{retract. canon}]{} \overset{\cup}{T}^{\,\dim 2}$$

perpendicul. à $\Delta$

$$\begin{tikzcd} & S^{p+q} \arrow[rrr, dashed, "\gamma"] & & & S^{p+q} & \\ M\times N \arrow[ur, "l(f,g)"] \arrow[dr, "f\times g"'] \arrow[rrrrr, dash, bend right=50, "ident"'] & & U\times U-\Delta \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, dash, "h\times h"] & U'\times U'-\Delta \arrow[ur] \arrow[dr] & & M\times N \arrow[ul, "l(hf,hg)"'] \arrow[dl, "f\times g"] \\ & \mathbb{R}^{p+q+1}\times\mathbb{R}^{p+q+1}-\Delta \arrow[u, "p"] \arrow[rrr, dash, "ident"'] & & & \mathbb{R}^{p+q+1}\times\mathbb{R}^{p+q+1}-\Delta \arrow[u, "p"'] & \end{tikzcd}$$

construction de $\gamma$ :

chaque homotopie peut
$\approx$ homotopie

$$\begin{tikzcd} S^{p+q} \arrow[rrr, "\gamma"] & & & S^{p+q} \\ & D\times D-\Delta \arrow[ul, "\approx"'] \arrow[dl] \arrow[r] & D\times D-\Delta \arrow[ur, "\approx"] \arrow[dr] & \\ U\times U-\Delta \arrow[uu] \arrow[rrr, "\text{diffeom. } u"'] & & & U'\times U'-\Delta \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

prop.

$f : M^p \to \mathbb{R}^{p+q+1}$
$g : N^q \to \mathbb{R}^{p+q+1}$ $f(M) \cap g(N) = \emptyset$
$h : U \to \mathbb{R}^{p+q+1}$ diff. sur l'image qui prés. orient.
$\operatorname{im} f, \operatorname{im} g \subseteq U$ $U \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}^{p+q+1}$

$U$ homöomorph à $\mathbb{R}^{p+q+1}$

$\longrightarrow L(f,g) = L(hf, hg)$

Prop

$f : S^n \to S^n$ avec
$\deg f = \pm 1$ et une equivalence homotopique

Cor

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$ homotop. commut.

$X, Y, Z \sim S^n$

$g$ équiv. homologique $\longrightarrow f, h$ sont aussi

$\ulcorner$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & S^n \\ & S^n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ex $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "i"] & X \\ X \vee Y \arrow[ur, "pr"'] & \end{tikzcd}$$

"theorem n'est pas vrai en general"

$\lrcorner$

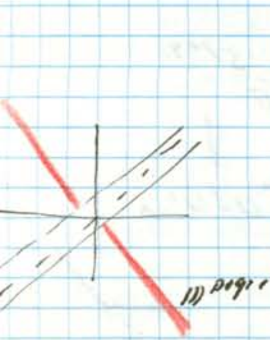
Dém de la prop.

$$\begin{tikzcd} S^{p+q} \arrow[rrr, bend left, "id", dash] & D^\circ \times D^\circ \setminus \Delta \arrow[l, "\pi_3"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "\tilde{h}'"] & \mathcal{I} & S^{p+q} \\ & U \times U \setminus \Delta \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[r, "h \times h", "\tilde{h}"'] & \mathbb{R}^{p+q+1} \times \mathbb{R}^{p+q+1} \setminus \Delta \arrow[ur, "\pi_2"'] & \\ & M \times N \arrow[u, "f \times g"] \arrow[ur, "hf \times hg"'] \arrow[uul, bend left, "L(f,g)"] \arrow[uurr, bend right, "L(hf,hg)"'] & & \end{tikzcd}$$

$h_t : D^\circ \to \mathbb{R}^{p+q+1}$

$h_0 = h$
$h_1 = id$

1) Puisque $h : D^\circ \to \mathbb{R}$ est homotope par difféomorph. à l'identité
$\longrightarrow \mathcal{I}$ est homol. commutat.



2) $$\begin{tikzcd} \pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta \arrow[r] \arrow[d] & S^{p+q} \\ \mathbb{R}^{p+q+1} - \{0\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$ est une équiv. homolog.

$\Rightarrow \pi_2, \pi_3$ sont équiv. homologiques

$\pi : D^\circ \times D^\circ \setminus \Delta \longrightarrow S^{p+q}$
$D^\circ - \{0\}$

3) $\Pi_1, i$ sont des equiv. homol. $\lrcorner$

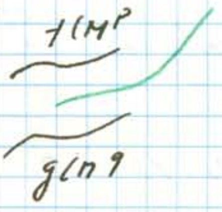
Soit $f: M^p \longrightarrow S^{p+q+1}$
$g: N^q \longrightarrow S^{p+q+1}$

$S^{p+q+1} \setminus f(M) \cup f(N)$
fast überall dicht
$S \setminus \{x\} \xleftarrow{h} \mathbb{R}^{p+q+1}$

$M \underset{g}{\rightrightarrows} S^{p+q+1} - \{x\} \xleftarrow{h} \mathbb{R}^{p+q+1}$
$L(h^{-1}f, h^{-1}g)$

$M \to S^{p+q+1} - \{x\} \xleftarrow{h} \mathbb{R}^{p+q+1}$
$g$
$S^{p+q+1} - \{x'\} \xleftarrow{h'} \mathbb{R}^{p+q+1}$

$\varphi: h'^{-1} \circ h$   $\underbrace{\mathbb{R}^{p+q+1} - \{x\}}_{v} \to \mathbb{R}^{p+q+1} - \{x\}$



$L(h'^{-1}f, h'^{-1}g) = L(\varphi h^{-1}f, \varphi h^{-1}g)$
$= L(h^{-1}f, h^{-1}g)$ $\lrcorner$

## Le nombre de Hopf

$f: S^{2p-1} \longrightarrow S^p$   $H(f) \in \mathbb{Z}$

1) $f$ diff, $y \neq z \in S^p$ valeurs regulières
$H(f) = L(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$
$M^{p-1} = f^{-1}(y)$
$N^{p-1} = f^{-1}(z)$

p impair
$H(f) = 0$

2) $f_0 \sim f_1$ — $H(f_0) = H(f_1)$

3) $g: S^p \to S^p$
$H(g f = (\deg g)^2 H(f)$

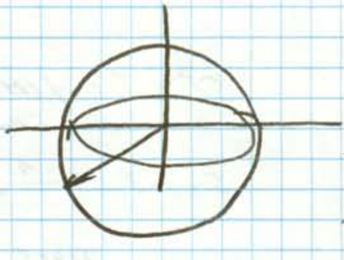
4) si $f: S^{2p-1} \to S^p$ est l'applic const $\Rightarrow H(f) = 0$

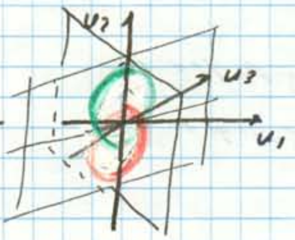
applic. $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$
$S^3 \xrightarrow{f} S^2$
$\{z_1, z_2\} \longrightarrow \mathbb{C}P_1 = \{[z_1, z_2]\}/\sim$   $(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0\ \lambda z_1 = z_1', \lambda z_2 = z_2'$ $\} = S^2$

$H(f) = \pm 1$

$y = [-1, 1]$
valeurs regulières
$z = [-1, 1]$
$\{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1, z_1 = z_2\} = f^{-1}(y)$   $\{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1, z_1 = -z_2\} = f^{-1}(z)$

proj. stereograph.





$$h: \overset{(u_1,u_2,u_3)}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overset{(x_1,x_2,x_3,x_4}{S^4} - \{N\}$$

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$x_1 = \frac{2u_1}{1+u^2}$$

$$x_2 = \frac{2u_2}{1+u^2}$$

$$x_3 = \frac{2u_3}{1+u^2}$$

$$x_4 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

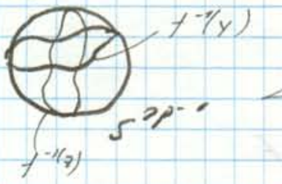
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = u_3 \\ 2u_1 = 1 - u^2 \end{array}$$

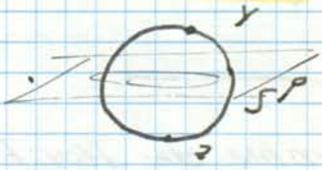
$$f^{-1}(z) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\ x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} u_1 = -u_3 \\ 2u_2 = -1 + u^2 \end{array}$$

C'etait la premiere demonstr. que cette application $f$ n'est pas homotope à l'identité. Hopf

Rem

$p$ impair $\Longrightarrow$ $H(f) = 0$





~~reflexion~~

$$H(f) = L(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) = \underbrace{(-1)^{\overset{\text{impai}}{\overbrace{p \cdot p}}}}_{(-1)} L(f^{-1}(z), f^{-1}(y))$$

$$= L(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$$

car invariant des valeurs regulieres

$$H^f(y,z) := L(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$$

Prop 1) $H^f(y,z)$ est une local. const dans $y$ et $z$

2) $y, z$ valeur regulier pour $f, g$ t.q. $e(f,g) < |y - z|$     $d(f,g) = \sup_x |f(x), g(x)|$

$\rightarrow H^f(y,z) = H^g(y,z)$

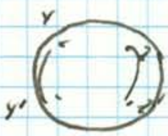
3) Soit $(y,z)$ valeur regul. pour $f$ et $g$   $f \sim g$

$\rightarrow H^f(y,z) = H^g(y,z)$

4) Si $(y,z)$ et $(y',z')$ sont deux paires de valeurs pour $f$

$\longrightarrow H^f(yz) = H^f(y'z')$

$\lceil 3) \rightarrow 4)$



$\exists$ difféom homol. à l'identit.

