Lineare Algebra I

Notizen zu einer Vorlesung von
E. Trubowitz
aufgeschrieben von
Urs Barmettler

WS 1988/89
ETH-Zürich

Inhaltsverzeichnis

1. Der $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ bilden wir die Menge $\mathbb{R}^n$ der geordneten n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq n$, also

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Zwei geordnete n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ heissen gleich, falls $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Addition und Multiplikation mit Skalaren von Vektoren im $\mathbb{R}^n$:
$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Lemma 1. Für die Addition bzw. Skalarmultiplikation von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ gilt:

(i) $v, w, u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (v + w) + u = v + (w + u)$ Assoziativität

(ii) Es gibt einen Nullvektor $0 = (0, \dots, 0)$ mit
$$v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ hat ein Negatives $-v \in \mathbb{R}^n$;
$v = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow -v = (-x_1, \dots, -x_n)$
so dass $v + (-v) = 0$.

(iii) $v + w = w + v \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.

(iv)
$$(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$$
$$\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$$
$$(\lambda \mu) v = \lambda \cdot (\mu v)$$
$$1 . v = v. \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Übung $\square$

Definition. Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Die Familie $v_1, \dots, v_k$ heisst linear unabhängig, falls aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ folgt:
$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0.$$
Sonst heissen sie linear abhängig.

Definition. Eine Familie $\{v_1, \dots, v_k\}$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ heisst ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$, falls jedes $x \in \mathbb{R}^n$ sich als Linearkombination von $\{v_1, \dots, v_k\}$ schreiben lässt, d.h.

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad 1 \le i \le k.$$

Definition. Eine Familie $\{v_1, \dots v_k\}$ von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ nennt man eine Basis des $\mathbb{R}^n$, falls gilt:

(i) $\{v_1, \dots, v_k\}$ sind linear unabhängig

(ii) $\{v_1, \dots, v_k\}$ bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel

(1) $n=2$: Betrachte die Vektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Nun $\{e_1, e_2\}$ sind linear unabhängig und erzeugen den $\mathbb{R}^2$, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Man nennt sie die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

(2) $n=3$: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die Standardbasis.

(3) Allgemein: $e_j = (0, \dots, \underset{j\text{-Stelle}}{1}, 0, \dots 0) \quad j = 1, \dots, n$

bilden die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Satz 2. Jede Basis des $\mathbb{R}^n$ besitzt genau n Elemente.

Beweis: vgl. Stammbach p. 46ff.

Definition. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Unterraum, falls

(i) $\forall v, w \in U$ gilt: $v + w \in U$

(ii) $\forall v \in U, \lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda v \in U$.

Beispiel: Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

Geraden durch 0 $(\cong \mathbb{R})$

Ebenen durch 0 $(\cong \mathbb{R}^2)$

Satz 3. Sei $\{v_1, \dots v_k\}$ eine Basis des Unterraum U von $\mathbb{R}^n$. Dann lässt sich diese Basis zu einer Basis $\{v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n\}$ ergänzen, so, dass $\{v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: vgl. Stammbach p. 46ff.

Definition: Falls $\{v_1, \dots v_k\}$ eine Basis des Unterraumes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so heisst k die Dimension von U. Insbesondere ist also $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Beachte:
- Nach Satz 2 ist diese Definition sinnvoll
- Falls $\{v_1, \dots v_k\}$ eine Basis des Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so folgt: $U \cong \mathbb{R}^k$ (Satz 2).

Definition. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heisst linear, falls

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\varphi(\alpha x) = \alpha \cdot \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definition. Sei $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Nun da $\{v_1, \dots v_n\}$ eine Basis ist gilt:

$$\varphi(v_1) = a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n$$
$$\vdots$$
$$\varphi(v_n) = a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n.$$

Die Matrix $A = (a_{ij})$ heisst die zu φ gehörende Matrix bezüglich der Basis $\{v_1, \dots v_n\}$.

Beachte, in den Kolonnen der Matrix A stehen gerade die Koordinaten der Bilder von v_j $1 \leq j \leq n$ unter der Abb. φ bzgl. $\{v_1, \dots v_n\}$

Definition. Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, falls

(i) $v \neq 0$

(ii) $T(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx = \lambda x\}$ heisst der Eigenraum von T zum Eigenwert λ.

2. Die Gruppen $O(2)$, $SO(2)$, $O(3)$ und $SO(3)$

2.1. $O(2)$ und $SO(2)$

Definition. $O(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T \}$ heisst Orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^2$.

Satz 1. Es sind äquivalent:

(i) $A \in O(2)$

(ii) $A \cdot A^T = \mathbb{1} = A^T A$

(iii) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

(iv) $\| Ax \| = \| x \| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$ (A ist längentreu).

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): klar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, \underbrace{A^T A}_{\mathbb{1}} y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): klar

(iv) $\Rightarrow$ (iii):
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$$
$$= \langle Ax, Ay \rangle$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii):
$$\langle A^T A x - x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$$
$$\Rightarrow A^T A = \mathbb{1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): klar. $\square$

Beachte: Aus $A \cdot A^T = \mathbb{1} \Rightarrow \det A \in \{ \pm 1 \}$

Definition: $SO(2) = \{ A \in O(2) \mid \det A = +1 \}$ heisst spezielle orthogonale Gruppe.

Übung: $O(2)$ und $SO(2)$ sind Gruppen.

Sei nun $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$, $T \in O(2)$. Sei weiter $T(e_1) = (a,b)$, $T(e_2) = (c,d)$, d.h. T ist gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis.

Da $T \in O(2)$ gilt nach Satz 1: $\quad A \cdot A^T = \mathbb{1}$.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) $\underline{a \neq 0}$: $\quad ab + cd = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\dfrac{cd}{a}$

$$\Rightarrow \frac{c^2d^2}{a^2} + d^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(c^2+a^2)}_{=1} d^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{d = \pm a}$$

Aus $ab + cd = 0$ folgt:

$$d = +a \quad \Rightarrow \quad \underset{\neq 0}{a}(b+c) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -c$$

$$d = -a \quad \Rightarrow \quad \underset{\neq 0}{a}(b-c) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Also hat unser A die Gestalt $\quad A = \begin{bmatrix} a & \mp b \\ b & \pm a \end{bmatrix}$ mit $a^2+b^2=1$.

(ii) $\underline{a = 0}$: $\quad cd = 0, \quad c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1$.

Mit $cd = 0$ und $c = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad d = 0. \quad \Rightarrow b = \pm 1$.

$$\Rightarrow A \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

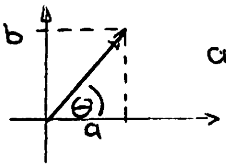
Aus (i) und (ii) folgt:

$$O(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & \mp b \\ b & \pm a \end{bmatrix} ; \ a^2+b^2 = 1 \right\}$$ (Vorzeichen in zweiter Kolonne gekoppelt!)

Also: $\underline{T(e_2) = \pm(-b, a)}$.

Da $a^2+b^2=1$ gibt es ein Θ mit $0 \leq \Theta \leq 2\pi$, so dass

$$a = \cos\Theta \quad \text{und} \quad b = \sin\Theta.$$



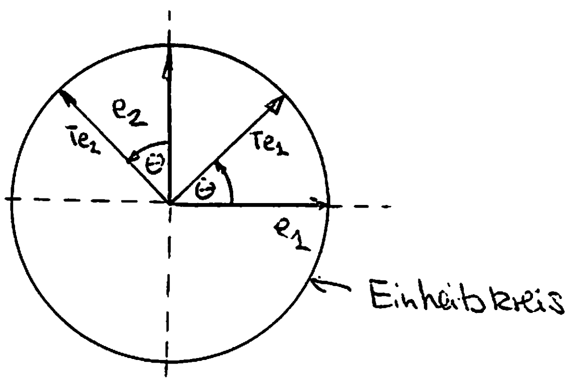
$a^2+b^2=1 \Rightarrow (a,b)$ ist Einheitsvektor.

<u>Fall 1.</u> $T(e_2) = (-b, a)$

Somit bekommen wir für die zu T gehörende Matrix A bzgl. e_1, e_2:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

$$a^2+b^2=1$$



Somit ist T eine <u>Drehung im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel Θ</u>.

Es gilt: $\det T = \cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1. \Rightarrow T \in SO(2)$.

<u>Fall 2.</u> $T(e_2) = (b, -a)$

Somit bekommen wir für die zu T gehörende Matrix B bzgl. e_1, e_2:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{bmatrix}$$

$$\det T = \det B = -1.$$

Es gilt: $B^2 = \mathbb{1} \Rightarrow T^2 = id$.

Sei $x_1 = (\cos\Theta/2, \sin\Theta/2)$. Aus $T(x_1) = x_1$ folgt, dass x_1 ein Eigenvektor von T mit Eigenwert 1 ist.

Somit wird die Gerade $\{\lambda x_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ <u>punktweise festgehalten unter T</u>

Der Vektor $x_2 = (-\sin\Theta/2, \cos\Theta/2)$ ist ebenfalls ein Eigenvektor von T mit Eigenwert -1.
Weiter gilt: $\{x_1, x_2\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\langle x_1, x_2\rangle = 0$, d.h. $x_1 \perp x_2$.

Bezüglich dieser neuen Basis $\{x_1, x_2\}$ wird die Transformation T durch die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

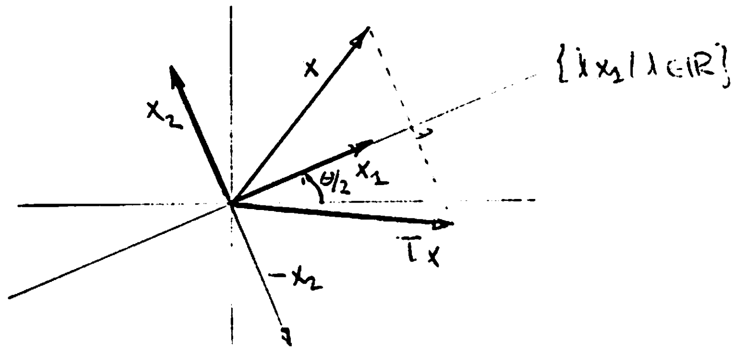
beschrieben.

Sei $x \in \mathbb{R}^2$, $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

$\Rightarrow \quad Tx = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2 \qquad$ (T ist linear)

$\qquad\quad = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$

Somit ist T also eine*r* orthogonale Spiegelung an der Geraden $\{\lambda x_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.



Es gilt: $\quad Tx = x - 2\langle x, x_2\rangle \cdot x_2 \qquad$ (vgl. Figur)

Somit haben wir

Satz 2: Jedes $T \in O(2)$ ist entweder eine Drehung oder eine Spiegelung

$\square$

Also

$$O(2) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}}, \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{bmatrix}} ; \Theta \in [0, 2\pi] \right\} \text{ bzgl. } e_1, e_2.$$

Drehungen im Gegenuhrzeigersinn um Winkel Θ $= SO(2)$

Spiegelungen an der Geraden $\{\lambda \cdot (\cos\Theta/2, \sin\Theta/2)\}$ det $= -1$.

2.2. O(3) und SO(3)

Definition: $O(3) = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T \}$ heisst

Orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^3$.

Satz 3. Es sind äquivalent

(i) $A \in O(3)$

(ii) $A \cdot A^T = \mathbb{1} = A^T A$

(iii) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$

(iv) $\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Beweis: analog Satz 1. □

Definition: $SO(3) = \{ A \in O(3) \mid \det A = +1 \}$ heisst

spezielle orthogonale Gruppe.

Satz 4. O(3) und SO(3) sind Gruppen bzgl. der Matrixmultiplikation.

Beweis: Übung.

Lemma 5. Sei $A \in SO(3)$. Dann gilt:

$\det(A - \mathbb{1}) = 0$.

Beweis:

$$\det(A - \mathbb{1}) = (-1)^3 \det(\mathbb{1} - A) = -\det((\mathbb{1} - A)^T)$$

$$\underset{\text{vgl. Übung 3.}}{=} -\det(\mathbb{1}^T - \underbrace{A^T}_{= A^{-1}\text{, da } A \in SO(3) \subset O(3)}) = -\det(\mathbb{1} - A^{-1})$$

Da $\det A = 1$ $(A \in SO(3))$ und det multiplikativ ist, d.h. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det B$, folgt:

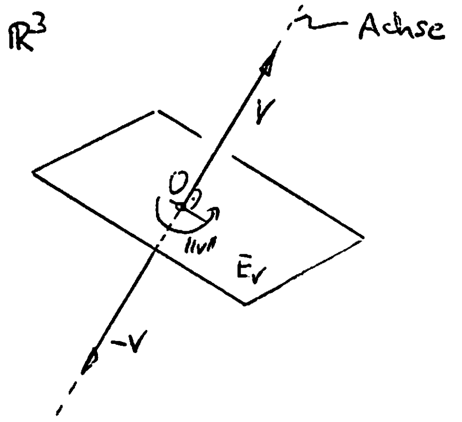
$$\det(A - \mathbb{1}) = \det(A - \mathbb{1}) \cdot \det A \underset{\text{oben}}{=} -\det(\mathbb{1} - A^{-1}) \cdot \det A$$

$$= -\det((\mathbb{1} - A^{-1}) \cdot A) \underset{\text{Übung 2}}{=} -\det(A - \underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}})$$

$$= -\det(A - \mathbb{1})$$

$\Rightarrow \det(A - \mathbb{1}) = 0$. □

Definition. Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, E_v die Ebene mit Normalenvektor v und $0 \in E_v$ (vgl. Figur). Eine Drehung der Ebene $E_v \cong \mathbb{R}^2$ um den Winkel $\|v\| \in \mathbb{R}$ induziert eine Drehung R_v des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\|v\|$ mit Achse $\{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$



Rechtehandregel!

Lemma 6.

(i) $R_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung

(ii) $R_v \in SO(3)$

Beweis.

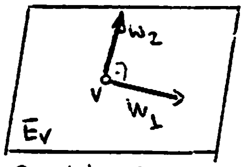
(i) trivial

(ii) Wir berechnen die Matrix von R_v bezüglich einer Basis $\{v, w_1, w_2\}$ des $\mathbb{R}^3$, wobei:

$$\langle v, w_i \rangle = 0 \qquad i = 1,2 \qquad \Rightarrow \qquad w_1, w_2 \in E_v.$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \quad , \quad \|w_1\| = \|w_2\| = 1, \quad \underbrace{\det(v, w_1, w_2) > 0}_{\text{damit Rechtssystem!}}$$

So eine Basis des $\mathbb{R}^3$ existiert.



(Projektion)

$$R_v\, v = 1 \cdot v + 0 \cdot w_1 + 0\, w_2 \qquad (v \text{ Achse})$$

$$R_v w_1 = 0 \cdot v + \cos\|v\| \cdot w_1 + \sin\|v\| \cdot w_2$$

$$R_v w_2 = 0 \cdot v - \sin\|v\| \cdot w_1 + \cos\|v\| \cdot w_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{Matrix von } R_v \text{ bzgl. } \{v, w_1, w_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\|v\| & -\sin\|v\| \\ 0 & \sin\|v\| & \cos\|v\| \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det R_v = 1 \quad \Rightarrow R_v \in SO(3).$$

$\square$

Definition. $B_\pi := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| \leq \pi \}$ heisst Kugel mit Radius π.

Lemma 7. Seien $v, v' \in B_\pi$ mit $v \neq v'$. Dann gilt:
$R_v = R_{v'} \iff \|v\| = \pi$ und $v' = -v$.

Beweis.

"$\Leftarrow$": klar.

"$\Rightarrow$": Vor. $R_v = R_{v'}$

Aus $v' = R_{v'} v' = R_v v'$ folgt: $v' = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Erweitere v zu einer Basis $\{v, w_1, w_2\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit
$\langle v, w_i \rangle = 0$, $i = 1, 2$, $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$, $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$

$$R_v w_1 = \cos\|v\| \cdot w_1 + \sin\|v\| \cdot w_2$$
$$R_{v'} w_1 = \cos\|v'\| \cdot w_1 + \sin\|v'\| \cdot w_2$$

Da $\{w_1, w_2\}$ linear unabhängig und $R_v = R_{v'}$ folgt:
$\cos\|v\| - \cos\|v'\| = 0$.

Da $v, v' \in B_\pi \Rightarrow \|v\| = \underbrace{\|v'\|}_{\|\lambda v\|} = |\lambda| \cdot \|v\| \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Nach Vor. gilt $v \neq v' \Rightarrow \lambda = -1$, also $v' = -v$.
$\Rightarrow R_v$ und R_{-v} sind Drehungen die in entgegengesetzte Richtungen starten, jedoch um denselben Winkel $\|v\|$. Somit folgt aus $R_v = R_{v'}$ dass $\|v\| = \pi$.

$\square$

Lemma 7 motiviert folgende Definition:

Definition. Auf B_π definieren wir folgende Äquivalenzrelation $\sim$ durch
$x, y \in B_\pi$: $x \sim y :\iff y = -x$ und $\|x\| = \pi$.

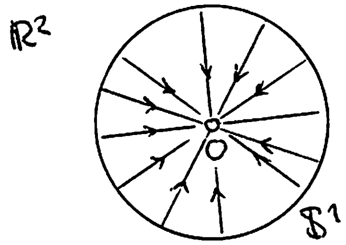
$\tilde{B}_\pi := B_\pi / \sim$ Raum der Äquivalenzklassen, d.h. $\tilde{B}_\pi$ entsteht aus B_π indem man Antipodalpunkte auf dem Rand von B_π identifiziert, also v und $-v$ mit $\|v\| = \pi$ werden miteinander identifiziert.
Dieser Raum heisst reeller projektiver Raum der Dimension 3 und wird üblicherweise mit $\mathbb{R}P^3$ bezeichnet.

Wir wollen nun eine interessante geometrische Eigenschaft von $\tilde{B}_\pi$ angeben. Dazu benötigen wir eine Definition.

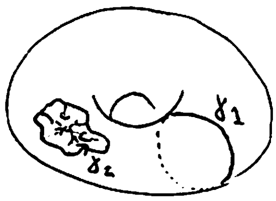
<u>Definition.</u> Sei γ eine Kurve in $X \subseteq \mathbb{R}^n$. γ heisst zusammenziehbar, falls es eine stetige Deformation von γ zu einem Pkt. $x_0 \in X$ gibt.

<u>Beispiele:</u>

(1) Betrachte die Kreislinie $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^2$.
S^1 ist zusammenziehbar in den Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.



(2) Betrachten wir den Torus T im $\mathbb{R}^3$
$T = S^1 \times S^1$

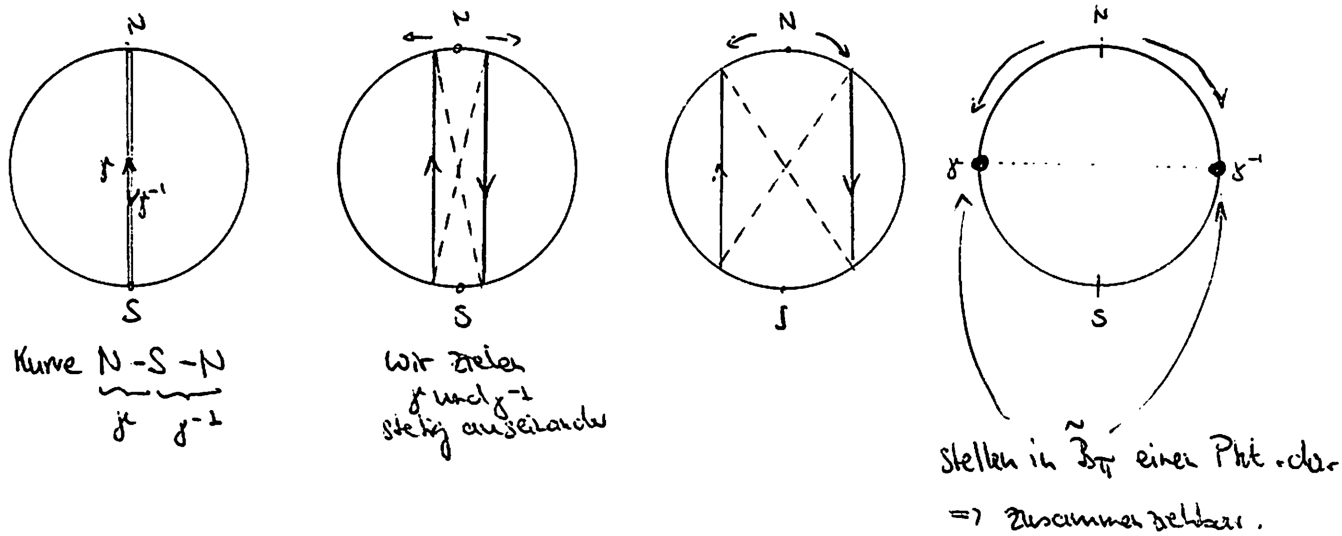
$T =$ 

γ_1 ist nicht zusammenziehbar
γ_2 ist zusammenziehbar

<u>Lemma</u> (ohne Beweis)

Betrachte die Verbindung γ des Nord- und Südpoles von B_π.
In $\tilde{B}_\pi$ ist γ eine geschlossene Kurve, welche nicht zusammenziehbar ist.
Durchläuft man jedoch γ zweimal, so lässt sich diese geschlossene Kurve in $\tilde{B}_\pi$ zusammenziehen.

Um uns von der Richtigkeit der zweiten Aussage des Lemmas zu überzeugen, geben wir eine Bildfolge:



$\square$

Wir wollen nun zeigen, dass $SO(3)$ die geometrische Struktur von $\tilde{B}_\pi$ hat, d.h. dass es eine bijektive Abb. $\varphi : SO(3) \longrightarrow \tilde{B}_\pi$ gibt:

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{B}_\pi &\longrightarrow SO(3) \\ v &\longmapsto R_v \end{aligned}$$

Nach Lemma 6 ist diese Abbildung wohldefiniert und nach Lemma 7 injektiv.

Noch zu zeigen: ψ surjektiv.

(a) $\mathbb{1} \in SO(3) \Rightarrow \psi(0) = \mathbb{1}$.

(b) $A \neq \mathbb{1} \in SO(3)$

Nach Lemma 5 gilt: $\det(A - \mathbb{1}) = 0$. Nach Übung 3 Aufgabe 6 gibt es ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $(A - \mathbb{1})x = x \Rightarrow Ax = x$.

<u>Behauptung</u>. Sei $y \in \mathbb{R}^3$ mit $Ay = y \Rightarrow y = \lambda x$.
d.h. der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist <u>eindimensional</u>.

$\ulcorner$ Sei E_x die Ebene mit Normalenvektor x. Wähle eine Basis $\{x, w_1, w_2\}$ des $\mathbb{R}^3$ d.h. $w_1, w_2 \in E_x$.

Wir wollen nun zeigen, dass A die Ebene E_x invariant lässt:

$$0 = \langle x, w_i \rangle \underset{A \in SO(3)}{=} \langle Ax, Aw_i \rangle \overset{\shortparallel}{\underset{x}{=}} \langle x, Aw_i \rangle \Rightarrow Aw_i \in E_x \qquad i = 1,2.$$

Somit lässt A die Ebene E_x invariant, dh. A hat bzgl. der Basis $\{x, w_1, w_2\}$ die Form $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$,

wobei $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SO(2)$

eine Drehung der Ebene E_x ist. Also lässt sich $\tilde{A}$ nach Satz 2 in der Form

$$\begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \qquad 0 \leq \Theta < 2\pi$$

schreiben.

Sei nun $y \in \mathbb{R}^3$ mit $Ay = y$.

$$y = \alpha x + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

$$Ay = \alpha \underbrace{Ax}_{x} + \beta_1 Aw_1 + \beta_2 Aw_2 = \alpha x + A(\underbrace{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2}_{\in E_x})$$

Nach 1.1. wissen wir, dass nur der 0-Pkt in E_x invariant bleibt $\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$.

$\Rightarrow y = \alpha x$.

Somit gibt es einen eindeutigen Vektor $v_A \in \mathbb{R}^3$:

(1) $0 \leq \Theta \leq \pi \Rightarrow v_A = \lambda x$, $\lambda > 0$ und $\|v_A\| = \Theta$

(2) $\pi \leq \Theta < 2\pi \Rightarrow v_A = \lambda x$, $\lambda < 0$ und $\|v_A\| = 2\pi - \Theta$.

Beachte R_v hat bzgl. $\{v, w_1, w_2\}$ Matrix A.

Somit haben wir

Satz 8. Die Abb. $\psi : \tilde{B}_\pi \longrightarrow SO(3)$, $v \longmapsto R_v$ ist bijektiv und gibt uns somit eine geometrische Struktur für $SO(3)$

3. $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

3.1. Definition eines Vektorraumes

Definition. Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ist eine nichtleere Menge von Elementen (Vektoren), zusammen mit

(i) einer Addition "+", so dass $(V,+)$ eine abelsche Gruppe bildet

(ii) einer skalaren Multiplikation "·" von Elementen in $\mathbb{K}$ mit Elementen aus V, $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V \Rightarrow \alpha \cdot v \in V$, mit

- $\alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w$
- $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$
- $(\alpha \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta v)$
- $1 \cdot v = v$

$\forall v, w \in V, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Beispiele.

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$-Vektorraum (Kapitel 1)

(2) $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei
$\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \alpha \cdot z = \alpha x + i\alpha y$.

(3) $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}$-Vektorraum

(4) $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-Vektorraum.

3.2. Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-VR.

(1) Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine endliche Familie von Vektoren aus V. Sie heisst linear unabhängig, falls aus
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \ (1 \le i \le k)$$
folgt $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0$. Sonst heisst sie linear abhängig $/\mathbb{K}$.

(2) Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heisst linear unabhängig $/\mathbb{K}$, wenn je endlich viele verschiedene Elemente aus B linear unabhängig sind.

Definition. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heisst Erzeugendensystem von $V/\mathbb{K}$, falls gilt:

für jedes $v \in V$ gibt es $a_1, \dots, a_k \in A$ mit

$$v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \qquad \lambda_i \in \mathbb{K} \; (1 \le i \le k).$$

Falls $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von $V/\mathbb{K}$, so heisst V endlich erzeugt.

