§0 Hokus Pokus

Körpererweiterung $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ (angeordneter Oberkörper)
nichtarchimedisch

$\mathbb{R}$

'unendl. gross' $\mathbb{R}^*$

$U := \{x \in \mathbb{R}^* \mid |x| < r \ \forall r \in \mathbb{R}^+\}$ additive UG von $\mathbb{R}^*$
"Infinitesimale Elemente"

$|x-y| \le |x|+|y| < \frac{r}{2}+\frac{r}{2}$

$\mathbb{R}^*/U$ $x+U=[x]$ ist Intervall ⌜ $x<z<y$, $x-y\in U \Rightarrow z-x\in U$ ⌟

x unendl. gross $|x|>r \ \forall r\in\mathbb{R}$
x infinitesimal $x\in U$
x begrenzt $|x|<c \ \exists c\in\mathbb{R}$

x begrenzt $\Rightarrow \exists!\, r\in[x]\cap\mathbb{R}$

⌜ $0\in[0]\cap\mathbb{R}$
$r\in[0]\cap\mathbb{R} \Rightarrow |r|\le 0$ d.h. $[0]\cap\mathbb{R}=\{0\}$

$r,s\in[x]\cap\mathbb{R}$
$r-s\in U \Leftrightarrow r-s\in[0]\cap\mathbb{R} \Rightarrow r=s$

$|x|<c\in\mathbb{R}$
$M:=\{r\in\mathbb{R}\mid r\le x\}$ $-c\in M<c$
$\xi := \sup M \ (\in\mathbb{R})$
$r\le|\xi-x|$ (i) $x\le\xi-r \Rightarrow \xi\le\xi-r\Rightarrow r\le 0$
(ii) $\xi+r\le x \Rightarrow \xi+r\le\xi\Rightarrow r\le 0$ ⌟

$x \doteq y \;:\Leftrightarrow\; x-y\in U$ 'x ist fast gleich y'

x begrenzt x° = "Standardteil von x" $x^\circ\in\mathbb{R}$, $x^\circ\doteq x$

Def $x\in I\subseteq\mathbb{R}$ $f: I\to\mathbb{R}$
f stetig an x :⟺ $x\doteq x \Rightarrow f(y)\doteq f(x)\ \forall y\in I$

Def f stetig auf I : f stetig an jeder Standardstelle $x\in I$

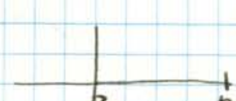
Def f glm stetig auf I : f stetig an jeder Stelle $x\in I$
($\forall x,y\in I$ $y\doteq x\Rightarrow f(y)\doteq f(x)$)

Satz $\boxed{I=[a,b] \quad a,b \text{ standard};\ f \text{ stetig auf } I \Rightarrow f \text{ glm stetig auf } I}$

⌜ $x,y\in I$ $x\doteq y$, x begrenzt, $\exists x^\circ$. $x^\circ\in I$ sonst $x^\circ<a\le x$, $a\doteq x\doteq x^\circ$ ↯
$x\doteq x^\circ\doteq y \Rightarrow f(x)\doteq f(x^\circ)\doteq f(y)$ ⌟

Satz $\boxed{a,b\in\mathbb{R} \quad f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ stetig. Dann besitzt } f \text{ ein Maximum}}$

⌜ genügt: a,b,f standard
$\Rightarrow f$ glm. stetig auf $[a,b]$



$h := \frac{b-a}{n}$ $x_k = a+kh$ $k=0\ldots n$
$f|\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ besitzt Maximum: x_M
wähle $n\in\mathbb{N}$ unendlich gross $x_M\doteq x_{M+1}$ $\xi := x_M^\circ$

Beh: $\forall$ standard $y \in [a,b]$ ist $f(y) \leq f(\xi)$
$[\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ ist $f(x) \leq f(\xi)]$

x standard, $x \in [a,b]$ $\exists k$ $x \doteq x_k$
$\underset{\text{standard}}{f(x)} \doteq f(x_k) \leq f(x_M) \doteq \underset{\text{standard}}{f(\xi)} \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$ ⌟

- Wie ist $\sin x$ für x nichtstandard ?
- Was ist $n \in \mathbb{N}$ n ∞ ? Induktion? $st(0)$, $st(n) - st(n+1)$
  aber $\exists n$ $\neg st(n)$
  d.h. $\{n \in \mathbb{N} \mid \neg st(n)\}$ ∓ hat kein kleinst. Element
  Lösung: Diese Menge darf nicht existieren

  Sogar U ist keine Menge
  sonst $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} \in U\}$

Gesucht Mass μ:
0. $\mu : P(\mathbb{Z}) \longrightarrow [0,1]$
1. $\mu(\mathbb{Z}) = 1$
2. $\mu(A \dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $A \cap B = \emptyset$
3. $\mu(A^+) = \mu(A)$ $A^+ = \{x+1 \mid x \in A\}$

Folgerung: μ endl. addit.
$\mu(A^{+k}) = \mu(A)$ $A^{+k} = \{x+k \mid x \in A\}$
$\mu(E) = 0$ E endlich
⌜ $\mu(E) = \varepsilon > 0$ $n \in \mathbb{N}$ $n \cdot \varepsilon > 1$
$m \in \mathbb{N}$ $E \cap E^{+m}$
$\mu(E \cup E^{+m} \cup E^{+2m} \cup \ldots E^{+nm}) = n \cdot \varepsilon > 1$ ⌟

Ansatz: $\mu_n(A) := \dfrac{\#(A \cap [-n, +n])}{2n+1}$ $\rightarrow$ 0. 1. 2.
3. falsch, aber
$|\mu_n(A^+) - \mu_n(A)| \leq \frac{1}{2n+1}$

Bemerk.: ① $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n(A)$ existiert nicht $\forall A$

② $\bar\mu(A) = \limsup\limits_{n} \mu_n(A)$: $\bar\mu$ nicht additiv

③ $F = \{A \subset \mathbb{Z} \mid A^c$ endl$\}$
U Ultrafilter von F
$\mu(A) := \begin{cases} 1 & A \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

③ Existenz eines Masses μ wird klassisch mit Zornschem Lemma bewiesen.

⌜ ② $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N}$ $3^{2k} < |m| < 3^{2k+1}\}$

$\mu_n(A) \leq \frac{1}{3}$ $n = 3^{2k}$

$\mu_n(A) \geq \frac{2}{3}$ $n = 3^{2k+1}$

$\bar\mu(A) \geq \frac{2}{3}$ $\bar\mu(\mathbb{Z} \setminus A) \geq \frac{2}{3}$ nicht additiv ⌟

n eine ∞ grosse nat. Zahl $(\mu_n(A))^\circ =: \mu(A)$
fest. n ist abhängig von d. Wahl von n

Geschichte:
- D. Laugwitz Pionier d. N-S-A
- Abraham Robinson Nonstandard Analysis 1966
- E. Nelson: Internal set theory AMS Bulletin Vol 83 1977
- A. Robert: Analyse non-stand. presse polytechn. romandes 1985

Z 1583
S 1165

§1 Mengenlehre

Zermelo Fränkel

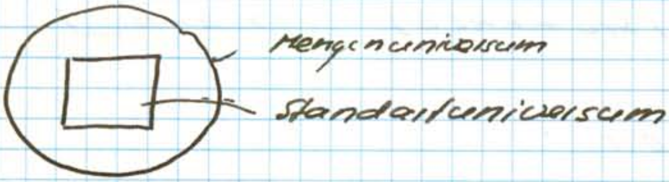
§2 Die Mengenlehre IST von Nelson

Spracherweiterung : Neues 1-stelliges Prädikat $st(\cdot)$
$st(x)$ " x ist standart "

[$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ von innen nach aussen — nun: $\mathbb{R}^{st} \subset \mathbb{R}$ von aussen nach innen]

Formeln ohne st : klassische Formeln
Formeln mit st : externe Formeln

Bsp Formel ' x ist standard ' ist extern : $st(x)$



Axiome :
- übliche Axiome für klassische Sprache
- (I), (S), (T) zusätzlich

[Bsp $\{x \mid x \in a \wedge \varphi(x)\}$ für klassische φ
$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge st\, x\}$ existiert nicht]

Abkürz : $\forall^{st} x\, \varphi(x) :\equiv \forall x\, (st(x) \to \varphi(x))$
$\exists^{st} x\, \varphi(x) :\equiv \exists x\, (st(x) \wedge \varphi(x))$
$\varphi(x, u_1, \dots) \equiv \varphi(x, \vec{u})$

Axiom (T)
(Transfer) $\varphi(x, u_1, u_2, \dots) \equiv \varphi(x, \vec{u})$ klassische Formel $\varphi(x,\vec{u})$

$$st(u_1) \wedge st(u_2) \wedge \dots \longrightarrow (\forall^{st} x\, \varphi(x, \vec{u}) \to \forall x\, \varphi(x, \vec{u}))$$

" Erfüllen alle Standardobjekte eine klassische Eigenschaft φ, so überhaupt alle Objekte "

Folgerungen
1. $st(\vec{u}) \to (\exists x\, \varphi(x, \vec{u}) \to \exists^{st} x\, \varphi(x, \vec{u}))$ (Kontraposition)
2. $st(\vec{u}) \to (\exists! x\, \varphi(x, \vec{u}) \to \forall x (\varphi(x, \vec{u}) \to st(x)))$

Γ x mit $\varphi(x)$ y mit $\varphi(y)$ $\wedge$ $st(y)$ wegen 1.
also $x = y$ also $st(x)$ $\lrcorner$

3. Alle in klass. Mengenlehre definierbare Mengen sind standard

Bsp $st(0), st(1), st(2^{1000}), st(\mathbb{N}), st(\mathbb{R}), st(\sin) \dots$

4. Alle in klass. Mengenlehre definierbare Operationen ordnen jedem Tupel von Standardmengen eine Standardmenge zu.

Bsp
$st(n) \to st(n+1)$
$st(x)$ $x \in \mathbb{R}$ $\to$ $st(\sin x)$
$st(\{x, y\}) \longleftrightarrow st(x) \wedge st(y)$

schreiben : φ^{st} : Alle Quantoren von φ auf st beschränkt :

$\varphi \equiv \psi \wedge \delta$
$\varphi^{st} := \psi^{st} \wedge \delta^{st}$

[φ quantorenfrei : $\varphi^{st} := \varphi$
$\varphi = \forall x\, \psi$ $\quad \varphi^{st} := \forall^{st} x\, \psi^{st}$
$\varphi = \exists x\, \psi$ $\quad \varphi^{st} := \exists^{st} x\, \psi^{st}$

Satz: $\boxed{\begin{array}{l}\varphi(x,\vec{u}) \text{ eine klassische Formel:} \\ st(\vec{u}) \to (\varphi(\vec{u}) \leftrightarrow \varphi^{st}(\vec{u}))\end{array}}$

⌈ Induktion nach Formelaufbau ⌋

" Standarduniversum ist elementare Substruktur des ganzen Universums "

Bsp: φ : "zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $\exists p > n$ p prim
$\Rightarrow$ zu jedem Standard $n \in \mathbb{N}$ exist grössere Stand p prim

Bsp: Haben zwei Standardmengen dies. Standardelem., so sind ~~s~~ sie gleich
$\ulcorner st(a) \quad st(b)$
$- \ \forall^{st} x \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$
$\Rightarrow \forall x \ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \quad \Rightarrow a = b \ \lrcorner$

möchten haben z.B.:

a) $\exists n \in \mathbb{N} \ \neg st(n)$
b) $n \in \mathbb{N} \wedge st(n) \wedge m < n \to st(m)$

Daraus würde folgen:

$\exists E$ endl. $\forall^{st} n \in \mathbb{N} \ n \in E$

denn: $\ulcorner \nu \in \mathbb{N} \ \neg st(\nu)$ (a)
$n \in \mathbb{N} \ st(n)$
$n < \nu$ (b)
$\forall^{st} n \in \mathbb{N} \ n \in \nu$ $\quad \nu$ endlich, da $\nu \in \mathbb{N} \ \lrcorner$

Es würde auch fast folgen:

$\exists E$ endl $\forall^{st} r \in \mathbb{R} \ r \in E$

denn: $\ulcorner \ \nu \in \mathbb{N} \ \neg st(\nu)$
$f: P(\mathbb{N}) \to P(\nu)$
$X \mapsto X \cap \nu$

"inj" auf Stand.: $X, Y \subseteq \mathbb{N} \ X \neq Y \ st X, st Y \quad X \setminus Y \neq \emptyset$ z.B.
$\exists^{st} n \in (X \setminus Y) \to f(X) \neq f(Y) \ \lrcorner$

Es wäre sogar plausibel:

$\exists E$ endl. ~~$\forall$~~ E enthält alle Standardmengen enth.

Das Axiom, dass alle obigen Wünsche erfüllt:

I $\boxed{\begin{array}{l}\text{\underline{Idealisierung}} \quad \varphi(x,y,\vec{u}) \text{ klassisch} \\ \forall \vec{u} \ [\forall^{st \, fin} z \ \exists x \ \forall y \in z \ \varphi(x,y,\vec{u}) \leftrightarrow \exists x \ \forall y^{st} \varphi(x,y,\vec{u})\end{array}}$

Bsp $\varphi(x,y)$ $\quad x$ prim $\wedge x > y$
$\Rightarrow$ Es existieren Primzahlen die grösser sind als jede Standardzahl

zwei Hauptfolgerungen:

1) $\varphi(x,y)$: $fin(x) \wedge y \in x$

$\forall^{st\,fin}_z \exists x \forall y \in z \; fin(x) \wedge y \in x$ wähle $x = z$

$\underset{I}{\Rightarrow} \exists x \forall^{st} y \; fin(x) \wedge y \in x$

Satz I_1 $\boxed{\text{Es gibt eine endliche Menge, die alle Standardmengen als Elemente enthält}}$

2) Kontraposition von I

$\exists^{st\,fin}_z [\forall x \exists y \in z \; \varphi(x,y,u)] \Leftrightarrow \forall x \exists^{st}_y \varphi(x,y,u)$

$\varphi(x,u)$: $x \in u \rightarrow x = y$

$\exists^{st\,fin}_z \; \underbrace{\forall x \in u \; \exists y \in z \; x = y}_{u \subset z}$

$\forall x \exists^{st} y \; x \in u \rightarrow x = y$ d.h. $\forall x \in u \; st(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{u besitzt nur standard elemente gdw. u Teilmenge eines st. endl. Menge ist}}$ $*$

Satz I_2 $\boxed{\text{u besitzt nur standard Elemente gdw u ist standard und endlich}}$

$\ulcorner \Leftarrow *$

$\Rightarrow$ u besitzt nur stand. Elemente

$*$: $u \subset z$ z st fin

$\rightarrow P(z)$ standard fin

$\Rightarrow st\, u$ (aus Richt $\Leftarrow$)

$u \subset z \Rightarrow u$ endl. $\lrcorner$

Bem : $\boxed{E \text{ endl. } x \in E \; \forall st(x) \Rightarrow \neg st\, E}$ (sonst $E \in E$) ↯ zu Fund.axiom

Folgerungen

1. jede unendl. Menge enthält nicht-st Elemente
2. $n \in \mathbb{N}$ $st(n)$ $m < n \rightarrow st(m)$

   $\ulcorner$ st fin(n) $m \in n \rightarrow st(m)$ $\lrcorner$
3. jede Menge A besitzt endl. Teilmenge B, die alle Standard-Elemente v. A enthält

   $\ulcorner$ $B := E \cap A$ $\lrcorner$
4. Es gibt sowohl infinitesimale $\neq 0$ als auch unbegrenzte reelle Zahlen

   $\underline{inf(x)}$: $|x| < y \quad \forall^{st} y \in \mathbb{R}^+$

   $\underline{unbeg(x)}$: $y < |x| \quad \forall^{st} y \in \mathbb{R}$

$\ulcorner$ E endl. $E \subset \mathbb{R}^+$ enthalte alle st-pos. reellen Zahlen

$E \neq \emptyset$

$m := \min E$

$M := \max E$ $\lrcorner$

$0 < m \leq M \in \mathbb{R}$

wählen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < m$ $\quad M < y$

x ist infinit. y unbegr. $\lrcorner$

5. Gilt eine klassische Eigenschaft für beliebig grosse Standard reelle bzw. (-nat. Zahl.) Zahlen, so gilt sie auch für einige bel. grosse unbegrenzte reelle (nat.) Zahlen.