$z \rightarrow z'$   $y \rightarrow y'$

~~alors~~

1) $S^{p-1} \xrightarrow{f} S^p$

y, z valeurs regul.

$\exists\ U(y)\ V(z)$
$U \cap V = \emptyset$

$$\begin{tikzcd} \chi : f^{-1}(y) \times U \arrow[r] \arrow[d] & S^{2p-1} \arrow[d] \\ U \arrow[r] & S^p \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \varphi : f^{-1}(z) \times V \arrow[r] \arrow[d] & S^{2p-1} \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r] & S^{p-1} \end{tikzcd}$$

$L(\chi_{y'}, \varphi_{z'}) = L(\chi_y, \varphi_z)$

$M^{p+q} \xrightarrow{f} N^{p}$ diff
$\overset{\omega}{y}$ valeur regulière

$f^{-1}(y)$ est une sousvariété de dim $p$

<u>prop</u>

Soit $y \in N^p$ valeur regul. . Alors il existe un voisin. $V$ $y \subset V \subset N^p$ t.q $f^{-1}(y') \cong f^{-1}(y)$ si $y', y'' \in V$

De plus : si $\omega\ [0,\alpha] \to \omega$ il exist. ~~$\chi$~~ : $f^{-1}[\omega] \times [0,\alpha] \to M$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y) \times [0,\alpha] \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ {[0,\alpha]} \arrow[r, "\omega"] & N \end{tikzcd}$$

$\chi$ : $f^{-1}(y,t) \to f^{-1}(\omega(t))$ est un diffeomorph.

1) On construit un voisin $V' \supset \bar{V} \ni y$.
$V'$ est une charte

2) Pour ~~prenon~~ $X_1, \dots, X_p$ champs de vecteur dans $N$
$X_1(x) \dots X_p(x)$ forment une base de $T(N)$

3) Prenons $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p$ sur $M$ avec la propr. que
$df_{(m)}(\vec{\tilde{X}_i}(m)) = X_i(f(m))$ $m \in f^{-1}(V')$

$X_{\omega(t)} = \dot{\omega}(t)$

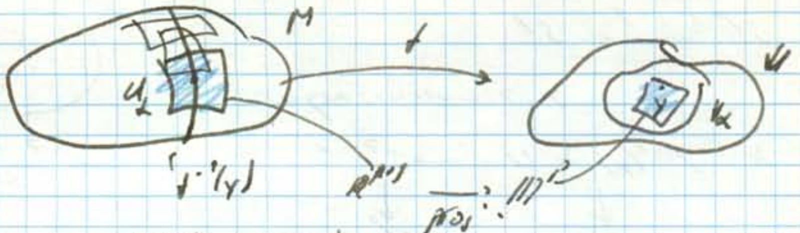
$X_{\omega(t) \in V} = \sum \lambda_i(\omega) X_i(\omega)$ $\omega \in V$, $\lambda_i \subset V'$ $\tilde{X} = \sum \lambda_i(f)\tilde{X}_i$ champs de vecteur sur $M$

$\varphi$ : $M \times \mathbb{R} \to M$
$N \times \mathbb{R} \to N$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y) \times [0,\alpha] \arrow[r] \arrow[d, dash, "p"] & f^{-1}(U) \times \mathbb{R} \arrow[r, "\boxed{\varphi^{\tilde{X}}}"] \arrow[d] & M \\ {[0,\alpha]} \arrow[r, "{(y,t)}"'] \arrow[rr, bend right, dash, "\omega"'] & N \times \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi^{X}"] & N \end{tikzcd}$$

$\varphi^{\tilde{X}} : M \times \mathbb{R} \to M$

Idee : "relevement de vecteur"



$\cup U_\alpha = f^{-1}(y)$

$V$ est construit, t.q. $f^{-1}(\bar{V}) \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$

relèvement ↓ $X_1 \ldots X_p$

$\bar{X}_1^\alpha, \ldots \bar{X}_p^\alpha$ champ o. vect. de $U_\alpha$ avec. $df(\bar{X}_\alpha) = X$

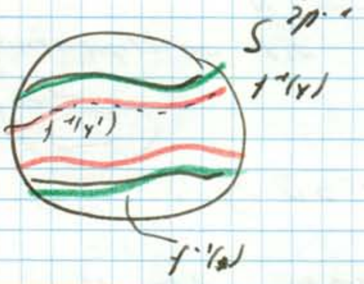
collage : soit $\lambda_\alpha$ une partition de l'unité pour le couvrement $U_\alpha$

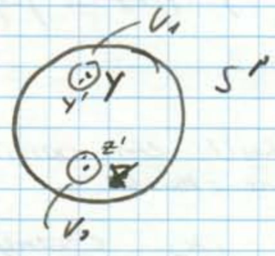
$$\bar{\bar{X}}_i = \Sigma \lambda_\alpha \bar{X}_i^\alpha$$

$$df_m(\Sigma \lambda^\alpha_m \bar{X}_i^\alpha) = \Sigma \lambda^\alpha(m) X_i f(m) = X_i(f(m))$$

extension sur toute la variété : $\tilde{X}_i = \hat{X}_i /_{f^{-1}(U)} = \bar{X}_i /_{f^{-1}(U)}$

Demonst. de la propr. 1)





$H^f(y,z) = H^f(y',z')$

$y', z'$
$\in \in$
$V_1 \; V_2$

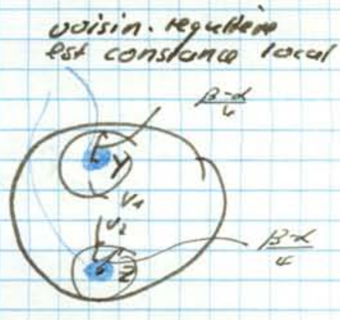
$H^f(y,z) =$
$L(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$
propos. $= L(f^{-1}(y'), f^{-1}(z))$
$= L(f^{-1}(y'), f^{-1}(z'))$
$= H^f(y',z')$

Demonst. de la propr. 2)

$$\overbrace{d(f,g)}^{\alpha} \leq \overbrace{|y-z|}^{\beta}$$

$f(x)$ et $f(y)$ ne sont jamais diametran. opposée alors il exist une unique geodesic

$$h_t(x) = \frac{t\vec{f}(x) + (1-t)\vec{g}(x)}{|t f(x) + (1-t) g(x)|}$$



$H : S^{2p-1} \times I \to S^p$

choisisson $y' \in V_1$ $z' \in V_2$ qui sont valeurs regulières pour $H$

$H^f(y,z) = H^f(y',z') = L(f^{-1}(y'), f^{-1}(z')) \overset{?}{=} L(g^{-1}(y'), f^{-1}(z'))$

$H^g(y,z) = L(g^{-1}(y'), g^{-1}(z'))$ //

? car $f^{-1}(y')$ et $g^{-1}(y')$ sont cobordant donné par $h$

Demonstr. de 3)

$H : S^{2p-1} \times [0,1] \to S^p$ l'homotopie entre $f, g$

$H^t$ est localement constant

$0 \le t_1 < t_2 \dots < t_n < 1$ avec $d(H_{t_i}, H_{t_{i+1}}) < \frac{\delta}{2}$