Definition. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heisst Basis von $V/\mathbb{K}$, falls

(i) B ist ein Erzeugendensystem von $V/\mathbb{K}$

(ii) B ist linear unabhängig

Beispiele.

(1) $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-VR: Basis $e_j = (0, \dots, \underset{j\text{-te Stelle}}{1}, \dots 0)$

(2) $V = \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR.
$\{1, i\}$ bildet eine $\mathbb{R}$-Basis

(3) $V = \mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-VR.
$\{1\}$ bildet eine $\mathbb{C}$-Basis.

(4) Sei $P_\infty(\mathbb{R})$ = die Menge aller reellen Polynome mit einer Unbestimmten, d.h. $f(x) \in P_\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ für ein n, mit $a_i \in \mathbb{R}$.
$P_\infty(\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$B = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \subseteq P_\infty(\mathbb{R})$ ist ein Erzeugendensystem von $P_\infty(\mathbb{R})$, sogar eine Basis. (Übung).

Satz 1. Sei B eine Basis des $\mathbb{K}$-VR $V \neq \{0\}$. Dann lässt sich jedes Element $v \in V$ eindeutig als Linearkombination von endlich vielen Elementen aus B schreiben.

Beweis

Seien $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ und $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ zwei verschiedene Darstellungen von v mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \le i \le n)$, $\mu_j \in \mathbb{K}$ $(1 \le j \le k)$.
Da $v \neq 0$ sind nicht alle $\lambda_i = 0$ und auch nicht alle $\mu_i = 0$!

$\Rightarrow \quad 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

Da die beiden Darstellungen von v verschieden sind, haben wir somit linear abhängige Elemente aus B gefunden ↯.

□

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $U \subseteq V$ eine Teilmenge.
U heisst Unterraum von V, falls
(i) $\forall v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$
(ii) $\forall v \in U, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha v \in U$.

Satz 2. Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann gilt:
(a) V besitzt eine endliche Basis
(b) Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente
(c) Sind die Elemente $\{v_1, \dots, v_r\}$ aus V linear unabhängig, dann ist entweder $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von V, oder es gibt Elemente $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ so dass $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V / $\mathbb{K}$ ist.

Beweis.
(c) Falls $\{v_1, \dots, v_r\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, so ist nichts zu beweisen. Andernfalls ist der von $\{v_1, \dots, v_r\}$ erzeugte Unterraum $U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r) = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$ echt in V enthalten.
$\Rightarrow \exists\, v_{r+1} \in V - U$.
Nun $\{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ sind ebenfalls linear unabhängig, denn sonst könnte man v_{r+1} als Linearkombination der $\{v_1, \dots, v_r\}$ schreiben, was ein Widerspruch zu $v_{r+1} \in V - U$ wäre.
Also sind $\{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ linear unabhängig. Dieses Verfahren können wir fortsetzen. Da V endlich erzeugt ist bricht es jedoch ab. Also gibt es $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ so dass $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis ist.
(a) Wegen $V \neq \{0\}$ gibt es ein $v \in V$ mit $v \neq 0$. Dann ist aber $\{v\}$ linear unabhängig und kann nach (c) zu einer endlichen Basis von V ergänzt werden.

(b) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V mit n-Elementen (über $\mathbb{K}$).
Somit ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V und es folgt, dass $n+1$ Elemente aus V linear abhängig sind:

Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \in V$

$$\Rightarrow \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i$$

Beh. $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ linear abhängig. Also müssen wir das folgende Gleichungssystem untersuchen:

$$0 = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{ji} \lambda_j \right) v_i$$

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis folgt

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ji} \lambda_j = 0 \qquad i = 1, \dots, n \qquad (*)$$

$(*)$ ist ein homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen und $(n+1)$ Unbekannten λ_j. Somit hat $(*)$ eine nicht-triviale Lösung, dh. nicht alle $\lambda_j = 0$. $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ sind linear abhängig.

Somit folgt, dass jede andere Basis C von $V/\mathbb{K}$ höchstens n-Elemente besitzt. Vertauscht man nun die Rolle von $\mathcal{B}$ mit C, so folgt die Behauptung. $\square$

<u>Definition.</u> Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $V \neq 0$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V/\mathbb{K}$. Dann heisst $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ die $\mathbb{K}$-Dimension von V.

<u>Bemerkung.</u> Aus Satz 2 (c) folgt somit, dass jede Basis $\{v_1, \dots, v_r\}$ eines Unterraumes $U \subseteq V$ zu einer Basis von V ergänzt werden kann.

<u>Beispiele.</u>

(1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

(2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

(4) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

3.3. Lineare Abbildungen.

Definition. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f: V \longrightarrow W$ heisst linear, falls

(i) $f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in V.$

Definition. Es sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

$\ker f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ heisst Kern von f.

$\operatorname{im} f = \{ f(v) \in W \mid v \in V \}$ heisst Bild von f.

Satz 3. Ist $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, so ist $\ker f$ ein Unterraum von V und $\operatorname{im} f$ ein Unterraum von W.

Beweis.

(a) Seien $v, w \in \ker f$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

zu zeigen: $v+w \in \ker f$

$\alpha \cdot v \in \ker f$

$f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0. \Rightarrow v+w \in \ker f$

$f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \alpha v \in \ker f.$

$0 \in \ker f.$

(b) Seien $v' = f(v)$ und $w' = f(w)$ im Bild von f, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Bez. $v' + w' \in \operatorname{im} f$

$\alpha v' \in \operatorname{im} f$

$v' + w' = f(v) + f(w) = f(v+w) \quad \Rightarrow v'+w' \in \operatorname{im} f.$

$\alpha v' = \alpha \cdot f(v) = f(\alpha v) \quad \Rightarrow \alpha v' \in \operatorname{im} f.$

$0 \in \operatorname{im} f'$

$\square$

Satz 4. Eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ ist genau dann injektiv, falls $\ker f = \{0\}$.

Beweis.

(i) Vor. f injektiv.

Sei $v \in \ker f$. $\Rightarrow f(v) = 0 \underset{\text{linear}}{=} f(0) \underset{\text{inj}}{\Longrightarrow} v = 0$.

Also $\ker f = \{0\}$.

(ii) Sei $\ker f = \{0\}$

$f(v) = f(w) \Rightarrow f(v) - f(w) = 0 \Rightarrow f(v-w) = 0$
$\Rightarrow v - w \in \ker f = \{0\} \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$. □

Definition. Eine lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus, falls f injektiv und surjektiv ist. V und W heissen dann isomorph.

Satz 5. Der $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{C}$ ist isomorph zu dem $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^2$.

Beweis.

Definiere $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \longmapsto x + iy$.

- f ist linear.
- $\ker f = \{(x,y) \mid x + iy = 0\}$
  $x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $y = 0 \Rightarrow \ker f = 0 \underset{\text{Satz 4}}{\Longrightarrow} f$ injektiv.
- Sei $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x + iy$, da $\{1, i\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$
  $\Rightarrow f(x,y) = z \Rightarrow f$ surjektiv. □

Satz 6. Sind $f, g: V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen, und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine $\mathbb{K}$-Basis von V. Dann sind äquivalent:

(i) $f(v_i) = g(v_i) \quad i = 1, \dots, n$

(ii) $f = g$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei $v \in V$ $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in K$ $(1 \le i \le n)$ da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine K-Basis (eindeutig!).

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot g(v_i) = g(v)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): trivial

$\square$

Satz 7. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{K}$-VR V. Dann gibt es zu jeder Wahl von Vektoren $w_1, \dots, w_n$ aus W eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$, $1 \le i \le n$. f ist eindeutig bestimmt.

Beweis.

Sei $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ ein beliebiger Vektor aus V. Da $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ durch v eindeutig bestimmt sind lässt sich $f: V \to W$ definieren durch

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i.$$

Es ist klar, dass $f(v_i) = w_i$ $1 \le i \le n$.

Sei $V \ni w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i$

$$f(v+w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot w_i = f(v) + f(w).$$

$$f(\alpha v) = f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i) \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{w_i} = \alpha f(v).$$

$\alpha \in \mathbb{K}$.

Somit ist f linear. Nach Satz 6 ist sie eindeutig bestimmt.

$\square$

Bemerkung 8.
Somit kann eine lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$ dadurch definiert werden, dass sie auf einer Basis von V festgelegt wird.
Aus dem Beweis von Satz 7 folgt, dass $\operatorname{im} f$ durch die Bilder einer Basis von V erzeugt wird, d.h. $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f \leq \dim_{\mathbb{K}} V$.

Satz 9. Zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-VR V und W sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.

Beweis.
Sei $f: V \xrightarrow{\cong} W$ ein Isomorphismus.
$\Rightarrow \operatorname{im} f = W$.
Nach Bemerkung 8 gilt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f = \dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V$.
Mit der Umkehrabb. $f^{-1}: W \longrightarrow V$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} W$

$\square$

Korollar. Ist V ein $\mathbb{K}$-VR der Dimension $n \geq 1$. Dann gilt:

$$V \cong \mathbb{K}^n.$$

Satz 10. (Dimensionsformel)
Sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abb. und $\dim V = n$. Dann gilt,
$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

Beweis.

Nach Satz 3 ist $\ker f$ ein Unterraum von V. Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine K-Basis von $\ker f$. Ergänzen wir diese zu einer Basis von V: $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ (Satz 2). Das Bild $\operatorname{im} f$ wird aufgespannt durch die Vektoren
$$f(v_1) = 0, \dots, f(v_r) = 0, f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$$
(Bemerkung 8).
Wir zeigen, dass $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig sind, denn dann ist $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis von $\operatorname{im} f$.

Dazu sei

$$0 = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i) = f\left(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i v_i\right), \quad \lambda_i \in K.$$

$$\Rightarrow w = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \in \ker f$$

$$\Rightarrow \quad w = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \cdot v_j$$, da $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis des $\ker f$.

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig sind folgt

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0, \quad \lambda_{r+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow$ $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ linear unabhängig und somit eine Basis von $\operatorname{im} f$.

$$\Rightarrow \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = r + (n-r) = n = \dim V.$$

$\square$

3.4. Lineare Abbildungen und Matrizen.

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine $\mathbb{K}$-Basis von V, $\{w_1, \dots, w_m\}$ eine $\mathbb{K}$-Basis von W.

Nach Satz 7 ist f eindeutig bestimmt durch die Bilder von $f(v_j)$.

Es gelte $\quad \underline{f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i} \qquad j = 1, \dots, n.$

Sei $v \in V$ ein bel. Vektor. Es sei

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die <u>Koordinaten von v bzgl. $\{v_1, \dots, v_n\}$</u>.

$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i$$ $\mu_1, \dots, \mu_m$ sind die <u>Koordinaten von $f(v)$ bzgl. der Basis $\{w_1, \dots, w_m\}$</u>.

Dann gilt:

$$f(v) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j\Big) w_i .$$

Für die Koordinaten $\mu_1, \dots, \mu_m$ von $f(v)$ bzgl. der Basis $\{w_1, \dots, w_m\}$ erhalten wir somit:

$$\underline{\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j} \quad , \quad i = 1, \dots, m .$$

Somit folgt:

<u>Satz 11.</u> Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W, dann wird die lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$ vollständig durch die $m \times n$ – Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei stehen in der k-ten Kolonne von A gerade die Koordinaten von $f(v_k)$ bzgl. der Basis $\{w_1, \dots, w_m\}$.

<u>Definition.</u> Die Matrix A heisst die zu f gehörende Matrix bzgl. der Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_m\}$.

4. Die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$

4.1. Die Iwasawa - Zerlegung von $SL(2,\mathbb{R})$

Definition. $SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ heisst spezielle lineare Gruppe.

Wir betrachten nun folgende drei Klassen von Matrizen:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} ; 0 < \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; 0 \leq \theta < 2\pi \right\} = SO(2).$$

Es gilt: $A \subseteq SL(2,\mathbb{R})$, da $\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} = 1$

$N \subseteq SL(2,\mathbb{R})$, da $\det \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$K \subseteq SL(2,\mathbb{R})$, $K = SO(2)$.

Definition. Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge. H heisst eine Untergruppe von G, falls

(i) $\forall a,b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$

(ii) $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Bemerkung. Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist H eine Gruppe.

Lemma 1. Die Teilmengen A, N, K von $SL(2,\mathbb{R})$ bilden Untergruppen von $SL(2,\mathbb{R})$, bzgl. der Matrixmultiplikation.

Beweis. Übung.

$\square$

Satz 2 (Iwasawa-Zerlegung)

Sei $B \in SL(2,\mathbb{R})$. Dann lässt sich B schreiben als

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit eindeutig bestimmten θ, λ und μ, wobei $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Also können wir schreiben (Lemma 1 und Satz 2):

$$SL(2,\mathbb{R}) = K \cdot A \cdot N$$

wobei K, A, N die auf Seite 24 definierten Untergruppen von $SL(2,\mathbb{R})$ bezeichnet.

Beweis (Satz 2):

Sei also $SL(2,\mathbb{R}) \ni B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Für das Produkt der drei Matrizen bekommen wir:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & \lambda\mu\cos\theta - \frac{1}{\lambda}\sin\theta \\ \lambda\sin\theta & \lambda\mu\sin\theta + \frac{1}{\lambda}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Also: $\quad a = \lambda\cos\theta, \qquad c = \lambda\sin\theta$

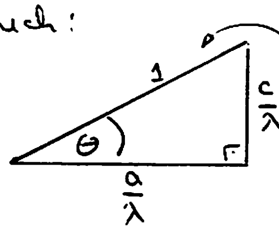
$\qquad b = \lambda\mu\cos\theta - \frac{1}{\lambda}\sin\theta, \qquad d = \lambda\mu\sin\theta + \frac{1}{\lambda}\cos\theta.$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = \lambda^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \lambda^2 \quad \Rightarrow \underline{\lambda = (a^2+c^2)^{1/2}} \ \underline{> 0}$$

Somit ist also λ durch a und c eindeutig festgelegt.

Aus $a = \lambda\cos\theta$, $c = \lambda\sin\theta$ folgt auch:

$$\underline{\cos\theta = \frac{a}{\lambda}}, \qquad \underline{\sin\theta = \frac{c}{\lambda}}$$



$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{c}{\lambda^2}\right) = 1$

$\Rightarrow \exists$ eindeutiges θ mit $0 \leq \theta < 2\pi$.

Als nächstes müssen wir noch μ bestimmen:

$$b = \lambda\mu\cos\theta - \frac{1}{\lambda}\sin\theta \qquad d = \lambda\mu\sin\theta + \frac{1}{\lambda}\cos\theta$$

Nun

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\mu & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\mu\cos\theta & -\frac{1}{\lambda}\sin\theta\\ \lambda\mu\sin\theta & \frac{1}{\lambda}\cos\theta\end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\mu & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

Multiplizieren beide Seiten mit $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\theta & +\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda\mu & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & +\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\mu & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren beide Seiten von links mit $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1/\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\mu\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{b}{\lambda}\cos\theta + \frac{d}{\lambda}\sin\theta\\ -\lambda\left(b\underbrace{\sin\theta}_{\frac{c}{\lambda}} - d\underbrace{\cos\theta}_{\frac{a}{\lambda}}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{b}{\lambda}\cos\theta + \frac{d}{\lambda}\sin\theta\\ \underbrace{ad - bc}_{\det B = 1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{b}{\lambda}\cos\theta + \frac{d}{\lambda}\sin\theta\\ 1\end{pmatrix}$$

Somit bekommen wir

$$\mu = \frac{b}{\lambda}\cos\theta + \frac{d}{\lambda}\sin\theta = \frac{1}{\lambda}\Big(b\underbrace{\cos\theta}_{\frac{a}{\lambda}} + d\underbrace{\sin\theta}_{\frac{c}{\lambda}}\Big)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}(ab + dc)$$

$$\mu = \frac{ab + dc}{a^2 + c^2}$$, somit eindeutig bestimmt.

Fassen wir zusammen:

(i) $\lambda = (a^2 + c^2)^{1/2} > 0$, $B \in SL(2,\mathbb{R})$.

(ii) $\mu = \dfrac{ab + dc}{a^2 + c^2}$

(iii) $\cos\theta = \dfrac{a}{\lambda}$, $\sin\theta = \dfrac{c}{\lambda}$.

λ, μ, θ eindeutig bestimmt $\square$

Als nächstes wollen wir ein geometrisches Bild von $SL(2,\mathbb{R})$ geben:

$$SL(2,\mathbb{R}) = K \cdot A \cdot N$$

wobei $K = SO(2)$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 < \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition. $SL(2,\mathbb{C}) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$

Definition. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. Eine Abbildung

$$T_A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

heisst Möbiustransformation oder gebrochen lineare Transformation. Die Menge der Möbiustransformationen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$.

Lemma Die Möbiustransformationen $\mathcal{M}$ bilden eine Gruppe:

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$
$$(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$$
$$T_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}, \qquad \text{wobei } A, B \in SL(2,\mathbb{C})$$

Beweis. Übung. $\square$

Betrachten wir nun die Möbiustransformation T_A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

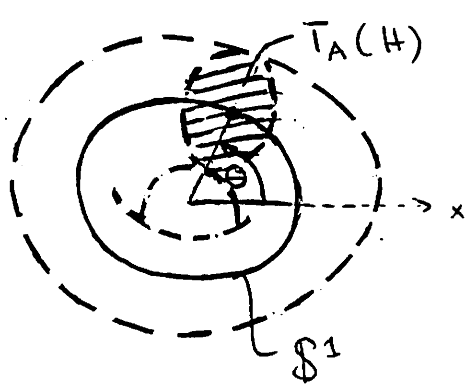
T_A liefert eine bijektive Abbildung der offenen Halbebene $H = \{ z \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$ in das Innere des Einheitskreis $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$, d.h.

$$T_A : H \xrightarrow{\cong} D.$$

(Übung: Serie 4, Aufgabe 3).

Somit haben wir:

$$f : \begin{matrix} SL(2,\mathbb{R}) \\ \parallel \\ K \cdot A \cdot N \end{matrix} \xrightarrow{\text{bijektiv.}} \text{offenen Volltorus.}$$



Satz 3. $SL(2,\mathbb{R})$ hat die geometrische Struktur eines offenen Volltorus.

4.2. Endomorphismen $f: V \to V$ eines endlich dimensionalen Vektorräumen.

Sei V ein VR über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Definition. Eine lineare Abb $f: V \to V$ heisst Endomorphismus.

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von f, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Matrix von f bzgl. der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Sei $\{v_1', \dots, v_n'\}$ eine andere Basis von f, $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Matrix von f bzgl. der Basis $\{v_1', \dots, v_n'\}$.

Also: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, $f(v_j') = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i'$

Sei $v_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} v_k'$, $T = (t_{ki}) \in GL(n, \mathbb{K})$.

Nun

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{n} t_{ki} v_k' = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} t_{ki} \right) v_k'$$

Anderseits gilt:

$$f(v_j) = f\left(\sum_{l=1}^{n} t_{lj} v_l' \right) = \sum_{l=1}^{n} t_{lj} f(v_l') = \sum_{l=1}^{n} t_{lj} \sum_{k=1}^{n} b_{kl} v_k'$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} t_{lj} b_{kl} \right) v_k'$$

Somit folgt: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot t_{ki} = \sum_{l=1}^{n} t_{lj} b_{kl} \implies TA = B \cdot T$

$$\implies \underline{B = TAT^{-1}}$$

<u>Satz 4</u> (Basistransformation)

Sei $f: V \to V$ eine lineare Abb., $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ $\mathbb{K}$-Basen von V, A die Matrix von f bzgl. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und B die Matrix von f bzgl. $\{v_1', \ldots, v_n'\}$. Dann gilt:

$$B = TAT^{-1}$$

wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ die Transformationsmatrix welche die Elemente der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ als Linearkombination der Elemente $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ darstellt ist, dh.

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} v_k' .$$

<u>Definition.</u> Zwei Elemente $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ heissen <u>ähnlich</u>, falls es ein $T \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt mit $B = TAT^{-1}$.

<u>Bemerkung:</u>

$M_n(\mathbb{K})$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen ist ein Vektorraum $/\mathbb{K}$ der Dimension n^2. Eine Basis ist gegeben durch

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) j \\ i \end{array} \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

$GL(n, \mathbb{K})$ ist <u>kein</u> $\mathbb{K}$-VR! (Warum?)

<u>Definition.</u> Ein Vektor $v \in V$ heisst <u>Eigenvektor</u> von $f: V \to V$ zum <u>Eigenwert</u> λ, falls

$$v \neq 0 \quad \text{und} \quad f(v) = \lambda v.$$

Der Unterraum $E_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ heisst der zu λ gehörige <u>Eigenraum</u>. Die Dimension $\dim_{\mathbb{K}} E_\lambda$ heisst <u>geometrische Vielfachheit</u> von λ.

<u>Bemerkung.</u>

- Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist der $\ker f$, $E_0 = \ker f$.
- Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist der Kern der Abbildung $f - \lambda \mathbb{1}_V : V \to V$, $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathbb{1}_V)$.

Satz 5. Sind λ_i $i=1,\dots,m$ paarweise verschiedene Eigenwerte einer linearen Abb. $f: V \longrightarrow V$ und v_i die Eigenvektoren zu λ_i, dann sind die Vektoren $v_1,\dots,v_m$ linear unabhängig.

Beweis.

Annahme: $v_1,\dots,v_m$ sind linear abhängig.

Dann gibt es eine kürzeste nicht triviale Darstellung der Null als Linearkombination von $v_1,\dots,v_m$.
O. E. d. A. können wir annehmen, dass in dieser Darstellung v_1 mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten vorkommt (sonst umnummerieren):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i = 0 \qquad a_1 \neq 0. \qquad (*)$$

(kürzeste Darstellung bedeutet, dass es keine nicht triviale Darstellung mit mehr $a_i = 0$ gibt).
Dann folgt:

$$0 = f\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \lambda_i v_i \qquad (1)$$

Aus $0 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i$ folgt $0 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \lambda_1 \cdot v_i$ (2)

$$(1) - (2) = 0 = \sum_{i=1}^{m} a_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = \sum_{i=2}^{m} a_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i$$

Somit haben wir eine kürzere Darstellung gefunden ($i = 2,\dots,m$)

$\Rightarrow$ sie muss trivial sein, d.h. $a_i \cdot (\lambda_i - \lambda_1) = 0$ $\quad i = 2,\dots,m$

Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, folgt $a_i = 0$ $\quad i = 2,\dots,m$.

Damit hat die Gleichung $(*)$ die Form $a_1 \cdot v_1 = 0$ $\quad a_1 \neq 0$
$\Rightarrow v_1 = 0$. Dies ist ein Widerspruch, da Eigenvektor nach Def. $\neq 0$ sind.

□

Sei $f: V \longrightarrow V$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte mit Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ $(m \leq n)$. Dann lässt sich nach Kap. 3 Satz 2 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ zu einer Basis von V ergänzen, etwa $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$

Somit hat f bzgl. der Basis $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \ddots & \lambda_m & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \\ \vdots & & 0 & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Insbesondere: falls f bzgl. der Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ durch die Matrix A dargestellt wird, so gibt es nach Satz 4 ein $T \in GL(n, \mathbb{K})$ sodass

$$TAT^{-1} = B.$$

4.3. Zerlegung von $SL(2,\mathbb{R})$ in Konjugationsklassen.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Definition.

$$\operatorname{sp} A = \operatorname{tr} A = a + d \quad \text{heisst die } \underline{\text{Spur}} \text{ von } A.$$

Definition. Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$.

$$P_A(x) := \det(A - x \cdot \mathbb{1})$$

heisst charakteristisches Polynom der Matrix A.

Lemma 6. Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$ Dann gilt

$$p_A(x) = x^2 - Sp(A) \cdot x + \det A$$

Beweis

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A - x \cdot \mathbb{1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$

$$\det(A - x\mathbb{1}) = (a-x)(d-x) - bc$$
$$= x^2 - \underbrace{(a+d)}_{Sp(A)} x + \underbrace{ad - bc}_{\det(A)}$$

$\square$

Satz 7.
Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abb. welche durch die Matrix A beschrieben werde. Dann gilt:
$\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert $\iff p_A(\lambda) = 0$.

Beweis.
Nach Bemerkung p.30 unten wissen wir, dass
λ Eigenwert $\iff (f - \lambda \mathbb{1}_V)x = 0$ hat nichttriviale Lösung

$$\iff \det(f - \lambda \mathbb{1}_V) = 0$$
$$\iff p_A(\lambda) = 0.$$

$\square$

Definition. Sei $A \in SL(2,\mathbb{R})$. Die Menge
$\{TAT^{-1} \mid T \in SL(2,\mathbb{R})\}$ heisst Konjugationsklasse von A.
Sei $B \in SL(2,\mathbb{R})$ mit $B = TAT^{-1}$, $T \in SL(2,\mathbb{R})$, so heisst B ein zu A konjugiertes Element.

Satz 8. Seien $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ Dann gilt:

(i) $Sp(AB) = Sp(BA)$

(ii) $Sp(ABA^{-1}) = Sp(A^{-1}BA) = Sp(B)$, $A \in GL(2,\mathbb{R})$.

Beweis.

(i) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & * \\ * & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} & * \\ * & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Beh.

(ii) $Sp(ABA^{-1}) = Sp((AB)A^{-1}) = Sp(A^{-1}(AB)) = Sp(B)$.

$\square$

Satz 9. Sei $A \in SL(2,\mathbb{R})$

(1) $|Sp\, A| > 2 \Rightarrow \exists\, T \in SL(2,\mathbb{R})$ und ein $\lambda \neq 0$ so, dass $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$

(2) $|Sp\, A| = 2 \Rightarrow \exists\, T \in SL(2,\mathbb{R})$ und ein $\mu \in \mathbb{R}$ so, dass $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \mu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ Vorzeichen gekoppelt!

(3) $|Sp\, A| < 2 \Rightarrow \exists\, T \in SL(2,\mathbb{R})$ und $0 \leq \theta < 2\pi$ so, dass $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Beweis.

Sei $A \in SL(2,\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_A(x) = x^2 - tr(A)\,x + 1 = x^2 - (a+d) + 1$.