$\ulcorner \quad \forall^{st} x \in \mathbb{R} \; \exists^{st} y \in \mathbb{R} \; (x < y \wedge \varphi(y))$

$* \xrightarrow{T} \forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y \wedge \varphi(y)$

$* \quad \forall x^{st} [\exists y^{st} \in \mathbb{R} \; (x < y \wedge \varphi(y))]$
$\forall x^{st} \underbrace{[\exists y \in \mathbb{R} \; (x < y \wedge \varphi(y))]}_{\text{klassisch}}$

wählen $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad x$ unbegrenzt
" $y > x$ mit $\varphi(y)$ $\quad y$ auch unbegrenzt $\lrcorner$

(S) $\quad$ $\varphi(x, \vec{u})$ beliebig
$\boxed{\forall \vec{u} \, [\; \forall^{st} a \; \exists^{st} b \; \forall^{st} x \, (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, \vec{u}))\,]}$

Sagt nichts aus über nichtstand. Elemente v. b!

1. Eindeutigkeit von b

$st(a) \quad \forall^{st} x \, (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$
$\quad\quad\;\; \forall^{st} x \, (x \in \bar{b} \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$

$\longrightarrow \forall^{st} x \quad x \in b \leftrightarrow x \in \bar{b} \qquad st(b), st(\bar{b})$

$\xrightarrow{T} b = \bar{b}$

Bezeichnung: $\quad b = {}^{S}\{x \in a \mid \varphi(x, \vec{u})\}$

$st(a)$, φ beliebig. Formel
$\forall^{st} x \; [x \in {}^{S}\{x \in a \mid \varphi(x, \vec{u})\} \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, \vec{u})]$

Bsp $\quad$ ① $\quad {}^{S}\{n \in \mathbb{N} \mid st(n)\} = \mathbb{N}$

${}^{S}\{n \in \mathbb{N} \mid \neg st(n)\} = \emptyset$

Beisp. die nichts liefern

$\inf x : \; x \in \mathbb{R} \wedge \forall^{st} \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; (|x| < \varepsilon)$

${}^{S}\{x \in \mathbb{R} \mid \inf(x)\} = \{0\}$

x begr: $\quad \exists^{st} c \in \mathbb{R} \quad |x| < c$

$x \doteq y : \quad \inf(|x - y|)$

${}^{S}\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \doteq y \wedge st\, y\} = Id_{\mathbb{R}}$

Satz

Zu jedem begr. reellen Zahl x gibt es genau eine st reelle Zahl x° mit $x^\circ \doteq x$

$\forall^{begr} x \in \mathbb{R} \quad \exists!^{st} x^\circ \quad x^\circ \doteq x$

$f := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^\circ\}$ $\qquad$ nicht def.

⌐ "!" $\text{inf}(x) \wedge st(x) \Rightarrow x = 0$ sonst $|x| > 0$, $|x|$ stand, $|x| < |x|$ ↯

$\doteq$ ist Äquiv relation $x \doteq y \wedge y \doteq z \Rightarrow x \doteq z$
da $(|z-x| \leq |z-y| + |y-x|)$

$x \doteq y_1 \wedge x \doteq y_2 \wedge st(y_1) \wedge st(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$
$($ da $\text{inf}(y_1 - y_2) \Rightarrow \neg st(y_1 - y_2)$
$\Rightarrow y_1 - y_2 = 0$ $)$

"∃" $M = {}^S\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}$ $|x| \leq c$ $st(c)$
$-c \leq -|x| \leq x \wedge st(-c) \Rightarrow -c \in M \neq \emptyset$

$y \in M \wedge st(y) \Rightarrow y \leq x \leq c$

d.h. $\forall^{st} y \in M \; y \leq c \underset{\substack{M, c, \ldots \mathbb{R},\\ \text{standard}}}{\overset{T}{\Rightarrow}} \forall y \in M \; y \leq c$

$x^0 := \sup M$ $st(x^0)$, da $st(M) \Rightarrow st(\sup M)$

$x^0 \doteq x$ $\not$
d.h. $0 < \varepsilon \leq |x - x^0|$
$\Rightarrow \neg st\, \varepsilon$ $\not$

1. Fall $x^0 < x$
$0 < \varepsilon \leq x - x^0$
$x_0 < x_0 + \varepsilon \leq x$
$\neg st\; x_0 + \varepsilon$ da $st(x_0 + \varepsilon) \Rightarrow st(x_0)$
$x_0 + \varepsilon \in M \Rightarrow x^0 + \varepsilon \leq x^0$ ↯
$\neg st\, \varepsilon$

2. Fall $x < x^0$
$0 < \varepsilon \leq x^0 - x$
$x \leq x^0 - \varepsilon$
$\neg st\; x_0 - \varepsilon$ da $st(x_0 - \varepsilon)$
$\Rightarrow \forall^{st} y \in M \; y \leq x^0 - \varepsilon$
$\overset{T}{\Rightarrow} \forall y \in M \; y \leq x^0 - \varepsilon$
$\Rightarrow \sup M = x^0 \leq x^0 - \varepsilon$ ↯
$\neg st\, \varepsilon$
⌟

Satz $\boxed{\begin{array}{l} I \subset \mathbb{R} \quad st(I) \quad f: I \to \mathbb{R} \quad st(f) \\ \Rightarrow \big(f \text{ stetig auf } I \Leftrightarrow \underbrace{\forall^{st} x \in I \; \forall y \in I \;\; x \doteq y \Rightarrow f(x) \doteq f(y)}_{*} \big) \end{array}}$

⌐ "⇐" $*$ gelte
genügt: $\forall^{st} x \in I$ f stetig an x
Sei $x \in I$ $st(x)$
genügt: $\forall^{st} \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ $st(\varepsilon)$ wähle $\delta > 0$ $\text{inf}(\delta)$
$y \in I$ mit $|x - y| < \delta \Rightarrow x \doteq y$
$\overset{*}{\Rightarrow} f(x) \doteq f(y) \underset{st\, \varepsilon}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

"⇒" f stetig auf I
Sei $x \in I$ $st(x)$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$\forall^{st} \varepsilon > 0 \quad \ldots$
$\forall^{st} \varepsilon > 0 \; \exists^{st} \delta > 0 \quad \ldots$ (T)
Sei $y \in I$ $y \doteq x$ dann $\forall^{st} \varepsilon > 0 \; |f(y) - f(x)| < \varepsilon$
d.h. $f(y) \doteq f(x)$
⌟

Satz $\boxed{\begin{array}{l} f: I \to \mathbb{R} \quad st(f) \quad st(I) \\ \Rightarrow \big(f \text{ glm. stetig auf } I \Leftrightarrow \underbrace{\forall x, y \in I \; (x \doteq y \Rightarrow f(x) \doteq f(y))}_{\times} \big) \end{array}}$

Γ "$\Rightarrow$" sei f glm stetig auf I

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

(T) $\forall^{st} \varepsilon > 0\ \exists^{st} \delta > 0\ \forall x,y\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

sei nun $x \doteq y$ nach obig gilt dann

$\forall^{st} \varepsilon > 0\ \forall x,y\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$f(x) \doteq f(y)$

"$\Leftarrow$" $\forall x,y\ \ x \doteq y \Rightarrow f(x) \doteq f(y)$

genügt $\forall^{st} \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in I\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

wähle $\delta > 0$ infinit.

dann $x \doteq y$ also auch $f(x) \doteq f(y)$

$\rightarrow \forall^{st} \varepsilon > 0\ \forall x,y\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\lrcorner$

Satz $M \subseteq \mathbb{R}$ M standard

M kompakt $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$ x begr. $\wedge\ x^\circ \in M$

Γ "$\Rightarrow$" M kompakt

$\exists c\ \forall x \in M\ |x| \le c$

$\exists^{st} c\ \forall x \in M\ |x| \le c$ da M stand (T)

x begr.

$x^\circ \in M = \overline{M}$

$\forall^{st} \varepsilon > 0\ \ |x - x^\circ| < \varepsilon \wedge x \in M$ — T nicht anwendbar da x nicht standard möglich

$\forall^{st} \varepsilon > 0\ \exists y\ |y - x^\circ| < \varepsilon \wedge y \in M$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists y\ |y - x^\circ| < \varepsilon \wedge y \in M$ (T)

d.h. x_0 HP von $M \Rightarrow x_0 \in M$

"$\Leftarrow$" M beschr.

$\forall x \in M\ \exists^{st} c\ |x| \le c$

Sei E endl. $\forall^{st} x \in \mathbb{R}\ x \in E$ — Existiert wegen (I)

$\forall x \in M\ \ |x| \le \max E$

d.h. $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ |x| \le c$ — M beschränkt

$(\exists^{st} c \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ |x| \le c)$

M abgeschl.

$y \in \mathbb{R}$ $st(y)$ mit $\forall \varepsilon > 0\ \ U_\varepsilon(y) \cap M \neq \emptyset$

(y standard häufPunkt)

wähle $\varepsilon > 0$ inf, wähle $x \in U_\varepsilon(y) \cap M$

$\Rightarrow x^\circ \in M \ \wedge\ y \doteq x \doteq x^\circ \ \wedge st(y) \Rightarrow y = x^\circ \in M$

d.h. $\forall^{st} y\ \ HP(y,M) \rightarrow y \in M$

$\forall y\ \ HP(y,M) \rightarrow y \in M$ (T)

$M = \overline{M}$ $\lrcorner$

Anwendung:

$I \subset \mathbb{R}$ kompakt $f: I \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ f besitzt Maximum

Γ $st(f), st(I)$ genügt

E endl. mit $\forall^{st} x \in I\ x \in E$ $(E \subset I)$

$a \in E$ mit $\forall x \in E\ f(x) \le f(a)$

$\forall^{st} x \in I\ \ f(x) \le f(a)$ — T nicht anwendbar, da a nicht notw. stand

Hingegen: I komp $\Rightarrow a^\circ \in I$

f stetig $\Rightarrow f(a) \doteq f(a^\circ)$

f stand, $st(a^\circ), st(x) \Rightarrow f(a^\circ), f(x)$ standard

$f(x) \le f(a) \doteq f(a^\circ) \wedge st(f(x)) \wedge st(f(a^\circ))$

$\Rightarrow f(x) \le f(a^\circ)$

$\forall^{st} x \in I \quad f(x) \le f(a^0)$
$\forall x \in I \quad f(x) \le f(a^0)$
$\exists b \in I \ \forall x \in I \ f(x) \le f(b)$ nämlich a_0 $\lrcorner$

Prop

φ klassisch, aber beliebige Parameter
$\forall^{st} n \in \mathbb{N} \ \varphi(n) \rightarrow \exists^{\neg st} n \in \mathbb{N} \ \varphi(n)$

kontrapos. $\forall^{\neg st} n \ \varphi(n) \rightarrow \exists^{st}_n \varphi(n)$

Bsp:

$\varphi(n): n < r \quad r \ \neg st$ Zahl
$\forall^{st} n \ \varphi(n) \quad \exists^{\neg st}_n \ n < r \qquad$ (z.B. $n = r-1$)

Bsp:

$\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Zahlenfolge $a \in \mathbb{R}$
α, a nicht notwend. standard

Vor: $\forall^{st} n \ (|\alpha_n - \alpha| < \frac{1}{n})$

Beh: $\exists^{\neg st} n \ (|\alpha_n - a| < \frac{1}{n})$ Nach Propos.

Bem $\alpha_n := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n < r \\ 1 & n \ge r \end{cases}$ r geg. $\neg st$-Zahl

$\forall^{st}_n \ |\alpha_n - 0| < \frac{1}{n}$ aber $\lim \alpha_n = 1$

Bew. d. Prop: $b = \{ n \in \mathbb{N} \mid \neg \varphi(n) \}$

$b = \emptyset$: fertig $\exists^{\neg st} n \in \mathbb{N}$
$b \neq \emptyset$: sei n_0 kleinstes Elem. von b
$\Rightarrow \neg st \ n_0$ da $\forall^{st} n \ \varphi(n)$
$\Rightarrow \neg st (n_0 - 1)$, $n_0 - 1 \notin b$
$\varphi(n_0 - 1)$

Verallgemeinerung der Proposition:

$\boxed{\neg st \text{ Lemma}}$:

A ~~unendliche~~ beliebig st-Menge
φ klassische ~~Menge~~ Formel
(mit mögl. weise $\neg st$ Parametern)
Vor $\forall^{st} x \in A \ \varphi(x)$
Beh $\exists^{\neg st} x \in A \ \varphi(x)$

Bew $\ulcorner B := {}^{st}\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$
Annahme $\forall x \in B \ st(x) \overset{I_2}{\Longrightarrow} B$ endlich u. standard
$\Longrightarrow A \setminus B \neq \emptyset \wedge st(A \setminus B)$
$\exists x \ x \in A \setminus B \Longrightarrow \exists^{st} x \ x \in A \setminus B \qquad$ ↯ $\lrcorner$

Lemma über die implizite Defin. von st-Funktionen

Gegeben: st-Mengen a, b
beliebige Formel $(\varphi(x, y))$
(mit belieb. weiteren Parametern)

Vor: $\forall^{st} x \in a \ \exists^{st} y \in b \ \varphi(x, y)$

Beh: $\exists^{st} f: a \to b \ \forall^{st} x \in a \ \varphi(x, f(x))$

mildere Version: Vor': $\forall^{st} x \in a \ \exists !^{st} y \in b \ \varphi(x, y)$
Beh wie vorhin

Filter, Ultrafilter ...