$\delta =$ ~~dist~~ $|y-z|$

$H^f = H^{H_{t_1}(t)}$

$H^{H_{t_1}(t)} = H^{H_{t_2}(t)}$

$\vdots$

$= H^g$ ⟂

on prend toujours des valeurs regulières

## Théorème de Hopf

$[M^n, S^n] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$

variété compact orientable

$$\boxed{\begin{array}{l} f, g : M^n \to S^n \\ \deg f = \deg g \implies f \sim g \end{array}}$$

plus général

Theorème

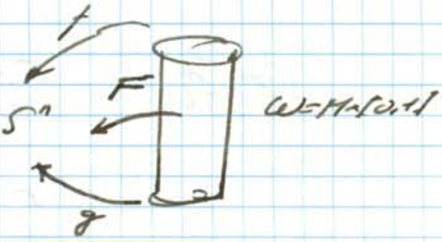
$$\boxed{\begin{array}{l} M^n = \partial W^{n+1} \quad f : M^n \to S^n \\ \text{admet une extension } \tilde{f} : W^{n+1} \to S^n \\ \text{si et seulem. si } \deg f = 0 \end{array}}$$

dériv. de la theorème de Hopf

$W = M \times [0,1]$

$\partial W = M \cup (-M)$

$f \cup g \; M^n \cup (-M) \to S$

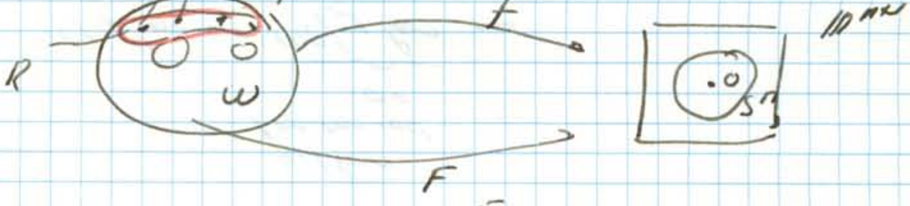


Theorem A

$$\boxed{f : S^n \to S^n \quad \deg f = 0 \implies f \sim \text{const}}.$$

theor. A → Théorème

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & S^n & \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} W \setminus R \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\tilde{F}"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \arrow[d, "\text{proj.}"] \\ & S^n \end{tikzcd}$$

**Th d. Hopf:** $f, g \; M^n \to S^n \quad f \sim g \Leftrightarrow \deg f = \deg g$

$\Uparrow$

**Th d. Hopf'** $f, g$ diffh. $\deg f = \deg g \Rightarrow f \sim g$

$\Uparrow$

**Th** $f : M^n \to S^n$ diffh. $M = \partial W^{n+1}$ $W^{n+1}$ compacte
$\deg f = 0 \Rightarrow \exists \bar{f} : W^{n+1} \to S^n \quad \bar{f}/\partial W = f$

$\Uparrow$

**Th A** $f : S^n \to S^n \quad \deg f = 0 \Rightarrow f \sim$ const.
$\exists \bar{f} : D^{n+1} \to S^n \quad \bar{f}/\partial D = f$

Th $\Rightarrow$ Th. d. Hopf'

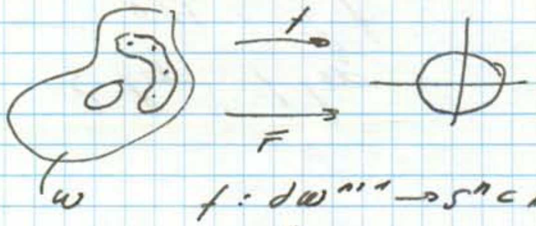
$f, g : M^n \to S^n$

$W^{n+1} = M^n \times [0,1] \quad \partial W^{n+1} = M^n \times \{0\} \sqcup M^n \times \{1\}$

$F : \partial W^{n+1} \to S^n \quad F/_{M^n \times \{0\}} = f \quad F/_{M^n \times \{1\}} = g$

$\deg F = \deg f - \deg g = 0 \Rightarrow F : W^{n+1} \to S^n$

Th A $\Rightarrow$ Th



$$\begin{tikzcd}
\partial W^{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, Rightarrow] & S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\
W^{n+1} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

$F : W' \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\tilde{F} : W' \to S^n$

$x \longmapsto \dfrac{F(x)}{|F(x)|}$

$F : W^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \quad F/\partial W = f$ avec
0 valeur regulier

$F^{-1}(0) = x_1 \ldots x_r \subset W$

$\varphi : D^{n+1} \to W$

$L = \varphi(D^{n+1}) \quad x_L \in \operatorname{Int} L$

$$\begin{tikzcd}
W = W' \arrow[dr, "\tilde{F}"'] & \cup \; L \arrow[d] \\
& S^n
\end{tikzcd}$$

$\tilde{F}(x) = \dfrac{F(x)}{|F(x)|}$

$\partial W' = \partial W \cup \underbrace{\partial L}_{S^n}$

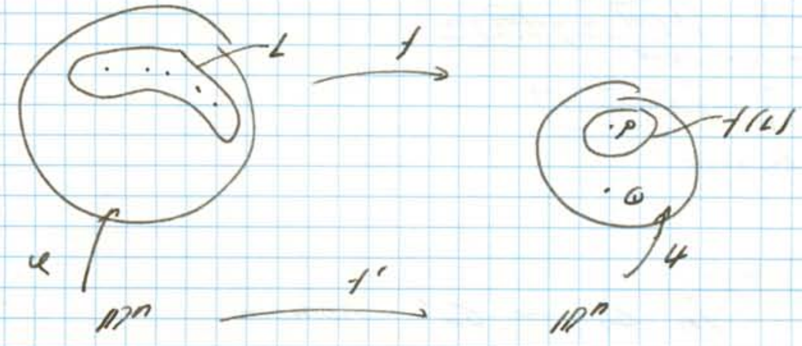
$\Rightarrow \underbrace{\deg \tilde{F}/\partial W}_{\substack{=0 \\ \text{par def def} \\ \deg f = 0}} = \deg \tilde{F}/\partial L$

## Dém Th A

par induction

il est vrai pour $n=1$

vrai pour $n$ ___



$\varphi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus$ Disque

$\psi : \mathbb{R}^n \to S^n - p$

$f'_t$  $f' : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ à supp. comp.

$f_t : S^n \times [0,1] \to S^n$

$$f_t(x) = \begin{cases} \psi f'_t \varphi^{-1} & x \in S^n - L \\ f(x) & x \in L \end{cases}$$

$f'_t(\vec{v}) = f'_0(\vec{v})$  $|\vec{v}| > N$

et $f'_0(\mathbb{R}^n) \not\ni \{0\}$ et $\psi(0) \notin f(L)$ — $f_0$ n'est pas surj.

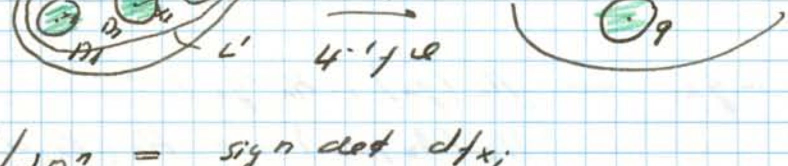
contradic. $f$

Th A'  pour chaque $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  $\deg(\pi f) = 0$
il existe une extens. $\bar{f} : D^{n+1}$

$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$

Th A' $\longrightarrow$ Th A  trivial

$f'_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$(D_i^n) \longrightarrow D^n$ sont des difféom.



$\deg f'|_{\partial D_i^n}$ = sign det $df_{x_i}$

$$\begin{tikzcd} f' \quad L'' \setminus \cup \mathring{D}_i^n \arrow[r] & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ & S^n \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow f'_1|_{L''} = \mathbb{R}^n - \{0\}$

costr. $f'_1 : f'|_{\mathbb{R}^n - L'}$  $f'_1|_{L''} = \mathbb{R}^n - \{0\}$

$f$ homotop $f'$ — une appliqu. qui ne ~~trouve~~ touche pas $q$

$f' \sim$ identité

Demonst. important avec beaucoup d'idée important,

II Hopf

# Homologie

$$\begin{tikzcd}
\text{groupe abelian gradués} \\
\text{complexe de chaine} \arrow[u, "\{\text{Homologie}\}"'] \\
\text{CW-complexes} \arrow[u, "\{\text{topol. algebrique}\}"'] \\
\text{espaces topologie} \arrow[u, "\{\text{Combinat.}\}"']
\end{tikzcd}$$

$G_n / n \geq 0$ ) $\quad f_n \; G_n \to G_n'$ homom.

$f = \{f_n : G_n \to G_n'\}$

$(A_*, d_*) = (A_n ; d_n : A_n \to A_{n-1} \quad / n \geq 0\} \qquad d_{n-1} d_n = 0$

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[d, "f_0"'] & A_1 \arrow[l, "d_1^A"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[l, "d_2^A"'] \arrow[d, "f_2"] & \dots \arrow[l] \\
B_0 & B_1 \arrow[l] & B_2 \arrow[l] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

complexe de chaine

$d_n \; d_{n+1} = 0 \longrightarrow$ Image $d_n \subseteq \ker d_n$

$H_n(A_*, d_*) = \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d_{n+1}^B \arrow[r, phantom, "\subset"] & \ker d_n^B \arrow[r] & H_*(B_* d_*') \\
\operatorname{Im} d_{n+1}^A \arrow[r] \arrow[u, "f_n"] & \ker d_n^A \arrow[r] \arrow[u, "f_n"] & H_n(A_* d_*) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$f_*, g_* : (A_*, d_*) \longrightarrow (B_*, d_*')$ / deux homom. d. complexes de chai.