Eigenwerte von A sind Nullstellen von $p_A(x)$ (Satz 7)

Diskriminante von $p_A(x)$: $tr(A)^2 - 4$

$\Rightarrow$ $tr\, A^2 > 4 \Rightarrow$ 2 reelle Eigenwerte

$tr\, A^2 = 4 \Rightarrow$ ein reeller Eigenwert

$\operatorname{tr} A^2 < 4 \Rightarrow$ keine reellen Eigenwerte.

(1) Nach Satz 5 gibt es ein $T \in GL(2,\mathbb{R})$, so dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Wir wollen zeigen, dass es sogar ein $\tilde{T} \in SL(2,\mathbb{R})$ mit

$$\tilde{T} A \tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ gibt.

(a) $\det T > 0 \Rightarrow \tilde{T} = \frac{1}{\sqrt{\det T}} \cdot T \in SL(2,\mathbb{R})$

(b) $\det T < 0 \Rightarrow \tilde{T} = \frac{1}{\sqrt{-\det T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T \in SL(2,\mathbb{R})$

Nun $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, da $\tilde{T} A \tilde{T}^{-1} \in SL(2,\mathbb{R})$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$

Also $\exists\, T \in SL(2,\mathbb{R})$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ so, dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

(2) $|\operatorname{tr} A| = 2 \Rightarrow$ es gibt genau einen reellen Eigenwert λ.

Sei v der zugehörige Eigenvektor. Vervollständige v zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$: $\{v, w\}$.
Bzgl. $\{v, w\}$ bekommen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

Analog oben hat man ein $T \in SL(2,\mathbb{R})$, so dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

Da $\lambda \cdot \lambda' = 1$ und $|\lambda + \lambda'| = 2 \Rightarrow \lambda = \lambda' = \pm 1$

$$\Rightarrow TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \mu \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(3) $|\mathrm{tr}\, A| < 2$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o.E.d.A. Sei $c > 0$ (sonst $-A$)

Sei $T = \begin{pmatrix} \sqrt{c} & \frac{d-a}{2\sqrt{c}} \\ 0 & \underbrace{\sqrt{\frac{1}{c}(1 - \frac{1}{4}(a+d)^2}}_{>0\text{, da } |Sp| < 2.} \end{pmatrix}$ (mühselige Rechnung)

Beh. $TAT^{-1} \in SO(2)$

Übung.

$\square$

5. Die Matrixalgebra $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definitionen.

$$M_n(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \; ; \; a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Summe von A, B.

$A \cdot B = C = (c_{ij})$ mit

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (\text{"}i\text{-te Zeile"} \bullet \text{"}j\text{-te Kolonne"})$$

$1 \leq i,j \leq n$.

Produkt von A und B.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

Multiplikation von A mit dem Skalar λ.

Lemma 1. $(M_n(\mathbb{K}), +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beweis.

(i) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow A+B \in M_n(\mathbb{K})$ nach Def.

(ii) • $(A+B)+C = A+(B+C)$ Assoziativgesetz.

$$\ulcorner ((A+B)+C)_{ij} \underset{\text{Def.}}{=} (A+B)_{ij} + (C)_{ij} \underset{\text{Def}}{=} (A)_{ij} + (B)_{ij} + (C)_{ij}$$

$$= (A)_{ij} + (B+C)_{ij} = (A+(B+C))_{ij} \lrcorner$$

• $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ ist das Neutralelement.

• $A + 0 = A = 0 + A$ klar!

• $A+B = B+A$

$$\ulcorner (A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{K} \text{ ist abelsch.}}}{=} (B)_{ij} + (A)_{ij}$$

$$= (B+A)_{ij}$$

$\square$

Lemma 2.

(a) Für die Multiplikation von Matrizen gilt:

• $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$

• $A \cdot \mathbb{1} = A = \mathbb{1} \cdot A$

(b) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

für alle $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$.

Beweis.

(a) • $$((A \cdot B) \cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A \cdot B)_{ik} \cdot C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} \Big) C_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} A_{il} \Big(\sum_{k=1}^{n} B_{lk} \cdot C_{kj} \Big) = \sum_{l=1}^{n} A_{il} (BC)_{lj}$$

$$= (A \cdot (BC))_{ij}.$$

- $A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A$ wobei $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

(b) $$(A \cdot (B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (B+C)_{kj} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} B_{kj} + A_{ik} C_{kj})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik} C_{kj}$$
$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}.$$
$$= (A \cdot B + AC)_{ij}$$

Analog zeigt man $(A+B) \cdot C = AC + BC$. □

Für die Skalarmultiplikation gilt:

$$(\lambda+\mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda \cdot (A+B) = \lambda A + \lambda B$$
$$(\lambda \cdot \mu) A = \lambda \cdot (\mu A)$$
$$1 \cdot A = A$$

für alle $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(Übung).

<u>Definition.</u> A heisst eine <u>Algebra mit 1 über dem Körper $\mathbb{K}$</u>, falls:

(i) A ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

(ii) A ist ein <u>Ring mit 1</u>, d.h. $(A,+)$ ist eine abelsche Gruppe,
- $\forall a,b \in A \Rightarrow a \cdot b \in A$
- $\forall a,b,c \in A \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (bc)$ Assoziativität.
- $\exists\, 1 \in A$, s.d.h. $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ $\forall a \in A$.
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
  $(a+b) \cdot c = ac + bc$ $\forall a,b,c \in A$

(iii) Für die Skalarmultiplikation gilt:

$$\lambda \cdot (a \cdot b) = (\lambda \cdot a) \cdot b = a \cdot (\lambda \cdot b)$$

für alle $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Satz 3. Die $n \times n$-Matrizen $M_n(\mathbb{K})$ bilden eine Algebra mit 1 über dem Körper $\mathbb{K}$.

Beweis: oben $\square$

Satz 4. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $M_n(\mathbb{K})$ hat die Dimension $\dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$.

Beweis. Die Matrizen

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix} & i \\ \;\; j & \end{array} \qquad 1 \le i, j \le n$$

bilden eine $\mathbb{K}$-Basis von $M_n(\mathbb{K})$.

$\square$

Definition:

- $GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0 \}$
  allgemeine lineare Gruppe über $\mathbb{K}$. Die Elemente $A \in GL(n, \mathbb{K})$ heissen reguläre $n \times n$ Matrizen.

- $SL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det A = +1 \}$
  spezielle lineare Gruppe über $\mathbb{K}$.

- $O(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T \}$
  orthogonale Gruppe.

- $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = +1 \}$
  $= \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T , \det A = 1 \}$

  Spezielle orthogonale Gruppe.

- $U(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1} \}$, $A^* = \bar{A}^T$

  wobei $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, falls $(a_{ij}) = A$
  konjugiert komplexe

  unitäre Gruppe.

- $SU(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1} , \det A = 1 \}$
  $< U(n)$

  Spezielle unitäre Gruppe.

Beachte:

- Die oben definierten Teilmengen von $M_n(\mathbb{K})$ sind Gruppen, bzgl. der Matrixmultiplikation.
- Es sind keine Vektorräume $/\mathbb{K}$ (mit der üblichen Addition).

Die Transponierte Matrix

Sei $M_n(\mathbb{K}) \ni A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Definition. Die Matrix $\tilde{A} = A^T$ mit $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$ für $1 \leq i,j \leq n$ heisst die transponierte Matrix von A.

Beachte, $A^T \in M_n(\mathbb{K})$.

Lemma 5. Für A^T die transponierte Matrix von $A \in M_n(\mathbb{K})$ gilt:

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$.

(b) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(c) $(A^T)^T = A$

für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

Beweis.

(a) klar

(b) Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = AB = (c_{ij})$

$$\Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\Rightarrow C^T = (\tilde{c}_{ij}) \;,\; \tilde{c}_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

Weiter gilt: $D = B^T \cdot A^T = (d_{ij})$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot b_{ki} = \tilde{c}_{ij}$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

(c) klar. □

Satz 6. Die Abbildung

$$M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \;,\; A \longmapsto A^T$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis.

Lemma 5 (a).

□

6. Die Exponentialfunktion

6.1. Vorbereitungen

Betrachten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ für $0 \leq r < 1$, $r \in \mathbb{R}$.

Lemma. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ $\quad 0 \leq r < 1, \quad r \in \mathbb{R}$.

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \underset{0\leq r<1}{=} \frac{1}{1-r}$$

$\square$

Definition. Sei $x \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Satz 1. e^x konvergiert absolut $\forall x \in \mathbb{C}$.

Beweis.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so gross, dass $\left|\frac{x}{N}\right| < 1$.

Dann $$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \left|\frac{x^k}{k!}\right|}_{\text{endlich.}} + \underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right|}_{= \sum_{l=0}^{\infty} \left|\frac{x^{l+N}}{(l+N)!}\right|}$$

Nun $$\left|\frac{x^{\ell+N}}{(\ell+N)!}\right| = \underbrace{\left|\frac{x^{\ell+N}}{(\ell+N)!}\cdot\frac{(\ell+N-1)!}{x^{\ell+N-1}}\right|}_{\left|\frac{x}{\ell+N}\right|}\cdot\underbrace{\left|\frac{x^{\ell+N-1}}{(\ell+N-1)!}\cdot\frac{(\ell+N-2)!}{x^{\ell+N-2}}\right|}_{\left|\frac{x}{\ell+N-1}\right|}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\underbrace{\left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\;\frac{N!}{x^{N}}\right|}_{\left|\frac{x}{N+1}\right|}\cdot\left|\frac{x^N}{N!}\right|$$

Also: $$\left|\frac{x^{\ell+N}}{(\ell+N)!}\right| = \underbrace{\left|\frac{x}{N+\ell}\right|}_{\leq\left|\frac{x}{N}\right|}\cdot\underbrace{\left|\frac{x}{N+\ell-1}\right|}_{\leq\left|\frac{x}{N}\right|}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left|\frac{x}{N+1}\right|}_{\leq\left|\frac{x}{N}\right|}\cdot\left|\frac{x^N}{N!}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x}{N}\right|^{\ell}\cdot\left|\frac{x^N}{N!}\right|$$

Somit haben wir:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left|\frac{x^{\ell+N}}{(\ell+N)!}\right| \leq \sum_{\ell=0}^{\infty}\left|\frac{x}{N}\right|^{\ell}\left|\frac{x^N}{N!}\right| = \left|\frac{x^N}{N!}\right|\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\underbrace{\left|\frac{x}{N}\right|}_{<1}^{\ell}$$

$$= \left|\frac{x^N}{N!}\right|\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{N}\right|} < \infty \; .$$

Somit haben wir bewiesen, dass $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ für alle $x\in\mathbb{C}$ absolut konvergiert.

$\square$

Definition.

$$\cos x := \mathrm{Re}(e^{ix}) \qquad \text{Realteil von } e^{ix}$$
$$\sin x := \mathrm{Im}(e^{ix}) \qquad \text{Imaginärteil von } e^{ix}$$

Aus der Definition bekommen wir sofort, dass

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

Wir wollen nun die Cosinus- und Sinusreihe herleiten:

$$e^{ix} = \sum_{n\geq 0}' \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}' i^n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Da $\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$, $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$.

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

6.2. Die Exponentialabbildung für Matrizen.

Wir wollen für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ die Matrix $\exp(A)$ durch die Reihenentwicklung

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{A^k}{k!}$$

definieren.

Die Frage ist nun, ob diese Reihe auch konvergiert, dh. ob alle Koeffizienten der Matrix e^A konvergieren.

Sei $M_n(\mathbb{K}) \ni A = (a_{ij})$.

Setze

$$\mu := \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| < \infty.$$

Betrachten wir nun A^2 : $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}$

$$\Longrightarrow \max_{1\le i,j\le n} |(A^2)_{ij}| \le \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\cdot|a_{kj}| \le \mu^2\cdot n.$$

Somit behaupten wir:

$$\max_{1\le i,j\le n} |(A^l)_{ij}| \le \mu^l\cdot n^{l-1} \qquad (*)$$

⌜ Dies zeigen wir durch Induktion:

- $l = 1, 2$ oben.
- $l-1 \to l$: $(A^l)_{ij} = (A^{l-1}\cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^{l-1})_{ik} A_{kj}$

$$\Rightarrow \max_{1\le i,j\le n} |(A^l)_{ij}| \le \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|(A^{l-1})_{ik}|}_{\underset{\text{Ind. Vor.}}{\le} \mu^{l-1} n^{l-2}} \cdot \underbrace{|A_{kj}|}_{\le \mu}$$

$$\le n\cdot \mu^{l-1} n^{l-2}\cdot\mu = \mu^l\cdot n^{l-1} \qquad \square$$

Somit haben wir:

$$\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(A^k)_{ij}}{k!}\right|} \underset{(*)}{\le} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k\cdot n^{k-1}}{k!} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu\cdot n)^k}{k!} = \underline{\frac{1}{n}(e^{\mu n} + n - 1)}$$

Damit werden also die n^2 Reihen der Koeffizienten von e^A durch $e^{\mu n}$ majorisiert, also <u>konvergiert</u> die Reihe e^A absolut und gleichmässig.

Damit wird die folgende Definition sinnvoll:

<u>Definition.</u> Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\underline{\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{A^k}{k!}}$$

Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \exp: M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto e^A . \end{aligned}$$

Tatsächlich werden wir gleich sehen, dass die Matrizen $\exp(A)$ alle invertierbar sind, d.h. wir haben eine Abb.

$$\boxed{\exp: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{K})} .$$

Zuerst betrachten wir jedoch einige Beispiele.

<u>Beispiele.</u>

(1.) $$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}{}' \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0}' \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k\geq 0}' \frac{\lambda_2^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

(2) Sei $\theta \in \mathbb{R}$.

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}} = \sum_{k\geq 0}' \frac{\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}' \frac{\theta^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k}{k!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}{}' \theta^{2l} \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty}{}' \theta^{2l+1} \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}{}' \frac{\theta^{2l} \cdot (-1)^l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty}{}' \frac{\theta^{2l+1} \cdot (-1)^l \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{(2k+1)!}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{l\geq 0}' (-1)^l \frac{\theta^{2l}}{(2l)!} \right)}_{\cos\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(\sum_{l\geq 0}' (-1)^l \frac{\theta^{2l+1}}{(2l+1)!} \right)}_{\sin\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Also</u>:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Somit hat jedes Element $A \in SO(2)$ einen Logarithmus:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \quad \rightsquigarrow \log A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$$e^{\log A} = A.$$

Satz 2.

Für $\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\qquad A \longmapsto e^A$

gilt:

(a) $(e^A)^T = e^{A^T}$

(b) $\overline{(e^A)} = e^{\overline{A}}$ wobei $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$, falls $A = (a_{ij})$

(c) $(e^A)^* = e^{A^*}$ wobei $A^* = \overline{A}^T$

(d) $\exp(BAB^{-1}) = B \exp A \, B^{-1}$ für $B \in GL(n,\mathbb{K})$.

(e) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

(f) $[A,B] = 0 \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$

(g) Die Exponentialabbildung ist eine stetige (sogar analytische) Abb.

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}).$$

Beweis.

(a) Mit Lemma 5 (a), (b) von Kapitel 5 folgt:

$$(e^A)^T = \Big(\sum_{k\geq 0}' \frac{A^k}{k!}\Big)^T \underset{(a)}{=} \sum_{k\geq 0}' \frac{(A^k)^T}{k!} \underset{(b)}{=} \sum_{k\geq 0}' \frac{(A^T)^k}{k!} = e^{A^T}.$$

(b) $$\overline{(e^A)} = \overline{\sum_{k\geq 0}' \frac{A^k}{k!}} \underset{AN\,I}{=} \sum_{k\geq 0}' \frac{\overline{A^k}}{k!} \underset{AN\,I}{=} \sum_{k\geq 0}' \frac{\overline{A}^k}{k!} = e^{\overline{A}}$$

(c) folgt aus (a) und (b)

(d) $$e^{BAB^{-1}} = \sum_{k\geq 0}' \frac{(BAB^{-1})^k}{k!} \underset{(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}}{=} \sum_{k\geq 0}' \frac{BA^kB^{-1}}{k!} = B\Big(\sum_{k\geq 0}' \frac{A^k}{k!}\Big) B^{-1}$$

$$= B e^A B^{-1}. \quad (\text{konvergent!})$$

(e) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$,
$p_A(x)$ das Charakteristische Polynom von A, dh.

$p_A(x) := \det(A - x\mathbb{1})$. Dies ist ein Polynom vom Grad n, mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$. Die NS dieses Polynoms sind die Eigenwerte einer Linearen Abb. $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (vgl. Kapitel 4 Satz 7 $n=2$)
Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das Polynom $p_A(x)$ über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, dh. $p_A(x) = (x-\lambda_1) \cdots\cdots (x-\lambda_n)$

Nach dem Satz 5.5 aus Stammbach p. 156 gibt es also eine Matrix $T \in GL(n, \mathbb{C})$ (Basistransformation), so dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} = B$$

eine obere Dreiecksmatrix ist.

$$\begin{aligned} \underset{\sim\sim}{\det e^A} &= \det T \cdot \det e^A \cdot \det T^{-1} = \det(T e^A T^{-1}) \\ &= \det e^{TAT^{-1}} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{Sp\, B} \\ &= e^{Sp\, TAT^{-1}} = \underset{\sim\sim}{e^{Sp\, A}} \neq 0 \end{aligned}$$

(dieser Beweis gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Wir haben jedoch die meisten benützten Resultate (Kapitel 4) nur für $\underline{n=2}$ oder $\underline{3}$ bewiesen. Im Verlaufe der Vorlesung sollte dieser Beweis jedoch klar werden.)

(f) $[A,B] = AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$.

$$(A+B)^k \underset{\substack{\uparrow \\ AB=BA\ !!}}{=} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^{k-l} B^l \qquad \text{Binomische Lehrsatz!}$$

$$e^A \cdot e^B = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{l \geq 0} \frac{B^l}{l!} \overset{\text{Vgl. Bemerkung 5 p. 52}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=m+n} \frac{A^m \cdot B^n}{m! \cdot n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{A^m B^{k-m}}{m!\,(k-m)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} A^m \cdot B^{k-m}}_{(A+B)^k \text{, da } [A,B]=0!}$$

$$= \sum_{k\geq 0}' \frac{(A+B)^k}{k!} = e^{A+B}.$$

(g) Aus (e) folgt, dass $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ (denn $e^{\operatorname{Sp} A} \neq 0$).

Die Stetigkeit folgt aus der gleichmässigen Konvergenz (p. 46) auf kompakten Teilmengen (Blatter, Analysis II p. 118 ff). $\square$

Korollar 3.
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Beweis. Aus Satz 2 (f) folgt:

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = \mathbb{1}, \text{ da } [A, -A] = 0.$$

$$\Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

$\square$

Bemerkung 4.

Aus dem Beweis von Satz 2(e) folgt:

Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in M_n(\mathbb{K})$ sind, so sind $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ die Eigenwerte von $\exp(A)$.

Bemerkung 5 (Produkt von Reihen)

$$\sum_{k\geq 0}{}' a_k \cdot \sum_{\ell \geq 0}{}' b_\ell = \sum_{k\geq 0}{}' c_k$$

wobei $\quad c_k = \underbrace{\sum_{k=m+n}{}' a_m \cdot b_n}$

d.h. man summiert über alle Paare (m,n) mit $k=m+n$.

i.e.
$$\begin{array}{lll} k=0 & c_0 = a_0 \cdot b_0 \\ k=1 & c_1 = a_0\cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ k=2 & c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\ \vdots & \end{array}$$

Schematisch lässt sich dies folgendermassen veranschaulichen:

$\cdot$	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots\cdots$
b_0	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$ $\cdots$
b_1	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\cdots$
b_2	$k=2$	$k=3$	$k=4$		$\cdots$
b_3	$k=3$	$k=4$			$\cdots$
$\vdots$	$k=4$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(es wird über Diagonale summiert!)

Definition.

$$o(3) := \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = -A \}$$

heisst <u>Lie-Algebra von $O(3)$</u>

Lemma 6.

$$o(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} ; \ (a_{12}, a_{13}, a_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Übung. $\square$

Satz 7.
(a) $o(3)$ ist ein Unterraum von $M_3(\mathbb{R})$, der Dimension 3.
(b) Sei $A \in o(3)$. Dann gilt:
$$e^A \in SO(3).$$

Beweis:
(a) Übung
(b) $A \in o(3) \Rightarrow A^T = -A$.
$$(e^A)^T \underset{2(a)}{=} e^{A^T} = e^{-A} \underset{3}{=} (e^A)^{-1}$$
$$\Rightarrow e^A \in O(3) = \{ A \in GL(3,\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1} \}$$

Aus Satz 2(e) folgt:
$$\det e^A = e^{\operatorname{Sp} A} = e^0 = 1, \text{ da } \operatorname{Sp} A = 0 \text{ (Lemma 6)}.$$
$\square$

Sei $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Betrachten wir die lineare Abb.
$$L_x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad y \longmapsto x \times y$$

Bezüglich der Standardbasis $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$ hat L_x die Matrix
$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Übung 4)

Nun ist klar, dass $A_x^T = -A_x$. Also gilt:
$$\boxed{A_x \in o(3) \Rightarrow e^{A_x} \in SO(3)}$$

Nun $A_x \cdot x = 0$. Somit bekommen wir:

$$e^{A_x}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \Big(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}\Big)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$= x + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{A^k}{k!}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{=0} = x$$

Damit wissen wir, dass e^{A_x} eine Drehung mit Achse x ist.

Also:

Satz 8. Sei $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

(a) $L_x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $y \longmapsto x \times y$ ist eine lineare Abb.

mit Matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in o(3)$$

bzgl. e_1, e_2, e_3. $L_x(x) = 0$.

(b) $e^{A_x} \in SO(3)$ ist eine Drehung mit Achse x.

□

Satz 9. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$e^{A_x} = \mathbb{1} + \frac{\sin|x|}{|x|} A_x + \frac{1-\cos|x|}{|x|^2} A_x^2$$

Bsp. $|x| = 0$:

$$\frac{\sin|x|}{|x|} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}}{|x|}$$

$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{|x|^{2k}}{(2k+1)!}$$

für $|x| = 0 \Rightarrow \frac{\sin|x|}{|x|} = 1$.

Analog zeigt man, dass $\frac{1-\cos|x|}{|x|^2} = \frac{1}{2}$ für $|x| = 0$.

<u>Beweis.</u>

(1) Durch Induktion zeigen wir :

(i) $A_x^{2\ell} = (-|x|^2)^{\ell-1} \, A_x^2 \qquad \ell \geq 1$

(ii) $A_x^{2\ell+1} = (-|x|^2)^{\ell} \cdot A_x \qquad \ell \geq 0.$

⌈ (i) $\ell = 1$: ✓

$\ell = 2: \quad A_x^4 = -|x|^2 \cdot A_x^2$ (Rechne!)

$\ell-1 \to \ell: \quad A_x^{2\ell} = A_x^{2(\ell-1)} \cdot A_x^2$

$$\underset{\text{Ind. Vor.}}{=} (-|x|^2)^{\ell-2} \cdot A_x^2 \cdot A_x^2 = (-|x|^2)^{\ell-2} \cdot A_x^4$$

$$\underset{\text{Veranke.}}{=} (-|x|^2)^{\ell-1} \cdot A_x^2 .$$

(ii) $\ell = 0$: ✓

$\ell = 1: \quad A_x^3 = -|x|^2 \cdot A_x.$ (rechne!)

$\ell-1 \to \ell: \quad A_x^{2\ell+1} = A_x^{2(\ell-1)+1} \cdot A_x^2$

$$\underset{\text{Ind. Vor.}}{=} (-|x|^2)^{\ell-1} \cdot A_x \cdot A_x^2 = (-|x|^2)^{\ell-1} \cdot A_x^3$$

$$\underset{\text{Veranke.}}{=} (-|x|^2)^{\ell} \cdot A_x .$$ ⌋

(2) $$e^{A_x} = \sum_{k \geq 0} \frac{A_x^k}{k!} = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\underset{(1)}{=} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-|x|^2)^{k-1}}{(2k)!} \cdot A_x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-|x|^2)^k}{(2k+1)!} \cdot A_x$$

$$= \mathbb{1} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot |x|^{2k-2}}{(2k)!} \right)}_{= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} |x|^{2k}}{(2k)!}}{|x|^2}} \cdot A_x^2 + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)}_{\sin|x|} \frac{A_x}{|x|}$$

$$\text{Nun} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot |x|^{2k}}{(2k)!} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}}_{\cos|x| - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} |x|^{2k}}{(2k)!} = 1 - \cos|x|$$

$$\text{Somit:} \quad e^{A_x} = \mathbb{1} + \frac{\sin|x|}{|x|} A_x + \frac{1-\cos|x|}{|x|^2} \cdot A_x^2 .$$

$\square$

Korollar 10. Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$SO(3) \ni e^{A_x}$ ist eine Drehung mit Achse x und Drehwinkel $|x|$.

Beweis.

- $x = 0$: nichts zu zeigen.
- Also sei $x \neq 0$. E_x bezeichne wiederum die Ebene mit Normalenvektor x (vgl. Kapitel 2).