<u>Def</u> ~~Bgf einest~~ $\mathcal{F}$ nicht trivialen Ultrafilters auf $\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1.\ \mathbb{N} \in \mathcal{F} \quad \emptyset \notin \mathcal{F} \\ 2.\ x \in \mathcal{F} \quad y \supseteq x \Rightarrow y \in \mathcal{F} \\ 3.\ x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cap y \in \mathcal{F}\end{array}\right\} \text{Filter} \\ 4.\ x \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathcal{F} \vee \mathbb{N} - x \in \mathcal{F} \\ 5.\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \{n\} \notin \mathcal{F}\end{array}\right\} \text{Ultrafilter}$$

$\mathbb{N} - \{n\} \in \mathcal{F} \quad \forall n$
$\mathbb{N} - \{n_1, n_2\} \in \mathcal{F}$
coendl. Mengen

<u>Rem</u> Die Existenz eines nichttriv. Ultrafilters ist nicht trivial (Zorn)

Boolsche Algebra : $(B; \cap, \cup, ^-, 0, 1)$

Filter $\mathcal{F}$ in B

1) $0 \notin F \quad 1 \in F$
2) $x \in F \quad x \leq y \Rightarrow y \in F$
3) $x, y \in F \Rightarrow x \cap y \in F$
4) $x \in F$ oder $\bar{x} \in F$

$x \leq y :\ x \cup y = y$
$ x \cap y = x$

<u>Satz</u> In jeder Boolschen Algebra gibt es einen Ultrafilter

<u>Kor</u> Es gibt einen nichttriv. Ultrafilter auf $\mathbb{N}$

$\ulcorner$ $B = P(\mathbb{N})/_\sim \qquad x \sim y :\Leftrightarrow (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ endlich

$\sim$ verträglich mit $\cap, \cup, ^-$ $\qquad x \triangle y$

$x \sim y \Rightarrow x \cup z \sim y \cup z$
$x \sim y \Rightarrow x \cap z \sim y \cap z$
$x \sim y \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{y}$

$\pi : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})/_\sim$
~~$\pi : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})/_\sim$~~
~~$\pi : P(\mathbb{N})/_\sim \to \mathbb{N}$~~

$\boxed{A, B \in \pi^{-1}(F) \Rightarrow A \cap B \in \pi^{-1}(F)}$

$\pi(A) \in F$
$\pi(B) \in F \quad \pi(A) \cap \pi(B) \in F$

ist F ein Ultrafilter in B, so ist $\pi^{-1}(F)$ ein nicht trivialer U.F auf $\mathbb{N}$

(Die endlichen Mengen werden auf 0 abgebildet) $\lrcorner$

<u>Bew. Satz</u> : $\ulcorner$ B sei eine standard B.A.

$E \subset B \quad E$ endl. $\quad$ existiert, sodass

$\forall^{st} x \quad x \in B \Rightarrow x \in E$

E erzeugt eine endliche Subalgebra B' $\quad E \subseteq B' \subseteq B$

x_0 ein Atom von B' d.h

1) $0 < x_0$
2) $\forall y (y < x_0 \Rightarrow y = 0)$

x_0 exist.
$1 \in B'$
$0 < 1$

Im Prinzip :
jeder Filter
Hauptultrafilter
(womöglich
durch nichtstandard
element x_0 erzeugt)

i.A. $\neg st\ (x_0)$

In einer endlichen B.A. gibt es nur Hauptultrafilter und alle werden von Atomen erzeugt.

$F := {}^{S}\{x \in B \mid x_0 \leq x\}$

<u>Beh.</u> F ist ein Ultrafilter auf B und $st(F)$

$F \subseteq B$ (Transfer)

1) $0 \notin F$: $st(0) \quad x_0 \neq 0$
 $1 \in F$: $st(1) \quad x_0 \leq 1$
2) x, y standard $\quad x \in F \quad y \in B \quad x \leq y$
$\Rightarrow x_0 \leq x \leq y \quad y \in F$
3) x, y stand $\quad x, y \in F \quad x_0 \leq x \quad x_0 \leq y \Rightarrow x_0 \leq x \cap y$

4) $x \in B$ st $x \quad x \in E \subseteq B'$
$x \cap x_0 \in B'$
d.h $x_0 \cap x = x_0$ oder $x \cap x_0 = 0$
d.h $x_0 \leq x$ oder $x_0 \leq \bar{x}$
$\Rightarrow x \in F$ oder $\bar{x} \in F$

$\lrcorner$

$\forall^{st} x \in I \quad f(x) \leq f(a^0)$
$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a^0)$
$\exists b \in I \quad \forall x \in I \; f(x) \leq f(b)$ nämlich a_0 $\lrcorner$

Prop $\boxed{\begin{array}{l} \varphi \text{ klassisch, aber beliebige Parameter} \\ \forall^{st} n \in \mathbb{N} \; \varphi(n) \longrightarrow \exists^{\neg st} n \in \mathbb{N} \; \varphi(n) \\ \text{kontrapos.} \quad \forall^{\neg st} n \; \varphi(n) \to \exists^{st}_n \varphi(n) \end{array}}$

Bsp: $\varphi(n): \; n < \nu \qquad \nu \; \neg st$ Zahl
$\forall^{st} n \; \varphi(n) \quad \exists^{\neg st}_n \; n < \nu \qquad (z.B. \; n = \nu - 1)$

Bsp: $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Zahlenfolge $a \in \mathbb{R}$
α, a nicht notwend. standard

Vor: $\forall^{st}_n \left(|\alpha_n - a| < \frac{1}{n} \right)$

Beh: $\exists^{\neg st}_n \left(|\alpha_n - a| < \frac{1}{n} \right)$ Nach Propos.

Bem $\alpha_n := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n < \nu \\ 1 & n \geq \nu \end{cases}$ $\quad \nu$ geg. $\neg st$-Zahl

$\forall^{st}_n \; |\alpha_n - 0| < \frac{1}{n}$ aber $\lim \alpha_n = 1$

Bew. d. Prop: $b = \{ n \in \mathbb{N} \mid \neg \varphi(n) \}$

$b = \emptyset$: fertig $\exists^{\neg st} n \in \mathbb{N}$
$b \neq \emptyset$: sei n_0 kleinstes Elem. von b
$\Rightarrow \neg st \; n_0$ da $\forall^{st} n \; \varphi(n)$
$\Rightarrow \neg st (n_0 - 1)$, $n_0 - 1 \notin b$
$\varphi(n_0 - 1)$

Verallgemeinerung der Proposition:

$\boxed{\neg st \text{ Lemma}}$: $\boxed{\begin{array}{l} A \text{ ~~unendliche~~ (beliebig) } st\text{-Menge} \\ \varphi \text{ klassische ~~Menge~~ Formel} \\ \text{(mit mögl. weise } \neg st \text{ Parametern)} \\ \text{Vor} \quad \forall^{st} x \in A \; \varphi(x) \\ \text{Beh} \quad \exists^{\neg st} x \in A \; \varphi(x) \end{array}}$

Bew $\ulcorner B := {}^{st}\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$
Annahme $\forall x \in B \; st(x) \xrightarrow{I_2} B$ endlich u. standard
$\Longrightarrow A \setminus B \neq \emptyset \; \wedge \; st(A \setminus B)$
$\exists x \; x \in A \setminus B \Longrightarrow \exists^{st} x \; x \in A \setminus B$ $\lightning \lrcorner$

$\boxed{\text{Lemma über die implizite Defin. von } st\text{-Funktionen}}$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{Gegeben: } st\text{-Mengen } a, b \\ \quad \text{beliebige Formel } (\varphi(x,y)) \\ \quad \text{(mit belieb. weiteren Parametern)} \\ \text{Vor}: \; \forall^{st}_x \in a \; \exists^{st}_y \in b \; \varphi(x,y) \\ \text{Beh}: \; \exists^{st} f: a \to b \;\; \forall^{st}_x \in a \; \varphi(x, f(x)) \end{array}}$

mildere Version: Vor$^+$: $\forall^{st}_x \in a \; \exists!^{st}_y \in b \; \varphi(x,y)$
Beh wie vorhin

Bew mild. Version

$\ulcorner f := {}^S\{(x,y) \in \underset{st}{a \times b} \mid \varphi(x,y)\}$ $\Rightarrow$ f standard $\wedge\ \forall^{st}_{x,y}\ (x,y) \in f \to (x,y) \in a \times b$

Transfer : $f \subset a \times b$

$\forall^{st} x \in a\ \exists!^{st} y \in b\ (x,y) \in f$ (wegen vor *)

(T) $\forall x \in a\ \exists! y \in b\ (x,y) \in f$ also $f : a \to b$

$\forall^{st} x \in a : f(x)$ ist st. $(x, f(x)) \in f \Rightarrow \varphi(x, f(x))\ \lrcorner$

Bsp 1 : Translat inv. Mass

$\mu : P(\mathbb{Z}) \to [0,1]$

$\mu(x) := \left[\# \dfrac{(X \cap [-n,+n]^{\mathbb{Z}})}{2n+1}\right]^\circ$

Fixiere $\neg$ st Zahl n

Existiert Funktion μ ?

Ja!

$\forall^{st} x \in P(\mathbb{Z})\ \exists!^{st} r \in [0,1]\ (r = [\ldots]^\circ)$

lemma :

$\exists^{st} \mu : P(\mathbb{Z}) \to [0,1]\ \ \forall^{st} x \in \mathbb{Z}\ (\mu(x) = [\ \ ]^\circ)$

Bsp 2 : Integration $[a,b] \in \mathbb{R}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f beschr.

$h > 0$

$\left| \sum_{a \le j \cdot h < b} f(j \cdot h) \cdot h \right| \le c\,(b - a + h)$

wählen h infinitesimal

$\int_a^b f(x)\,dx := \left[\sum_{a \le jh < b} f(jh) \cdot h\right]^\circ$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rat} \\ 1 & x \text{ irrat.} \end{cases}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & h \text{ rational} \\ 1 & h \text{ irrational} \end{cases}$

f stetig $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ unabh. von Wahl von h (später)

a, b, h fix

$\mathcal{F} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$ st$(\mathcal{F})$

$\forall^{st} f \in \mathcal{F}\ \exists^{st} I \in \mathbb{R}\ \left(I = \int_a^b f(x)\,dx\right)$

mit lemma: $\exists^{st} I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$\forall^{st} f \in \mathcal{F}\ \ I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

Bew d. starken Version:

Cor: $\forall x^{st} \in a\ \exists y^{st} \in b\ \varphi(x,y)$

$F := {}^{S}\{(x,Y) \in a \times P(b) \mid Y = {}^{S}\{y \in b \mid \varphi(x,y)\}\}$

$\Rightarrow st(F) \quad F : a \to P(b)$

$\forall^{st} x \in a \quad F(x) \neq \emptyset \wedge \forall^{st} y \in F(x)\ (\varphi(x,y))$

(T) $\forall x \in a \quad F(x) \neq \emptyset$

Auswahlaxiom: $\exists f : a \to b\ \forall x \in a\ f(x) \in F(x)$

$(T) \Longrightarrow \exists^{st} f\ a \to b\ \forall x \in a\ f(x) \in F(x)$

$st(x)\ x \in a : st(f(x)),\ \varphi(x, f(x))$

somit: $\exists^{st} f : a \to b\ \forall^{st} x \in a\ \varphi(x, f(x))$ ⌟

Metrischer Raum (M,d) standard

$x,y \in M \quad x \doteq y :\Longleftrightarrow d(x,y) \doteq 0$

zu $x \in M$ ex. höchst ein st $y \in M$ $y \doteq x$

$st(y), st(y')$ $y \doteq x$ $y' \doteq x$ $d(y,y') \leq \underbrace{d(y,x) + d(x,y')}_{\doteq 0}$

Da mit y, y' auch $d(y,y')$ standard $\Rightarrow d(y,y') = 0$

$M = \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

d gewöhnlich

$\frac{1}{\gamma} \doteq x \quad \forall^{st} x$

(M,d) vollst + begrenzt:

$\exists^{st} c \in \mathbb{R}_+ \exists^{st} y \in M\ d(x,y) < c \quad \overset{?}{\doteq} \quad \exists^{st} y\ y \doteq x$

Bsp $M\ \infty,\ d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ vollständig begrenzt $\forall x$

nicht jedes $\overset{\text{begr}}{\text{Element}}$ ist unendl. nahe einem ~~bei~~ standard Element

Satz

(M,d) stand metr. Raum $\alpha : \mathbb{N} \to M$ st. Folge

$a \in M$ st-Element

$(x,y,\ldots \in M)$ $(m,n,\ldots) \in \mathbb{N}$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

1. $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = a \Longleftrightarrow \forall^{\neg st} n\ \ \alpha_n \doteq a$
2. α Cauchyfolge $\Longleftrightarrow \forall^{\neg st} n,m\ \ \alpha_n \doteq \alpha_m$
3. a ist HP von $\alpha \Longleftrightarrow \exists^{\neg st} n\ \ \alpha_n \doteq a$
5. (M,d) kompakt $\Longleftrightarrow \forall x\ \exists y^{st}\ x \doteq y$
4. (M,d) vollständig $\Longleftrightarrow \forall x\ [\forall^{st}_{\varepsilon} \exists^{st}_{y}\ d(x,y) < \varepsilon \longrightarrow \exists^{st}_{y} \underbrace{\forall^{st}_{\varepsilon}\ d(x,y) < \varepsilon}_{x \doteq y}]$

*

1) a) $\lim \alpha_n = a$

$\forall \varepsilon\ \exists m\ \forall n > m\ \ d(\alpha_n, a) < \varepsilon$

$\forall^{st}\varepsilon\ \exists^{st} m\ \forall^{st} n\ \ d(\alpha_n, a) < \varepsilon$

$\forall^{\neg st} n\ \ \underbrace{\forall \varepsilon^{st}\ d(\alpha_n, a) < \varepsilon}_{\alpha_n \doteq a}$

b) $\forall^{\neg st} n\ \ \alpha_n \doteq a$

$st(\varepsilon)$ wähle m $\neg st(m)$

$\forall n > m\ \ \alpha_n \doteq a\ \ d(\alpha_n, a) < \varepsilon$

$\forall st(\varepsilon)\ \exists m\ \forall n > m$ ~~$\alpha_n \doteq$~~ $d(\alpha_n, a) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon\ \exists m\ \forall n > m\ \ d(\alpha_n, a) < \varepsilon$

3) wie 1)

2) wie 1)

4) a) (M, d) vollst

Sei $x \in M$

gelte $\forall^{st}\varepsilon\ \exists^{st} y\ \ d(x,y) < \varepsilon$

$\forall^{st} m\ \exists^{st} y\ \ d(x,y) < \frac{1}{m}$

lemma über impliz. Funkt Starke Vers.