**Def** $f_* \sim g_*$ s'il existe $\{h_n : A_n \to B_{n+1} / \; n \geq 0$

$h_{n-1} d_n + d_{n+1} h_n = f_n - g_n$

**Prop**
Exerc

$f_* \sim g_* \to H_*(f_*), H_*(g_*)$ :

$H_*(A_*, d_*) \to H_*(B_*, d_*')$ sont egaux

$$0 \to (A_*, d_*) \overset{f_*}{\rightarrowtail} (B_*, d_*) \xrightarrow{g_*} (C_*, d_*) \to 0$$

une suite exacte court de complexes de chaine

$$\begin{tikzcd}
H_n(A_*, d_n^A) \arrow[r, "H_n(f_*)"'] & H_n(B, d_n^B) \arrow[r, "H_n(g_*)"'] & H_n(C_n, d_n^C) \arrow[dll, "\delta"'] \\
H_{n-1}(A_*, d_*^A) \arrow[r, "H_{n-1}(f_*)"'] & H_{n-1}(B_*, d_*^B) \arrow[r, "H_{n-1}(g_*)"'] & H_{n-1}(C_n, d_*^C)
\end{tikzcd}$$

suite exacte $\vdots$

**Def**
**whitehead**

$(X, \quad X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots)$ skelet de dim i      CW - complex

1) $e_\alpha^i : S^{n-1} \to X_{i-1}$      $X_i = X_{i-1} \underset{\substack{e_\alpha \\ \alpha \in A(i)}}{\cup} D_\alpha^i$   scelet de dim i

2) $X_0$ une ensemble discrete

3) $X = \underline{\lim}\, X_i$      $A \subseteq X$ ouvert $\Leftrightarrow$ $A \cap X_i$ ouvert $\forall i$

$\varphi_\alpha^i : S_\alpha^{i-1} \to X_{i-1}$   application caracteristique

$u_\alpha^i : D_\alpha^i \to X_i \subset X$

$u_\alpha^i(D_\alpha^i) = e_\alpha^i$      $X_0 = \bigcup_{\alpha \in X_0} \mathring{e}_\alpha^0$   $\mathring{e}_\alpha^0 = e_\alpha^0$

$(X, u_\alpha : D_\alpha^i \to X)$ contient tous l'infoin.

$(X, u_\alpha) \xrightarrow{f} (Y, u_\beta)$

$f : X \to Y$   $f(X_i) \subseteq Y_i$

**Exerc :** $K \subset X$ kompakt   $K \cap e_\alpha^i \neq 0$ seulement pour une famille finie de cellules.

**Def** $K \subset X$ defini un soucomplexe, si $K \cap e_\alpha^i \neq \emptyset \Rightarrow e_\alpha^i \subset K$

$K_r = \bigcup_{\substack{e_\alpha^i \subset K \\ i \leq r}} e_\alpha^i$

Si $K \subset X$ est soucomplexe $\Rightarrow$ $X/K$ soucomplex

**Rem** $X_0 \subset X_1 \dots \subset X_i$      $\underset{\text{scelett}}{X_i}$ est soucomplexe

X, Y deux CW complexe

$\chi_\alpha^i : D_\alpha^i \to X$      $\omega_\beta^j : D_\beta^j \to Y$

$$\tau_{\alpha\beta}^{i+j} : D_{\alpha\beta}^{i+j} = D_\alpha^i \times D_\beta^j \to X \times Y$$

est cw complexe si Y ou X est compact.

**Def** 1) $f : X \to Y$ s'appelle <u>cellulaire</u>, si $f(X_i) = Y_i$

2) $f, g : X \to Y$ sont cellulairement homotopique. s'il existe $X \times I \xrightarrow[F]{} Y$

**Théoreme** X, Y CW complexe   $K \subset X$ soucomplexe

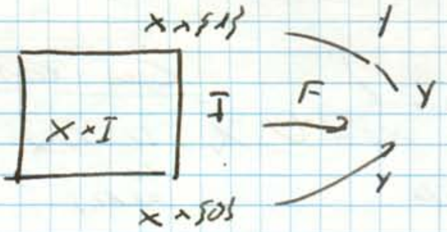
$f : X \to Y$ contin. t.q. $f|_K$ cellulaire

$\to \exists F : X \times I \to Y$ t.q. $F|_{X \times \{0\}} = f$

$F|_{X \times \{1\}}$ est cellulaire

$F(x,t) = f(x)$   $x \in K$

Γ Demonstr. dans Boalis



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f' \text{ cellulaire}"'] & Y \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g' \text{ cellulaire}"'] & X \end{tikzcd}$$

equiv. homotopique

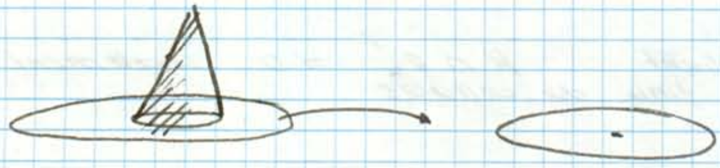
$\exists f', g'$ cellulaire

$g' \circ f' \overset{F}{\simeq} id$ F cellulaire

$f' g' \overset{G}{\simeq} id$ G cellulaire

$A \subset X$ $\quad CA \quad A \times [0,1] \,/\, A \times \{1\}$ cone de A

$CA \cup X = X \cup CA$



$CA \cup X \xrightarrow{\pi} X/A$

Prop Si A est homotopiquement reguliere

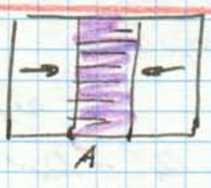
alors $\pi : CA \cup X \longrightarrow X/A$
est une equivalence homotopique

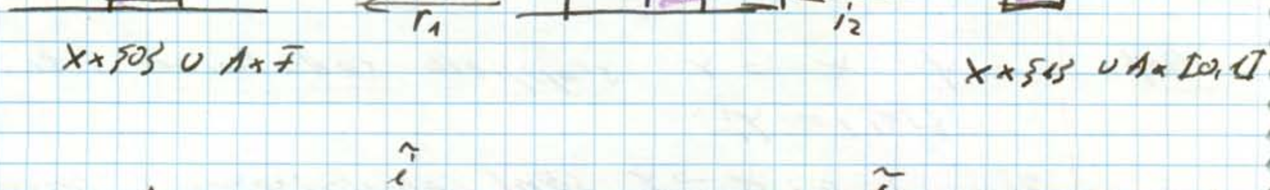
Def $A \subset X$ est homotopie reguliere "cofibration", s'il existe une retraction par deformation avec

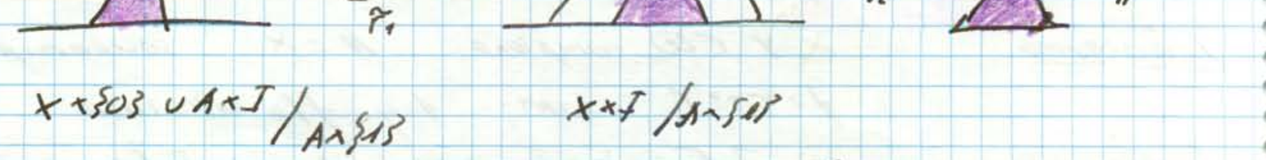
$X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$