  Da $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ gibt es $x_i \neq 0$ für ein $i \in \{1,2,3\}$

Sei $x_3 \neq 0$: $\Rightarrow (0, x_3, -x_2) \neq 0$, $(0, +x_3, -x_2) \in E_x$, da

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

$$e^{A_x} \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \frac{\sin|x|}{|x|} \cdot \begin{pmatrix} -(x_3^2 + x_2^2) \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix} + \frac{1-\cos|x|}{|x|^2} \cdot \left(-|x|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{\sin|x|}{|x|} \begin{pmatrix} -(x_2^2 + x_3^2) \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix} + \cos|x| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\langle e^{A_x} \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \cos|x| \cdot (x_2^2 + x_3^2)$$

$$\Vert$$

$$\Big| \underbrace{e^{A_x}}_{\in SO(3)\ \text{Drehung: längentreu}} \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \Big| \, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos\theta = (x_2^2 + x_3^2) \cdot \cos\theta . \quad \Rightarrow \underbrace{\theta}_{-\pi < \theta < \pi} = \pm |x| \pmod{2\pi}$$

Sei $x_1 \neq 0$: $\Rightarrow (-x_2, x_1, 0) \in E_x - \{0\}$

$$\Rightarrow e^{A_x}\begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix} = \frac{\sin|x|}{|x|}\begin{pmatrix}-x_1x_3\\-x_2x_3\\x_1^2+x_2^2\end{pmatrix} + \cos|x|\begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix}$$

Also $\left\langle e^{A_x}\begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \cos|x|\cdot(x_1^2+x_2^2)$

$$\| $$

$(x_1^2+x_2^2)\cdot\cos\Theta \qquad \Rightarrow \underline{\Theta = \pm|x|} \ (\text{mod } 2\pi.)$

Sei $x_2 \neq 0$: $\Rightarrow (x_2, -x_1, 0) \in E_x - \{0\}$.

$$\Rightarrow e^{A_x}\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix} = \frac{\sin|x|}{|x|}\cdot\begin{pmatrix}x_1x_3\\x_2x_3\\-(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix} + \cos|x|\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix}$$

Also $\left\langle e^{A_x}\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \cos|x|\cdot(x_1^2+x_2^2)$

$$\| $$

$(x_1^2+x_2^2)\cdot\cos\Theta \qquad \Rightarrow \underline{\Theta = \pm|x|} \ (\text{mod } 2\pi).$

Damit is Korollar 10 bis auf Vorzeichen bewiesen. $\square$

<u>Bemerkung</u>:

$$A_x = \begin{pmatrix}0 & -x_3 & x_2\\ x_3 & 0 & -x_1\\ -x_2 & x_1 & 0\end{pmatrix} \qquad A_x^2 = \begin{pmatrix}-(x_2^2+x_3^2) & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1x_2 & -(x_1^2+x_3^2) & x_2x_3\\ x_1x_3 & x_2x_3 & -(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix}$$

Korollar 10 gibt uns somit eine explizite Darstellung der Abb.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}P^3 & \longrightarrow & SO(3)\\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \\ x & \longmapsto & e^{A_x}\end{array}$$

Insbesondere folgt : Die Abb.

$$\begin{array}{ccc}o(3) & \longrightarrow & SO(3)\\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \\ A & \longmapsto & e^{A}\end{array}$$

ist <u>surjektiv</u>.

6.3. Infinitesimale Drehungen.

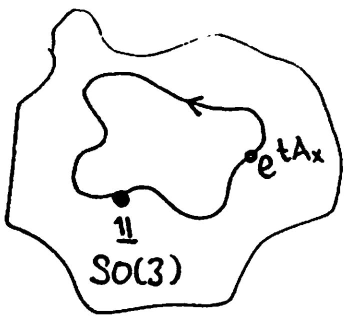
Sei $x \in \mathbb{R}^3$, $A_x \in o(3)$ wie auf Seite 53.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $A_{tx} = t \cdot A_x$

$\Rightarrow$ $e^{A_{tx}} = e^{tA_x}$ ist eine Drehung mit Achse tx und Drehwinkel $|tx|$.

In $SO(3)$ ist $\{e^{tA_x}, t \in \mathbb{R}\}$ eine geschlossene Kurve:

$t=0$: $e^0 = \mathbb{1}$, $t = 2\pi$ $e^{tA_x} = \mathbb{1}$. (exp ist stetig nach Satz 2).



Betrachten wir nun die Ableitung von e^{tA_x} nach t:

$$\frac{d}{dt} e^{tA_x} = \frac{d}{dt} \sum_{k \geq 0} \frac{(tA_x)^k}{k!} = \frac{d}{dt} \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A_x^k}{k!}$$

$$\underset{\substack{\text{Blatter:}\\ \text{Analysis II}\\ \text{p.126}}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k \cdot A_x^k}{k!} \right) = \sum_{k \geq 1} k \cdot t^{k-1} \cdot \frac{A_x^k}{k!}$$

$$= A_x \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1} \cdot A_x^{k-1}}{(k-1)!} = A_x \cdot \sum_{\ell \geq 0} \frac{t^\ell A_x^\ell}{\ell!}$$

$$= A_x \cdot e^{tA_x}$$

$\Rightarrow$

Lemma 11.

$$\frac{d}{dt} e^{tA_x} = A_x \cdot e^{tA_x}.$$

<u>Bemerkung.</u> Allgemein gilt:

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \frac{d}{dt} e^{tA} = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Nun $\left.\frac{d}{dt} e^{tA_x}\right|_{t=0} = A_x$

<u>Definition.</u>

$\left.\frac{d}{dt} e^{tA_x}\right|_{t=0} = A_x$ heisst <u>infinitesimale Drehung mit Achse x</u>.

Nun $\left(\left.\frac{d}{dt} e^{tA_x}\right|_{t=0}\right)(y) = A_x(y) = x \times y \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \left(\left.\frac{d}{dt} e^{tA_x}\right|_{t=0}\right)(y)$ ist der <u>Drehimpuls</u> von x, y.

<u>Lemma 12.</u>
Seien $A, B \in o(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$
Dann gilt für den Kommutator von A, B:

$$[A, B] = AB - BA \in o(3).$$

<u>Beweis.</u>

$$\begin{aligned} [A,B]^T &= (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T \\ &= B^T \cdot A^T - A^T \cdot B^T = (-B)\cdot(-A) - (-A)\cdot(-B) \\ &= BA - AB = -[A,B]. \end{aligned}$$

□

<u>Beachte.</u> Für $A, B \in o(3)$ gilt <u>nicht</u> $A \cdot B \in o(3)$!!

Lemma 13.

Seien A_x, A_y wie oben für $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$[A_x, A_y] = A_{x \times y}.$$

d.h. der Kommutator von infinitesimalen Drehungen ist wieder eine infinitesimale Drehung.

Beweis.

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_y = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} -x_2y_2 - x_3y_3 & x_2 y_1 & x_3 y_1 \\ x_1 y_2 & -x_1y_1 - x_3y_3 & x_3 \cdot y_2 \\ x_1 y_3 & x_2 y_3 & -x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix}$$

$$A_y \cdot A_x = \begin{pmatrix} -x_2y_2 - x_3y_3 & x_1y_2 & y_3 x_1 \\ y_1 x_2 & -y_1x_1 - y_3x_3 & y_3 x_2 \\ y_1 x_3 & x_3y_2 & -x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [A_x, A_y] = \begin{pmatrix} 0 & x_2y_1 - x_1y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - y_1x_2 & 0 & x_3y_2 - x_2y_3 \\ x_1y_3 - x_3y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= A_{x \times y}.$$

$\square$

6.4. SU(2) und Drehungen.

Definition. $SU(2) = \{ A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}, \det A = +1 \}$ wobei $A^* = \bar{A}^T$, heisst spezielle unitäre Gruppe

Lemma 14.

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Beweis: Übung $\square$

Definition. $\mathbb{S}^3 := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$

heisst *3-dimensionale Sphäre*.

Satz 15.

Es gibt eine bijektive Abb.

$$f: SU(2) \longrightarrow \mathbb{S}^3$$

dh. $SU(2)$ hat die geometrische Struktur von $\mathbb{S}^3$.

Beweis.

Nach Lemma 14 gilt für jedes $A \in SU(2)$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad , \beta = \beta_1 + i\beta_2 \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\ |\beta|^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

$$\Rightarrow f: \begin{aligned} SU(2) &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

$\square$

Definition. $su(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = -A \ , \operatorname{tr} A = 0\}$

heisst *Lie-Algebra* von $SU(2)$.

Lemma 16.

$$su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Beweis. "$\supset$": klar.

"$\subset$": $A \in M_2(\mathbb{C})$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = -A$$

$\Rightarrow \bar a = -a \quad \Rightarrow \underline{a = i \cdot x_1, \; x_1 \in \mathbb{R}}.$

Aus $\operatorname{tr} A = a + d = 0 \Rightarrow d = -a = -ix_1$.

Setze $b = x_2 + ix_3$ mit $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar c = -b \quad \Rightarrow c = -\bar b = -x_2 + ix_3.$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}$ $\square$

Definition.

Sei $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$a_x := \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}$$

Also: $\quad su(2) = \{ a_x \mid x \in \mathbb{R}^3 \}$

Wir haben also eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}^3$ und $su(2)$:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow su(2), \quad x \longmapsto a_x.$$

Sei $A \in SU(2)$. Betrachten wir $A a_x A^{-1}$. Es gilt:

(1) $\det(A a_x A^{-1}) = |x|^2$, da $\det a_x = |x|^2$.

(2) $(A a_x A^{-1})^* \underset{\substack{A^* = A^{-1} \\ A \in SU(2)}}{=} A a_x^* A^{-1} \underset{a_x^* = -a_x}{=} -(A a_x A^{-1})$

(3) $\operatorname{tr}(A a_x A^{-1}) = \operatorname{tr} a_x = 0$ (Satz 8 Kapitel 4)

(4) $A a_x A^{-1} \in su(2)$

Somit haben wir für alle $A \in SU(2)$

$$\begin{array}{rccccccc} R_A: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & su(2) & \longrightarrow & su(2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & & & \\ & x & \longmapsto & a_x & \longmapsto & A a_x A^{-1} = a_y & \longmapsto & y \end{array}$$

Nun $\det(a_y) = |y|^2 = \det(A a_x A^{-1}) = |x|^2$

$\Rightarrow |R_A(x)| = |y| = |x|$, d.h. die Länge von x ist unter R_A invariant.

Als nächstes möchten wir y explizit berechnen:

Dazu sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$

Nun

$$A a_x A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i x_1 & x_2 + i x_3 \\ -x_2 + i x_3 & -i x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ +\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\alpha x_1 - \beta x_2 + i\beta x_3 & \alpha x_2 + i\alpha x_3 - i\beta x_1 \\ -i\bar{\beta} x_1 - \bar{\alpha} x_2 + i\bar{\alpha} x_3 & -\bar{\beta} x_2 - i\bar{\beta} x_3 - i\bar{\alpha} x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i((|\alpha|^2 - |\beta|^2)x_1 + 2\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})x_2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})x_3) & i(-2\alpha\beta x_1 + (\alpha^2 - \beta^2)x_3) + (\alpha^2 + \beta^2)x_2 \\ i(-2\bar{\alpha}\bar{\beta} x_1 + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2)x_3) - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)x_2 & -i((|\alpha|^2 - |\beta|^2)x_1 + 2\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})x_2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})x_3) \end{pmatrix}$$

Also:

$$y_1 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)x_1 + 2\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})x_2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})x_3$$

$$y_2 + i y_3 = i(-2\alpha\beta x_1 + (\alpha^2 - \beta^2)x_3) + (\alpha^2 + \beta^2)x_2$$

Aus der Übung Serie 6 wissen wir:
R_A hat bezüglich der Standardbasis $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$
$e_3=(0,0,1)$ die Matrix

$$R_A = \begin{pmatrix} |\alpha|^2-|\beta|^2 & 2\,\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta}) & 2\,\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}) \\ 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta) & \mathrm{Re}(\alpha^2+\beta^2) & -\mathrm{Im}(\alpha^2-\beta^2) \\ -2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta) & \mathrm{Im}(\alpha^2+\beta^2) & \mathrm{Re}(\alpha^2-\beta^2) \end{pmatrix}$$

Definition. Seien G und H Gruppen. Eine Abbildung
$$\varphi: G \longrightarrow H$$
heisst Gruppenhomomorphismus, falls
$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2) \quad \forall g_1,g_2\in G.$$

Beachte:
- $\varphi(e_G) = e_H$, wobei e_G das Neutralelement von G und e_H das von H bezeichnet.
- $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1}) \quad \forall g\in G$.

Bemerkung: Sei $x\in\mathbb{C}$. Dann gilt:
$$\mathrm{Re}(x) = \frac{1}{2}(x+\bar{x}) \qquad (*)$$
$$\mathrm{Im}(x) = \frac{1}{2i}(x-\bar{x})$$

Satz 17. Seien $A, B \in SU(2)$. Dann gilt:

(1) $R_A \in SO(3)$

(2) Die Abbildung
$$\varphi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$
$$A \longmapsto R_A$$
ist ein Gruppenhomomorphismus:
$$R_A \cdot R_B = R_{AB} \quad , (R_A)^{-1} = R_{A^{-1}} \quad , R_1 = \mathbb{1}.$$

(3) $\varphi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ ist <u>surjektiv</u>.

(4) Sei $A \in SU(2)$ gegeben durch e^{a_y} für ein $y \in \mathbb{R}^3$.
($\exp : su(2) \longrightarrow SU(2)$ ist surjektiv, Übung 6, 1c))

Dann gilt: $e^{2A_y} = A = e^{a_y}$.

(5) Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in SU(2)$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Dann $R_A \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ ist die <u>Achse</u>

<u>der Drehung R_A</u>.

(6) $R_A = R_B \iff A = \pm B$, d.h. φ ist <u>nicht injektiv</u>.

Beweis.

(1) Von p.63 wissen wir, dass $|R_A(x)| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.
Somit folgt nach Satz 3 Kapitel 2, dass $R_A \in O(3)$.
Noch zu zeigen: $\det(R_A) = +1$.

$$\begin{aligned}
\det(R_A) = &(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \ \mathrm{Re}(\alpha^2+\beta^2) \cdot \mathrm{Re}(\alpha^2-\beta^2) \\
&+ 4 \,\mathrm{Im}(\alpha\beta) \cdot \mathrm{Re}(\alpha\bar\beta) \cdot \mathrm{Im}(\alpha^2+\beta^2) \\
&+ 4 \,\mathrm{Im}(\alpha\bar\beta) \cdot \mathrm{Re}(\alpha\beta) \ \mathrm{Im}(\alpha^2-\beta^2) \\
&+ 4 \,\mathrm{Re}(\alpha\bar\beta) \ \mathrm{Re}(\alpha\beta) \cdot \mathrm{Re}(\alpha^2+\beta^2) \\
&- 4 \,\mathrm{Im}(\alpha\beta) \cdot \mathrm{Im}(\alpha\bar\beta) \cdot \mathrm{Re}(\alpha^2-\beta^2) \\
&+ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot \mathrm{Im}(\alpha^2-\beta^2) \cdot \mathrm{Im}(\alpha^2+\beta^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(*)}{=} &\frac{1}{4} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \{ (\alpha^2+\bar\alpha^2)^2 - (\beta^2+\bar\beta^2)^2 - (\alpha^2-\bar\alpha^2)^2 + (\beta^2-\bar\beta^2)^2) \\
&- \frac{1}{2} (\alpha\beta - \bar\alpha\bar\beta)(\alpha\bar\beta + \bar\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\bar\alpha^2-\bar\beta^2) \\
&- \frac{1}{2} (\alpha\beta + \bar\alpha\bar\beta)(\alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta)(\alpha^2-\beta^2-\bar\alpha^2+\bar\beta^2)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta)(\alpha\beta+\bar\alpha\bar\beta)(\alpha^2+\beta^2+\bar\alpha^2+\bar\beta^2)$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha\beta-\bar\alpha\bar\beta)(\alpha\bar\beta-\bar\alpha\beta)(\alpha^2-\beta^2+\bar\alpha^2-\bar\beta^2)$$

$$\begin{aligned}
=\ &\frac{1}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\Big((\alpha^2+\bar\alpha^2)^2-(\beta^2+\bar\beta^2)^2-(\alpha^2-\bar\alpha^2)^2+(\beta^2-\bar\beta^2)^2\Big)\\
&-\frac{1}{2}\big(|\alpha|^2(\beta^2-\bar\beta^2)+|\beta|^2(\alpha^2-\bar\alpha^2)\ \big((\alpha^2-\bar\alpha^2)+(\beta^2-\bar\beta^2)\big)\big)\\
&-\frac{1}{2}\big(|\beta|^2(\alpha^2-\bar\alpha^2)-|\alpha|^2(\beta^2-\bar\beta^2)\ \big((\alpha^2-\bar\alpha^2)-(\beta^2-\bar\beta^2)\big)\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(|\alpha|^2(\beta^2+\bar\beta^2)+|\beta|^2(\alpha^2+\bar\alpha^2)\ \big((\alpha^2+\bar\alpha^2)+(\beta^2+\bar\beta^2)\big)\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(|\beta|^2(\alpha^2+\bar\alpha^2)-|\alpha|^2(\beta^2+\bar\beta^2)\ \big((\alpha^2+\bar\alpha^2)-(\beta^2+\bar\beta^2)\big)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\frac{1}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\Big((\alpha^2+\bar\alpha^2)^2-(\beta^2+\bar\beta^2)^2-(\alpha^2-\bar\alpha^2)^2+(\beta^2-\bar\beta^2)^2\Big)\\
&+\frac{1}{2}|\alpha|^2\Big(-\cancel{(\beta^2-\bar\beta^2)(\alpha^2-\bar\alpha^2)}-(\beta^2-\bar\beta^2)^2+\cancel{(\beta^2-\bar\beta^2)(\alpha^2-\bar\alpha^2)}\\
&\qquad-(\beta^2-\bar\beta^2)^2+\cancel{(\beta^2+\bar\beta^2)(\alpha^2+\bar\alpha^2)}+(\beta^2+\bar\beta^2)^2\\
&\qquad+(\beta^2+\bar\beta^2)^2-\cancel{(\beta^2+\bar\beta^2)(\alpha^2+\bar\alpha^2)}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}|\beta|^2\Big(-(\alpha^2-\bar\alpha^2)^2-\cancel{(\alpha^2-\bar\alpha^2)(\beta^2-\bar\beta^2)}-(\alpha^2-\bar\alpha^2)^2\\
&\qquad+\cancel{(\alpha^2-\bar\alpha^2)(\beta^2-\bar\beta^2)}+(\alpha^2+\bar\alpha^2)^2+\cancel{(\alpha^2+\bar\alpha^2)(\beta^2+\bar\beta^2)}\\
&\qquad+(\alpha^2+\bar\alpha^2)-\cancel{(\alpha^2+\bar\alpha^2)(\beta^2+\bar\beta^2)}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\frac{1}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\Big((\alpha^2+\bar\alpha^2)^2-(\beta^2+\bar\beta^2)^2-(\alpha^2-\bar\alpha^2)^2+(\beta^2-\bar\beta^2)^2\Big)\\
&+\ |\alpha|^2\ (\beta^2+\bar\beta^2)^2-(\beta^2-\bar\beta^2)^2\\
&+\ |\beta|^2\ (\alpha^2+\bar\alpha^2)^2-(\alpha^2-\bar\alpha^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &(|\alpha|^2-|\beta|^2)\ (|\alpha|^4-|\beta|^4)\\
&+4|\alpha|^4|\beta|^2\\
&+4|\alpha|^2|\beta|^4
\end{aligned}$$

$$=|\alpha|^6-|\alpha|^2|\beta|^4-|\alpha|^4|\beta|^2+|\beta|^6+4|\alpha|^4|\beta|^2+4|\alpha|^2|\beta|^4$$

$$=\big(\underbrace{|\alpha|^2+|\beta|^2}_{1}\big)^3=1,\quad \text{da } A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}\in SU(2).$$

(2) Betrachte für $A, B \in SU(2)$:

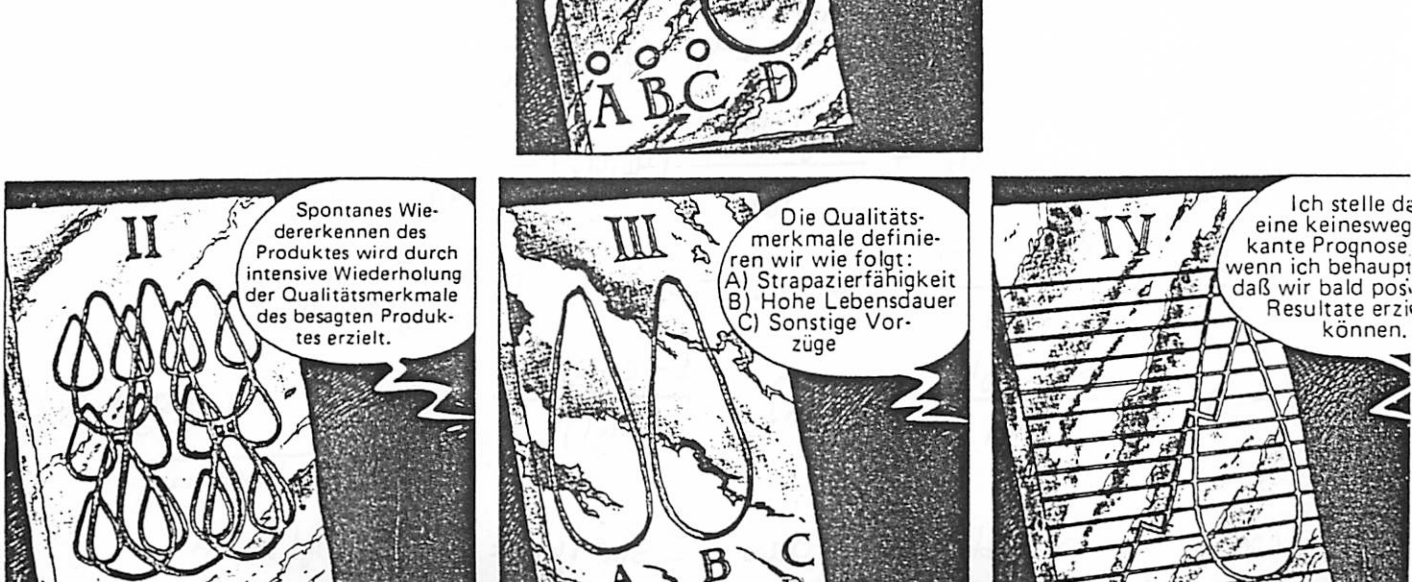
$$\bullet\ R_{AB} \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\cong} & su(2) & \longrightarrow & su(2) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & a_x & \longmapsto & AB\,a_x\,(AB)^{-1} & & \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & a_z & \longmapsto & z \end{array}$$

$$\text{Nun} \quad AB\,a_x\,(AB)^{-1} = AB\,a_x\,B^{-1}A^{-1}$$
$$= A\,\underbrace{(B a_x B^{-1})}_{a_y}\,A^{-1}$$
$$= A\,a_y\,A^{-1} = a_z$$

$$\Rightarrow \quad R_A \cdot R_B(x) = R_A(y) = z = R_{AB}(x). \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \quad R_A \cdot R_B = R_{AB}.$$

(3)



(3) Wir wissen, dass die Abbildung

$$\exp: \ o(3) \longrightarrow SO(3)$$

surjektiv ist, dh. jedes $A \in SO(3)$ lässt sich schreiben als

$$A = e^{2A_y} \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}^3,\ A_y \in o(3).$$

Sei jetzt $A = e^{2A_y} \in SO(3)$

<u>Beh.</u> $\varphi(e^{a_y}) = e^{2A_y}$

Nun $\varphi(e^{a_y}) = R_{e^{a_y}}$

Also berechnen wir $R_{e^{a_y}}(x) \quad x \in \mathbb{R}^3$

Dazu betrachten wir

$$e^{a_y} a_x e^{-a_y}.$$

Nun von Übung Serie 6 wissen wir:

$$e^{a_y} = \cos|y| \mathbb{1} + \frac{\sin|y|}{|y|} a_y$$

Also

$$e^{a_y} a_x e^{-a_y} = \left(\cos|y| \mathbb{1} + \frac{\sin|y|}{|y|} \cdot a_y\right) a_x \left(\cos|y| \mathbb{1} - \frac{\sin|y|}{|y|} \cdot a_y\right)$$

$$= \cos^2|y| a_x - \frac{\cos|y| \cdot \sin|y|}{|y|} a_x a_y + \frac{\sin|y|}{|y|} \cos|y|\, a_y a_x - \frac{\sin^2|y|}{|y|^2} a_y a_x a_y$$

$$= \cos^2|y|\, a_x + \frac{\cos|y| \sin|y|}{|y|} [a_y, a_x] - \frac{\sin^2|y|}{|y|^2} a_y a_x a_y$$

$$= a_x - \sin^2|y| \cdot a_x + \frac{\cos|y| \sin|y|}{|y|} [a_y, a_x] - \frac{\sin^2|y|}{|y|} a_y a_x a_y$$

$$= a_x + \frac{\cos|y| \sin|y|}{|y|} [a_y, a_x] - \sin^2|y| \left(a_x + \frac{1}{|y|^2} a_y a_x a_y\right)$$

$$= a_x + \frac{\sin(2|y|)}{2|y|} \cdot [a_y, a_x] - \frac{1-\cos(2|y|)}{(2|y|)^2} \cdot \underbrace{2\left(a_x|y|^2 + a_y a_x a_y\right)}_{\text{Zwischenberechnung}}$$

wobei wir benutzt haben, dass $2\sin^2|y| = 1 - \cos(2|y|)$ ist.

<u>Zwischenberechnung:</u> Von Übung Serie 6 wissen wir: $a_y^2 = -|y|^2 \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \quad 2(|y|^2 a_x + a_y a_x a_y)$$

$$= 2(-a_y \cdot a_y \cdot a_x + a_y a_x a_y)$$

$$= -a_y a_y a_x + a_y a_x a_y + a_y a_x a_y - a_x a_y a_x$$

$$= -[a_y, (a_y a_x - a_x a_y)] = -[a_y, [a_y, a_x]]$$

<u>Also:</u>

$$e^{a_y} a_x e^{-a_y} = a_x + \frac{\sin(2|y|)}{2|y|} [a_y, a_x] + \frac{1-\cos 2|y|}{(2|y|)^2} [a_y, [a_y, a_x]]$$

$$= f\left(\mathbb{1} \cdot x + \frac{\sin(2|y|)}{2|y|} A_{2y} x + \frac{1-\cos 2|y|}{(2|y|)^2} A_{2y}^2 x\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Kapitel 6} \\ \text{Satz 9}}}{=} f(e^{2A_y} \cdot x) = a_{(e^{2A_y} x)}$$

wobei $f: a_x \longrightarrow x$

Damit haben wir: $R_{e^{a_y}}(x) = e^{2A_y} x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ $\qquad A_y = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \varphi(e^{a_y}) = R_{e^{a_y}} = e^{2A_y} \text{ wie gewünscht.}$$

(4) folgt aus Beweis von (3)

(5) Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in SU(2)$

$$\frac{1}{2}(A - A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* - A^{**}) = \frac{1}{2}(A^* - A)$$

$$= -\frac{1}{2}(A - A^*)$$

$$tr\left(\frac{A - A^*}{2}\right) = \frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} \alpha - \bar\alpha & 2\beta \\ -2\bar\beta & \bar\alpha - \alpha \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{A - A^*}{2} \in su(2)$$

$$\frac{A - A^*}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha - \bar\alpha & 2\beta \\ -2\bar\beta & \bar\alpha - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & -i\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$
$\beta = \beta_1 + i\beta_2$

$$\Rightarrow \frac{A - A^*}{2} = a_{\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot a_{\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}} A^{-1} = A \frac{(A - A^*)}{2} A^{-1}$$

$$= A \cdot \frac{A - A^*}{2} A^* \underset{A^* = A^{-1}, \text{ da } A \in SU(2)}{=} \frac{A - A^*}{2} = a_{\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}}.$$

(6) <u>Schritt 1</u> : $R_A = \mathbb{1} \iff A = \pm\mathbb{1}$. , $A \in SU(2)$

"$\Leftarrow$" trivial.