$\exists^{st}\alpha : \mathbb{N} \to M\ \ \forall^{st}_n\ \ d(x, \alpha_n) < \frac{1}{n}$

Daraus folgen (i), (ii)

(i) $\exists^{\neg st}_{n_0} n\ \ d(x, \alpha_{n_0}) < \frac{1}{n_0}$ ($\neg st$ lemma)

insbesondere $x \doteq \alpha_{n_0}$

(ii) α ist Cauchy Folge

$d(\alpha_m, \alpha_n) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\ \ \ \forall^{st} m, n$

(T) $\forall m, n\ \ d(\alpha_m, \alpha_n) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

(2) d.h. $(\forall^{\neg st}_{m,n}\ \ \alpha_m \doteq \alpha_n)$

da vollständig $\exists^{st} a\ \ a = \lim \alpha_n$ da α st Folge

$\Rightarrow x \doteq \alpha_{n_0} \doteq a$

d.h. $\exists^{st} y\ \ x \doteq y$

b) Es gelte $(*)$

Sei α eine standard C.F.

Wähle $x := \alpha_{n_0}$ n_0 $\neg st$

$\forall^{\neg st} m\ \ \alpha_m \doteq \alpha_{n_0}$

~~$\exists^{st} m\ \ \alpha_m \doteq \alpha_{n_0}$ $\neg st$ lemma~~

$st(\varepsilon)$ $\forall^{\neg st} m\ \ d(\alpha_m, x) < \varepsilon$

$\exists st$ lemma : $\exists^{st} m\ \ d(\alpha_m, x) < \varepsilon$

~~$\Rightarrow \exists^{st} m\ \ \alpha_m \doteq \alpha_{n_0}$~~

d.h. $\forall \varepsilon\ \exists^{st} m\ \ d(\alpha_m, x) < \varepsilon$

vor $\rightarrow$ $\exists^{st} m\ \forall \varepsilon\ \ d(\alpha_m, x) < \varepsilon$

$\exists^{st} m\ \ \alpha_m \doteq x$

$\exists^{st} y\ \ \underset{\alpha_{n_0}}{x} \doteq \underset{\alpha_m}{y}$

Aus $(*)$: $\exists^{st} a\ \ x \doteq a$

Behauptung : $\lim \alpha_n = a$

wähle $\neg st\ n$ $\ \ \alpha_n \overset{CF}{\doteq} \alpha_{n_0} = x \doteq a$

gezeigt : $\forall^{st}\alpha\ \ \underbrace{\alpha\ CF \rightarrow \alpha \text{ konverg.}}_{\text{äquiv zu klass. Aussage}}$

$\forall^{st}\alpha\ \ \alpha\ CF \rightarrow \alpha$ konv

5) a) Sei (M,d) kompakt

können M durch endlich viele ε-Kugeln überdecken

$\forall \varepsilon \exists^{fin} \Omega \quad \forall x \exists y \in \Omega \quad d(x,y) < \varepsilon$

(T) $\forall^{st} \varepsilon \exists^{st fin} \Omega \quad \forall x \exists y \in \Omega \quad d(x,y) < \varepsilon$

$y \in \Omega$ standard da Ω standard endl.

$\forall^{st} \varepsilon \, \forall x \exists^{st} y \quad d(x,y) < \varepsilon$

Da kompaktheit $\Rightarrow$ Vollständigkeit

$\exists^{st} y \, \forall x \quad x \doteq y$

b) Gelte $\forall x \exists^{st} y \quad x \doteq y$

zeigen Raum ist folgenkompakt

$\alpha : \mathbb{N} \to M$ standard

wähle n $\neg$stand.

wähle a mit $st(a)$ $a \doteq \alpha_n$

$\Rightarrow a$ ist HP von α

da "a ist HP" klassische Auss.

gilt Aoh für alle α

Anwendungen

1. Stetiges Bild einer kompakten Menge ist kompakt

T $f : \underbrace{(M,d)}_{kompakt} \to (M',d')$ stetig surj. $\qquad$ Mes sd

$x \in M' \; \exists u \in M \;\; f(u) = x \quad \exists v \in M \;\; st(v) \;\; v \doteq x$

f stetig $\quad \underbrace{f(v)}_{st} \doteq f(u) = x \qquad \lrcorner$

2. (M,d) kompakt $\quad f : (M,d) \to (M',d')$ stetig
$\Rightarrow f$ glm stetig

T $x,y \in M \quad x \doteq y \qquad a \doteq x \;\; st(a) \qquad a \doteq y$

$f(a) \doteq f(y) \qquad f(a) \doteq f(x) \quad f(x) \doteq f(y) \qquad f$ glm stetig $\lrcorner$

3. Satz über kontrah. Abb

(M,d) vollst. $\quad f : (M,d) \to (M,d)$
$d(f(x), f(y)) < c\, d(x,y) \quad \forall x,y \qquad c < 1$
$\Rightarrow f$ besitzt Fixpkt

T genügt für $st(f)$ zu zeigen

f standard $\quad x \doteq y \Rightarrow f(x) \doteq f(y)$ da $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

$x_0 \in M \;\; st(x_0) \quad x_{n+1} = f(x_n)$ Standardfolge

$d(x_{n+1}, x_n) < c^n d(x_1, x_0)$

$m > n \Rightarrow d(x_m, x_n) \le \frac{c^n}{1-c}$

$\{x_n\}$ CF. $\qquad a = \lim_{n \to \infty} x_n \quad st(a)$

n mit $\neg st(n)$ $\qquad a \underset{lim}{\doteq} x_n \underset{CF}{\doteq} x_{n+1} \doteq f(a) \qquad st(f(a))$

$a = f(a)$ $\qquad \lrcorner$

Filter, Ultrafilter ...

Def ~~Bsp eines~~ nicht trivialen Ultrafilters auf $\mathbb{N}$

1. $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $X \in \mathcal{F}$ $Y \supseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$
3. $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$
4. $X \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow X \in \mathcal{F} \vee \mathbb{N} - X \in \mathcal{F}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{n\} \notin \mathcal{F}$

(1–3: Filter; 1–5: Ultrafilter)

$\mathbb{N} - \{n\} \in \mathcal{F}$ $\forall n$
$\mathbb{N} - \{n_1, n_2\} \in \mathcal{F}$
coendl. Mengen

Bem Die Existenz eines nichttriv. Ultrafilters ist nicht trivial (Zorn)

Boolsche Algebra : $(B; \cap, \cup, -, 0, 1)$

Filter $\mathcal{F}$ in B

1) $0 \notin F$ $1 \in F$
2) $x \in F$ $x \leq y \Rightarrow y \in F$
3) $x, y \in F \Rightarrow x \cap y \in F$
4) $x \in F$ oder $\bar{x} \in F$

$x \leq y$: $x \cup y = y$
$x \cap y = x$

Satz In jeder Boolschen Algebra gibt es einen Ultrafilter

Kor Es gibt einen nichttriv. Ultrafilter auf $\mathbb{N}$

Γ $B = P(\mathbb{N})/_\sim$ $x \sim y :\Leftrightarrow (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ endlich

$\sim$ verträglich mit $\cap, \cup, -$ $X \Delta Y$

$x \sim y \Rightarrow x \cup z \sim y \cup z$
$x \sim y \Rightarrow x \cap z \sim y \cap z$
$x \sim y \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{y}$

$\pi : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})/_\sim$
~~$\pi : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})/_\sim$~~
~~$\pi : P(\mathbb{N})/_\sim \to \mathbb{N}$~~

$A, B \in \pi^{-1}(F)$
$\Rightarrow A \cap B \in \pi^{-1}(F)$

$\pi(A) \in F$
$\pi(B) \in F$ $\pi(A) \cap \pi(B) \in F$

ist F ein Ultrafilter in B, so ist $\pi^{-1}(F)$ ein nicht trivialer U.F auf $\mathbb{N}$

(Die endlichen Mengen werden auf 0 abgebildet) $\lrcorner$

Bew. Satz : Γ B sei eine standard B.A.
$E \subset B$ E endl. existiert, sodass
$\forall^{st} x \in B \Rightarrow x \in E$

E erzeugt eine endliche Subalgebra B' $E \subseteq B' \subseteq B$
x_0 ein Atom von B' d.h
1) $0 < x_0$
2) $\forall y (y < x_0 \Rightarrow y = 0)$

x_0 endl.
$1 \in B'$
$0 < 1$

i.A. $\neg st(x_0)$

Im Prinzip : jeder Filter Hauptultrafilter (womöglich durch nichtstandard element x_0 erzeugt)

In einer endlichen B.A. gibt es nur Hauptultrafilter und alle werden von Atomen erzeugt.

$F := {}^S\{x \in B \mid x_0 \leq x\}$

Beh. F ist ein Ultrafilter auf B und $st(F)$

$F \subseteq B$ (Transfer)

1) $0 \notin F$: $st(0)$ $x_0 \nleq 0$
$1 \in F$: $st(1)$ $x_0 \leq 1$
2) x, y standard $x \in F$ $y \in B$ $x \leq y$
$\Rightarrow x_0 \leq x \leq y$ $y \in F$
3) x, y stand $x, y \in F$ $x_0 \leq x$ $x_0 \leq y \Rightarrow x_0 \leq x \cap y$ $\lrcorner$

4) $x \in B$ $st\, x$ $x \in E \subseteq B'$
$x \cap x_0 \in B'$
d.h $x_0 \cap x = x_0$ oder $x \cap x_0 = 0$
d.h $x_0 \leq x$ oder $x_0 \leq \bar{x}$
$\Rightarrow x \in F$ oder $\bar{x} \in F$

§3 Differential Integralrechnung

$I \subset \mathbb{R}$ $\quad g: I - \{a\} \to \mathbb{R}$ $\quad b \in \mathbb{R}$
alles standard. Dann:

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \iff \forall x \in I \ (x \simeq a \wedge x \neq a \to g(x) \simeq b)$$

$f: I \to \mathbb{R}$ standard
f diffbar auf $I \iff \forall^{st} a \in I \ \exists^{st} b \ \forall x \in I \ [x \simeq a \wedge x \neq a \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \simeq b]$

⌈ f diffb. $\forall a \in I \ \exists b \ \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b$
$\Rightarrow \forall^{st} a \in I \ \exists^{st} b \ \forall x \in I \ [x \simeq a \wedge x \neq a \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \simeq b]$
umgekehrt: gleicher Weg ⌋

mit Lemma über impliz. Defin von ¬st-Funktionen
$\exists^{st} h: I \to \mathbb{R} \ \forall^{st} a \in I \ \forall x \in I \ [x \simeq a \wedge x \neq a \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \simeq h(a)]$
$f' := h$ Insbesondere: f' ist auch standard.

⚠ haben zwar $f'(x)$ definiert für alle $x \in I$ (auch ¬st)
Aber für ¬st a gilt [...] i.a. nicht mehr!

Bsp: $\log x$ auf $]0, \infty[$ $\quad a > 0$ a infinitesimal
$x = a + a$: $\quad x \neq a \quad x \simeq a$

$$\frac{\log x - \log a}{x - a} = \frac{\log 2}{a} \quad \text{ist weit weg von } \frac{1}{a}$$

$\log' x = \frac{1}{x} \quad \forall x$, auch ¬st.

Satz

$f: I \to \mathbb{R}$ stand.
f stetig diffb. auf I gdw
$\forall a^{st} \in I \ \exists^{st} b \ \forall x, y \in I \ [x \simeq y \simeq a \wedge x \neq y \to \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \simeq b]$

⌈ "⇒" f stetig diff. $a \in I$ stand
$x, y \in I \quad x \simeq y \simeq a \quad x \neq y$
Aus Mittelwertsatz $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) \quad \xi \in [x, y]$

$\Rightarrow \xi \simeq a$
Da f' stetig $\wedge$ a stand $\Rightarrow f'(\xi) \simeq f'(a)$
d.h. $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \simeq f'(a)$

"⇐" zuerst f diff auf I: wählen $y = a$
sei a stand $x \simeq a$
$\forall \varepsilon \ \exists \delta \ \forall y \ 0 < |x-y| < \delta \to \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x) \right| < \varepsilon$
$\exists \delta \ \forall y \ 0 < |x-y| < \delta \to \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \simeq f'(x)$
wähle $y \in I$ mit $y \simeq x$ und $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \simeq f'(x)$
$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \simeq f'(a) \Rightarrow f'(a) \simeq f'(x)$ ⌋

Integral

Fixieren $h>0$ infinitesimal
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt

$$\sum_{a \le jh < b} f(jh) \cdot h$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \left[\sum_{a \le jh < b} f(jh) \cdot h\right]^\circ}$$

Lemma über impl. Def:

$\exists^{st}\, \Theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathcal{R}$ beschr. Fkt.