Geologi c

⌜

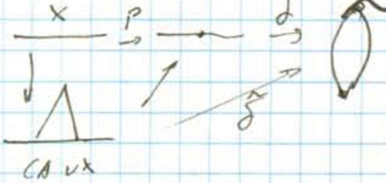






$\pi := \tilde{\pi}\, \tilde{r}_2\, \tilde{i}_1$ est une equiv homotopique ⌟

## 1) La suite de D. Puppe

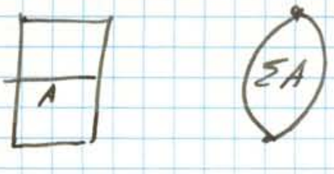


$A \hookrightarrow X$ A homotop. regulier

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X/A \arrow[r, dashed, "\delta"] & \Sigma A \arrow[r] & \Sigma X \arrow[r] & \Sigma X/A \\
& CA\cup X \arrow[ur, "\pi"] \arrow[urr, "\delta'"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

const. de $\delta$

**Def** $\boxed{\Sigma A = {}_{A\times\{1\}}\backslash A\times I/_{A\times\{0\}}}$ suspension de A



**Def** $A \to X \to X/A \to \ldots \Sigma A \quad \Sigma X \quad \Sigma X/A$

$\ldots \quad \Sigma\Sigma A \quad \Sigma\Sigma X \quad \Sigma\Sigma X/A \ldots$

suite de Puppe

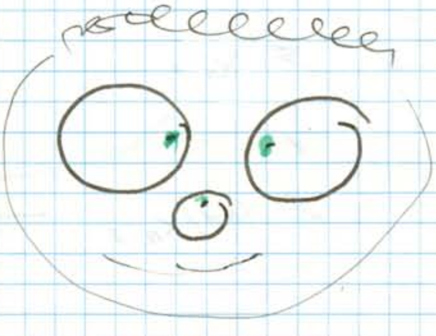
$$\begin{tikzcd}
& & CA\cup X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr] \arrow[ddd, bend left] & & & & \\
A \arrow[r, "i"] & X \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "j"] & X/A \arrow[r, dashed, "\delta(X,A)"] & \Sigma A \arrow[r, "\Sigma i"] & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma p"] & \Sigma X/A & \ldots \\
A' \arrow[r] \arrow[u] & X' \arrow[r] & X'/A' \arrow[r, dashed, "\delta(X',A')"] \arrow[u] & \Sigma A' \arrow[r] \arrow[u, "\Sigma f"] & \Sigma X' \arrow[r] & \Sigma X'/A' & \ldots \\
& & CA'\cup X' \arrow[u] \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

commutat

homot commut

comutati

commutation dans la theorie de ~~[illegible]~~ homot.



Bouquet de sphères

$$\begin{tikzcd}
X = \bigvee_{\alpha\in A} S_\alpha^n \arrow[d, "f"] \arrow[drr, "f\circ g"] & & \\
\bigvee_{\beta\in B} S_\beta^n \arrow[rr, "g"] & & \bigvee_{\gamma\in C} S_\gamma^n
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\deg f\circ g = \deg f \cdot \deg g}$

$\deg f - \{\lambda_{\alpha\beta}\}$

$\lambda_{\alpha B} = \deg \varphi_{\alpha\beta}$

$$\begin{tikzcd}
& \bigvee_{\alpha\in A} S_\alpha^n \arrow[r, "f"] & \bigvee_{\beta\in B} S_\beta^n \arrow[dr] & \\
S_\alpha^n \arrow[ur] \arrow[rrr, bend left, "\varphi_{\alpha\beta}"] & & & S_{\beta'}^n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{CW Compl.} \atop \text{appl. cellul.} \arrow[r] & \text{Complexe de chaines} \atop \text{Morphisme} \arrow[r, "H_*"] & \text{groupes gradués abelien} \atop \text{morphism}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Complexe de chaines} \arrow[rr, bend right, "\text{Homologie}"'] & & \text{groupes gradués abelien}
\end{tikzcd}$$

$X \quad (X_0 \subset X_1 \subset \ldots \quad ) \quad \Phi_\alpha : D_\alpha^n \to X$

$C_*(X), d_*$ $\qquad * = 0, 1, \ldots$

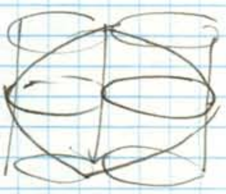
$d_* : C_n(X) \to C_{n-1}(X) \quad n \geq 1$

$d_{n-1} d_n = 0$

$$C_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in A(n)} \mathbb{Z}_\alpha \qquad \text{groupe abelien libre}$$

$$= \mathbb{Z}\{e_\alpha^n\}$$

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_{n-1}(X) \\
\bigoplus_{\alpha \in A_n} \mathbb{Z}_\alpha \arrow[r] & \bigoplus_{\beta \in A(n-1)} \mathbb{Z}_\beta
\end{tikzcd}$$



suspension de deux sphères

bouquet de sphères orienté!

$$\begin{tikzcd}
X_n/X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma(X_{n-1}) \arrow[d] \\
\bigvee_{\alpha \in A_n} S_\alpha^n & \Sigma(X_{n-1}/X_{n-2}) \arrow[r, equal, "\text{sus}"] & \bigvee_{\beta \in A(n-1)} S_\beta^n
\end{tikzcd}$$

$$X_{n-1} \hookrightarrow X_n \longrightarrow X_n/X_{n-1} \overset{\delta}{\dashrightarrow} \Sigma X_{n-1}$$

$$\begin{tikzcd}
X_n/X_{n-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[drrr, bend right, red] & \Sigma X_{n-1} \arrow[d] \arrow[dr, bend right, green] & & \\
\bigvee_{\alpha \in A(n)} S_\alpha^n \arrow[u, "\wedge"] & \Sigma X_{n-1}/X_{n-2} \arrow[r] & \Sigma\Sigma X_{n-2} \arrow[d] & \\
& & \Sigma\Sigma X_{n-2}/X_{n-3} \arrow[r] & \vdots \cdots \vdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_{n-2} \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & X_{n-1}/X_{n-2} \arrow[r] & \Sigma X_{n-2} \\
\arrow[r] & \Sigma X_{n-1} \arrow[r] \arrow[dr, bend right, green] & \Sigma X_{n-1}/X_{n-2} \arrow[d] & \\
& & \Sigma^2 X_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

deg $-$ $= d_{n-1} \cdot d_n$

$$d_n = \deg( X_n/X_{n-1} \to \tilde{\Sigma} X_{n-1}/X_{n-2})$$

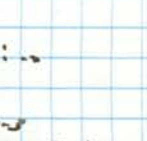
$$= \deg(\Sigma X_n/X_{n-1} \to \tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma} X_{n-1}/X_{n-2})$$

$$\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma} X_{n-2}/X_{n-3}$$

$$= \tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma} \bigvee_{\gamma \in A(n-1)} S_\gamma^{n-1} = \bigvee_{\gamma \in A(n-1)} S_\gamma^n$$

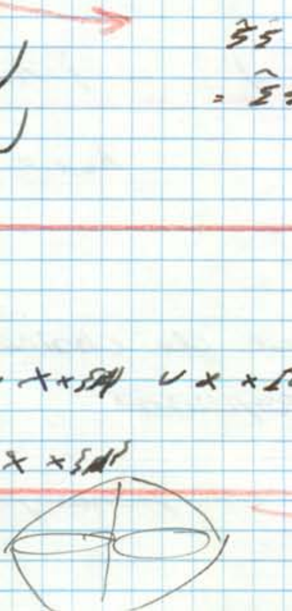
Def **Suspension reduit**

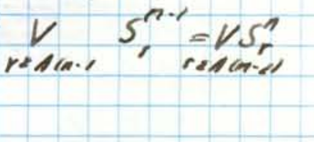
$$\tilde{\Sigma} X = X \times [0,1] / X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup x \times [0,1]$$



$$\Sigma(X) = X \times [0,1] / X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$$

Ex :





D72 $15^{00}$

$f : X_i \to Y_i$

$$\begin{tikzcd}
X_n/X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & Y_n/Y_{n-1} \\
C_n(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & C_n(Y) \arrow[d] \\
C_{n-1}(X) \arrow[r, "\delta"'] & C_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

<u>est commutative</u>

$$\begin{tikzcd}
X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[r] \arrow[d, dash] & X_n/X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X_{n-1}/X_{n-2} \arrow[d] \\
Y_{n-1} \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & Y_n/Y_{n-1} \arrow[r] & \Sigma Y_{n-1} \arrow[r] & \Sigma Y_{n-1}/Y_n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$f \overset{F}{\text{homot.}}\ g$

$h_n : C_{n-1}(X) \to C_n(Y)$

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \\
C_n(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_{n-1}(X) \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] \\
C_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

$h_{n-1} d_n + d_{n+1} h_n = f_n - g_n$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma X_{n-1}/X_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & (X \times I)_n/(X \times I)_{n-1} \arrow[dl] \\
\bigvee\limits_{\alpha \in A(n-1)} S_\alpha^n & Y_n/Y_{n-1} = \bigvee\limits_{\beta \in B_n} S_\beta^n
\end{tikzcd}$$

---

<u>Rep</u>

$X = (X_0 \subset X_1 \subset \dots)$

$X_i = X_{i-1} \cup \bigcup_{e_\alpha} D_\alpha$

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) = \bigoplus\limits_{\alpha \in A(n)} Z_\alpha \arrow[d] \\
C_{n-1}(X) = \bigoplus\limits_{\beta \in A(n-1)} Z_\beta
\end{tikzcd}$$

$\underset{\sim}{\bigvee\limits_{\alpha \in A(n)} S_\alpha^n} = x \in X_{n-1} \subset X_n$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} X_{n-1} \arrow[r] & \tilde{\Sigma} X_{n-1}/X_{n-2}
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\Sigma} \vee S_\beta^{n-1} = \underset{\sim}{\bigcup\limits_{\beta \in A_{n-1}} S_\beta^n}$

**Def**

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_n \arrow[l] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dr, "h_n"] & C_{n+1} \arrow[l] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] \arrow[dr, "h_{n+1}"] & C_{n+2} \arrow[l] \arrow[d, shift right, "f_{n+2}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+2}"] & \cdots \\
\cdots & C_n' \arrow[l] & C_{n+1}' \arrow[l] & C_{n+2}' \arrow[l] & \cdots
\end{tikzcd}$$

complexes de chaînes

$h_n : C_n \to C_{n+1}'$ $\qquad h_{n-1} d_n + d_{n+1} h_n = f_n - g_n$

homotopie algébrique entre f

$\tilde{A}(n) = A(n-1) \cup A(n) \cup A(n)$ C-W structure canonique

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \qquad F : X \times I \to Y$$

CW-compl.