"$\Rightarrow$", $R_A = \mathbb{1} \iff R_A(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\iff A a_x A^{-1} = a_x \ \forall x \iff A a_x = a_x A, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lasst uns rechnen!

$$A \cdot a_x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i x_1 & x_2 + i x_3 \\ -x_2 + i x_3 & -i x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\alpha x_1 - \beta x_2 + i\beta x_3 & \alpha x_2 + i\alpha x_3 - i\beta x_1 \\ -i\bar{\beta} x_1 - \bar{\alpha} x_2 + i\bar{\alpha} x_3 & -\bar{\beta} x_2 - i\bar{\beta} x_3 - i\bar{\alpha} x_1 \end{pmatrix}$$

$$a_x \cdot A = \begin{pmatrix} i x_1 & x_2 + i x_3 \\ -x_2 + i x_3 & -i x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\alpha x_1 - \bar{\beta} x_2 - i\bar{\beta} x_3 & i\beta x_1 + \bar{\alpha} x_2 + i\bar{\alpha} x_3 \\ -\alpha x_2 + i\alpha x_3 + i\bar{\beta} x_1 & -\beta x_2 + i\beta x_3 - i\bar{\alpha} x_1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_x = a_x \cdot A \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

- $x = (0,1,0) \implies$
  Durch Vergleich der Einträge $\begin{pmatrix} * & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ in beiden Matrizen bekommen wir
  $$\beta = \bar{\beta} \implies \beta \in \mathbb{R}$$

- $x = (0,0,1) \implies$
  Durch Vergleich der Einträge $\begin{pmatrix} * & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ in beiden Matrizen bekommen wir
  $$\beta = -\bar{\beta} \underset{\text{oben}}{=} -\beta \implies \underline{\beta = 0}$$

- $x = (0,1,0)$
  Durch Vergleich der Einträge $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ ** & \cdot \end{pmatrix}$ bekommen wir
  $$\alpha = \bar{\alpha} \implies \alpha \in \mathbb{R}.$$

Somit haben wir $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Da $A \in SU(2) \Rightarrow a^2 = 1 = \det A \Rightarrow a = \pm 1$

Somit:

$$A\, a_x = a_x\, A \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \iff A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ Vorzeichen gekoppelt}$$
$$= \pm \mathbb{1}.$$

┘

<u>Schritt 2.</u> Behauptung.

$$R_A = R_B \iff R_A \cdot R_B^{-1} = \mathbb{1} \underset{(2)}{\iff} R_A \cdot R_{B^{-1}} = \mathbb{1}$$
$$\underset{(2)}{\iff} R_{AB^{-1}} = \mathbb{1} \underset{\substack{\text{oben}\\ \text{1 Schritt}}}{\iff} AB^{-1} = \pm \mathbb{1}$$
$$\iff A = \pm B.$$

Somit haben wir Satz 17 vollständig bewiesen. $\blacksquare$

Nun wir wissen bereits, dass $SU(2) \cong S^3$ und $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$.

Aus Satz 17 sehen wir, dass jedes Element $R_A \in SO(3)$ genau zwei Urbilder $\{A, -A\} \subset SU(2)$ hat. Diese beiden Pkte. entsprechen in S^3 gerade zwei antipodalen Punkten.

Somit induziert φ einen Isomorphismus von S^3 mit identifizierten Antipodalpunkten und $\mathbb{R}P^3$.

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & SU(2) \arrow[d, "\varphi"] \\ S^3/\sim \arrow[r, phantom, "\cong"] & SO(3) \cong \mathbb{R}P^3 \end{tikzcd}$$

wobei $\sim$ bedeutet, dass antipodale Pkte. identifiziert sind.

Also: $\boxed{S^3/\sim \ \cong \ \mathbb{RP}^3}$

Man sagt $(SU(2), \varphi)$ ist eine zweiblättrige Überlagerung von $SO(3)$.

7. Minkowski - Geometrie

Betrachten wir den $\mathbb{R}^2$. Sei $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Definitionen:

(1) $g := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\langle x, y \rangle_M := \underbrace{\langle x, gy \rangle}_{\text{Standardskalarprodukt}}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(3) $O(-1,1) := \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T g A = g \}$

$SO(-1,1) := \{ A \in O(-1,1) \mid \det A = +1 \}$.

Satz 1.

(i) Sei $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\langle x, y \rangle_M = -x_0 y_0 + x_1 y_1$$

(ii) Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A \in O(-1,1) \iff \langle Ax, Ay \rangle_M = \langle x, y \rangle_M \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Beweis:

(i) $\langle x, y\rangle_M \underset{\text{Def}}{=} \langle x, gy\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1.$$

(ii) "$\Longrightarrow$": $A \in O(-1,1)$

$$\langle Ax, Ay\rangle_M \underset{\text{Def}}{=} \langle Ax, gAy\rangle = \langle x, \underbrace{A^TgA}_{g}y\rangle$$

$$= \langle x, gy\rangle = \langle x, y\rangle_M.$$

"$\Longleftarrow$":

$$\langle Ax, Ay\rangle_M = \langle x, y\rangle_M \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\langle Ax, Ay\rangle_M - \langle x, y\rangle_M = 0$$

$$= \langle Ax, gAy\rangle - \langle x, gy\rangle = \langle x, A^TgAy\rangle - \langle x, gy\rangle$$

$$= \langle x, (A^TgA - g)y\rangle = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \quad A^TgA - g = 0 \Rightarrow A^TgA = g.$$

$\square$

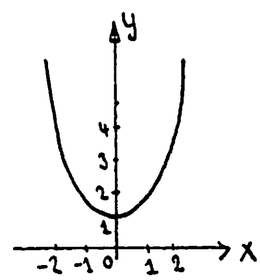
Definition.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

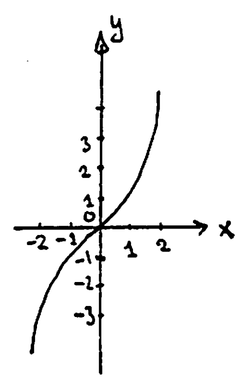
Cosinus hyperbolicus

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Sinus hyperbolicus



$y = \cosh x$



$y = \sinh x$

Lemma 2.

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $\cosh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\sinh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(c) $\cosh ix = \cos x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$\sinh ix = -i \cdot \sin x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

Beweis:

(a) , (b) Übung

(c) $\cosh ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \operatorname{Re}(e^{ix}) \underset{\substack{\text{Def} \\ \text{p.45}}}{=} \cos x.$

$\sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = -i \sin x.$

$\square$

Satz 3.

(a) $SO(-1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm\cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \pm\cosh \eta \end{pmatrix} \middle| -\infty < \eta < \infty \right\}$ Vorzeichen gekoppelt.

(b) $A \in O(-1,1) \Rightarrow \det A = \pm 1.$

Beweis:

(b) $A \in O(-1,1) \Leftrightarrow A^T g A = g$

$\det g = -1 = \det(A^T g A) = -\det(A)^2$

$\Rightarrow (\det A)^2 = +1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$

(a) $\supseteq$: $\det = 1$ ✓

$A^T g A = g \qquad A = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix}$ ✓

$\underline{\subseteq}$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(-1,1)$

$$A^T g A = g \iff A^T g = g A^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & +b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad a = d \quad , \quad b = c \\ A \in SO(-1,1) \Rightarrow ad - bc = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - b^2 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Nun,

$$\left.\begin{array}{l} b = -\sinh \eta \\ a^2 - b^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 1 - \sinh^2\eta = \cosh^2\eta \Rightarrow a = \pm \cosh^2\eta$$

Also: $$A = \begin{pmatrix} \pm\cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \pm\cosh\eta \end{pmatrix} \quad \text{Vorzeichen gekoppelt.}$$

$\square$

Definition.

$$L_+^\uparrow := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} ; -\infty < \eta < \infty \right\}$$

Bemerkungen:

(a) $L_+^\uparrow$ ist eine Untergruppe von $SO(-1,1)$.

(b) $O(-1,1) = SO(-1,1) \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} SO(-1,1)$

Vergleich euklidische Geometrie und Minkowski-Geometrie.

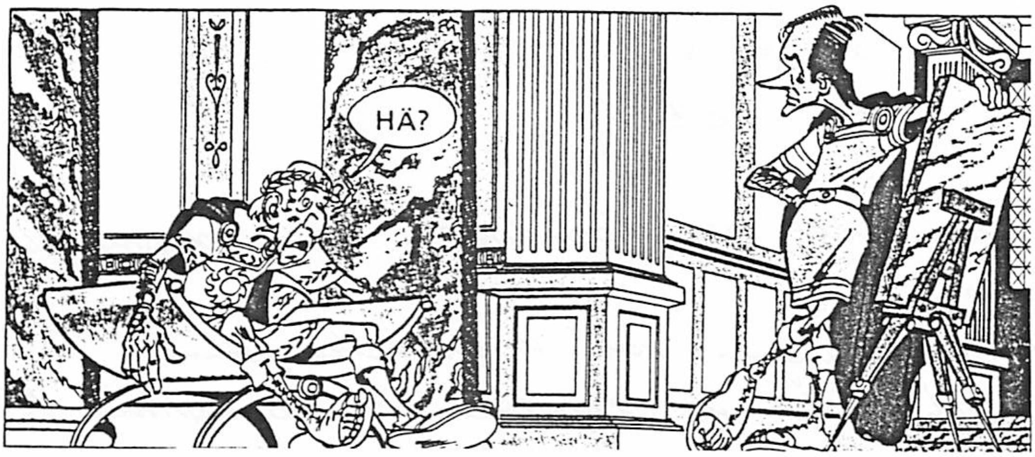
Sei $A \in SO(2)$. $\Rightarrow$ $|Ax| = |x| = c$

$\Rightarrow$ $\underbrace{x_1^2 + x_2^2 = c^2}_{\text{Kreis mit Radius } c.}$ ist invariant unter A

Sei $A \in SO(-1,1)$ $\Rightarrow$ $|Ax|_M = |x|_M = \sqrt{\langle x, x\rangle_M}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{-x_0^2 + x_1^2 = c^2}_{\text{Hyperbeln.}}$ ist invariant unter A

Euklidische – Geometrie	– Minkowski
$\mathbb{R}^2$ $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$	$\mathbb{R}^2$ $\langle x, y\rangle_M = -x_0 y_0 + x_1 y_1$
$SO(2)$ $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ sind invariant	$SO(-1,1)$ $-x_0^2 + x_1^2 = r^2$ sind invariant
$O(2)$	$O(-1,1)$



<u>Definition</u>: $\mathbb{R}^2$ mit $\langle\, ,\, \rangle_M$ heisst der 2-dimensionale Minkowskiraum: $(\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle_M) = M$.

<u>Bemerkung</u>: Geht man von der Gruppe $SO(2)$, und damit vom Standardskalarprodukt aus, dann erhält man die bekannte euklidische Geometrie.

Was ist die physikalische Bedeutung von $\langle\, ,\, \rangle_M$? Untersucht man die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (also z.B. von Licht) genauer, stellt man fest, dass sie sich unabhängig vom Bewegungszustand des Senders immer mit der Geschwindigkeit $c = 2{,}99793 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ausbreiten. Die Wellenfront, die von einem Lichtblitz an der Stelle $x=0$ zur Zeit $t=0$ ausgeht, wird daher durch die Gleichung

$$x^2 - c^2t^2 = 0$$

beschrieben. Wir wählen neue Masseinheiten

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_0 &= ct. \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2$ haben jetzt die Koordinaten eine physikalische Interpretation.

Relativbewegungen von Koordinatensystemen $\mathbb{R}$ äussern sich jetzt in linearen Transformationen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Wir erläutern das am Beispiel der Newtonschen Physik: Bewegt sich das Koordinatensystem mit Koordinaten (x, t) mit der Geschwindigkeit v relativ zum System mit den Koordinaten (x', t'), und derart, dass zur Zeit $t = 0$ die Orts- und Zeitnullpunkte übereinstimmen, dann kann man (x', t') wie folgt berechnen

$$
\begin{aligned}
x' &= x + vt \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

Dies ist eine lineare Transformation.

Das auf Seite 78 erwähnte Lichtausbreitungsgesetz zwingt uns, nach denjenigen Transformationen zu suchen, die

$$-x_0^2 + x_1^2$$

erhalten, also $O(-1,1)$. Wir möchten aber auch, dass die Zeitrichtung erhalten bleibt, sowie die Orientierung der x-Koordinaten. Das sind gerade die Transformationen aus $L_+^\uparrow$.

Sei $A \in L_+^\uparrow$, dann können wir nach Satz 3 schreiben

$$A = A(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $v = \tanh \eta$; dann gilt

$$A(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} =: B(v)$$

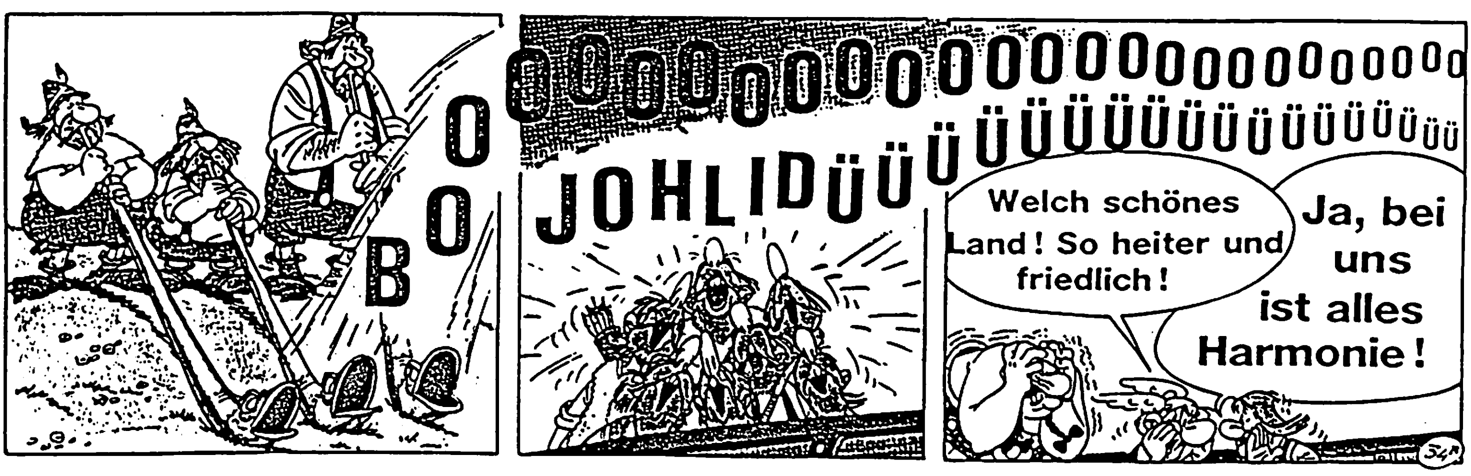
(Lorentz BOOST mit Geschwindigkeit v)

Man vermutet, dass v die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme ist. Die Koordinaten des Ursprungs $(x_0, 0)$ des alten Systems zur Zeit 0 werden im neuen System

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{-x_0 v}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

Wenn im alten System die Zeit x_0 vergangen ist, ist im neuen die Zeit $x_0/\sqrt{1-v^2}$ vergangen und O hat die Strecke $-x_0 v/\sqrt{1-v^2}$ zurückgelegt. Die Geschwindigkeit des alten Systems relativ zum neuen ist daher $-v$ (man beachte, dass die Zeitachse so geeicht ist, dass die Lichtgeschwindigkeit $=1$ wird).

Damit haben wir die Transformationsformeln gefunden, die dem Lichtausbreitungsgesetz Rechnung tragen: die Transformationsformeln der speziellen Relativitätstheorie (SRT). Wir gehen nun daran, einige Konsequenzen zu diskutieren.



Längenkontraktion

Wir betrachten die Punkte, die im alten System Raumkoordinaten zwischen 0 und x_1 haben, also eine Strecke oder einen Massstab der Länge x_1. Schauen wir uns den Massstab im neuen System an. Der Anfangspunkt ist

$$(x_0', x_1') = (x_0\gamma, -x_0 v\gamma)$$

(der Massstab bewegt sich, also hängt der Anfangspkt von der Zeit ab). Der Endpunkt ist

$$(x_0'', x_1'') = (x_0\gamma - v x_1\gamma, -v x_0\gamma + x_1\gamma).$$

Nun wollen wir die Länge des bewegten Massstabes messen. Dazu müssen wir (die wir uns im neuen System befinden) gleichzeitig, z.B. für $x_0' = x_0'' = 0$ die Ortskoordinaten der Eckpunkte bestimmen. Ihre Differenz wird die Länge sein.

$$x_0' = 0 \implies x_1' = 0$$
$$x_0'' = 0 \implies x_0 = v x_1 \implies x_1' = x_1\gamma(1-v^2) = x_1/\gamma$$

Die Länge des Massstabs ist also vom neuen System aus gemessen um den Faktor $\gamma(1-v^2) = \frac{1}{\gamma} < 1$ verkürzt.

Diese Darstellung hat auch klargemacht, dass der Begriff der Gleichzeitigkeit keine absolute Bedeutung haben kann.

Zeitdilatation

Wir stellen uns im alten System sitzend einen Beobachter vor, dessen Herz zur Zeit 0 und $x_0 > 0$ schlagen soll. $[0, x_0]$ soll das Intervall zwischen 2 Herzschlägen sein.

Was sieht man vom neuen System aus. Der erste Herzschlag hat die Koordinaten $(0,0)$, der zweite $(x_0\gamma, -x_0 v\gamma)$, es vergeht also die Zeit $x_0\gamma$ zwischen den Herzschlägen. Aber $x_0\gamma > x_0$, die Zeit des Beobachters im alten System scheint also vom neuen System aus gesehen langsamer zu laufen (Zeitdilatation).

Auch der Experimentator im neuen System kann bestimmen, welche Zeit für den Beobachter im alten System verflossen ist. Dazu rechnet er

$$-(x_0\gamma)^2 + (x_0 v\gamma)^2 = -x_0^2$$

aus. Daher heisst $\sqrt{-\langle x,x\rangle_M}$ die <u>Eigenzeit</u> des Punktes $x \in \mathbb{R}^2$.

Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Führen wir noch eine weitere Transformation durch, so müssen wir $B(u)B(v)$ berechnen. Da $B(u)B(v) \in L_+^\uparrow$ ist, muss es ein $s \in]-1,1[$ geben mit $B(s) = B(u)B(v)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} & \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} \\ \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix}$$

führt auf

$$\frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} = -\frac{u+v}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}} = -r$$

$$\frac{s^2}{1-s^2} = r^2 \implies s^2 = \frac{r^2}{1+r^2}$$

$$s^2 = \frac{(u+v)^2}{1-u^2-v^2+u^2v^2+(u+v)^2} \qquad s = \frac{u+v}{1+uv} \qquad (*)$$

Damit haben wir das Additionsgesetz für die Geschwindigkeiten gefunden. Das Überraschende ist, dass $|s|$ nie grösser als 1 wird, es gibt keine Überlichtgeschwindigkeit.

Mit der Addition $(*)$ wird $]-1,1[$ zu einer Gruppe und

$$]-1,1[\longrightarrow L_+^\uparrow$$

ist ein Homomorphismus. Wir haben bereits die Abbildung

$$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[: \eta \mapsto \tanh\eta = v$$

Ein kurze Meditation über der Formel (*) zeigt, dass das gerade das Additionstheorem für tanh ist:

$$\tanh(\eta + \xi) = \frac{\tanh\eta + \tanh\xi}{1 + \tanh\eta \tanh\xi}$$

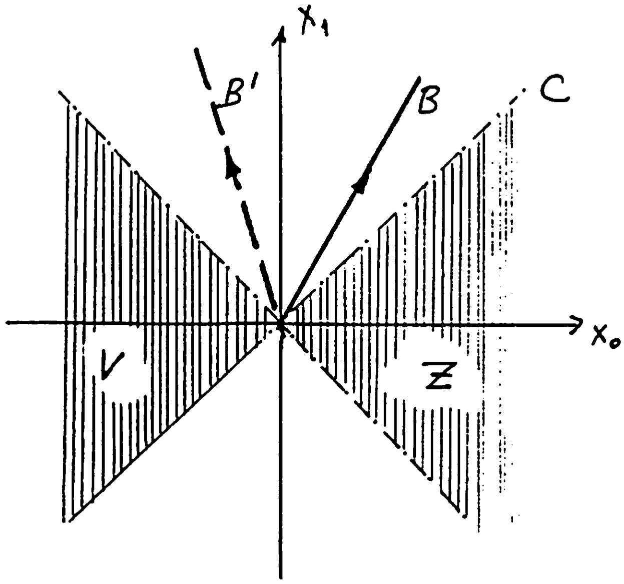
Somit erhalten wir ein Dreieck von Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_+^\uparrow \\
&]-1,1[\arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\eta \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & A(\eta) \\
& \tanh\eta \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Kausalität

Die Transformationen $L_+^\uparrow$ lassen die Menge $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, x\rangle_M = 0\}$ invariant. C heisst Lichtkegel, denn eine Lichtwelle, die zur Zeit $x_0 = 0$ vom Ursprung $x_1 = 0$ ausgeht, wird durch $x_1 = \pm x_0$ beschrieben.

Reale Teilchen können sich nur mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegen. Die Bahn B eines sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegenden Teilchens kann durch eine $L_+^\uparrow$-Transformation so transformiert werden, dass das Teilchen für den neuen Beobachter in der Zeit rückwärts B' zu laufen scheint, also die Kausalität verletzt.



Ein Teilchen kann sich vom Ursprung nur in den Bereich Z, die absolute Zukunft, bewegen. Es kann den Ursprung auch nur vom Bereich V, der absoluten Vergangenheit, aus erreichen.

Die Transformationen von $L_+^\uparrow$ lassen sowohl Z wie auch V invariant; C, Z, V sind also absolute Grössen, während Strecken, Zeitintervalle Geschwindigkeiten relativ sind.

<u>Definition</u>: Punkte in Z oder V heissen zeitartig, sie sind durch $\langle x,x\rangle_M < 0$ charakterisiert. Punkte mit $\langle x,x\rangle_M > 0$ heissen raumartig solche mit $\langle x,x\rangle_M = 0$ lichtartig.

Die Bewegung eines Teilchens in R wird durch eine Kurve in M beschrieben, die Weltlinie. Physikalische Teilchen haben Weltlinien, deren Tangentialvektor immer zeitartig ist.

8. Diskrete Fouriertransformation.

Betrachten wir $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$:

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{C} \;, 1 \leq i \leq n \right\}$$

$\mathbb{C}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-VR bzw. ein $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR. (Übung!)

Auf $\mathbb{C}^n$ haben wir wiederum ein Standardskalarprodukt:

Seien $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

Definition: $$\boxed{\langle w, z \rangle := \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \overline{z_i}}$$

Lemma 1: Sei $B \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gilt:

$$\langle Bw, z \rangle = \langle w, B^* z \rangle \qquad \forall w, z \in \mathbb{C}^n \qquad B^* = \overline{B}^T.$$

Beweis:

$$\langle Bw, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (Bw)_i \cdot \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot w_k \right) \cdot \overline{z_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \cdot \overline{z_i} \right)}_{\underbrace{\overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{b_{ik}}\, z_i}}_{(\overline{B}^T z)_k}} = \sum_{k=1}^{n} w_k \overline{(\overline{B}^T z)_k} = \langle w, B^* z \rangle$$

$\square$

Lemma 2:

$$A \in U(n) \iff \langle Aw, Az\rangle = \langle w, z\rangle \quad \forall w, z \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis.

"$\Rightarrow$": $A \in U(n) \Rightarrow A^{-1} = A^*$

$$\langle Aw, Az\rangle \underset{\text{Lemma 1}}{=} \langle w, A^* A z\rangle \underset{A \in U(n)}{=} \langle w, z\rangle \quad \forall w, z \in \mathbb{C}^n$$

"$\Leftarrow$": $\langle Aw, Az\rangle = \langle w, z\rangle \quad \forall w, z \in \mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow 0 = \langle Aw, Az\rangle - \langle w, z\rangle$$

$$\underset{\text{Lemma 1}}{=} \langle w, A^* A z\rangle - \langle w, z\rangle$$

$$0 = \langle w, A^* A z - z\rangle \quad \forall w, z \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \quad A^* A z - z = 0 \quad \Rightarrow A^* A z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow A^* A = \mathbb{1} \Rightarrow A^* = A^{-1}. \qquad \square$$

Definition. Die Matrix

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F} = \left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} jk}}{\sqrt{n}} \right)_{1 \leq j,k \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$$

heisst diskrete Fouriertransformation.

Satz 3:

(1) $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(n)$, d.h. $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$

(2) $\mathcal{F}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 0 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$.