$\Theta(a,b,f) = \int_a^b f(x)$

$a < b < c$

$$\sum_{a \le jh < b} f(jh) \cdot h + \sum_{b \le jh < c} f(jh) \cdot h = \sum_{a \le jh < c} f(jh) h$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f}$$

$$\boxed{f \le g \text{ auf } I \Longrightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g} \quad ✓$$

$m \le f(x) \le M$ auf I

$\Longrightarrow \quad m(b-a) \le \int f(x)\,dx \le M(b-a)$ $\qquad$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Satz $\quad$ Sei f stetig auf $[a,b]$
Dann ist $\int_a^x f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$. insbesondere ist $\int_a^x f(x)\,dx$ unabhängig von h. $\quad =: F(x)$

Γ $\quad$ Seien f, a, b standard
Sei $a \le x_1 < x_2 \le b$ $\qquad m := \inf_{[x_1,x_2]} f \qquad M := \sup_{[x_1,x_2]} f$

$$m \le \underbrace{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}_{\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}} \le M$$

Sei x_0 standard aus $[a,b]$
$x_1 \doteq x_2 \doteq x_0 \quad \overset{}{\underset{\text{st}}{\Rightarrow}} \quad f(x_1) \doteq f(x_2) \doteq f(x_0)$

$$\underbrace{m - f(x_0)}_{\doteq 0} \le \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} - f(x_0) \le \underbrace{M - f(x_0)}_{\doteq 0} \quad \lrcorner$$

Bsp

$\frac{d}{dx} e^x \qquad e^x = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^\circ \quad n \text{ gross}$

$$\frac{d}{dx}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$
$$\simeq e^x$$

präziser mit:

Prop

$f, g, p \quad I \to \mathbb{R} \quad f, g$ standard
p stetig diff. $\quad f(x) \simeq p(x) \quad \forall x \in I$
$\qquad\qquad\qquad\; g(x) \simeq p'(x) \quad \forall x \in I$
$\Rightarrow f' = g \quad g$ stetig

Γ ▪ g stetig: $x, y \in I \quad x \simeq y \quad st(x)$
$g(y) \simeq p'(y) \simeq p'(x) \simeq g(x)$

▪ $x, a \in I$ standard
$f(x) - f(a) \simeq p(x) - p(a) = \int_a^x p'(t)\,dt$
$\simeq \int_a^x g(t)\,dt \qquad$ denn $\int_a^x |p'(t) - g(t)|\,dt \le (x-a)\underbrace{(p'(\xi) - g(\xi))}_{\simeq 0}$

da f, g, x, a standard $\Rightarrow f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt$
g stetig $\Rightarrow f' = g$ $\quad\lrcorner$

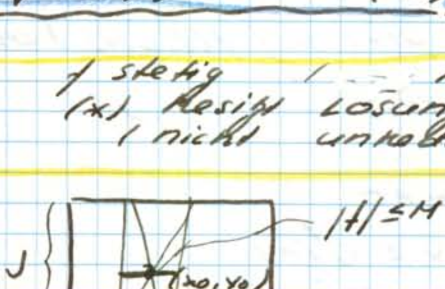
Sei $h: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I stand. begrenzt $\quad$ (h nicht notw. st)
und $h^\circ := {}^S\{(x, y) \mid y \simeq h(x),\ x \in I\}$
Dann ist h° eine standard Funktion $I \to \mathbb{R}$ und
$\forall^{st} x \in I \quad h^\circ(x) = h(x)^\circ$. insbes. $h^\circ(x) \simeq h(x) \quad st(x)$

Differentialgleichungen

$$\boxed{y' = f(x, y) \qquad (*)}$$

Vor $\quad f$ stetig $\quad$ (im Gebiet B)
Beh $\quad (*)$ besitzt Lösungen durch jeden Pt von B
(nicht unbedingt eindeutig)

Γ



$\max_{I \times J} |f| \le M, \quad \frac{\ell(J)}{\ell(I)} \le M$
wählen $h > 0$ infinitesim
OE $(x_0, y_0) = (0, 0)$
$I = [-a, +a], \ J = [-b, b]$)

$v(0) = 0 \qquad v((k+1)h) = v(kh) + h \cdot \underbrace{f(kh, v(kh))}_{\le M}$
für $kh \le a$

Mit Indukt. $\quad v(kh) \le M \cdot kh$

Erweitern v :

$0 \le x \le a \Rightarrow v(x) = v(kh) \le Mkh = Mx \le b$

v ist begrenzt auf I. Sei $u := v^\circ$

3 4 5 6 7 8 — 2+2, 3+3, 2 4, 3+4, 2 5

Beh: u ist Lösung von $(*)$

$$V(x) := \sum_{0 \le kh < x} f(kh, v(kh)) \cdot h$$

Bew: Indukt. nach k mit $kh \le x < (k+1)h$

Beh: $u(x) \doteq \sum_{0 \le kh < x} f(kh, u(kh)) \cdot h$

$\left(\Rightarrow x \text{ stand. } u(x) = \int_0^x f(t, u(t))\, dt \right)$

Bew $x < x'$ $\quad |v(x') - v(x)| = \left| \sum_{x < kh \le x'} f(kh, v(kh)) \cdot h \right|$

$$\le M \cdot h \left(\frac{x'-x}{h} + 1 \right) = M(x'-x) + Mh$$

$x' \doteq x \Rightarrow v(x') \doteq v(x)$

Für x', x standard: $|u(x') - u(x)| = |v(x')^\circ - v(x)^\circ| =$

$(x \text{ st} \to v^\circ(x) = v(x)^\circ)$ $\quad = |v(x') - v(x)|^\circ \le (M(x'-x) + Mh)^\circ = M(x'-x)$

Da u, M, I standard:

$T \Rightarrow \forall x, x' \in I: |u(x) - u(x')| \le M|x - x'|$

$\Rightarrow u$ glm stetig auf I.

$x \in I: u(x) \doteq u(x^\circ) = v(x^\circ)^\circ \doteq v(x^\circ) \doteq v(x)$

$0 \le kh \le a: \underbrace{f(kh, v(kh))}_{A_k} \doteq \underbrace{f(kh, u(kh))}_{B_k}$ $\quad$ glm. Stetigkeit von f auf $I \times J$

$\Rightarrow \sum_{0 \le kh \le x} A_k h \doteq \sum_{0 \le kh \le x} B_k \cdot h$ $\quad$ denn $\left|\sum (A_k - B_k) h\right| \le \max_k |A_k - B_k| \cdot h \cdot \frac{x}{h} \doteq 0$

$u(x) \doteq v(x) = \sum_{0 \le kh < x} A_k h \doteq \sum B_k h$ $\quad$ (Behauptung)

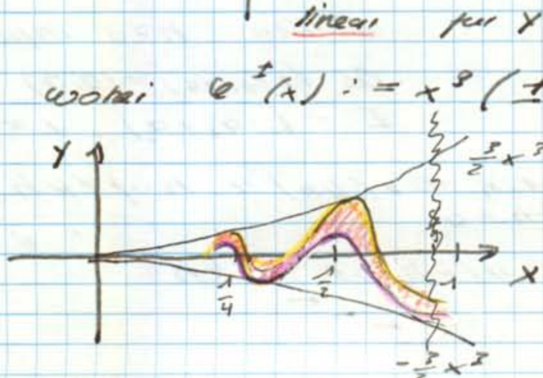
d.h. für st x ist $u(x) = \int_0^x f(t, u(t))\, dt$

$\overset{u \text{ stetig}}{\Longrightarrow} u'(x) = f(x, u(x))$

Bsp

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 4x & y \ge \varphi^+(x) \\ -4x & y \le \varphi^-(x) \\ \text{linear} & \text{für } y \in [\varphi^-(x), \varphi^+(x)] \end{cases}$$

wobei $\varphi^\pm(x) := x^3 \left(\pm 1 + \cos \frac{\pi}{x} \right)$



$h = \frac{1}{n}$ infinit n ungerade

$\Rightarrow u(x) > 0$ für

n gerade $\Rightarrow$ $u(x) < 0$ für

<u>n ungerade</u>

$P_0 = (0,0)$
$P_1 = (h,0)$

$\varphi'(h) < 0$ (n ungerade)

$P_2 = (2h, h \cdot 4h) = (2h, 4h^2)$ oberhalb g denn $4h^2 > \frac{3}{2}(2h)^3$

$h^2 > 3h^3$ (da h infinit.

<u>Beh</u> Ist P_n oberhalb g und $x_n = nh \in [0, \frac{8}{9}]$ so auch P_{n+1} oberhalb

$P_n = (nh, y_n)$, $y_n > \frac{3}{2}(nh)^3$

$P_{n+1} = ((n+1)h, y_n + h\, 4nh)$

wollen $y_n + 4nh^2 \geq \frac{3}{2}((n+1)\cdot h)^3$

$\frac{3}{2}n^3h^3 + 4nh^2 \geq \frac{3}{2}(n+1)^3h^3$

$4nh^2 \geq \frac{3}{2}(3n^2+3n+1)h^3$

$4n \geq \frac{3}{2}(3n^2h+3nh+1)$

$y > \frac{3}{2}x^3$

$\Rightarrow y + 4hx \overset{?}{>} \frac{3}{2}(x+h)^3$

$\frac{3}{2}x^3 + 4hx \geq \frac{3}{2}(x+h)^3$

$\frac{8}{3}xh \geq 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$\frac{8}{3}x \geq 3x^2 + 3xh + h^2$

$\simeq 3x^2$

$x < \frac{8}{9}$

<u>n gerade</u>

Symmetrie

---

§4 Konsistenz von IST

$con(ZF) \leftrightarrow con(ZF+IST)$

Formeln φ, ψ d. erweiterten Sprache $ZF+IST$

$\varphi \equiv \psi$: $\forall^{st}\vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}))$

(T) Falls φ klassisch (d.h. ohne "st")
$\forall x\, \varphi \equiv \forall^{st}x\, \varphi$ (bzw. $\exists x \varphi \equiv \exists^{st}x\, \varphi$)

Folgerung (T') $\boxed{\text{Für beliebiges Präfix } Q_1, Q_2, \dots Q_n : \text{ Falls } \varphi \text{ klassisch, so gilt } Q_1, Q_2, \dots, Q_n\varphi \equiv Q_1^{st} \dots Q_n^{st}\varphi}$

Quantoren auf st Mengen beschränkt und freie Variabeln

Γ Indukt nach n
$n=1$ (T)
$n \leadsto n+1$ gelte $Q_2 \dots, Q_n\varphi \equiv Q_2^{st} \dots Q_n^{st}\varphi$

$\Rightarrow Q_1^{st}\underline{Q_2 \dots Q_n\varphi} \equiv Q_1^{st}\underline{Q_2^{st} \dots Q_n^{st}\varphi}$

$\equiv$ klassisch

$\Rightarrow \underline{Q_1 Q_2 \dots Q_n\varphi}$ $\lrcorner$

Satz Jede Formel ist äquivalent ($\equiv$) zu einer klassischen Formel

Ingredienzien:

$$(1)\ \boxed{\begin{array}{l}\varphi \text{ klassisch} \\ Q_1 Q_2 \dots Q_m\, \varphi \equiv Q_1^{st} Q_2^{st} \dots Q_m^{st}\, \varphi\end{array}}$$

(1) (T')

(2) (I) $\forall^{st\,fin} z\ \exists x\ \forall y \in z\ \varphi(x,y) \longleftrightarrow \exists x\ \forall^{st}_y\ \varphi(x,y)$

(3) Lemma über implizite Def. von st-Funktionen

(2) I φ klass. param. beliebig

$$(2)\ \boxed{\begin{array}{l}\forall^{st\,fin} z\ \exists x\ \forall y \in z\ \ \varphi(x,y) \longleftrightarrow \exists x\, \forall^{st}_y\ \varphi(x,y) \\ \exists^{st\,fin} z\ \forall x\ \exists y \in z\ \ \varphi(x,y) \longleftrightarrow \forall x\, \exists^{st} y\ \varphi(x,y)\end{array}}$$

(3) φ beliebig a, b standard

$$\forall^{st} x \in a\ \exists^{st}_y \in b\ \ \varphi(x,y) \longleftrightarrow \exists^{st} Y : a \to b\ \ \forall^{st}_{x \in a}\ \varphi(x, Y(x))$$

$$(3)\ \boxed{\begin{array}{l}\forall^{st} x\ \exists^{st}_y\ \ \varphi(x,y) \equiv \exists Y^{st}\, \forall x^{st}\ \ \varphi(x, Y(x)) \\ \exists^{st} x\ \forall^{st}_y\ \ \varphi(x,y) \equiv \forall^{st} Y\, \exists^{st} x\ \ \varphi(x, Y(x))\end{array}}$$

Bsp (M,d) kompakter metrischer Raum

$\forall x\ \exists y^{st}\ \ x \doteq y$ — Suchen Trafo in äquiv. klassische Formel gemäss (1), (2), (3)

$\forall x\ \exists^{st} y\ \forall^{st}_\varepsilon\ \ d(x,y) < \varepsilon$

$\forall x\ \forall^{st} E\ \exists^{st}_y\ (d(x,y) < E(y))$ — nach (3)

$\forall^{st} E\ \forall x\ \exists^{st} y\ (d(x,y) < E(y))$

$\forall^{st} E\ \exists^{st\,fin} z\ \ \forall x\ \exists y \in z\ \ d(x,y) < E(y)$ — (I)

$\forall E\ \exists^{fin} z\ \ \forall x\ \exists y \in z\ \ d(x,y) < E(y)$ — (T')

E: Abb. $M \to \mathbb{R}^+$

Interpretieren als Überdeckung $K(x)$

$d(x,y) < E(y) \ :\ x \in K_{E(y)}(y)$

und erhalten klassische Defin. d. Kompaktheit.

Bsp Kompaktheit bei tel. Räumen (X, T)

$\forall x \in X\ \exists^{st}_y \in X\ \ x \doteq y$

$\forall x \in X\ \exists^{st}_y \in X\ \forall^{st} U \in T\ \ y \in U \to x \in U$

wie oben $\equiv \forall \emptyset : X \to T\ \exists^{fin} z\ \forall x \in X\ \exists y \in z\ (y \in \emptyset(y) \to x \in \emptyset(y))$

0 ε infin.

Ein jede st Umg von 0 aber $0 \notin\ ]0, \infty[$ Standumg von ε

Interpretation: Überdeckung $\{\emptyset(y) \mid y \in X\}$, endl. Teilüberd. $\{\emptyset(y) \mid y \in z\}$

Bsp (M,d) vollst.

$$\forall x\ \left[\forall^{st}_\varepsilon\ \exists^{st}_y\ \ (d(x,y) < \varepsilon) \longrightarrow \exists^{st} x\ \forall^{st}_\varepsilon\ (d(x,y) < \varepsilon)\right]$$

verallg. d. vollst. auf beliebige topol. Räume (uniforme Strukturen)

$$\forall x \left[\forall^{st} n\, \exists^{st}_y \left(d(x,y) < \tfrac{1}{n}\right) \rightarrow \exists^{st}_x \forall^{st}_\varepsilon \left(d(x,y) < \varepsilon\right) \right]$$

$$\exists^{st} Y : \mathbb{N}^+ \rightarrow M\ \forall^{st}_n\ d(x, Y(n)) < \tfrac{1}{n} \Rightarrow \forall^{st} E\ \exists^{st} y\ \ d(x,y) < E(y) \big]$$

$\exists x\, \varphi(x) \rightarrow \psi \sim$
$\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi)$

$\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \psi \sim$
$\exists x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi)$

$\neg \exists x\, \varphi(x) \vee \psi \sim \forall x\, \neg\varphi(x) \vee \psi$ ~~$\forall x\, \neg\varphi(x)$~~
$\sim \forall x\, (\neg\varphi(x) \vee \psi)$
$\sim \forall x\ \ \varphi(x) \rightarrow \psi$

$$\sim \forall x\, \forall^{st} Y\, \forall^{st} E\, \exists^{st} n\, \exists^{st}_y \left[d(x, Y(n)) < \tfrac{1}{n} \rightarrow d(x,y) < E(y) \right]$$

$$\forall^{st} Y\, \forall^{st} E\, \forall x\, \exists^{st} (n,y) \left[d(x, Y(n)) < \tfrac{1}{n} \rightarrow d(x,y) < E(y) \right]$$

$$\overset{?}{\sim} \forall^{st} Y\, \forall^{st} E\, \exists^{st\, fin}_z\ \forall x\, \exists (n,y) \in z \left[d(x\, Y(n)) < \tfrac{1}{n} \rightarrow d(x,y) < F(y) \right]$$

$$\overset{(I')}{\sim} \boxed{\forall Y\, \forall F\ \exists^{fin}_z\ \ \forall x\, \exists (n,y) \in z \left[d(x\, Y(n)) < \tfrac{1}{n} \rightarrow d(x,y) < E(y) \right]}\ *$$

Interpret. : Y Folge E Überdeckung
und klassisch etwas umgebaut.