$F|_{X\times\{0\}} = f$
$F|_{X\times\{1\}} = g$

homologie cellulaire

$$\bigvee_{\alpha\in\hat{A}(n)} S^n_\alpha = (X\times I)_n / (X\times I)_{n-1} \xrightarrow{F} Y_n / Y_{n-1} = \bigvee_{\beta\in B(n)} S^n_\beta$$

$$\bigvee_{\alpha\in A(n-1)} S^n_\alpha$$

$$\bigoplus_{\alpha\in A(n)} \mathbb{Z}_\alpha \xrightarrow{\boxed{h_{n}}} \bigoplus_{\beta\in B_n} \mathbb{Z}_\beta$$

vérifier encore $h_{n-1} d_n + d_{n+1} h_n = f_n - g_n$

| | | | |
|---|---|---|---|
| groupe abélien gradué : | CW complexes | ⟷ | complexe de chaînes |
| morphismes | applications cellulaires | | morphismes de chaîne |
| | morphismes homotopes / homotopie cellulaire | ⟷ | homotopie algébrique |

CW-complexe

$X \rightsquigarrow H_i(X)$

$f : X \to Y \rightsquigarrow H_i(f) : H_i(X) \to H_i(Y)$ $\quad i = 0, 1, 2, \ldots$

$f \sim g \rightsquigarrow H_i(f) = H_i(g)$

Philosophie :
- Approximation d'une application continue par une application cellulaire
- comparer : Théorie du degré : approxim. d'une appl. continue par une application différentiable

→ le groupe homologie ne dépend pas de la structure de CW complexe

---

Ex.

$S^n = X \qquad X_0 = \{x\} = X_1 = \ldots = X_{n-1} \subseteq X_n = S^n$

$$\overset{0}{\mathbb{Z}} \leftarrow \overset{1}{0} \leftarrow \cdots \overset{n}{\mathbb{Z}} \leftarrow \cdots$$

complexe de chaînes

$$H_i(Z) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n \\ 0 & i \neq 0, n \end{cases}$$

$$CP^n = X \qquad X_0 = \{x\} = X_1 \subset \overset{CP^1}{\overset{\|}{X_2}} = X_3 \subset \overset{CP^n}{\overset{\|}{X_n}} = X_n \subseteq \ldots$$

$$\overset{0}{\mathbb{Z}} \leftarrow \overset{1}{0} \leftarrow \cdots \overset{n}{\mathbb{Z}} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots \overset{2n}{\mathbb{Z}}$$

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$K \subset X$ , $\overset{CW}{\text{souscomplex}}$ de $X$ — $X/K$ est un CW complexe avec tous les cellules qui n'appartient pas à $K$ avec un point *

$$0 \to C_*(K) \hookrightarrow C_*(X) \to C_*(X/K) \to 0$$
$$0 \to \tilde{C}_*(K) \hookrightarrow \tilde{C}_*(X) \to \tilde{C}_*(X/K) \to 0$$
suite exacte

$$\bigoplus_{\alpha \in A_n^K} \mathbb{Z}_\alpha \to \bigoplus_{\alpha \in A(n)} \mathbb{Z}_\alpha \to \bigoplus_{\alpha \in A^{-K}(n)} \mathbb{Z}_n$$

$$\ldots \tilde{H}_*(K) \to \tilde{H}_*(X) \to \tilde{H}_*(X/K) \to \tilde{H}_{*-1}(K) \to H_{*-1}(X) \ldots$$

---

$X_1, X_2 \subset X$ $X_1, X_2$ sous CW complexes de $X$, $X = X_1 \cup X_2$

$X_{12} := X_1 \cap X_2$ est souscomplexe

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr] & \\ X_{12} \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\ & X_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C_*(X_1) \arrow[dr, "j_1"] & \\ C_*(X_{12}) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr] & & C_*(X) \\ & C_*(X_2) \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

suite exact $0 \to C_*(X_{12}) \xrightarrow{i_1 \oplus i_2} C_*(X_1) \oplus C_*(X_2) \xrightarrow{j_1 - j_2} C_*(X) \to 0$

l'homologie: $\ldots \to H_*(X_{12}) \to H_*(X_1) \oplus H_*(X_2) \to H_*(X) \to H_{*-1}(X_{12})$

suite longue exacte

Suite de Mile Vietoris

---

l'espace $\mathbb{R}P^n = X$ $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$

$\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \ldots$

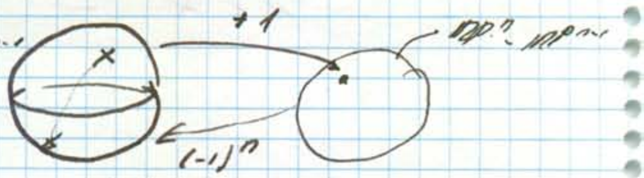
$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z} & \ldots & & & \mathbb{Z} & \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \end{array}$$

Prop $\partial_n = \pm(1 + (-1)^n)$

$$H_i(\mathbb{R}P^{2n}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } i \text{ est impaire } i \le 2n \\ 0 & \text{si } i \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } i \ge 2n \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & i < 2n+1 \text{ impaire} \\ 0 & i \text{ pair } i < 2n+1 \\ \mathbb{Z} & i = 2n+1 \\ 0 & i > 2n+1 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}P^n \arrow[r] & \mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \arrow[d, equal] \\
& \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[u, phantom, "\cup"] & S^n
\end{tikzcd}$$



degree f : $(1+(-1)^{n+1})$

suite de puppet : $X_n/X_{n-1} \xrightarrow{\delta} \tilde{\Sigma} X_{n-1} \to \tilde{\Sigma} X_{n-1}/X_{n-2}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, dotted] & \mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r] & \tilde{\Sigma}\mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r] & \Sigma \mathbb{R}P^{n-1}/\mathbb{R}P^{n-2} \\
S^{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & D_1^n \arrow[r, dotted] & D_1^n/\partial D_1^n \arrow[r] & \tilde{\Sigma} S^{n-1} \arrow[ur, "g"]
\end{tikzcd}$$

$\deg g = 1+(-1)^n$

---

## Characteristique d'Euler Poincaré

$X$ CW complexe

Def $\boxed{\chi(X) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} (H_i(X) \otimes \mathbb{Q})}$

bien défeni.

ou $X \cup_\alpha \cup D_\alpha^n$

Lemme $\boxed{\text{Soit } X \text{ avec le type d'homotopie d'un CW complexe alors } X \cup_\varphi D^n \ \varphi : S^{n-1} \to X \text{ a le type d'homotopie d'un CW-complexe}}$

rem : 1) $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ S^{n-1} \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd} \Rightarrow X \cup_\varphi D^n \sim Y \cup_{f\circ\varphi} D^n$

2) $f : S^{n-1} \to X$ $\quad X \cup_\varphi D^n \sim X \cup_{\varphi'} D^n$ si $\varphi \sim \varphi'$

Supposon : $f$ est cellulaire

$X' : X \cup_\varphi D^n$ $\varphi$ cellulaire

$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \ldots$

$X_0' \subset X_1' \subset X_2' \ldots X_{n-1}' \subset X_n' \subset X_{n+1}' \subset \ldots$

$X_{n+i}' = X_n \cup_\varphi D^n \quad i > 0$

$X_{n-i}' = X_{n-i}$

---

$X_n' = X_{n-1} \cup \bigcup_{\alpha \in A(n)} D_\alpha^n \cup_\varphi D^n$

$X_{n+1}' = X_n' \cup \bigcup_{e_\alpha} D_\alpha^{n+1}$

**Cor** Chaque complexe cellulaire (fini) a le type d'homotopie d'un CW-complexe

Soit $X$ un espace à type d'homotopie d'un CW complexe

$X \cup_\alpha D^n$

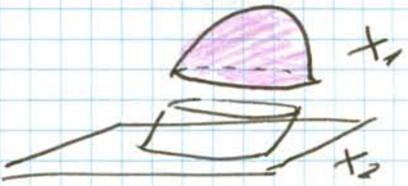
$H_i(X \cup_\alpha D^n) = H_i(X)$ si $i \neq n, n-1$