Beweis:

(1) $$(\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^*)_{jk} = \sum_{l=1}^{n} (\mathcal{F})_{jl}(\mathcal{F}^*)_{lk} = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} jl}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i}{n} lk}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)\cdot l}$$

Fall (a): $j = k$

$$(\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^*)_{jj} = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{l=1}^{n} 1}_{=n} = 1.$$

Fall (b): $j \neq k$

$$(\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^*)_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)\cdot l} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)}\right)^l$$

$$\underset{\substack{\text{geom. Reihe} \\ \text{vgl. p.43}}}{=} \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)(n+1)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{1 - \cancelto{1}{e^{2\pi i(j-k)}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}(j-k)}}}_{=1} - 1\right) = 0$$

Somit haben wir:

$$\mathcal{Y}\cdot\mathcal{Y}^* = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{wie gewünscht.}$$

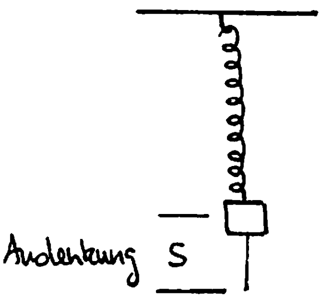
(2) und (3) vgl. Übung 8

□

Anwendung zur Lösung der diskreten Wellengleichung.

1. Hook's Gesetz

Betrachten wir eine an der Decke aufgehängte Feder mit Federkonstante f.

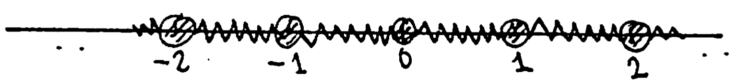


Wie man in der Mittelschule lernt (obligatorisch, wenn nicht gemacht, Geld zurück!) gilt:

$$\boxed{F = f \cdot s}$$

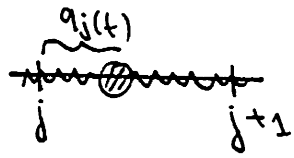
2. diskrete Wellengleichung.

Betrachten wir Atome der Masse M, die auf $\mathbb{R}$ in den Pkten. $\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ angeordnet sind und durch eine Feder mit Federkonstante f verbunden sind (vgl. Figur).



Bezeichnen wir die Auslenkung des j-ten Atoms zur Zeit t mit

$$q_j(t)$$



Damit bekommen wir für den Ort des j-ten Atoms:

$$j + q_j(t)$$

Treffen wir nun für alles Folgende die Annahme: $q_{j+n} = q_j$ für ein n.
(dh. Kette wird geschlossen: $q_0 = q_n$) <u>Periodische Bewegung.</u>

Nach dem Gesetz von Newton bekommen wir für das j-te Atom

$$F_j(q_1, \dots, q_n) = F_j = M \cdot a = M \cdot \frac{d^2}{dt^2}(j + q_j(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{F_j = M \cdot \frac{d^2}{dt^2} q_j} \qquad (1)$$

Weiter hängt die Kraft des j-ten Atoms nur von den beiden Nachbaratomen $j-1$ und $j+1$ ab:

Abstand zwischen dem j und $j+1$ Atom:

$$j + 1 + q_{j+1} - (j + q_j) = q_{j+1} - q_j + 1$$

Abstand zwischen dem $(j-1)$ und j-ten Atom:

$$j + q_j - ((j-1) + q_{j-1}) = q_j - q_{j-1} + 1$$

Mit dem Hook'schen Gesetz bekommen wir:

$$F_{j+} = f \cdot (q_{j+1} - q_j + 1)$$

$$F_{j-} = f \cdot (q_j - q_{j-1} + 1)$$

Also bekommen wir für $F_j = F_{j+} - F_{j-}$:

$$\boxed{F_j = f\left(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}\right)} \qquad (2)$$

Also: aus (1) und (2):

$$\boxed{M \cdot \frac{d^2}{dt^2} q_j = f\left(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}\right)} \qquad (3) \qquad j = 1, \ldots, n$$

Sei $c^2 := \dfrac{f}{M}$ (Schallgeschwindigkeit)

c hat Dimension Gitterpunkte per Sekunde $\left[\frac{1}{s}\right]$.

Die Gleichung (3) mit den Anfangsbedingungen

$$q_j(t)\Big|_{t=0} = q_j(0)$$

$$\frac{d}{dt} q_j(t)\Big|_{t=0} = \dot{q}_j(0) \qquad j = 1, \ldots, n.$$

heisst diskrete Wellengleichung.

Definition:

$$\Delta = (\Delta_n) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

heisst diskreter periodischer Laplaceoperator.

Sei $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ der Positionsvektor.

Dann haben wir:

$$\Delta q = \begin{pmatrix} q_2 - 2q_1 + q_n \\ q_1 - 2q_2 + q_3 \\ \vdots \\ q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1} \\ \vdots \\ q_1 - 2q_n + q_{n-1} \end{pmatrix} \underset{q_{j+n} = q_j}{=} \begin{pmatrix} q_2 - 2q_1 + q_n \\ \vdots \\ q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1} \\ \vdots \\ q_1 - 2q_n + q_{n-1} \end{pmatrix}$$

Somit bekommen wir für (3)

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} q = c^2 \cdot \Delta q} \quad (4)$$ diskrete Wellengleichung (periodische Wellen im 1-dim Gitter)

Lemma 4.

$$\mathcal{F}^{-1} \Delta \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{2\pi}{n} - 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\cos\frac{2\pi}{n} \cdot j - 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\cos\frac{2\pi}{n} \cdot n - 2 \end{pmatrix} = D$$

Beweis: Wir zeigen: $\Delta \mathcal{F} p = \mathcal{F} D p \quad \forall p$.

Setze $q := \mathcal{F} p \quad \Rightarrow \quad q_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} jk}}{\sqrt{n}} \cdot p_k$

$$(\Delta q)_j = q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)k}}{\sqrt{n}} p_k - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} jk}}{\sqrt{n}} p_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(j+1)k}}{\sqrt{n}} p_k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)k} - 2e^{\frac{2\pi i}{n} jk} + e^{\frac{2\pi i}{n}(j+1)k} \right) p_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(e^{\frac{2\pi i}{n}k} + e^{-\frac{2\pi i}{n}k} - 2\right)}_{2\cos\frac{2\pi}{n}k \;-2} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}jk}}{\sqrt{n}}\, p_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}jk}}{\sqrt{n}} \left[2\cos\frac{2\pi}{n}k - 2\right] p_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}jk}}{\sqrt{n}} (D\mathbf{p})_k = (\mathcal{F}Dp)_j$$

Also: $(\Delta q)_j = (\Delta \mathcal{F} p)_j = (\mathcal{F}Dp)_j \qquad j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \quad \Delta \mathcal{F} p = \mathcal{F} D p \quad \forall p$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \mathcal{F} = \mathcal{F} D$$

$\square$

Nun $2(\cos\frac{2\pi}{n}k - 2) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{n}k - 1\right) = -4\sin^2\frac{\pi}{n}k$

da $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\Delta\mathcal{F} = D = \begin{pmatrix} -4\sin^2\frac{\pi}{n} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -4\sin^2\frac{\pi}{n}k & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & -4\sin^2\pi \end{pmatrix} := \Omega$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\omega_n^2 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \omega_k^2 = 4\sin^2\frac{\pi}{n}k.$$

also: $\omega_k = \left|2\sin\frac{\pi}{n}k\right|$

Nun wollen wir Lemma 4 zum Lösen von

$$\frac{d^2}{dt^2} q = c^2 \Delta q$$

benützen.

Setze $p := \mathcal{J}^{-1} q$

Nun $\mathcal{J}^{-1} \frac{d^2}{dt^2} q = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{J}^{-1} q$, da $\mathcal{J}^{-1}$ unabh. von t.

$$= c^2 \cdot \mathcal{J}^{-1} \Delta q = c^2 \underbrace{\mathcal{J}^{-1} \Delta \mathcal{J}}_{\Omega} \mathcal{J}^{-1} q$$

$$= c^2 \Omega \mathcal{J}^{-1} q$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} p = c^2 \Omega p$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2}{dt^2} p_k = -c^2 \omega_k^2 p_k \quad , \quad k = 1, \dots, n} \qquad (5)$$

In der Analysis II zeigt man, dass die allgemeine Lösung von (I) wie folgt aussieht:

$$p_k(t) = c_1 \cdot \cos(c\omega_k t) + c_2 \sin(c\omega_k t)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(Prüfe durch Einsetzen!)

Appendix : Differentialgleichungen.

Definition. Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

heisst eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

$y^{(n)}$ = n-te Ableitung von $y(x)$

Bsp.

(1) Wellengleichung $\underbrace{\ddot{p}_k}_{\frac{d^2}{dt^2} p_k} = -c^2 \omega_k^2 p_k$ (vgl. p.94)

(2-ter Ordnung)

(2) $y'' = y' + x$ DGL 2-ter Ordnung.

(3) diskrete Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{d}{dt} p_k = -\omega_k^2 p_k \qquad \text{(vgl. Übung Serie 8)}$$

Ohne Beweis zitieren wir folgenden Existenz und Eindeutigkeitssatz:

Satz: Sei A ein Gebiet des $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass $F_{\cdot 1}, F_{\cdot 2}, \dots, F_{\cdot n+1}$ alle stetig auf A, $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in A$. Dann gibt es eine 1-dimensionale Umgebung I von x_0, so dass es lokal genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der DGL $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ gibt mit $\varphi(x_0) = a_0$, $\varphi'(x_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$.

Beachte: $F_{\cdot 1} = \frac{\partial}{\partial x} F(\underset{\uparrow \cdot 1}{x}, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$$F_{\cdot j} = \frac{\partial}{\partial y^{(j-2)}} F(x, y, y', \dots, \underset{\uparrow j-2}{}\, y^{(n-1)}) \qquad 1 < j \leq n+1.$$

partiellen Ableitungen von F.

Geometrische Interpretation

Eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt ein *Richtungsfeld:* In jedem Punkt $(x, y) \in G$ wird durch $y' = f(x, y)$ eine Steigung vorgegeben, vgl. Bild 22. Gesucht sind differenzierbare Funktionen, deren Graph in jedem seiner Punkte die vorgegebene Steigung hat.

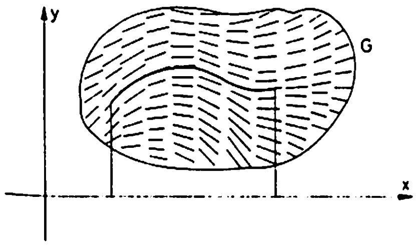


Bild 22

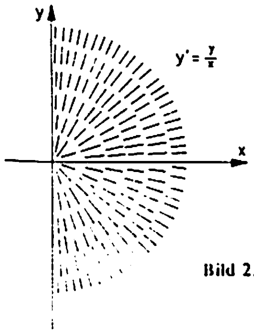


Bild 23

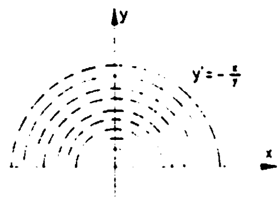


Bild 24

Bp. $y' = x + y$ hat Allg. Lösung $\varphi(x) = c \cdot e^x - x - 1$

In Fig. 1 ist die zu φ gehörende Kurvenschar für einige Werte von c dargestellt, in Fig. 2 das zugehörige Richtungsfeld.

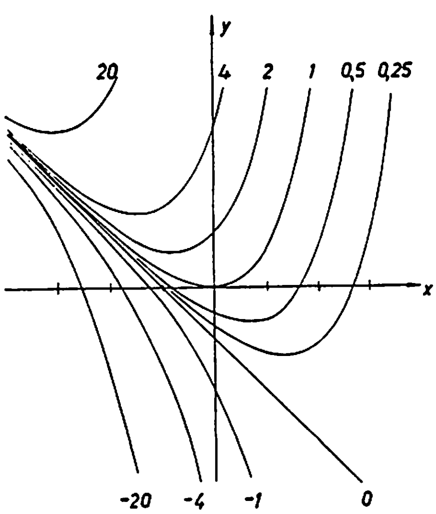


Fig. 1

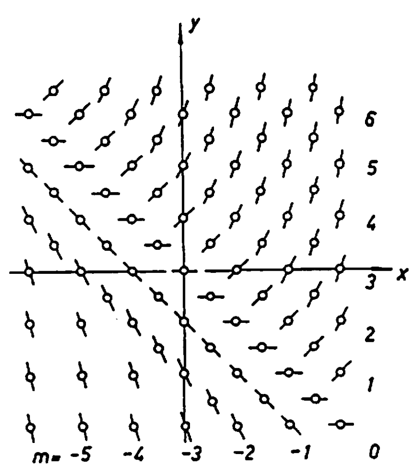


Fig. 2

<u>Satz:</u> Gegeben sei die DGL

$$\ddot{y} = -\alpha^2 y. \quad (*)$$

Sei $L = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{Lsg. von } (*)\}$ Dann:

(i) L ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

(ii) $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$.

<u>Beweis:</u>

(i) Seien $\varphi_0, \varphi_1 \in L$ zwei Lösungen von $(*)$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$

Dann: $\ddot{\overline{(\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1)}} = \lambda_0 \cdot \ddot{\varphi}_0 + \lambda_1 \ddot{\varphi}_1$

$$= \lambda_0 \cdot (-\alpha^2 \varphi_0) + \lambda_1 \cdot (-\alpha^2 \varphi_1) \quad \text{da } \varphi_0, \varphi_1 \text{ Lsg. von } (*)$$

$$= -\alpha^2 (\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1)$$

$\Rightarrow \lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 \in L$, also L ein $\mathbb{R}$-VR.

(ii) Sei $\varphi_0(t) = \cos \alpha t$, $\varphi_1(t) = \sin \alpha t$

$\Rightarrow \varphi_0, \varphi_1 \in L$.

$\varphi_0(0) = 1 \qquad \dot{\varphi}_0(0) = 0$

$\varphi_1(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}_1(0) = 1$.

- φ_0, φ_1 sind l.u $/\mathbb{R}$:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 \cdot \underbrace{\varphi_0(0)}_{=1} + \lambda_1 \underbrace{\varphi_1(0)}_{=0} = \underline{\lambda_0 = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 \dot{\varphi}_0 + \lambda_1 \dot{\varphi}_1 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 \cdot \dot{\varphi}_0(0) + \lambda_1 \dot{\varphi}_1(0) = \underline{\lambda_1 = 0}$$

$\Rightarrow \varphi_0, \varphi_1$ <u>l.u.</u> $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} L \geq 2$.

- Sei $\varphi \in L$ eine beliebige Lösung. Setze

$$\psi(t) = \varphi(0)\varphi_0(t) + \dot{\varphi}(0)\varphi_1(t) \quad \Rightarrow \underline{\psi \in L}$$

$$\Rightarrow \psi(0) = \varphi(0) \cdot \underbrace{\varphi_0(0)}_{=1} + \dot{\varphi}(0) \underbrace{\varphi_1(0)}_{=0} = \varphi(0)$$

$$\dot{\psi}(t) = \varphi(0)\cdot\dot{\varphi}_0(t) + \dot{\varphi}(0)\cdot\dot{\varphi}_1(t)$$

Nun $\dot{\psi}(0) = \varphi(0)\cdot\underbrace{\dot{\varphi}_0(0)}_{=0} + \dot{\varphi}(0)\cdot\underbrace{\dot{\varphi}_1(t)}_{=1} = \dot{\varphi}(0)$

Aus dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit p. 95 folgt somit, dass $\underline{\varphi = \psi}$.

$\Rightarrow$ φ ist Linearkombination von φ_1, φ_2.

$\Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$.

$\square$

<u>Korollar</u>: Sei $\ddot{y} = -\alpha^2 y$ mit den Nebenbedingungen
$y(0) = \alpha_0$ und $\dot{y}(0) = \alpha_1$.
Dann ist $y(t) = \alpha_0\cdot\cos\alpha t + \frac{\alpha_1}{\alpha}\cdot\sin\alpha t$ die allgemeine Lsg..

<u>Beweis</u>:
Aus obigem Satz wissen wir, dass
$\varphi_0(t) = \cos\alpha t$ und $\varphi_1(t) = \sin\alpha t$
eine Basis des $\mathbb{R}$-VR L bilden.

$\Rightarrow$ Jede Lösung $\varphi \in L$ lässt sich schreiben als

$$\varphi(t) = c_0\cdot\varphi_0(t) + c_1\cdot\varphi_1(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = c_0\cdot\cos\alpha t + c_1 \sin\alpha t$$

Nebenbedingungen:
$\alpha_0 = \varphi(0) = c_0$ $\qquad$ $\alpha_1 = \dot{\varphi}(0) = c_1\cdot\alpha \Rightarrow c_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha}$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lsg.:

$$\underline{y(t) = \alpha_0\cdot\cos\alpha t + \frac{\alpha_1}{\alpha}\sin\alpha t.}$$

$\square$

Analog zeigt man:

<u>Lemma:</u> Die DGL $\dot{y} = -\alpha y$ mit der Nebenbedingung $y(0) = c$ hat als allgemeine Lsg

$$y(t) = c \cdot e^{-\alpha t}$$

<u>Idee:</u> Zeige: $L = \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{Lsg von } \dot{y} = -\alpha y)$
bilden einen 1-dim $\mathbb{R}$-VR
$\Rightarrow$ Basis $e^{-\alpha t}$ $\Rightarrow$ Lemma.

<u>Bemerkungen:</u>

- $\Delta = \Delta^T$.
- Wir werden später einsehen, warum $\mathcal{F} \Delta \mathcal{F}^{-1} = D =$ diagonal ist.

9. Determinanten

§1. Die Gruppe S_n

Definition: Eine Permutation σ der Zahlen $1, 2, \dots, n$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$.

Die Permutation σ wird durch das Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

vollständig beschrieben.

Beachte: Es gibt genau $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$.

Es seien σ', σ'' zwei Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$. Das Produkt $\sigma'' \circ \sigma'$ ist definiert durch

$$\sigma'' \circ \sigma' (i) = \sigma''(\sigma'(i)) \qquad 1 \le i \le n.$$

Definition: $S_n = \{$Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n\}$

Lemma 1. S_n ist eine Gruppe bzgl. der oben definierten Verknüpfung, $\operatorname{ord} S_n = n!$

Beweis:

(i) abgeschlossen unter Verknüpfung : klar

(ii) assoziativ : Übung.

(iii) Neutralelement: $\varepsilon(i) = i$, $1 \le i \le n$

(iv) Inverse σ^{-1} klar (Bijektionen!)

$\square$

<u>Definition</u>. Eine Permutation τ_{ij}, $1 \le i,j \le n$, $i \neq j$, definiert durch

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j & \text{für } k = i \\ i & \text{für } k = j \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

heisst Transposition.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix} = \tau_{ij}$$

<u>Definition</u>. Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heisst r-Zyklus, falls es eine Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ gibt mit

$$\sigma(i_k) = i_{k+1} \qquad 1 \le k < r$$
$$\sigma(i_r) = i_1$$
$$\sigma(m) = m \qquad \forall m \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$$

<u>Notation</u>: $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$

<u>Beispiel</u>: (1) τ_{ij} Transposition ist ein 2-Zyklus

$$\tau_{ij} = (i\,j)$$

(2) $n = 5$: $(1,3,4)$ 3-Zyklus

$$(1,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Lemma 2</u>. Für das Rechnen mit Zyklen gelten folgende Rechenregeln:

(i) $(i_1, \ldots, i_j) \circ (i_j, \ldots, i_r) = (i_1, \ldots, i_r)$, falls $i_l \neq i_k$, $\forall l \neq k$.

(ii) $\operatorname{ord}(i_1, \ldots, i_r) = r$, d.h. $(i_1, \ldots, i_r)^r = id = \varepsilon$, und $(i_1 \cdots i_s)^s \neq id$ $\forall s < r$.

Beweis:

(i)

$$(i_1,\dots,i_j)(i_j,\dots,i_r) : k \longmapsto \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i_1,\dots,i_r\} \\ i_{l+1} & \text{falls } k = i_l \quad l < j \\ i_{s+1} & \text{falls } k = i_s \quad j \leq s < r \\ i_1 & \text{falls } k = i_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow (i_1,\dots,i_j)(i_j,\dots,i_r) = (i_1,\dots,i_j,\dots i_r).$$

(ii) klar. $\square$

Lemma 3. Jeder Zyklus ist Produkt von Transpositionen.

Beweis:
Nach Lemma 2(i) wissen wir:

$$(i_1,\dots i_r) = (i_1,i_2)(i_2,i_3),\dots(i_{r-1},i_r)$$

$\square$

Satz 4. Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Jede Zerlegung hat immer eine gerade (ungerade) Anzahl von Faktoren, d.h. immer dieselbe Parität.

Beweis

(1) Jedes $\sigma \in S_n$ ist Produkt von Transpositionen.
Der Beweis geschieht durch Induktion nach n, wobei wir S_{n-1} mit der Untergruppe von S_n identifizieren, die die ersten $n-1$ Zahlen permutiert.

- $\sigma \in S_{n-1}$, d.h. $\sigma(n) = n$ $\Rightarrow$ nach Induktionsannahme ist σ ein Produkt von Transpositionen fertig.

- $\sigma(n) \neq n$. Sei τ die Transposition, die n und $\sigma^{-1}(n)$ vertauscht, d.h. $\tau = (n,\sigma^{-1}(n))$ $\Rightarrow \sigma' := \sigma\tau \in S_{n-1}$

Nach Induktionsannahme ist also σ' ein Produkt von Transpositionen, etwa $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_r$

$\Rightarrow \sigma' = \sigma \circ \tau = \tau_1 \cdots \tau_r \Rightarrow \sigma = \tau_1 \cdots \tau_r \circ \tau$

Also σ ist ein Produkt mit Transpositionen.

(2) <u>Parität</u>:

Wir zeigen folgendes: $\sigma \in S_n$ ist genau dann ein Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen, wenn die Anzahl der Inversionen in der Zahlenfolge $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ gerade ist. Dabei ist eine <u>Inversion</u> ein Zahlenpaar (i,j) mit $i<j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$

Sei also $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation, τ eine Transposition und $\sigma' = \tau\sigma$. Dann ist die Differenz der Anzahl Inversionen von σ und σ' ungerade (Check this!)

$\Rightarrow$ (σ gerades Produkt von Transp. $\Leftrightarrow$ # Inversionen gerade).

Sei jetzt $\sigma = \underbrace{\tau_1 \cdots \tau_r}_{(*)} = \underbrace{S_1 \cdots S_m}_{(**)}$, τ_i, S_j Transpositionen

Aus $(*)$: # Inversionen $= (r-1) \cdot$ ungerade

$(**)$: # Inversionen $= (m-1) \cdot$ ungerade.

O.E.d.A $r = 2k$ gerade $\Rightarrow (r-1)$ ungerade $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ # Inv. <u>ungerade</u>

Sei jetzt m ungerade $\Rightarrow$ $m-1$ gerade $\Rightarrow$ # Inv gerade $\lightning$.

$\Rightarrow$ Parität gleich.

$\square$

<u>Definition</u>: Sei $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ Zerlegung in Transpositionen.

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls } m \text{ gerade (man sagt } \sigma \text{ ist \underline{gerade})} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade (man sagt } \sigma \text{ ist \underline{ungerade})} \end{cases}$$

<u>Beachte</u>: sign ist wohldefiniert (Satz 4) !

§ 2. Determinanten

Definition. Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Unter der Determinante $\det(A)$ von A versteht man die folgende Summe

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n}{}' \operatorname{sign}(\sigma)\; a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Beispiele.

n = 2: $\sigma_1 = (1)$, $\sigma_2 = (1,2)$

$\operatorname{sign}\sigma_1 = +1$, $\operatorname{sign}\sigma_2 = -1$

$$\Rightarrow \det A = \operatorname{sign}\sigma_1 \cdot a_{\sigma_1(1)1}\, a_{\sigma_1(2)2} + \operatorname{sign}\sigma_2 \cdot a_{\sigma_2(1)1}\, a_{\sigma_2(2)2}$$

$$= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{21}\, a_{12}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \quad \text{wie früher.}$$

n = 3: $\operatorname{ord} S_3 = 3! = 6$

$\sigma_1 = (1)$ $\quad \operatorname{sign}\sigma_1 = +1$
$\sigma_2 = (1,2)$ $\quad \operatorname{sign}\sigma_2 = -1$
$\sigma_3 = (2,3)$ $\quad \operatorname{sign}\sigma_3 = -1$
$\sigma_4 = (1,3)$ $\quad \operatorname{sign}\sigma_4 = -1$
$\sigma_5 = (1,2,3) = \sigma_2 \cdot \sigma_3$ $\quad : \operatorname{sign}\sigma_5 = +1$
$\sigma_6 = (1,3,2) = \sigma_4 \cdot \sigma_3$ $\quad : \operatorname{sign}\sigma_6 = +1$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign}\sigma\; a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}$$

$$= \underbrace{\operatorname{sign}\sigma_1}_{1}\; \underbrace{a_{\sigma_1(1)1}}_{a_{11}}\; \underbrace{a_{\sigma_1(2)2}}_{a_{22}} \cdot \underbrace{a_{\sigma_1(3)3}}_{a_{33}} + \underbrace{\operatorname{sign}\sigma_2}_{-1}\; \underbrace{a_{\sigma_2(1)1}}_{a_{21}}\; \underbrace{a_{\sigma_2(2)2}}_{a_{12}}\; \underbrace{a_{\sigma_2(3)3}}_{a_{33}}$$

$$+ \underbrace{\operatorname{sign}\sigma_3}_{-1}\; \underbrace{a_{\sigma_3(1)1}}_{a_{11}}\; \underbrace{a_{\sigma_3(2)2}}_{a_{32}}\; \underbrace{a_{\sigma_3(3)3}}_{a_{23}} + \underbrace{\operatorname{sign}\sigma_4}_{-1}\; \underbrace{a_{\sigma_4(1)1}}_{a_{31}}\; \underbrace{a_{\sigma_4(2)2}}_{a_{22}}\; \underbrace{a_{\sigma_4(3)3}}_{a_{13}}$$

$$+ \underbrace{\operatorname{sign}\sigma_5}_{1}\; \underbrace{a_{\sigma_5(1)1}}_{a_{21}}\; \underbrace{a_{\sigma_5(2)2}}_{a_{32}}\; \underbrace{a_{\sigma_5(3)3}}_{a_{13}} + \underbrace{\operatorname{sign}\sigma_6}_{1}\; \underbrace{a_{\sigma_6(1)1}}_{a_{31}}\; \underbrace{a_{\sigma_6(2)2}}_{a_{\,2}}\; \underbrace{a_{\sigma_6(3)3}}_{a_{23}}$$

Also

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

wie früher.