Zu jeder Folge $Y : \mathbb{N} \rightarrow M$

$* \rightarrow$ vollst. : Y CF Y besitzt konv. Teilfolge
wähle Teilfolge (nenne sie wieder Y) so dass
$d(Y_m, Y_k) < \frac{1}{m}\ \ \forall m < k$

wegen $(*)$ $\exists y\, \forall \varepsilon \ldots$ Beh. $y = \lim\limits_{m \to \infty} Y_m$

$$\forall \varepsilon\, \exists m, n\, \forall k \left[d(Y_k, Y_m) < \tfrac{1}{m} \wedge d(Y_k, Y_n) < \tfrac{1}{n} \rightarrow d(Y_k, y) < \varepsilon \right]$$
$\forall k \geq m, n$

vollst $\rightarrow *$ $Y\ \mathbb{N} \rightarrow M$ geg.

<u>1. Fall</u> $\exists m, n\ \ d(Y_m, Y_n) \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$
wähle y beliebig m, n so
$\neg \exists x\ \ (d(Y_m, x) < \frac{1}{m} \wedge d(Y_n, x) < \frac{1}{n})$

<u>2. Fall</u> $\forall m, n\ \ d(Y_m, Y_n) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \rightarrow Y$ ist C.F.
wähle $y := \lim Y_n$
wähle $m = n$ so dass $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ $d(Y_m, y) < \frac{\varepsilon}{2}$
Aus $d(x, Y_m) < \frac{1}{m}$ folgt $d(x,y) < \varepsilon$

<u>Bsp</u> <u>Stetigkeit</u>

$$\forall^{st} x\, \forall y \left[x \simeq y \rightarrow f(x) \simeq f(y) \right]$$

$$\forall^{st} x\, \forall y \left[\forall^{st} \delta\, (d(x,y) < \delta) \rightarrow \forall \varepsilon^{st} \left(d(f(x), f(y)) < \varepsilon \right) \right]$$

$$\forall^{st} x\, \forall^{st} \varepsilon\, \forall y \left[\exists^{st} \delta \left[d(x,y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \right] \right]$$

$$\forall^{st} x\, \forall^{st} \varepsilon\, \exists^{st\, fin}_z\ \underline{\forall y\, \exists \delta \in z} \left[d(x,y) < \delta \rightarrow \underbrace{d(f(x), f(y)) < \varepsilon}_{\text{klassisch}} \right]$$

$$\forall x\ \ \forall \varepsilon\ \exists^{fin}_z\ \ \forall y\, \exists \delta \in z \left[d(x,y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \right]$$

$$\forall x\ \ \forall \varepsilon\ \underbrace{\exists^{fin} z}_{\exists \delta_0 = \min \delta \in z}\ \ \forall y \left[\underbrace{\forall \delta \in z\ \ d(x,y) < \delta}_{d(x,y) < \delta_0} \rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \right]$$

Bsp

f glm stetig

$\forall x \forall y \,[\, \forall \delta^{st} (d(x,y)<\delta) \to \forall^{st}_{\varepsilon} (d(x,y)<\varepsilon)]$

$\forall^{st}_{\varepsilon} \; \forall x \forall y \; \exists^{st} \delta \; (d(x,y)<\delta \to d(x,y)<\varepsilon)$

$\forall^{st}_{\varepsilon} \; \exists^{st\,fin} z \; \forall (x,y) \exists \delta \in z \; (d(x,y)<\delta \to d(x,y)<\varepsilon)$

$\forall^{st}_{\varepsilon} \exists \delta_0 \forall x y \; (d(x,y)<\delta_0 \to d(x,y)<\varepsilon)$

$\forall \varepsilon \; \exists \delta_0 \; \forall x,y \; (d(x,y)<\delta_0 \to d(x,y)<\varepsilon)$

Beweis Satz

1. Ersetze $St(x)$ durch $\exists^{st} y \, y = x$

2. Bringe alle Quantoren nach aussen

   $Q_1 Q_2 \dots Q_m \varphi$, wobei φ quantorenfrei und klassisch $Q_i \in \{\exists, \forall, \exists^{st}, \forall^{st}\}$

   $\neg \exists x^{(st)} \varphi(x) \equiv \forall x^{(st)} \neg \varphi(x)$

   $\exists x \; \varphi(x) \underset{(\vee)}{\wedge} \psi \equiv \exists y \underbrace{\varphi(y)}_{\text{„y neu"}} \underset{(\vee)}{\wedge} \psi \equiv \exists y (\varphi(x) \wedge \psi)$

   Bringe so Formel auf pränexe Form

   Bsp $\forall x \exists y \; x \in y \longleftrightarrow \forall y \exists x \; x \notin y$

   $[\forall x \exists y \; x \in y \wedge \forall y_1 \exists x_1 \; x_1 \notin y_1] \vee$

   $[\underbrace{\neg \forall x_2 \exists y_2 \, x_2 \in y_2}_{\exists x_2 \forall y_2 x_2 \notin y_2} \wedge \underbrace{\neg \forall y_3 \exists x_3 \, x_3 \notin y_3}_{\exists y_3 \forall x_3 \, x_3 \in y_3}]$

   $\forall x \forall y_1 \exists x_1 \exists y \; \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 \forall y_3$

   $[(x \in y \wedge x_1 \notin y_1) \vee (x_2 \notin y_2 \wedge x_3 \in y_3)]$

3. $\forall \exists$: „leere Quantoren"
   $\forall^{st} \exists^{st}$: „S-Quantoren"

   Ziel: alle S-Quantoren nach links bringen, damit T' anwendbar

   Ein leerer Quantor ist schlecht plaziert, falls weiter rechts noch S-Quantoren vorkommen.

   j = Rang d. Formel := # schlecht plazierte leere Quantoren

   $j=0 \qquad Q_1^{st} \dots Q_n^{st} \underbrace{\boxed{\tilde{Q}_1 \dots \tilde{Q}_n \varphi}}_{\text{klass.}} \equiv Q_1 \dots Q_n \tilde{Q}_1 \dots \tilde{Q}_n \varphi$

   $j>0 \qquad$ betrachten am rechtesten schlecht plazierte Quantor:

   $\dots\dots \underbrace{\forall x \, Q_1^{st} \dots Q_m^{st}}_{\equiv \forall^{st}_u \exists^{st}_v \text{ mit (3)}} \tilde{Q}_1 \dots \tilde{Q}_n \varphi$

   Bsp $\exists x_1^{st} \forall x_2^{st} \exists x_3^{st} \forall x_4^{st}$
   $\forall x_2^{st} \exists x_1^{st} \exists x_3^{st} \forall x_4^{st}$
   $\exists^{st}(x_1,x_3)$
   $\forall^{st}(x_2,x_4) \; \exists^{st}(x_1,x_3)$

   $\equiv \dots \; \forall^{st}_u \underbrace{\forall x \exists^{st}_v \tilde{Q}_1 \dots \tilde{Q}_m \varphi}_{\text{klassisch}}$

   $\equiv \dots \; \forall^{st}_u \exists^{st\,fin}_z \forall x \exists v \in z \; \tilde{Q}_1 \dots \tilde{Q}_m \varphi$ ✓

   Rang $j-1$

Anw: Tychonov

X_i kompakt. topol. Raum $\quad i\in I$
$\Rightarrow \prod_{i\in I} X_i$ kompakt

Γ $\underline{X}_i = (X_i, T_i)$

$\prod_{i\in I} \underline{X}_i = (\prod_{i\in I} X_i, T)$ $\quad$ Basis für T : $U_{I_0,V}$ $\quad$ I_0 endl. Teilm. von I

X_i kompakt $\quad \forall x\in X_i\ \exists^{st}_y \in X_i\ \ y \doteq x$

$y \doteq x :\ \forall^{st} V\in T_i\ (y\in V \to x\in V)$

Sei $\omega\in\prod X_i$ $\quad \forall_i^{st}\ \exists^{st} y\in X_i\ \ y\doteq \omega_i$

$\Rightarrow \exists^{st} Y\in \prod X_i\ \ \forall_i^{st}\ Y_i \doteq \omega_i$

Beh: $Y \doteq \omega$ $\quad$ in $\prod X_i$

Γ

Sei $U_{I_0,V}$ eine st. Umg von Y $\quad Y_i\in V_i\ \forall i\in I_0$
Dann ist I_0, V auch standard

Beh $\omega\in U_{I_0,V}$

Sei $i\in I_0 \Rightarrow i$ standard (I_0 st fin)
$\Rightarrow V_i$ standard $\Rightarrow \omega_i\in V_i$ $\quad$ da $Y_i\in V_i$ und $Y_i\doteq \omega_i$

$\lrcorner$

$\lrcorner$

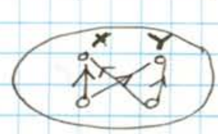
die Konsistenz von IST (Internal set theory)

Rahmen der Modelltheorie: Naive Mengenlehre

Falls ZF widerspruchsfrei: Sei $\underline{V} = (V,\varepsilon)$ ein Modell
V eine Menge, nicht leer, $\varepsilon \subset V\times V$ (2 stellige Relation)

Extens: $\forall x\,\forall y\,\forall z\ \ z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y \to x=y$: φ

Struktur wo Extens $\neg$gilt



V

$\underline{V} \not\models \varphi$ $\quad \to$ für ε

In (V,ε) gelten alle Axiome von ZF.

Ultraprodukt:

$\forall$ I Indexmenge $\quad \underline{V}_i = (V_i, \varepsilon_i)$ für $i\in I$
beliebige Strukturen

$\mathcal{U}$ Ultrafilter auf I

${}^*\underline{V} = \prod_{i\in I}\underline{V}_i / \mathcal{U} = ({}^*V, \varepsilon)$

${}^*V = \prod_{i\in I} V_i/\mathcal{U}$ $\quad$ für $\xi,\eta \in \prod_{i\in I} V_i$ $\quad \xi\sim\eta :\Leftrightarrow \{i\in I \mid \xi_i = \eta_i\} \in \mathcal{U}$

"für fast alle i ist $\xi_i=\eta_i$"

$\mathcal{R}(i)$ Aussage über Indizes i

"Für fast alle i gilt $\mathcal{R}(i)$" $:\Longleftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{R}(i)\} \in \mathcal{U}$

$\xi \in \eta :\Longleftrightarrow \xi_i \in_i \eta_i$ für fast alle i

$\xi' \sim \xi$ und $\eta' \sim \eta$, $\xi' \in \eta' \Rightarrow \xi \in \eta$

$\ulcorner \{i \mid \xi_i' = \xi_i\} = X \in \mathcal{U}$
$\{i \mid \eta_i' = \eta_i\} = Y \in \mathcal{U}$
$\{i \mid \xi_i' \in_i \eta_i'\} = Z \in \mathcal{U}$
$\{i \mid \xi_i \in_i \eta_i\} \supseteq X \cap Y \cap Z \lrcorner$

Satz

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel d. Sprache $=, \in$
mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$
Seien $\xi^1, \dots \xi^n \in \prod V_i$
Dann $\underline{V}^* \models \varphi(\xi^1 \dots \xi^n) \Longleftrightarrow \underline{V}_i \models \varphi(\xi_i^1 \dots \xi_i^n)$
für fast alle i

$\ulcorner$ Induktion nach Formelaufbau:

1. $x \in y$, $x = y$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{V}^* \models \xi \in \eta \Longleftrightarrow \underline{V}_i \models \xi_i \in \eta_i \text{ f.a. } i \\ \underline{V}^* \models \xi = \eta \Longleftrightarrow \underline{V}_i \models \xi_i = \eta_i \text{ f.a. } i \end{array}\right\} \text{nach Def.}$$

2. Sei φ: $\psi \wedge \chi$

$\underline{V}^* \models (\psi \wedge \chi)\vec{\xi}$

$\underline{V}^* \models \psi(\vec{\xi}) \wedge \chi(\vec{\xi})$

$\underline{V}^* \models \psi(\vec{\xi})$ und $\underline{V}^* \models \chi(\vec{\xi})$

$X := \{i \mid V_i \models \psi(\vec{\xi_i})\} \in \mathcal{U}$
$Y := \{i \mid V_i \models \chi(\vec{\xi_i})\} \in \mathcal{U}$ $\Longleftrightarrow X \cap Y \in \mathcal{U}$

3. φ sei $\neg\psi$

Ultraeigenschaft:

$V^* \models \varphi(\vec{\xi}) \Longleftrightarrow V^* \not\models \psi(\vec{\xi})$
$\underset{\text{Indukt.}}{\Longleftrightarrow} \{i \mid V_i \models \psi(\vec{\xi_i})\} \notin \mathcal{U}$
$\underset{\text{ultra}}{\Longleftrightarrow} \{i \mid V_i \not\models \psi(\vec{\xi_i})\} \in \mathcal{U}$
$\Longleftrightarrow \{i \mid V_i \models \varphi(\vec{\xi_i})\} \in \mathcal{U}$

4. $V^* \models \exists y\, \psi(\vec{\xi}, y)$ gdw
ex. $\eta \in V^*$ mit $\underline{V^* \models \psi(\vec{\xi}, \eta)}$
(IV) $\Rightarrow V_i \models \psi(\vec{\xi_i}, \eta_i)$ f.a. i
$\rightarrow \underline{V}_i \models \exists y\, \psi(\vec{\xi_i}, y)$ f.a. i
ex. $\eta \in \prod V_i$ mit $\underline{V}_i \models \psi(\vec{\xi_i}, \eta_i)$ f.a. i
(Auswahlaxiom)
$\overset{IV}{\Rightarrow} V^* \models \psi(\vec{\xi}, \eta) \Rightarrow V^* \models \exists y\, \psi(\vec{\xi}, y)$