$H_{n-1}(X \cup_\alpha D^n) = H_{n-1}(X) / \{\alpha\}$

$H_n(X \cup_\alpha D^n) = \begin{cases} H_n(X) & \text{si } \alpha \text{ est un elem. d'ordre } \infty \\ H_n(X) \oplus \mathbb{Z} & \text{si } \alpha \text{ est un elem d'ordre fini} \end{cases}$

$\mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(X)$

$1 \longrightarrow \{\alpha\}$



Application de Mail...

$$\begin{tikzcd} & D^n \arrow[dr] & \\ S^{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \cup D^n \\ & X \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$0 = H_n(S^{n-1}) \to \overset{0}{\overset{\|}{H_n(X)}} \oplus H_n(D^n/_2)$

$\longrightarrow H_n(X \cup D^n) \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{H_{n-1}(S^{n-1})}} \longrightarrow H_{n-1}(X) \oplus \underset{0}{\underset{\|}{H_{n-2}(D^n/_2)}}$

$\longrightarrow H_{n-1}(X \cup_\alpha D^n) \to 0$ suite exacte

$0 \to H_n(X) \longrightarrow H_n(X \cup D^n) \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{H_{n-1}(S^{n-1})}} \to H_{n-1}(X)$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \{\alpha\}$

$\longrightarrow H_{n-1}(X \cup_\alpha D^n) \to 0$

Discussion des trois cas

appliquation :

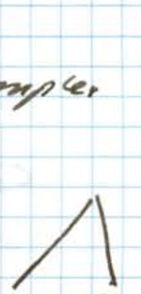
$A \subset X$ $A, X$ type de CW complexe

$A \subset X \to X/A$ suite exacte pour l'homologie

si $X$ a le type d'homot. d'un CW complex alors la suspension de $X$ l'a aussi, et

$H_{i+1}(\Sigma X) = H_i(X)$

$H_0(\Sigma X) = \mathbb{Z}$



[illegible] : ~~$H_n(X)$~~

**Meyer-Vietons**

$$0 \to H_{i+1}(\Sigma X) \to H_i(X) \to H_i(C_+X) + H_i(C_-X) \to H_i(\Sigma X) = 0$$

$$0 \to H_{i+1}(\Sigma X) \to H_i(X) \to 0$$

## la charactéristique d. Euler Poincaré

$X$ type d'homotopie d' CW compl.

$$\chi_i(X) = \Sigma (-1)^i \underbrace{\dim(H_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})}_{\text{rank } H_i(X)}$$

Théorème

Soit $X$ un CW complexe

alors $\chi(X) = \Sigma (-1)^i \# A(i)$

$C_X'$ $C_0$ $C_1$ $C_2$ . . . $C_i$ $0 \dots 0$ complexe chaine fini

1) $C_i$ espace vectorielles sur $\mathbb{Q}$ de dimen fini et $d$ soit $\mathbb{Q}$ linéaire

$$\Sigma (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(C_X') = \Sigma (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} C_i$$

$$H_i = \frac{\ker d : C_i \to C_{i-1}}{\operatorname{im} d \; C_{i+1} \to C_i} \quad \begin{matrix} =: Z_i \\ =: B_i \end{matrix}$$

$$\boxed{\dim H_i = \dim Z_i - \dim B_i}$$

$$C_{i+1} \xrightarrow{d} C_i$$

$$\frac{C_{i+1}}{Z_{i+1}} \cong B_i$$

$$\boxed{\dim C_i - \dim Z_i = \dim B_{i-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim H_i = \dim C_i - \dim B_{i-1} - \dim B_i}$$

2) $C_X$ $\quad C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \dots$

$C_X' = C_X \otimes \mathbb{Q}$ $\quad C_0' \leftarrow C_1' \leftarrow C_2' \dots$

$$H_i(C_X \otimes \mathbb{Q}) \overset{?}{=} H(C_X) \otimes \mathbb{Q}$$

$$H_i = \frac{\ker d'}{\operatorname{im} d'} = \frac{\ker d \otimes \mathbb{Q}}{\operatorname{im} d \otimes \mathbb{Q}}$$

$$= \frac{\ker d}{\operatorname{im} d} \otimes \mathbb{Q}$$

$$\chi(X) = \sum (-1)^i \dim H_i(X) \otimes \mathbb{Q} = \sum (-1)^i \dim H_i(C_*(X)) \otimes \mathbb{Q}$$
$$= \sum (-1)^i \dim C_i(X) \otimes \mathbb{Q}$$
$$= \sum (-1)^i \# A(i)$$

$$\bigoplus_{\alpha \in A(i)} \mathbb{Z}_\alpha \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{\alpha \in A(i)} \mathbb{Q}_\alpha$$

---

Avons eu le degree ⟷ determin. non lin.
trace ⟷ nombre de Lefschetz

## le nombre de Lefschetz

**Def** $X$ un espace à type d'homologie d'un complexe fini

$X \xrightarrow{f} X$

$L(f) = \sum (-1)^i \operatorname{Trace}(f_i (H_i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(X) \otimes \mathbb{Q})) \in \mathbb{Q}$

$H_i(X)_{\otimes \mathbb{Q}} \xrightarrow{f_i} H_i(X)_{\otimes \mathbb{Q}}$

$V$ VR dim end

$f : V \to V$

$T(f) = \sum a_{ii}$

propriété.

1) $f \sim g \Rightarrow L(f) = L(g)$

2) $L(f) \in \mathbb{Z}$

3) $A$ souscomplexe de $X$, $X$ CW complexe fini

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X/A \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, phantom, "\subset"] & X \arrow[r] & X/A \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow L(f) = L(g) + L(h)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & W/V \arrow[d, "h"] \\ V \arrow[r, phantom, "\subset"] & W \arrow[r] & W/V \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Trace}(f) = \operatorname{Trace}(g) + \operatorname{Trace}(h)$

4) $L(id_X) = \chi(X)$

(Lefschetz Fixpunktsatz
→ Brouwer Fixpunktsatz Spezialfall)

Soit $X$ un CW complexe $f : X \to X$ une applic. cellulaire

$L(f) = \sum (-1)^i \operatorname{Trace}(f_i : H_i(X) \to H_i(X))$

$= \sum (-1)^i \operatorname{Trace}(f_i : C_i(X)_{\otimes \mathbb{Q}} \to C_i(X)_{\otimes \mathbb{Q}})$

→ 1, 2, 3, 4 immédiat

démonstration : comme pour "dimension" ⇝ "trace" dans la preuve de avant

cas
spécial
des
théorème
de Lefschetz

Soit X CW fini

$f: X \to X$

$f(\mathring{e}_\alpha) \cap \mathring{e}_\alpha = \emptyset \Longrightarrow L(f) = 0$

appliquable
pour variété : triangulation

$\Gamma$

$$\begin{tikzcd} \bigvee_{\alpha\in A(i)} S^n_\alpha = X_n/X_{n-1} \arrow[d] \\ \bigvee_{\alpha\in A(i)} S^n_\alpha = X_n/X_{n-1} \end{tikzcd}$$

métrique d fixe

$x \to d(x, f(x)) > a > 0$ car f n'a pas de points fixes

$d(e_\alpha) < \frac{a}{4}$

prends une autre structure de CW complexe

approche f par une appl. cellulaire f' de telle façon, que

$$d(f(x), f'(x)) < \frac{a}{4}$$

alors $L(f') = 0$

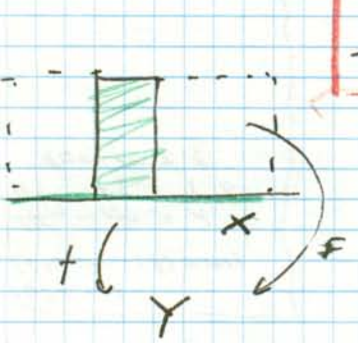
$\to L(f) = 0$ $\lrcorner$

Lefschetz → Hopf : champs de vecteur

nombre de Lefschetz $= \chi(a)$
e...