<u>Definition</u>. Eine Funktion D, die jedem geordneten n-Tupel von Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ aus $\mathbb{K}^n$ ein Element $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ aus $\mathbb{K}$ zuordnet, heisst <u>Determinantenfunktion</u>, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $D(\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_i, \dots \alpha_n) = \lambda \cdot D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \quad \lambda \in \mathbb{K}$

(ii) $D(\alpha_1, \dots, \alpha_i' + \alpha_i'', \dots, \alpha_n) =$
$= D(\alpha_1, \dots, \alpha_i', \dots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \dots, \alpha_i'', \dots, \alpha_n)$

(iii) Sei $\alpha_i = \alpha_j$ für $i \neq j$ Dann gilt:

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$$

(iv) $D(e_1, \dots e_n) = 1.$ wobei $e_i = (0, \dots, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, \dots 0)$.

<u>Beispiel</u>:

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$

Dann setze
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

In Übung Serie 9 Aufgabe 1 zeigen wir, dass $\det(A)$ die Eigenschaften (i), ..., (iv) hat und somit eine Determinantenfunktion ist.

Als nächstes möchten wir zeigen, dass durch die Eigenschaften (i), ..., (iv) die Determinantenfkt. eindeutig charakterisiert wird, d.h. es gibt genau eine Determinantenfkt. mit (i), ..., (iv) nämlich $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(A)$ mit $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

<u>Lemma 5.</u> Die Determinantenfkt. ist schiefsymmetrisch, d.h.

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots \alpha_j, \dots, \alpha_n) = -D(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots \alpha_n)$$
$i \neq j$.

<u>Beweis:</u>

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \underset{\substack{(iii)\\(ii)}}{=} D(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$$

$$\underset{\substack{(iii)\\(ii)\\(i)}}{=} D(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_j - (\alpha_i + \alpha_j), \dots, \alpha_n)$$

$$= D(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_j - \alpha_i - \alpha_j, \dots, \alpha_n)$$

$$= D(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, -\alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$$\underset{\substack{(ii)\\(iii)}}{=} D(\alpha_1, \dots \alpha_j, \dots, -\alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$$\underset{(i)}{=} -D(\alpha_1, \dots \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$\square$

<u>Satz 6.</u> Für jedes $n \geq 1$ gibt es <u>genau eine</u> Determinantenfkt., nämlich $\det(A)$.

<u>Beweis.</u>

Sei D^1 eine n-dim. Determinantenfunktionen. Dann gilt wegen (iv) $D^1(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Nach Satz 4 lässt sich jedes $\sigma \in S_n$ in ein Produkt von Transpositionen zerlegen, also folgt aus Lemma 5

$$D^1(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \mathrm{sign}\underbrace{(i_1, \dots, i_n)}_{\in S_n} \cdot D^1(e_1, \dots, e_n)$$
$$= \mathrm{sign}(i_1, \dots, i_n)$$

Da $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist (als $\mathbb{K}$-VR) folgt

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n}{}' a_{ki} e_k$$

$$\Rightarrow D^1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \underset{\substack{(i)\\(ii)}}{=} \sum_{k_1=1}^{n}{}' a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^{n}{}' a_{k_2 2} \cdots \sum_{k_n=1}^{n}{}' a_{k_n n} D^1(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$$

$$= \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq n}{}' a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} \operatorname{sign}(k_1, \dots, k_n)$$

$$= \det(A) \qquad \text{nach Def.}$$

□

Satz 7. Für $\det(A)$ gilt:

(i) $\det A = \det A^T \qquad A \in M_n(\mathbb{K})$

(ii) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \qquad , A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

(iii) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) \qquad , \quad A \in GL(n, \mathbb{K})$.

Beweis.

(i) $A = (a_{ik})$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n}{}' \operatorname{sign} \sigma \, a_{\sigma(1) 1} \cdots a_{\sigma(n) n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n}{}' \operatorname{sign} \sigma \, a_{1 \sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n \sigma^{-1}(n)}$$

Nun $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r \qquad \tau_i$ Transpositionen $\Rightarrow \operatorname{sign} \sigma = (-1)^r$

$\sigma^{-1} = (\tau_1 \cdots \tau_r)^{-1} = \tau_r^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \tau_r \cdots \tau_1 \Rightarrow \operatorname{sign} \sigma^{-1} = (-1)^r$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n}{}' \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \, a_{1 \sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n \sigma^{-1}(n)}$$

$$= \det(A^T).$$

(ii) Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ und $C = A \cdot B = (c_{ik})$

$$\Rightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^{n}{}' a_{ij}\, b_{jk} \qquad 1 \leq i,k \leq n.$$

$$\text{Sei } \alpha_\ell = \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ \vdots \\ a_{n\ell} \end{pmatrix}, \quad \beta_\ell = \begin{pmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{n\ell} \end{pmatrix} \qquad \gamma_\ell = \begin{pmatrix} c_{1\ell} \\ \\ c_{n\ell} \end{pmatrix}$$

Dann

$$\det(AB) = \det(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

$$= \det\left(\sum_{j_1=1}^{n}{}' \alpha_{j_1} \cdot b_{j_1 1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n}{}' \alpha_{j_n} b_{j_n n} \right)$$

$$= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n}{}' b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n} \det(\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n})$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n}{}' b_{\sigma(1) 1} \cdots b_{\sigma(n) n} \operatorname{sign}(\sigma)}_{\det(B)} \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\Rightarrow \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(iii) $\det(\mathbb{1}) = 1. \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$1 = \det(A \cdot A^{-1}) \underset{(ii)}{=} \det A \cdot \det(A^{-1}) \quad \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$\square$

<u>Satz 8.</u> Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot D_{kj} \qquad \text{Entwicklung nach } j\text{-ter Kolonne.}$$

wobei

$$D_{kj} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=: A_{kj}}$$

<u>Beachte:</u> A_{kj} entsteht aus A durch streichen der j-ten Kolonne und k-ten Spalte.

<u>Beweis.</u> Wir definieren

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}$$

wobei $\alpha_r = (a_{r1}, \dots, a_{rn})$ die r-te Zeile von A.

Wir weisen für $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die Eigenschaften (i), …, (iv) der Definition p. 105 nach. Dann folgt die Behauptung aus Satz 6.

- $D(e_1, \dots, e_n) = (-1)^{j+j} \underbrace{D_{jj}}_{=1} = 1.$

- Sei $\alpha_i = \alpha_l \quad i < l.$

  Falls $k \neq i$, $k \neq l$, so hat A_{kj} zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow \det A_{kj} = 0$

Also $D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_\ell, \dots \alpha_n) = (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}$,

dabei gilt $a_{ij} = a_{\ell j}$ und es entsteht $A_{\ell j}$ aus A_{ij} durch $\ell - i - 1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen.

Mit Lemma 5 folgt:

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} + (-1)^{\ell+j} a_{ij} \{(-1)^{\ell-i-1} D_{ij}\}$$
$$= \{(-1)^{i+j} + (-1)^{2\ell-i+j-1}\} a_{ij} \cdot D_{ij}$$
$$= \{(-1)^{i+j} + (-1)(-1)^{i+j}\} a_{ij} D_{ij} \quad = \underline{0}.$$

- Sei A' die Matrix mit den Zeilen $\alpha_1, \dots, \alpha_i', \dots, \alpha_n$ und A'' die Matrix mit den Zeilen $\alpha_1, \dots, \alpha_i'', \dots, \alpha_n$. Mit D_{kj}' bezeichnen wir den Wert der Determinantenfkt auf A_{kj}' und mit D_{kj}'' den von A_{kj}''.

  Induktion nach n,

  $\underline{n=1:}$ $\det(a_{11}' + a_{11}'') = \det(a_{11}') + \det(a_{11}'')$

  $\underline{n-1 \to n:}$

  nach Ind. vor. gilt also:

  $$D_{kj} = D_{kj}' + D_{kj}'' \quad \text{falls } k \neq i$$
  $$D_{ij} = D_{ij}' = D_{ij}''$$

  $$\Rightarrow D(\alpha_1, \dots, \alpha_i' + \alpha_i'', \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}$$
  $$= (-1)^{1+j} a_{1j} (D_{1j}' + D_{1j}'') + \dots + (-1)^{i+j} (a_{ij}' + a_{ij}'') D_{ij} + \dots$$
  $$+ (-1)^{n+j} a_{nj} (D_{nj}' + D_{nj}'')$$
  $$= D(\alpha_1, \dots, \alpha_i', \dots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \dots, \alpha_i'', \dots, \alpha_n)$$

- $D(\alpha_1, \dots, \lambda \alpha_i, \dots \alpha_n) = \lambda D(\alpha_1, \dots \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ klar.

$\square$

§ 3. Charakteristisches Polynom

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 9.

(1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ ist invertierbar $\iff \det A \neq 0$

(2) Sei $\det A = 0 \Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, so dass $Av = 0$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$: A invertierbar, d.h. $\exists\, A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Leftarrow$: $\det A \neq 0$

$\Rightarrow A \in GL(n, \mathbb{K}) \quad \Rightarrow \exists\, A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K}) \quad \Rightarrow A$ invertierbar.

(2) $\det A = 0$

Sei $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ die zu A gehörende lineare Abbildung

Da $\det A = 0$ ist f nicht injektiv:

Ann. f injektiv. $\Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \ker f = 0$

Aus dem Dimensionssatz (Kapitel 3 Satz 10) folgt:

$$n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \ker f}_{=0} + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f$$

$\Rightarrow n = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f \quad \Rightarrow f$ auch surjektiv.

Damit ist f ein Isomorphismus $\Rightarrow \exists\, A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$, da $\det(A \cdot A^{-1}) = 1$ ↯.

Also: f nicht injektiv $\Rightarrow \exists\, v \in \ker f - \{0\}$ mit $Av = 0$. $\square$

Definition

(1) $\lambda \in \mathbb{K}$ heisst Eigenwert von A, falls $\det(A-\lambda \mathbb{1})=0$

(2) $v \neq 0$, $v \in \mathbb{K}^n$ heisst Eigenvektor von A bzgl. λ, falls $Av=\lambda v$.

Bemerkung: Falls $\det(A-\lambda \mathbb{1})=0$ so folgt aus Satz 8 (2), dass es ein $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ gibt, so dass $(A-\lambda\mathbb{1})v=0$

$$\Rightarrow \quad Av = \lambda v.$$

Definition.

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda\mathbb{1}) \quad \text{heisst charakteristisches Polynom von } A.$$

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda\cdot\mathbb{1}) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \left(a_{\sigma(1)1} - \delta_{\sigma(1)1}\lambda\right)\cdots\left(a_{\sigma(n)n} - \delta_{\sigma(n)n}\lambda\right)$$

wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Kronecker-Symbol

$\Rightarrow$ $p_A(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad n.

$$p_A(\lambda) = (-1)^n\cdot\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr} A\cdot\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}c_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + \det A$$

wobei $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A=(a_{ij})$, die Spur von A bezeichnet.

Lemma 10. Das charakteristische Polynom ist invariant unter Konjugation $\Rightarrow$ hängt nicht von der Wahl der Basis ab!

Beweis.

$A' = TAT^{-1}$

$$p_{A'}(\lambda) = \det(TAT^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det(T(A-\lambda)T^{-1}) =$$
$$= \det T \det(A-\lambda\mathbb{1})\det(T^{-1}) = \det(A-\lambda\mathbb{1}) = p_A(\lambda)$$

$\square$

Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 11. Es sei $b \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle (NS) des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $q(x)$ mit

$$p(x) = (x-b)\, q(x)$$

und

$$\text{Grad}\, q(x) = \text{Grad}\, p(x) - 1 .$$

Beweis . Es sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$
Da b eine Nullstelle von $p(x)$ ist , gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(b) \\ &= a_1 (x-b) + a_2 (x^2 - b^2) + \cdots + a_n (x^n - b^n) \;. \end{aligned}$$

Aus der elementaren Algebra kennt man die Formel

$$x^m - b^m = (x-b)(x^{m-1} + x^{m-2} b + \cdots + b^{m-1}) \;.$$

Somit erhält man aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-b)(a_1 + a_2 (x+b) + \cdots + a_n (x^{n-1} + x^{n-2} b + \cdots + b^{n-1})) \\ &= (x-b)\, q(x) \;. \end{aligned}$$

Dabei gilt offenbar Grad $q(x)$ = (Grad $p(x)$) − 1 . Es bleibt zu zeigen , dass $q(x)$ eindeutig bestimmt ist . Gilt

$$p(x) = (x-b)\, q(x) = (x-b)\, q_1(x) \;,$$

so folgt

$$0 = p(x) - p(x) = (x-b)(q(x) - q_1(x)) \;.$$

Mit Hilfe der Gleichung (*) folgt nun sofort $q(x) - q_1(x) = 0$.
Dies war zu beweisen .

$\square$

In der Analysis I wurde folgender Satz gezeigt:

Satz: Sei $A \subset \mathbb{C}$ kompakt, $f : A \to \mathbb{C}$ stetig, so nimmt f auf A ein globales Maximum und Minimum an.

Diesen Satz verwenden wir nun, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen:

Satz 12 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, besitzt <u>mindestens</u> eine komplexe NS λ , d.h. $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) = 0$.

Beweis: (aus Blatter Analysis I)

Es sei

$$p(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom vom genauen Grad $n \geqslant 2$ und

$$R := 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

die Betragssumme seiner Koeffizienten. Wir zeigen, daß p im Innern des Kreises $|z| = R$ wenigstens eine Nullstelle besitzt, indem wir das Minimum des absoluten Betrages von p untersuchen.

Die stetige Funktion $|p|$ nimmt auf der kompakten Menge $K := \{z \mid |z| \leqslant R\}$ ein globales Minimum an. Auf der Kreislinie $|z| = R$ gilt nach der Dreiecksungleichung und wegen $R \geqslant 1$, $n \geqslant 2$ durchwegs

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geqslant |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0| \\ &\geqslant R^n - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) R^{n-1} \\ &= R^n - (R-1) R^{n-1} = R^{n-1} \geqslant R ; \end{aligned}$$

wegen $|p(0)| = |a_0| < R$ wird daher das besagte Minimum im *Innern* von K angenommen, etwa an der Stelle z_0. Dieses z_0 ist nun in Wirklichkeit eine Nullstelle von p. Wir zeigen nämlich: Ist $p(z_0) \neq 0$, so gibt es Punkte $z \in K$, in denen $|p(z)| < |p(z_0)|$ ist, entgegen der Annahme über z_0.

Zur Vereinfachung der Rechnung machen wir den Punkt z_0 zum Ursprung eines neuen Koordinatensystems (neue Variable: ζ) und betrachten anstelle von p das Polynom

(2) $$q(\zeta) := \frac{1}{p(z_0)} p(z_0 + \zeta) .$$

Ordnen wir das Polynom q nach aufsteigenden Potenzen von ζ, so ergibt sich

$$q(\zeta) = 1 + b\zeta^k + \zeta^{k+1} r(\zeta) ;$$

hier ist b der erste nicht verschwindende Koeffizient nach der 1. Nach Satz (9.24), den wir hier vorwegnehmen dürfen, gibt es ein ζ_0 mit

(3) $$\zeta_0^k = -\frac{1}{b} .$$

Wir betrachten nun das Polynom q an der Stelle $\zeta := t\zeta_0$, wobei wir uns die Wahl des reellen Parameters t noch vorbehalten, immerhin aber

(4) (a) $0 < t < 1$, (b) $t|\zeta_0| < R - |z_0|$

voraussetzen. Wegen (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} q(t\zeta_0) &= 1 + bt^k \zeta_0^k + t^{k+1} \zeta_0^{k+1} r(t\zeta_0) \\ &= 1 - t^k + t^{k+1} \zeta_0^{k+1} r(t\zeta_0) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} |q(t\zeta_0)| &\leqslant (1 - t^k) + t^{k+1} |\zeta_0^{k+1} r(t\zeta_0)| \\ &= 1 - t^k (1 - t|\zeta_0^{k+1} r(t\zeta_0)|) , \end{aligned}$$

wobei wir stillschweigend (4)(a) benützt haben. Wegen $\lim_{t \to 0} t|\zeta_0^{k+1} r(t\zeta_0)| = 0$ ist hier die Klammer rechter Hand für alle hinreichend kleinen t positiv. Wir können daher innerhalb der Grenzen (4) ein t so wählen, daß $|q(t\zeta_0)| < 1$ wird. Wegen (4)(b) liegt dann der Punkt $z := z_0 + t\zeta_0$ in K, und es folgt mit (2):

$$|p(z)| = |p(z_0 + t\zeta_0)| = |p(z_0)| |q(t\zeta_0)| < |p(z_0)| ,$$

wie angekündigt. $\square$

Korollar 13.

Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann gibt es komplexe Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$p(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) \cdots (z-\lambda_n)$$

Beweis: Induktion nach $\operatorname{Grad} p = n$.

$$n=1 : \quad p(z) = z + a_0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -a_0$$
$$= (z-\lambda_1)$$

$n \geq 2$: Nach Satz 12 gibt es eine NS $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Somit folgt mit Satz 11:

$$p(z) = (z-\lambda_1) \cdot q(z) \qquad \operatorname{grad} q(z) = n-1.$$

Nach Ind.voraussetzung gibt es $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ mit $q(z) = (z-\lambda_2) \cdots (z-\lambda_n)$

$$\Rightarrow p(z) = (z-\lambda_1) \cdots (z-\lambda_n)$$

$\square$

Bemerkung: Aus Korollar 13 folgt somit, dass es $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $1 \leq i,j \leq k$ mit $p(\lambda_j) = 0$ und $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$p(z) = (z-\lambda_1)^{m_1} (z-\lambda_2)^{m_2} \cdots (z-\lambda_k)^{m_k}$$

Definition: m_j heisst algebraische Vielfachheit der Nullstelle λ_j, $1 \leq j \leq k$.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{C} \,!!)$
Dann folgt also, dass

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Die m_j bezeichnen hier die <u>algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ_i.</u>

<u>Satz 14</u>. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die <u>verschiedenen</u> Eigenwerte von A mit algebr. Vielfachheit $m_1, \dots, m_k$. Dann gilt:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{k} m_j \lambda_j$$

$$\det A = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{m_j}$$

<u>Beweis</u>:

$$\det(\lambda \mathbb{1} - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\underset{p.112}{=} \lambda^n - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots - \det(A)$$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

§4. Trigonalisierung von $A \in M_n(\mathbb{C})$

Satz 15. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gibt es ein $B \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} = D$$

eine obere Dreiecksmatrix.

Nach Lemma 10 gilt:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A) = \det(\lambda \mathbb{1} - D)$$
$$= (\lambda - d_{11})(\lambda - d_{22}) \cdots (\lambda - d_{nn})$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A sind gerade die Diagonalelemente von D und die wiederum sind die Eigenwerte von D.

Also:

Korollar 16: Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$.
Dann sind die Diagonalelemente von D gerade die Eigenwerte von A.

$\square$

Korollar 17: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Dann sind $\lambda_1^l, \ldots, \lambda_n^l$ die Eigenwerte von A^l, $l \geq 0$.

Beweis. (Korollar 17)

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Nach Satz 15 gibt es ein $B \in GL(n, \mathbb{C})$, so dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (B^{-1}AB)^l = B^{-1}A^lB = \begin{pmatrix} \lambda_1^l & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^l \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Beh.}$$

$\square$

<u>Beweis</u> (Satz 15):

Induktion nach n.

<u>$n=1$:</u> klar.

Induktionsschritt:

Sei λ_1 ein Eigenwert von A, d.h. $\det(\lambda_1 \mathbb{1} - A) = 0$.

Nach Satz 9 (2) gibt es ein $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ mit

$(\lambda_1 \mathbb{1} - A)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda_1 x$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Setze $B_1 := \left(\begin{array}{c|c} x_1 & \\ \vdots & * \\ x_n & \end{array} \right)$

wobei $*$ so gewählt wird, dass $\det B_1 \neq 0$.

$$\Rightarrow B_1^{-1} A B_1 = B_1^{-1} \left(Ax \,\middle|\, * \right) = B_1^{-1} \left(\lambda_1 x \,\middle|\, * \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

denn $B_1 \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ 0 & * \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) = \left(\lambda_1 x \,\middle|\, * \right)$

Nun $A' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. Nach Ind.voraussetzung gibt es ein $B_1' \in GL(n-1, \mathbb{C})$ mit $B_1'^{-1} A B_1' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Setze $B_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_1' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in GL(n, \mathbb{C})$

und $B = B_1 \cdot B_2$.

Dann haben wir:

$$B^{-1} AB = B_2^{-1} \underbrace{B_1^{-1} A B_1} B_2$$

$$= B_2^{-1} \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) B_2$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ wie gewünscht.

$\square$

<u>Bemerkungen:</u>

(1) Nach Satz 17 lässt sich jede lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow V$$

wobei V ein n-dim $\mathbb{C}$-Vektorraum ist

trigonalisieren, d.h. es gibt eine Basis

so dass die Matrix von f in dieser Basis die Gestalt einer

oberen Dreiecksmatrix hat.

(2) Satz 17 gilt für $A \in M_n(\mathbb{R})$ im allgemeinen <u>nicht</u>!!

10. Eigenwerte der diskreten Fouriertransformation.

Sei $\mathcal{F}_n = \left(\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{n} j \cdot k}}{\sqrt{n}} \right)$ die diskrete Fouriertransformation

(vgl. Kapitel 8)

Sei weiter $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}_n(x) = \lambda \cdot x$.

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_n^2(x) = \mathcal{F}_n(\lambda x) = \lambda \mathcal{F}_n(x) = \lambda^2 x$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_n^4(x) = \lambda^4 \cdot x$.

Da $\mathcal{F}_n^4 = \mathbb{1}$ (Satz 3 Kap. 8) folgt:

$$\lambda^4 x = x \qquad \Rightarrow \underline{\lambda^4 = 1}$$

Nun $\lambda^4 = 1$ hat die Nullstellen $\{1, -1, i, -i\}$.

Betrachten wir jetzt das charakteristische Polynom von $\mathcal{F}_n$:

$$P_{\mathcal{F}_n}(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{F}_n) = 0$$

Dieses Polynom hat n Nullstellen $\mu_1, \dots, \mu_n$ für die nach obiger Betrachtung gilt:

$$\mu_j^4 = 1 \qquad 1 \le j \le n.$$

Also:

$$\boxed{\begin{array}{l} \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{F}_n) = (\lambda - 1)^{m_1} \cdot (\lambda + 1)^{m_{-1}} (\lambda - i)^{m_i} (\lambda + i)^{m_{-i}} \\ \text{mit } m_1 + m_{-1} + m_i + m_{-i} = n. \end{array}}$$

Als nächstes möchten wir nun die algebraischen Vielfachheiten m_1, m_{-1}, m_i und m_{-i} der Eigenwerte $1, -1, i, -i$ von $\mathcal{F}_n$ berechnen.

Dazu benötigen wir folgendes Resultat aus der Zahlentheorie:

<u>Satz 1.</u> (Gauss)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i}{n} j^2} = \begin{cases} i+1 & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{falls } n \equiv 2 \pmod 4 \\ i & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Für einen Beweis vgl. etwa. Tom M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer, p. 195-199.

<u>Beachte:</u> $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i}{n} j^2} = \operatorname{tr} \mathcal{F}_n$!

<u>Lemma 2.</u>

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{F}_n^2) = \begin{cases} (\lambda - 1)^{\frac{n+1}{2}} (\lambda + 1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \\ (\lambda - 1)^{\frac{n+2}{2}} (\lambda + 1)^{\frac{n-2}{2}} & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

- Sei n gerade:

$$\mathcal{F}_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ & \ddots & & \iddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \vdots \\ 1 & \iddots & & 0 \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

liegt auf der Diagonalen!

$$\tilde{J}_n^{\,2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n/2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n/2} \\ x_{n/2-1} \\ \vdots \\ x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; f_{n/2-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{n/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow n/2 \quad , \quad f_{n/2+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\frac{n+2}{2}$ Eigenvektoren zum Eigenwert $+1$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; g_{n/2-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow n/2$$

Sind $\frac{n-2}{2}$ Eigenvektoren zum Eigenwert -1.

Setze $$\tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \tilde{f}_{\frac{n-2}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{f}_{\frac{n}{2}} = f_{\frac{n}{2}}, \; \tilde{f}_{\frac{n+2}{2}} = f_{\frac{n+2}{2}}$$

$$\tilde{g}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \tilde{g}_{\frac{n-2}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\langle \tilde{f}_i, \tilde{f}_j \rangle = \delta_{ij} \ , \quad \langle \tilde{g}_i, \tilde{g}_j \rangle = \delta_{ij} \ , \quad \langle \tilde{f}_i, \tilde{g}_j \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ Die Matrix $C = \left(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\frac{n+2}{2}}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{\frac{n-2}{2}} \right)$ mit

Kolonnenvektoren $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{g}_{\frac{n-2}{2}}$ ist in $O(n)$

und es gilt:

$$C^{-1} J_n^2 \, C = \begin{array}{cl} \left(\begin{matrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \end{matrix} \right) & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\ \ddots \\ 1\end{matrix}}\right\} \frac{n+2}{2} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\ \ddots \\ -1\end{matrix}}\right\} \frac{n-2}{2} \end{matrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Beh im Falle n gerade.

- Sei n ungerade.

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & 1 & 0 \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & 1 & & & \vdots \\ 1 & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

auf der Diagonalen keine 1 !

$$J_n^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad f_{\frac{n-1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{\frac{n+1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind $\frac{n+1}{2}$ Eigenvektoren mit Eigenwert $+1$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad g_{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sind $\frac{n-1}{2}$ Eigenvektoren mit Eigenwert -1.

Weiter gilt: $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle f_i, g_j \rangle = 0$.

Sei $C = \left(f_1, \dots, f_{\frac{n+1}{2}}, g_1, \dots, g_{\frac{n-1}{2}} \right) \in O(n)$.

$$\Rightarrow C^{-1} J_n^2 C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \\ 1\end{matrix}}\right\} \frac{n+1}{2} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \\ 1\end{matrix}}\right\} \frac{n-1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Beh. im Falle n <u>ungerade</u>.

∎

Satz 4.