: Ultraprodukt einer Struktur $\underline{V} = (V, \varepsilon)$

$$\underline{V}^* = \underline{V}^I/\mathcal{U} := \prod_{i \in I} V_i / \mathcal{U} \quad \text{wobei } \underline{V}_i := \underline{V}$$

$\underline{V} \hookrightarrow \underline{V}^*$

$x \mapsto \hat{x}$ wobei $\hat{x}_i = x \ \forall i$

Satz $\cancel{\underline{V}^* \models \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ gdw.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Für } x_1, \dots, x_n \in V: \\ \underline{V}^* \models \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \\ \text{gdw } \underline{V} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{array}}$ $\Big\}$ elem. Einbettung $\hat{\underline{V}}$ elementare Substruktur von V^*

Bsp $V^* \models \hat{x} \varepsilon \hat{y} \Rightarrow \underline{V} \models x \varepsilon y$

Sei $\underline{V}$ ein Modell für ZF
Sei $\underline{V}^*$ eine Ultrapotenz von $\underline{V}$

Definieren: $\underset{\in V^*}{st(\xi)} :\Longleftrightarrow \xi = \hat{x}$ für ein $x \in V$

Dann ist $\underline{V}^* := (V^*, \varepsilon, st)$ ein Modell für ZF + (T)

Um Konsistenz von I zu zeigen, wählen wir den Ultrafilter geeignet

Sei $X \subset V$ $X^* := \{ \xi \in {}^*V \mid \xi_i \in X \text{ f.a. } i \} \subseteq {}^*V$
Ist $\xi \in {}^*V$ definieren $\{ X \subset V \mid \xi \in X^* \} =: F_\xi$ Ultrafilter auf V
$= \{ X \subset V \mid \xi_i \in X \text{ fast alle } \xi_i \}$

${}^*V$ heisst saturiert, falls zu jedem UF $\mathcal{F}$ auf V
$\exists \xi \in {}^*V \quad F_\xi = \mathcal{F}$

Satz **Bei geeigneter Wahl von I (Indexmenge d. Ultraprodukts) und $\mathcal{U}$ (Ultrafilter) wird ${}^*\underline{V} := V^I/\mathcal{U}$ saturiert**

$\ulcorner$ $I = \{$ endl. Teilmengen von $V \}$ $\quad i = \{x_1, \dots, x_n\}$ $x_k \in V$ $\quad X \subset V$ definiert $\hat{X} := \{ i \in I \mid X_i \in i \}$
~~$i = \{x$~~ $i = \{x_1 \dots x_n\} \Rightarrow i \in \hat{x}_1 \cap \hat{x}_2 \cap \dots \cap \hat{x}_n \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ Filter auf I mit $\hat{X} \in \mathcal{U} \quad \forall X \subset V$
$\Rightarrow \exists$ Ultrafilter $\underset{\hat{\mathcal{U}}}{}$ auf I mit $\hat{X} \in \mathcal{U} \quad \forall X \subset V$

Beh: $V^I/\mathcal{U}$ ist saturiert $\qquad \ulcorner$ $i \in I$ $A_i := \bigcap \{ x \mid x \in F \cap i \} \quad := V$ für $F \cap i = \emptyset$
$\Rightarrow A_i \neq \emptyset$ wählen $\xi \in V^I$ sodass $\xi_i \in A_i \ \forall i \in I$
a) $x \in F$ $\quad i \in \hat{x} \Rightarrow x \in i \cap F \quad A_i \subset x \quad \xi_i \in x$
$\lrcorner$

Mit ZF ist auch ZF + (T) + (I₁) konsistent $\qquad \ulcorner$ $\underline{V}$ ein Modell von ZF
${}^*\underline{V}$ eine saturierte Ultrapotenz von $\underline{V}$

$\Rightarrow {}^*\underline{V}^+ \models$ ZF + (T)

Beh ${}^*\underline{V}^+ \models (I_1)$

Ideen zur NST

Lösen von Difgleichungen: $\dot{x} = f(x)$ dyn system auf M^n mit Lösung $x(t)$

$f: M^n \to TM^n$

sei h infinitesimal

$x((n+1)h) - x(nh) = f(x(nh))\cdot h$ Differenzengl.

$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\cdot h$

mit expliziter Lösung $x_n = g_n$

$x(t) := {}^{o}\left[g_{\frac{t}{h}}\right]$

Bsp $\dot{x} = x \quad x(0) = 1$

$x_{n+1} = x_n + h\cdot x_n = (1+h)\cdot x_n$

$x_n = (1+h)^n$

$x(t) = (1+h)^n \quad n = \frac{t}{h} \quad h = \frac{t}{n}$ n unbeschr

${}^{o}x(t) = {}^{o}(1+\frac{t}{n})^n$ n unbeschr

$x(t) = e^t$

falls wir also eine Difgleichung in diskretisierter Form lösen können haben wir auch eine Lösung d. stetigen Gleichung.

umgekehrt:

$x_{n+1} = g(x_n)$ Differenzengleichung

$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\cdot h \qquad f(x_n) = \frac{g(x_n) - x_n}{h}$

$\dot{x} = f(x)$

haben hier Lösung $x(t) = x(n\cdot h)$

$x_n = x(n\cdot h)$ wobei $n = \frac{t}{h}$

Bsp $x_{n+1} = x_n + 1;\ x_0 = 0$

$f(x_n) = \frac{1}{h}$

$\dot{x} = \frac{1}{h} \to x(t) = \frac{t}{h}$

$x_n = x(n\cdot h) = n$

können diese Dualität für Stabilitätsbetrachtungen: Beweise für solche Sätze.

Hamiltonsche Systeme

Schreib x_n statt $x(n \cdot h)$

$$\dot{x} = J H_x(x)$$

2m dim Phasenraum

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} - x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(2m)} - x_n^{(2m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{(m+1)}(x_{n+1} + h \cdot e^{(m+1)}) - H^{m+1}(x_n) \\ H^{2m}(x_{n+1} + h e^{(2m)}) - H^{2m}(x_n) \\ H^{(1)}(x_n) - H^{(1)}(x_n + h e^{(1)}) \\ \vdots \\ H^{(m)}(x_n) - H^{(m)}(x_n + h e^{(m)}) \end{pmatrix}$$

Schröd gl.

$$\boxed{\dot{x} = \frac{1}{i\hbar} H x}$$

$\hbar$ infinit. klein $\Longrightarrow$ klassische Mechanik

spez. Relativitheo.

c unendl. gross $\Longrightarrow$ klassische Mechanik

Differenzengleichung

können wir hier die Flächenerhaltung für den Fluss zeigen

$(q_1 p_1)$ $\cdot (q_2, p_2)$

Mannigfaltigkeiten

M Mannigfaltigkeit

Definition des Tangentialraumes : $TM_x = x + h \cdot Y$ $\quad Y \in \overset{st}{\mathbb{R}^n}$ h infinitesimal

$$TM := M + h \overset{st}{\mathbb{R}^n}$$

$\varphi : M \to N$ z.B. Liegruppenhomomorphismus

$\varphi_* : TM \to TM$

z.B. $\varphi : x \mapsto x^3$

$$(x + hY) \mapsto (x + hY)^3 = x^3 + 3x^2 hY + O(h^2)$$

$$\varphi_x : Y \mapsto 3x^2 h Y$$

Vektorfeld auf M : $\{ x + h \cdot f(x) \mid x \in M \quad f : M \to \mathbb{R}^n$ difbar $\}$ $\quad st(f, M, x)$

Hamilt. Vektorfeld auf M. $\{ x + h J H_x(x) \mid x \in M \quad H : M \to \mathbb{R}$ difbar $\}$

Tensorfeld auf M : $\{ x + h \cdot T(x) \mid x \in M \quad T : M \to (\mathbb{R}^n)^p (\overset{*}{\mathbb{R}^n})^q$ difbar $\}$ $\quad st(T, M, \mathbb{R})$

T^p_q p fach kontravariante, q fach kovariante Tensor

Metrik auf M : $\{ x + h \cdot g(x) \mid g : M \to (\overset{*}{\mathbb{R}^n})^2 \}$

~~$x + hg(x)(X, X)$~~ =

$\varphi \in TM_x$ gegeben
man erhält ein Standard Element des Tangentialraumes

$$\frac{e-x}{h} \quad \text{ist standard}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(f(x(t)),f(x(t)))}\,dt$$

g Tensorfeld auf M
$e(t)$ Kurve auf M Integralkurve d. Vektorfelds $f(x)$
wollen Länge der Kurve messen

klassisch $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot e,\dot e)}\,dt = \int_{s_1}^{s_2} ds$

$$e(t) = e(h\cdot n) \qquad \frac{de}{dt} = \dot e$$

$$h(e(h\cdot n) - e(h(n-1))) = hf(h\cdot n)$$

$$\frac{ds^2}{dt^2} = g(\dot e,\dot e)$$

$$x(h\cdot n) + h\cdot f(x(h,n))$$

$$ds^2 = g(de,de)$$

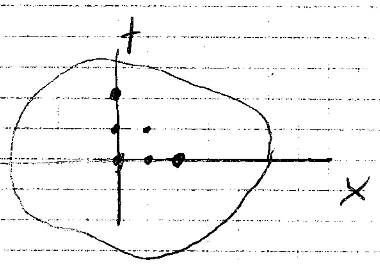
$$g(\dot e,\dot e) = g(f(x(hn)), f(x(hn)))$$

$$l = \sum_{n_1}^{n_2} \sqrt{g(f(x(hn)), f(x(hn)))}\cdot h$$

$f_{xx} = f_{tt}$ Wellengleichung $\qquad f(x,t) = e^{h(x+t)}$ spezielle Lösung

$$f_x = f(x+h,t) - f(x,t)$$
$$f_{xx} = f(x+2h,t) - 2f(x+h,t) + f(x,t)$$
$$f_{tt} = f(x,t+2h) - 2f(x,t+h) + f(x,t)$$

$$f_{tt} = f_{xx} \iff f(x+2h,t) - 2f(x+h,t) = f(x,t+2h) - 2f(x,t+h)$$



$$x = n\cdot h$$
$$y = m\cdot h$$

$$f(n+2,m) - 2f(n+1,m)$$
$$= f(n,m+2) - 2f(n,m+1)$$

2 dimensionale Differenzengleichung
~~ist dy~~ ~~trifft auf bei jeder~~

Wie können wir f berechnen?

Nichtstandardanalysis zur Vereinfachung der Algebra. Vermeidung des Begriffs "unendlich" — Denkökonomie

F_p Körper mit p^n Elementen mit Primkörper F_p

Postulat: Alle Primkörper sind von der Art F_p p prim
Falls $\neg st(p)$, so haben wir folgendes Bild

$x \in F_p$ $\quad -x = p-x$ soll auch hier gelten
$\qquad\qquad -p = 0$

In F_p haben wir $\forall x \exists y \quad x \cdot y = 1$
also auch für $\neg st\, p$

Bsp. $\exists y \quad y \cdot 2 = 1$ $\qquad \forall p$ gilt $y = \frac{p+1}{2}$
auch hier $y = \frac{p+1}{2}$ ist nichtstandard

Es gibt bis auf Isomorphie genau einen Körper der Charakteristik p^n. soll auch für $\neg st\, p$ gelten

d.h. es gibt n dimensionale Vektorräume über $\mathbb{Q}$ die Körper sind.

Falls wir nun n nichtstandard wählen können wir das so übersetzen

Es gibt ∞ dimensionale Vektorräume über $\mathbb{Q}$

Wo also? zusätzliche Struktur mit Hilfe des Zeichens st auf $\mathbb{N}$ liefert auf die natürliche Weise $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,

Was heisst algebraischer Abschluss von F_p?
Was heisst Metrik ~~von~~ auf F_p
Was heisst Vervollständigung?
Was heisst Ordnung auf F_p
Was heisst Wohlordnung

$\mathbb{C}$ erhalten wir durch Vervollständigung des algebraischen Abschlussen von $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ erhalten wir durch Vervollständigung von $\mathbb{Q}$

algebraisches Abschliessen von F_p: $\quad \exists \leq p^2$ Polynome vom Grad 2
$\qquad \exists \leq p^3$ Polynome vom Grad 3

nehmen n $\neg st$. schliessen alle Polynome vom Grad n ab. aus
soll heissen: F_p algebr. abschl.

es gibt p^n Polynome vom Grad n

haben also Nullst. all diese p^n Polynome zu F_p adjungiert.

Metrik auf F_p $\quad d(x,y) = d|x-y|$

dabei haben wir
Ordnung auf F_p $\quad 0 < 1 < 2 < \ldots p{-}1 < p < p{+}1 < \ldots$

wollen $p < \frac{p+1}{2} < 1$

$2p < p+1 < 2p+2$

$2p < 2p+1 < 2p+2$

Def $\quad a \leq b$ in F_p
falls $\exists c$ st $a + c = b$

haben also für $st(F_p)$
keine nicht triviale Ordnung

Def $\quad |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \\ 0 & a \not\geq 0 \\ & a \not\leq 0 \end{cases}$

haben keine nichttriviale
Absolutfunktion für $st(F_p)$

Def $\quad d(x,y) = |x-y|$

haben keine nichttriviale solche
Metrik für $st\, F_p$

$\neg st\, F_p$: $\quad d\left(p, \frac{p+2}{3}\right) = \left|p - \frac{p+2}{3}\right|$
$= \left|\frac{p+1}{3}\right| = \frac{p+1}{3}$

$$\boxed{{}^{\circ}\left(\frac{p+1}{3}\right) = \frac{1}{3}}$$

können auch umgekehrt aus
Tatsachen über F_p $\neg st(p)$ auf Tatsachen
in F_p schließen:

z.B. $\neg\exists \forall x \exists y \; y^2 = x$ in $\neg st\, p$

$\Rightarrow \exists^{\circ} p$ in F_p $\exists x \; \forall y \; \neg y^2 = x$

Def Cauchy folge in F_p
unendlich kleine Elemente $\quad \frac{p+1}{n} \quad \neg st(n) \; \neg st\left(\frac{p+1}{n}\right)$

z.B. $n = p^2+1$

Frage nach Transzendenz einer Zahl

p ist p

$\neg$ a transzendent $\Rightarrow \exists^{st} n$ $\exists$ polyn vom grad n P $P(a)=0$
in F_p

~~Frage der eindeutigen Zerlegung von F~~

Definition von Zahlkörpern?

multiplikative ~~Struktur~~ Gruppe von F_p zyklisch
d.h. $\exists \xi$
ξ erzeugt F_p

in F_p ~~genug~~ macht das jedes q ~~der Form~~ q mit $(q, p-1)=1$
$q \neq 1$
z.B. $p-2$

K kompakt f stetig auf $K \to K$
$E \supseteq \{x \in K \mid st(x)\}$ endlich
$\forall x \in E \; \exists n \in \mathbb{N} \; f^n(x)=x$

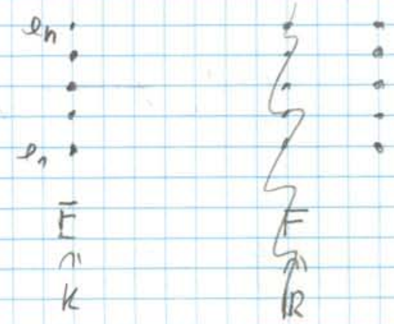
$y \in K \quad y \doteq x \quad x \in E$

$f^n(x) = x$

f stetig, f^n stetig $\Rightarrow f^n(x) \doteq y$

$f^n(y) \doteq y$

d.h. jeder Punkt ist HP



---

wollen Stone Weierstrass beweisen

K kompakt $E \supseteq \{x \in K \mid st\, x\}$ endlich
$X \underset{UA}{\leq} C_{\mathbb{R}}(K)$ die Pkte trennt

d.h. speziell auch $x \doteq \overset{\circ}{x} \quad x \neq \overset{\circ}{x} \Rightarrow \exists f \in K \quad f(x) \neq f(\overset{\circ}{x})$
$\doteq f(x)$

d.h. Standardpunkte können mit X von nichtstandard punkten getrennt werden.