Def

$A \subseteq X$ s'appelle cofibration $\Longleftrightarrow$
$\forall f: X\times\{0\} \cup A\times[0,1] \to Y$ il existe une extension $F: X\times[0,1] \to Y$



$A \subseteq X$ cofibration $\Longleftrightarrow \exists$ retract R
$X\times[0,1] \to X\times\{0\} \cup A\times[0,1]$

$\Gamma$ "$\Longrightarrow$" F est la retraction

"$\Longleftarrow$" $\exists R$ $\quad f: X\times\{0\} \cup A\times[0,1] \to Y$

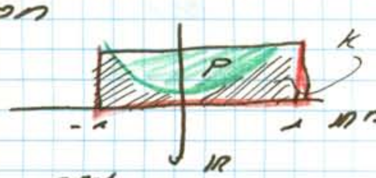
prenons $F: X\times[0,1] \to Y$

$F = f\circ R$ $\lrcorner$

**Exemple**

$S^{n-1} \subseteq D^n$ est une cofibration

$D^n \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$



Prenons : $r : D^n \times [0,1] \to D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1$

$K = D^n \times [0,1] \setminus P$

$r_1 : D^n \times [0,1] \to K$

$r_2 : K \to D^n \times [0,1] \cup S^{n-1} \times [0,1]$

$$r_1(\overbrace{x}^{\in \mathbb{R}^n},\overbrace{t}^{\in[0,1]}) = \begin{cases} (x, 1-\sqrt{1-|x|^2} & t \in P \\ (x,t) & t \in K \end{cases}$$

$$\underset{K}{r_2(x,t)} = \begin{cases} \frac{\vec{x}}{|x|} & \frac{|\vec{x}|}{1-t} \geq 1 \\ \frac{\vec{x}}{(1-t)} & \frac{\vec{x}}{1-t} < 1 \end{cases}$$

**Lemme 1'**

Soit $X \hookrightarrow \overbrace{X \cup_\varphi D^n}^{X'}$ $\varphi : S^{n-1} \to X$
∴ l'inclusion est une cofibration

$\ulcorner$ $X' \times [0,1] \xrightarrow{c} X' \times \{0\} \cup X \times [0,1]$

$\|$

$X \times [0,1] \cup D^n \times [0,1]$
$\varphi \times id.$

$\rho / S^{n-1} \times [0,1] = \varphi \times id$ $\rho / D^n \times \{0\} = id$

$r / X \times [0,1] = id$

$D^n \times [0,1] \xrightarrow{r'} D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$

$\xrightarrow{\rho} X'$ $\lrcorner$

**Lemme 1**

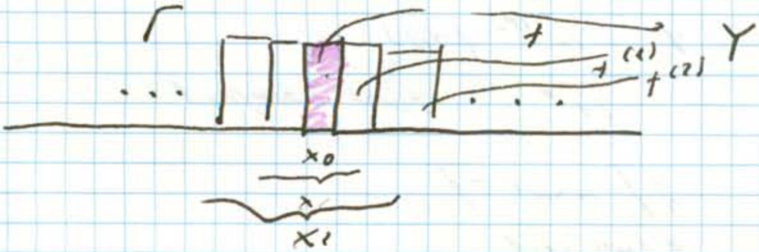
Soit $X \hookrightarrow X \cup_\varphi \mathbb{D}$ $\mathbb{D} = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha^{n_\alpha}$
∴ l'inclusion est une cofibration. $\varphi : \bigcup S_\alpha^{n_\alpha - 1} \to X$

$\ulcorner$ comme avant $\lrcorner$

**Lemme 2**

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_{i-1} \subseteq X_i \subseteq \dots$
$X = \varinjlim X_i$ $X_i \subseteq X_{i+1}$ cofibrat. ($X_i$ fermé dans $X_{i+1}$)
$\Longrightarrow$ $X_0 \subseteq X$ cofibration

$\ulcorner$



$\lrcorner$

**Kor** $X$ CW complexe $K \subseteq X$ CW souscomplexe

$X_i \subseteq X_{i+k}$
$X_i \subseteq X$ sont des cofibrations

**Prop 3** Soit $X \cup_e D^n \to Y$ $Y$ CW complexe

$f(X) \subseteq Y_{(n-1)}$

$\Longrightarrow \exists \; F : (X \cup_e D^n) \times [0,1] \to Y$

t.q. 1) $F(x,t) = f(x)$ si $x \in X$

2) $F(x,0) = f(x)$

3) ~~$F(X \cup_e D^n)$~~

$F(\cdot\cdot,1)(X \cup_e D^n) \subset Y_{(n)}$

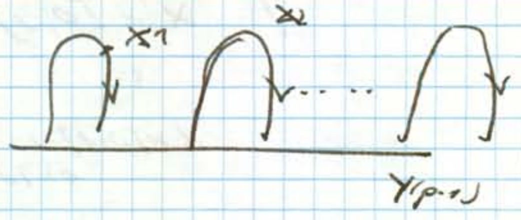
hypothèse additionel $f(X \cup_e D^n) \subset X(p)$ $p \geq n$

F qui verifi $\left\{ \begin{array}{l} 1) \; 2) \\ 3) \; F(\cdot\cdot\cdot,1)(X \cup_e D^n) \subseteq Y_{(p-1)} \end{array} \right.$

Γ implique 3

$Y(p) - Y(p-1) = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha^p$

$Y(p) - \bigcup_{\alpha} x_\alpha$



Γ avec hypoth. supplem.

soit $f : X \cup_e D^n \to Y(p)$

$X_{(p)} - X_{p-1} = \bigcup \mathring{D}_\alpha^p = \amalg \mathring{D}^{(p)}$

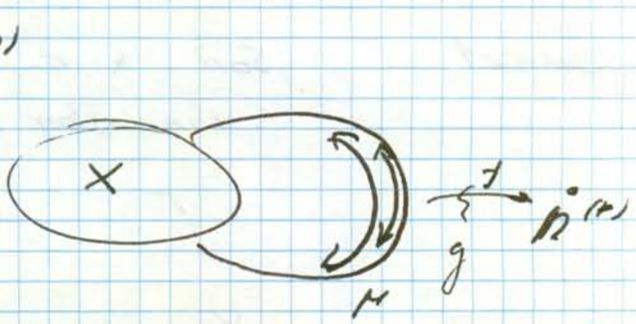
$\amalg D^p(1/3)$

$D^p(2/3)$

$\mathring{D}^{(p)} \supset \mathring{D}^p(\frac{2}{3}) \supset D^p(1/3)$

$M = f^{-1}(\mathring{D}^{(p)})$ $M' = f^{-1}(\mathring{D}^p \frac{2}{3})$

$M'' = f^{-1}(\mathring{D}^{(p)} \frac{1}{3})$



1) $f^{-1}(\overline{\mathring{D}^{(p)}(2/3)})$ $f^{-1}(\overline{\mathring{D}^{(p)}}(1/3))$

$\overset{\shortparallel}{\overline{M'}}$ $\overline{M''}$ sont compact

2) $f : M \to \mathring{D}^{(p)}$ $g / M \setminus M' = f$

$g : M \to \mathring{D}^{(p)}$ $g / M''$ dif.

3) $d(g(x), f(x)) < \frac{1}{30}$

$\longrightarrow g^{-1}(\mathring{D}^{(n)}(1/6)) \subset M''$

$\Longrightarrow \exists x_\alpha \in \mathring{D}_\alpha(1/6)$ t.q. $x_\alpha$ ~~$\in g^{-1}/M''$~~ $\notin g|_{M''}$

$\Longrightarrow x_\alpha \notin \operatorname{Im} g$

l'homotopie entre $f$ et $g$

$h_t(x) = t \cdot g(x) + (1-t) f(x)$

$F : (X \cup_\alpha D^n) \times [0,1] \longrightarrow Y$

$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & x \in X \cup_\alpha D^n \setminus M \\ h_t(x) & x \in M \end{cases}$

┘

**Théorème fondamental**

$K$ CW souscompl. de $X$

$f : X \to Y$ $\quad Y$ CW compl.

t.q. $f|_K$ est cellulaire

$\Longrightarrow \exists H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ t.q.

$H|_{X \times \{0\}} = f$

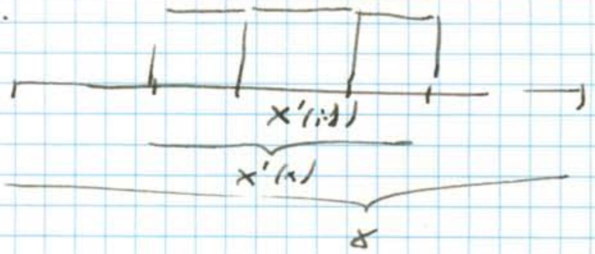
$H(x,t) = f(x) \quad x \in K$

$H(\cdot,1) : X \longrightarrow Y$ est cellulaire

┌

$$\begin{matrix} K & \subset & K \cup X_0 & \subset \dots & K \subset X_k & \subset \dots & \\ \| & & \| & & & & \\ X'(-1) & & X'(0) & \dots & X'(k) & \subset \dots & X \end{matrix}$$

par induct.



lemme 1'
proposition 3
construction
lemme 2

┘