Def $f \doteq g$ falls $\sup f(x) \doteq \sup g(x)$

Beh $\forall f \in C_{\mathbb{R}}(K) \; \exists g \in X \quad f \doteq g$ d.h. $\overline{X} = C_{\mathbb{R}}(K)$

Betrachte das Bild von E unter f in $\mathbb{R}$
ist endlich. Beh. können aus Elementen von X
eine Funktion aufbauen, die auf E mit Werten von f
übereinstimmt.
Mit induktion: Verankerung: existiert ein $g \in X$
mit $g(e_1) \neq 0$
skalieren so, dass $g(e_1) = f(e_1)$

$n \rightsquigarrow n+1$: $f(e_k) = g_n(e_k) \quad k \leq n$ $\quad$ $g(e_k)$ aufgebaut aus Elementen von X

betrachten e_{n+1} : $f(e_{n+1}) =: f_{n+1}$

$\exists x_1 \dots x_n \quad x_i(e_i) \neq x_i(e_{n+1})$

$$\boxed{x(t) := g_n + \frac{\prod_{i=1}^{n} (x_i(t) - x_i(e_i))}{\prod_{i=1}^{n} (x_i(e_{n+1}) - x_i(e_i))} \left(f(e_{n+1}) - g_n(e_{n+1}) \right)}$$

Nichtstandardtopologie auf $\mathbb{N}$ soll uns $\mathbb{R}$ liefern

$\mathbb{K} \supseteq F_p \quad \neg st(p) \overset{elg.}{\cong} \mathbb{Q}$

p prim

$\frac{n+kp}{m} \longleftarrow \frac{n}{m}$

$\frac{1+5}{3}$

k so, dass $n+kp$ durch m teilbar ist

$\frac{n+kp}{m}$ ist dann eine natürliche Zahl

k kann immer gefunden werden in $\mathbb{N}$ mit $k < p$

$\frac{n+kp}{m} \longmapsto \frac{n}{m}$ ist die Projektion in die Standardwelt

$$F_{p^2} \quad \neg st\, p \quad \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

$$F_{p^2} \cong F_p[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

Das Element $\sqrt{2}$ befindet sich irgendwo in N:

$$\sqrt{2} \longmapsto \sqrt{k_1 p + k_2 p^2 + 2}$$

k_1, k_2 so dass $\sqrt{k_1 p + k_2 p^2 + 2} \in \mathbb{N}$

und das ist konsistent: denn es gibt beliebig große p, so dass in F_p $k_1 p + k_2 p^2 + 2$ eine Quadratzahl ist sein kann für günstige Wahl von k_1, k_2

kann das nicht gefolgert werden?

oder: $\sqrt{2} \longmapsto n \in F_{p^2}$

mit $n^2 - 2 = k_1 \cdot p$

k_1, so dass $\sqrt{k_1 p + 2}$ möglich

hier sehen wir, dass wir i.a. $k_1 > p$ wählen müssen, dass wir also im Erweiterung F_{p^2} arbeiten müssen

aber

modulo 5

3 hat keine Wurzel

~~aber~~ und $3 + k\,5$ auch nicht

$3 + k_1 5 + k_2 25$ auch nicht

Denjoj Theorie

$e^{2\pi i \lambda_i}$ Punkte auf S^1, $\lambda_i \in$ Eendlich Kardinalität p
Homöomorphismus auf S^1: φ

$\varphi(\lambda_i) = \lambda_{i+e} + \left[\frac{e}{p}\right]$

$\varphi^k(\lambda_i) = \lambda_{i+ek} + \left[\frac{k \cdot e}{p}\right]$

$$\frac{\varphi^n(\lambda_i) - \lambda_i}{n} = \alpha \quad \neg st(n)$$

$$= \frac{\lambda_{i+ne} + \left[\frac{ne}{p}\right] - \lambda_i}{n} = \frac{\left[\frac{ne}{p}\right]}{n} = \frac{e}{p} \quad (\text{setze } n=p)$$

Frage nach topol Äquiv: ?

Kompaktifizierung von ~~topo~~ lokalkomp. topol. Räumen

(X,T) lokalkompakt $\Rightarrow \forall x \in X \; \exists V_x \in T \; V$ kompakt

Definieren neuen Punkt von X x^∞
mit Umgebungen $X \setminus V$ V kompakt $\quad X \cup x^\infty = \tilde{X}, \tilde{T}$

E enthalte alle st Punkte von X endlich

$\bigcup_{x \in E} V_x$ ist immer noch kompakt

$$\left(\begin{array}{l} \forall^{st}_x \in E \; \exists^{st} V_x \in T \; V_x \text{ kompakt} \\ x \in X \setminus E \Rightarrow \neg st(x) \end{array}\right)$$

~~Beh $(\tilde{X}, \tilde{T})$ ist lokalkompakt~~

~~Beh $(\tilde{X}, \tilde{T})$ ist kompakt~~ Beh X lokal kompakt
$X - V$ kompakt

V $\quad X - V$

---

nichtarchimedische
Gewichtsdarstellungen von $\mathbb{Q}$
p-adische Metrik
gewöhnliche Metrik als nichtstandard p-Metrik
$\mathbb{Q}$ als nichtstandard ~~p-Raum~~ F_p Raum

~~Betrachte~~ Wie sehen q adische Metriken in ~~p-adischen~~ F_p Räumen aus?

F_p Körper

q feste Primzahl

Def q Primzahl in F_p: falls $st(q)$ und $\exists\!\!\!/^{st}\, a, b \quad a \cdot b = q \Rightarrow a$ oder b Einheit

q adische Bewertung auf F_p:

$a \in F_p \quad a = q^n \cdot s \quad n$ maximal

(diese Zerlegung ist möglich wegen eindeut. Primfaktorzerlegung)

$\varphi(a) := q^{-n}$

z.B. in F_5

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	X
3	3	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	X
4	4	3	2	X

2, 3 Primzahlen

in F_7

	1	2	3	4	5	6
1						
2		4	6	1	3	
3		6	2	5	1	
4		1	5	2	6	
5		3	1	6	4	
6						

keine Primzahlen

Einheiten in F_p: a Einheit $\Leftrightarrow \exists^{st} b \quad a \cdot b = 1$

p \ q	st	¬st
st	—	—
¬st	q adische Bewertung im usuellen Sinn	gewöhnl. Norm auf $\mathbb{Q}$, falls $q < p$

schwache Topologie auf X $\quad$ X normierter Raum, X^* Dualraum

Def $\quad x \underset{w}{\doteq} y \Leftrightarrow \forall^{st} \varphi \in X^* \quad \varphi(x) \doteq \varphi(y)$

Definition der schwachen Konvergenz

Die Definition ist konsistent mit der üblichen Definition:

alle Vektor $\quad x_n \to 0 \Leftrightarrow \forall^{\neg st\, n} \; \forall \varphi \in X^* \quad \varphi(x_n) \doteq 0$

$\Leftrightarrow \forall^{\neg st\, n} \; \forall E \underset{endl}{\subseteq} X^* \; \forall \varphi \in E \quad \varphi(x_n) \doteq 0$

neue Def. $\quad x_n \underset{w}{\to} 0 \Leftrightarrow \forall^{\neg st\, n} \; \forall^{st} \varphi \quad \varphi(x_n) \doteq 0$

$\Leftrightarrow \forall^{\neg st\, n} \; \forall \varphi \in E \underset{endl.}{\subseteq} X^* \quad \varphi(x_n) \doteq 0$

diese sind äquivalent: $\quad \forall E \underset{std}{\subseteq} X^* \; \forall \varphi \in E \quad \varphi(x_n) \to 0 \quad \Downarrow$ trivial

E mit $st\,\varphi \Rightarrow \varphi \in E \quad \forall \varphi \in E \quad \varphi(x_n) \to 0$

Umkehrung gilt auch:

$\forall^{st} \varphi \quad \varphi(x_n) \to 0$

$\Rightarrow \forall$

ist $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
ein Skalarprodukt in F_{p^n}

bilin, symm, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ $\underset{\text{nicht positiv !}}{}$

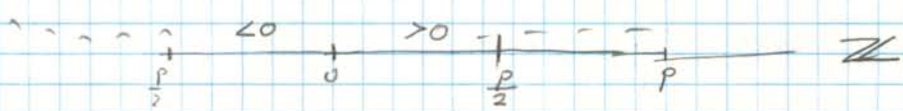
Bsp $(\mathbb{F}_3)^2$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$ $(\mathbb{F}_3)^3$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 1$ sogar 0

Bsp $(\mathbb{F}_5)^2$ (

Definieren Skalarprodukt in $F_p{}^n$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b$
als Elemente in F_{p^n}

Körper $\mathbb{F}_p$
Ordnung auf $\mathbb{F}_p$: auf $\mathbb{N}/_{p\mathbb{N}}$ induzierte Ordnung



$\frac{p-1}{2}$ ist grösstes Element für Standard p

~~$\frac{p+1}{2}$ ist kleinstes Element~~

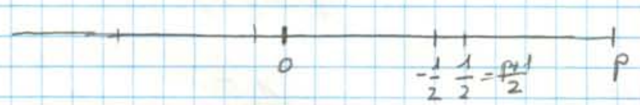
nehmen auch auf $\mathbb{N}/_{p\mathbb{N}}$ induzierte Norm d.h

$\|a\| = a \quad a > 0$
$\|a\| = -a \quad a < 0$

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ ist immer erfüllt

Für nicht st. p haben wir Struktur von $\overset{st}{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{F}_p$
wollen algebraische Struktur von ${}^{st}\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{F}_p$.

$\frac{a}{b}$ in $\mathbb{F}_p$ wohldefiniert ; $\frac{a}{b}$ als nicht st Zahl $\frac{a+kp}{b}$ repräsentiert



Um die Distanz von zwei Elementen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu messen gehen wir so vor $b > 0, d > 0$

$$d\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{bd} \cdot |ad - bc|$$

maximal gekürzt

in $\mathbb{F}_5$: $d\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \cdot |(3-4)| = 1 \cdot 1 = 1$

$\frac{1}{2} = 3$ in $\mathbb{F}_5$

$\frac{2}{3} = 4$ in $\mathbb{F}_5$

Existenz eines Haarmasses auf komp. topol. Gruppe

G kompakte topol. Gruppe
E enthält alle Standard Elemente von G und ist Endlich mit Kardin N

Mass auf E $\quad \mu(A) = \frac{|A|}{N}$ erfüllt alle Eigensch. eines posit. Masses

$\mu(aA) = \mu(A)$ Rechtsnebenklassen haben gleiche Kardinalität

mit Integral $f : G \to \mathbb{C}$

$$\sum_{e \in E} \frac{f(e)}{N}$$

Def $f \in L^p(\mu)$ falls $\int |f|^p d\mu < \infty$ d.h. $\sum_{e \in E} |f(e)|^p < \infty$

Def $\int_G f(g)\, d\mu := {}^{\circ}\left(\sum_{e \in E} \frac{f(e)}{N}\right)$ falls existent

---

Norm ~~Mass~~ auf endl. Körpern

F_p gegeben
Definieren: $a \in F_{p^n}$ $\|a\| := \|a\|$ in zyklisch Multiplikat. Gruppe kleinster Abstand von $1 + 1$

Bsp in F_5
$\|0\|_5 = 0$
$\|1\|_5 = 1$
$\|2\|_5 = 2$
$\|3\|_5 = 2$
$\|4\|_5 = 1$
$\|5\|_5 = 0$

~~gilt~~ ~~nicht~~

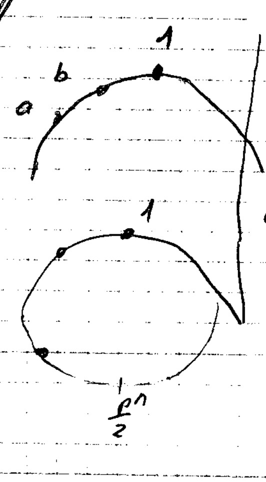
Beh $\|\ \|_{p^n}$ ist Norm
$\|a\| \geq 0$
$\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
$\|a\|\|b\| = \|a \cdot b\|$
$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

~~$a > 0 \Leftrightarrow$~~
$\boxed{a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{p^n}{2}}$

F_{p^n} wird durch diese Norm zu einer Banachalgebra Vektorraum über F_{p^n}

1. Fall
$a+b < \frac{p^n}{2}$ ✓

2. Fall
$a+b \geq \frac{p^n}{2}$ ✓



Es gibt Element für die gilt
$a^2 < 0$
Lösungen der Gleichung
$x^n = b$
schwierig

Diese Norm wird zur gewöhnlichen Norm, falls $\neg St(p)$

F_p wird zu einer topol. Gruppe können z.B.

wie wärs mit $\prod_{i=1}^{\infty} F_p$ einem Hilbertraum $\quad |a| = \sqrt{(a,a)}$ nehme posit. Wurzel

Skalarprodukt auf $(F_p)^n$: $\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle \overset{?}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

evtl. leichte
nicht so Bew.
des Fixpunktsatz
von Markov Kakutani

$\boxed{\begin{array}{l} E \text{ kompakt konvex } \subseteq LCR \\ F \text{ abelsch Familie} \\ \text{stetige affine Abb } E \to E \\ \Rightarrow \exists x_0 \ \forall f \in F \ f(x_0) = x_0 \end{array}}$