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{F}_n) = (\lambda-1)^{m_1} (\lambda+1)^{m_{-1}} (\lambda-i)^{m_i} (\lambda+i)^{m_{-i}}$$

wobei

n	m_1	m_{-1}	m_i	m_{-i}
$4l$	$l+1$	l	l	$l-1$
$4l+1$	$l+1$	l	l	l
$4l+2$	$l+1$	$l+1$	l	l
$4l+3$	$l+1$	$l+1$	$l+1$	l

Beweis:

Aus Lemma 2 folgt:

$$m_1 + m_{-1} = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \\ \frac{n+2}{2} & n \text{ gerade.} \end{cases} \qquad (*)$$

$$m_i + m_{-i} = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade.} \\ \frac{n-2}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Weiter gilt: $\operatorname{tr} \mathcal{F}_n = m_1 - m_{-1} + i m_i - i m_{-i}$

$n = 4l$:

Aus Satz 1 folgt:

$$m_1 - m_{-1} + i m_i - i m_{-i} = i + 1 \quad \begin{cases} m_1 - m_{-1} = 1 \\ m_i - m_{-i} = 1 \end{cases}$$

Mit $(*)$ folgt: $\quad m_1 + m_{-1} = \frac{n+2}{2} = 2l+1 \qquad m_i + m_{-i} = \frac{n-2}{2} = 2l-1$

$$m_1 - m_{-1} = 1 \qquad m_i - m_{-i} = 1$$

$$\Rightarrow m_1 = l+1, \quad m_{-1} = +l$$
$$\underline{\underline{m_i = l, \quad m_{-i} = l-1}}$$

$\underline{n = 4l+1:}$

Aus Satz 1 folgt:

$$m_1 - m_{-1} + i(m_i - m_{-i}) = 1 \quad \begin{cases} \to m_1 - m_{-1} = 1 \\ \to m_i - m_{-i} = 0 \end{cases}$$

Mit (*) haben wir:

$$m_1 + m_{-1} = \frac{n+1}{2} = 2l+1 \qquad m_i + m_{-i} = \frac{n-1}{2} = 2l$$

$$m_1 - m_{-1} = 1 \qquad m_i - m_{-i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 = l+1 \qquad m_{-1} = l$$

$$\underline{\underline{m_i = l \qquad m_{-i} = l}}$$

$\underline{n = 4l+2:}$

Aus Satz 1 folgt:

$$m_1 - m_{-1} + i(m_i - m_{-i}) = 0 \quad \begin{cases} \to m_1 - m_{-1} = 0 \\ \to m_i - m_{-i} = 0 \end{cases}$$

Mit (*) haben wir:

$$m_1 + m_{-1} = \frac{n+2}{2} = 2l+2 \qquad m_i + m_{-i} = \frac{n-2}{2} = 2l$$

$$m_1 - m_{-i} = 0 \qquad m_i - m_{-i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 = l+1 \qquad m_{-1} = l+1$$

$$\underline{\underline{m_i = l \qquad m_{-i} = l}}$$

$\underline{n = 4l+3}$:

Aus Satz 1 folgt:

$$m_1 - m_{-1} + i(m_i - m_{-i}) = i \quad \begin{cases} m_1 - m_{-1} = 0 \\ m_i - m_{-i} = 1 \end{cases}$$

Aus (*) haben wir:

$$m_1 + m_{-1} = \frac{n+1}{2} = 2l+2 \qquad m_i + m_{-i} = \frac{n-1}{2} = 2l+1$$

$$m_1 - m_{-1} = 0 \qquad m_i - m_{-i} = 1$$

$$\Rightarrow \quad m_1 = l+1 \quad m_{-1} = l+1$$

$$\underline{\underline{m_i = l+1 \quad m_{-i} = l}}$$

∎

11. Das eindimensionale Ising-Modell

(In seiner Doktorarbeit hat Ising 1925 dieses Modell entwickelt.)

Sei $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ein eindimensionales Gitter.

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma_{-3} & \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array}$$

Wir stellen uns ein Stück Eisen vor, indem die Atome in den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten angeordnet sind.

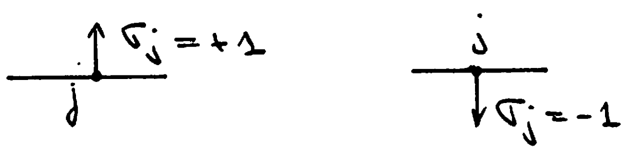
Jedes Atom j hat zwei Zustände: $\sigma_j = +1$ "Spin up"

oder

$\sigma_j = -1$ "Spin down"

Also: $\sigma_j \in \{\pm 1\}$.

Bp.



(Spin = Quantendrehimpulsachse)

Es gibt nun also verschiedene Möglichkeiten der Anordnung dieser Zustände.

Bp.

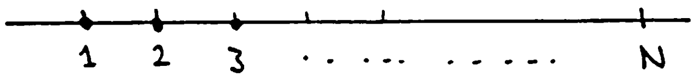
$$\begin{array}{ccccc} \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \end{array}$$ etc.

Solche Anordnungen nennt man Konfigurationen.

Betrachten wir ein System mit N Eisenatomen.



In einem solchen System gibt es 2^N verschiedene Konfigurationen Λ.

Ein Beispiel einer sehr einfachen Konfiguration Λ ist:

$$\Lambda = \{\sigma_1 = +1, \sigma_2 = +1, \dots, \sigma_N = +1\}$$

dh. alle Spins nach oben.

Eine natürliche Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit einer solchen Konfiguration Λ? (welche Konfiguration tritt am meisten auf?).

Dazu definieren wir die Energie eines Systems mit Konfiguration Λ:

$$H(\Lambda) := -J \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

wobei $J > 0$ (Ferromagnet), J ist eine "Materialkonstante".

(H nennt man einen Hamiltonoperator)

Nun $\sigma_i \sigma_{i+1} = \begin{cases} +1 & \text{falls } \sigma_i, \sigma_{i+1} = \pm 1 \text{, d.h. Spins sind parallel} \\ -1 & \text{falls } \sigma_i = \pm 1 \text{ und } \sigma_{i+1} = \mp 1 \text{., Spins antiparallel} \end{cases}$

Wann ist die Energie $H(\Lambda)$ minimal?

Da $J > 0$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ möglichst gross ist, dh. alle $\underbrace{\sigma_i = +1}_{\substack{\text{alle Atome} \\ \text{"Spin up"}}}$ oder alle $\underbrace{\sigma_i = -1}_{\substack{\text{alle Atome} \\ \text{"Spin down"}}}$.

Stellen wir uns vor, dass wir in der rechten Hand einen Magneten der Stärke M, $M \in \mathbb{R}$ haben. Dieser, zusammen mit dem Eisen, erzeugt nun ein Magnetfeld. ($M = 0$: kein Magnet in der rechten Hand).
Die Energie im äusseren magnetischen Feld ist nun

$$\boxed{H(\Lambda) - M\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \quad , \quad M \in \mathbb{R}.}$$

Beachte: Die Energie (wie sie hier definiert ist) wird grösser, falls die Spins antiparallel zum Magnetfeld sind.

Setzen wir $\beta := \dfrac{1}{k \cdot T}$, T absolute Temperatur (Kelvin)
k Bolzmann Konstante.

Es gilt das folgende Gesetz von Gibbs: (dieses muss man akzeptieren!)

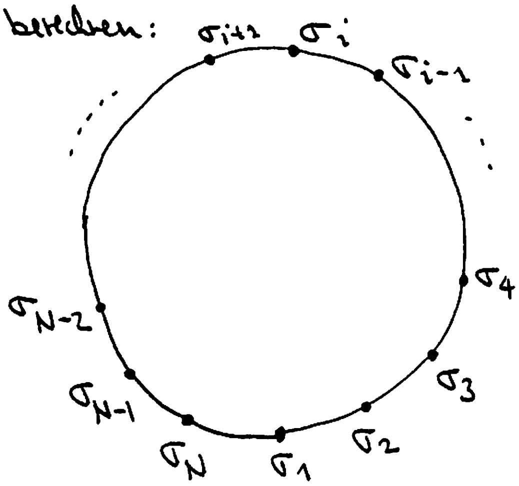
Satz: Die Wahrscheinlichkeit dass unser System (das Ising-Modell) die Konfiguration Λ hat, ist

$$\frac{e^{-\beta\left(H(\Lambda) - M\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)}}{Z_N}$$

wobei $Z_N = \sum_{\Lambda} e^{-\beta\left(H(\Lambda) - M\sum \sigma_i\right)}$

Z_N heisst Zustandssumme. Physikalisch bedeutet $k \cdot \log Z_N$ die freie Energie (vgl. p. 134).

Als nächstes möchten wir nun diese Zustandssumme für ein periodisches System berechnen:



$$\sigma_{N+1} = \sigma_1$$

$$Z_N = \sum_{\Lambda}' e^{-\beta\left(H(\Lambda) - M\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)}$$

$$= \sum_{\Lambda}' e^{-\beta\left(-J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - M\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)}$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1,\dots,\sigma_N=\pm1} e^{\left(v\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} + B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)}$$

wobei $v = \beta J = \frac{J}{kT}$, $B = \beta M$.

<u>Def.</u>: $L(\sigma_i,\sigma_{i+1}) := e^{v\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{B}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1})}$

$$\frac{B}{2}\sigma_2 + \frac{B}{2}\sigma_2 = B\sigma_2 \qquad\qquad \sigma_{N+1}\,!$$

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm1,\dots,\sigma_N=\pm1} \underbrace{e^{v\sigma_1\sigma_2 + \frac{B}{2}(\sigma_1+\sigma_2)}}_{L(\sigma_1,\sigma_2)} \cdot \underbrace{e^{v\sigma_2\sigma_3 + \frac{B}{2}(\sigma_2+\sigma_3)}}_{L(\sigma_2,\sigma_3)} \cdot\ldots\cdot \underbrace{e^{v\sigma_N\cdot\overset{\sigma_{N+1}}{\overset{\shortparallel}{\sigma_1}} + \frac{B}{2}(\sigma_N+\sigma_1)}}_{L(\sigma_N,\sigma_1)}$$

(Beachte, dass bei $L(\sigma_1,\sigma_2)$ nur $\frac{B}{2}\cdot\sigma_1$ vorkommt, aber auch bei $L(\sigma_N,\sigma_1)$ $\frac{B}{2}\sigma_1$, also wiederum $B\cdot\sigma_1$ wie gewünscht.)

$$\Rightarrow Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm1,\dots,\sigma_N=\pm1}' L(\sigma_1,\sigma_2)\cdot L(\sigma_2\cdot\sigma_3)\cdot\ldots\cdot L(\sigma_N,\sigma_1).$$

Jetzt endlich kommt die lineare Algebra ins Spiel:

Setze $\quad L = (L(\sigma,\sigma')) = \begin{pmatrix} L(1,1) & L(1,-1) \\ L(-1,1) & L(-1,-1) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Durch einsetzen in die Definition bekommen wir:

$$L = \begin{pmatrix} e^{\upsilon+B} & e^{-\upsilon} \\ e^{-\upsilon} & e^{\upsilon-B} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir zuerst einmal folgende Summe:

$$\sum_{\sigma_{i+1}=\pm 1} L(\sigma_i, \sigma_{i+1})\, L(\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2})$$

$$= L(\sigma_i, 1)\, L(1, \sigma_{i+2}) + L(\sigma_i, -1)\, L(-1, \sigma_{i+2})$$

$$= \underbrace{L^2(\sigma_i, \sigma_{i+2})}$$

Element in der Matrix L^2, an der Stelle $\underbrace{(\sigma_i, \sigma_{i+2})}_{\text{neue Index wie früher } a_{ij}\ !}$

Also bekommen wir für Z_N:

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm 1, \dots, \sigma_N=\pm 1} L(\sigma_1, \sigma_2) \cdot L(\sigma_2, \sigma_3) \cdot \dots \cdot L(\sigma_N, \sigma_1)$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \underbrace{\sum_{\sigma_2=\pm 1, \dots, \sigma_N=\pm 1} L(\sigma_1, \sigma_2) \cdot L(\sigma_2 \cdot \sigma_3) \cdot \dots \cdot L(\sigma_N, \sigma_1)}_{\text{Matrixprodukt (vgl. oben!)}}$$

Prüfe! $$= \sum_{\sigma_1=\pm 1} L^N(\sigma_1, \sigma_1)$$

$$= L^N(+1, +1) + L^N(-1, -1) \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\operatorname{tr} L^N}}$$

vgl. Bem. nächste Seite

Ist das nicht wundervoll?!

Bem.

$$L^N = \begin{pmatrix} L^N(+1,+1) & L^N(+1,-1) \\ L^N(-1,+1) & L^N(-1,-1) \end{pmatrix}$$

$$= L^N(+1,+1) + L^N(-1,-1) = \operatorname{tr} L^N.$$

Seien nun λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von L. Nach Korollar 17 (Kapitel 9) wissen wir, dass λ_1^N und λ_2^N die Eigenwerte von L^N sind.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N}}$$

Also müssen wir die Eigenwerte von L berechnen. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\det(\lambda \mathbb{1} - L) = \det \begin{pmatrix} \lambda - e^{U+B} & e^{-U} \\ e^{-U} & \lambda - e^{U-B} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - e^{U+B})(\lambda - e^{U-B}) - e^{-2U}$$

$$= \lambda^2 - (e^{U+B} + e^{U-B}) \cdot \lambda + e^{2U} - e^{-2U}$$

$$= \lambda^2 - e^U \underbrace{(e^B + e^{-B})}_{2\cosh B} \lambda + \underbrace{e^{2U} - e^{-2U}}_{2\sinh 2U} \qquad = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{2e^U \cosh B \pm \sqrt{4e^{2U}\cosh^2 B - 8\sinh^2 2U}}{2}$$

$$= e^U \cosh B \pm \sqrt{e^{2U}\cosh^2 B - 2\sinh^2 2U}$$

Betrachten wir die Diskriminante

$$e^{2u} \underbrace{\cosh^2 B}_{1+\sinh^2 B} - e^{2u} + e^{-2u} \quad = e^{2u} + e^{2u}\sinh^2 B - e^{2u} + e^{-2u}$$

$$= e^{2u}\sinh^2 B + e^{-2u}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = e^{u}\cosh B \pm \left(e^{2u}\sinh^2 B + e^{-2u}\right)^{1/2}$$

sind die Eigenwerte von L.

Falls $u > 0$ gilt: $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

$$0 < \lambda_2 \iff \left(e^{2u}\sinh^2 B + e^{-2u}\right)^{1/2} < e^{u}\cosh B$$

$$\iff e^{2u}\sinh^2 B + e^{-2u} < e^{2u}\cosh^2 B$$

$$\iff \sinh^2 B + e^{-4u} < \cosh^2 B$$

$$\iff e^{-4u} < \cosh^2 B - \sinh^2 B = 1. \quad \blacksquare$$

Als nächstes berechnen wir die freie Energie pro Spin, die wie folgt definiert ist:

$$-\frac{\Psi}{kT} = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\log Z_N \quad \text{(Thermodynamischer Limes)}$$

$$-\frac{\Psi}{kT} = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\log Z_N = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\log(\lambda_1^N + \lambda_2^N)$$

$$= \lim_{N\to\infty} N^{-1}\log\left(\lambda_1^N\left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(N^{-1}\left(N\cdot\log\lambda_1 + \log\left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\log\lambda_1 + N^{-1}\log\left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)\right)$$

$$= \log \lambda_1 + \lim_{N\to\infty} N^{-1} \log\left(1+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)$$

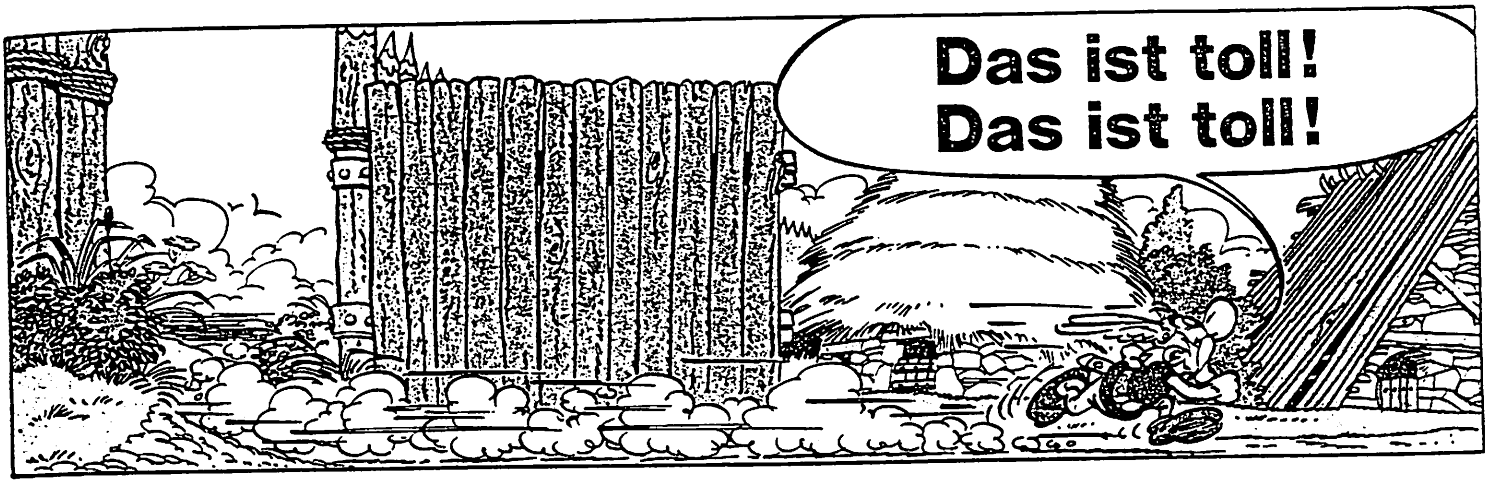
Nun $\quad 0 \le \log\left(1+\underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{<1}^N\right) \le \log 2$

$$\Rightarrow -\frac{\Psi}{kT} = \log\lambda_1 + \underbrace{\lim_{N\to\infty} N^{-1}\log\left(1+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)}_{\substack{=0\\ \text{oben}}} = \log\lambda_1$$

Also $$-\frac{\Psi}{kT} = \log\left(e^{u}\cosh B + \left(e^{2u}\sinh^2 B + e^{-2u}\right)^{1/2}\right)$$

Speziell: $B = 0$ (keinen Magneten in der rechten Hand)

$$\Rightarrow -\frac{\Psi}{kT} = \log\left(e^{u}+e^{-u}\right) = \log(2\cosh u)$$



Definition.

$$m := \frac{\partial}{\partial B}\left(-\frac{\Psi}{kT}\right)$$ heisst Magnetisierung pro Spin.

Wir benützen die Tatsachen dass $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ und $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$.

Also:

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(-\frac{\Psi}{kT}\right) = \frac{\partial}{\partial B}\left(\log\left(e^{U}\cosh B + (e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}\right)\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial B}\left(e^{U}\cosh B + (e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}\right)}{e^{U}\cosh B + (e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{U}\sinh B + \frac{1\, e^{2U}\cancel{2}\sinh B\cdot\cosh B}{\cancel{2}(e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}}{e^{U}\cosh B + (e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{U}\sinh B\cdot(e^{U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2} + e^{2U}\sinh B\cosh B}{\left(e^{U}\cosh B + (e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}\right)(e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{U}\sinh B\cdot\left((e^{U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2} + e^{U}\cosh B\right)}{\left(e^{U}\cosh B + (e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}\right)\cdot(e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{U}\sinh B}{(e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}$$

Also: für die Magnetisierung pro Spin bekommen wir

$$m = \frac{\partial}{\partial B}\left(-\frac{\Psi}{kT}\right) = \frac{e^{U}\sinh B}{(e^{2U}\sinh^2 B + e^{-2U})^{1/2}}$$

Insbesondere, falls $B = 0$, wir also keinen Magneten in der rechten Hand haben, gilt: $m = 0$.

Um noch eine Anwendung der linearen Algebra zu sehen berechnen wir die Paarkorrelationskoeffizienten für das 1-dim. Ising-Modell.

Sei $\varphi : \{\Lambda\} \longrightarrow \{\pm 1\}$ eine Fkt., z.B.

$$\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sigma_2 \cdot \sigma_4 .$$

<u>Definition.</u>

$$\langle \varphi \rangle_N := \sum_{\Lambda}{}' \varphi(\Lambda) \frac{e^{-\beta(H(\Lambda) - M\sum \sigma_i)}}{Z_N}$$

heisst <u>Erwartungswert von φ</u>.

<u>Bsp:</u> fairer Münzwurf: $P[\text{Kopf}] = \frac{1}{2}$, $P[\text{Zahl}] = \frac{1}{2}$

$\{\Lambda\} = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$

$$\varphi : \{\Lambda\} \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$\text{Kopf} \longmapsto +1$$
$$\text{Zahl} \longmapsto -1$$

$$\langle \varphi \rangle_2 = +1 \cdot P[\text{Kopf}] + (-1) \cdot P[\text{Zahl}] = 0 .$$

<u>Definition:</u> $\langle \varphi \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle \varphi \rangle_N$

- Sei $\varphi = \sigma_j$

$$\langle \sigma_j \rangle_N = \sum_{\Lambda}{}' \sigma_j \cdot \frac{e^{-\beta(H(\Lambda) - M\sum \sigma_i)}}{Z_N}$$

$$= \sum_{\Lambda} \sigma_j \cdot \frac{e^{\nu \sum \sigma_i \sigma_{i+1} + B \sum \sigma_i}}{Z_N}$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\Lambda}' \sigma_j \cdot L(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \dots \cdot L(\sigma_N, \sigma_1)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_1 = \pm 1, \dots \sigma_N = \pm 1}' \sigma_j \cdot L(\sigma_j, \sigma_{j+1}) \cdot \dots \cdot L(\sigma_N, \sigma_1) \cdot L(\sigma_1, \sigma_2) \cdots L(\sigma_{j-1}, \sigma_j)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_j = \pm 1}' \sigma_j \cdot L^N(\sigma_j, \sigma_j)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \left(L^N(1,1) - L^N(-1,-1) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \sigma_1 \rangle_N = \langle \sigma_j \rangle_N \quad \forall\, 1 \leq j \leq N \quad \Rightarrow \underset{\sim\sim}{\langle \sigma_1 \rangle} = \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_1 \rangle_N = \underset{\sim\sim\sim}{\langle \sigma_j \rangle}$$

- Sei $\varphi = \sigma_k \cdot \sigma_l$, $k < l$

$$\langle \sigma_k \sigma_l \rangle_N = \sum_{\Lambda}' \sigma_k \sigma_l \cdot \frac{e^{\nu \sum \sigma_i \sigma_{i+1} + B \sum \sigma_i}}{Z_N} \qquad \text{(\underline{Paar}korrelationseffekt)}$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_1 = \pm 1, \dots, \sigma_N = \pm 1}' \sigma_k \cdot \sigma_l \quad L(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \dots \cdot L(\sigma_N, \sigma_1)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_1 = \pm 1, \dots, \sigma_N = \pm 1} L(\sigma_1, \sigma_2) \dots L(\sigma_{k-1}, \sigma_k)\, \sigma_k\, L(\sigma_k, \sigma_{k+1}) \cdots L(\sigma_{l-1}, \sigma_l)\, \sigma_l\, L(\sigma_l, \sigma_{l+1}) \cdots L(\sigma_N, \sigma_1)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_1 = \pm 1, \dots, \sigma_N = \pm 1} \sigma_k \underbrace{L(\sigma_k, \sigma_{k+1}) \cdots L(\sigma_{l-1}, \sigma_l)}_{L^{l-k}(\sigma_k, \sigma_l)} \sigma_l \underbrace{L(\sigma_l, \sigma_{l+1}) \cdots L(\sigma_N, \sigma_1) \cdots L(\sigma_{k-1}, \sigma_k)}_{L^{N-l+k}(\sigma_l, \sigma_k)}$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_k = \pm 1, \sigma_l = \pm 1} \sigma_k \cdot L^{l-k} (\sigma_k, \sigma_l)\, \sigma_l\, L^{N-l+k}(\sigma_l, \sigma_k)$$

Für die folgenden Berechnungen sei $\underline{B=0}$.

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} e^{v} & e^{-v} \\ e^{-v} & e^{v} \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert $\lambda_1 = e^{v} + e^{-v} = 2\cosh v$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert $\lambda_2 = e^{v} - e^{-v} = 2\sinh v$

Setze $$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1(1) \\ \phi_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2(1) \\ \phi_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$L\phi_1 = \lambda_1 \cdot \phi_1$ und $L\phi_2 = \lambda_2 \cdot \phi_2$.

Sei $C := \begin{pmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) \\ \phi_1(-1) & \phi_2(-1) \end{pmatrix} \in O(2)$ (orthonormierte Spalten!)

Dann gilt:

$$C^{-1} L C = C^{-1} L \begin{pmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) \\ \phi_1(-1) & \phi_2(-1) \end{pmatrix}$$

$$= C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \phi_1(1) & \lambda_2 \phi_2(1) \\ \lambda_1 \phi_1(-1) & \lambda_2 \phi_2(-1) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$(e_1, e_2) = \mathbb{1} = C^{-1} \cdot C = C^{-1}(\phi_1, \phi_2) = (C^{-1}\phi_1, C^{-1}\phi_2) \Rightarrow C^{-1}\phi_1 = e_1$

$C^{-1}\phi_2 = e_2$

Also: $C^{-1} L C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad L = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad L^m = C \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix} C^{-1}$$

Da $C \in O(2)$ gilt: $C^{-1} = C^T$

$$\Rightarrow \quad L^m = C \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix} C^T.$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{2} \lambda_j^m \phi_j(\sigma) \phi_j(\sigma') \right)_{\sigma, \sigma'}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^m \phi_j(1) \phi_j(1) & \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^m \phi_j(1) \phi_j(-1) \\ \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^m \phi_j(-1) \phi_j(+1) & \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^m \phi_j(-1) \phi_j(-1) \end{bmatrix}$$

Damit bekommen wir für $\langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle_N$:

$$\langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle_N = \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_k = \pm 1, \sigma_\ell = \pm 1} \Big\{ \sigma_k \Big(\sum_{j=1}^{2} \lambda_j^{\ell - k} \phi_j(\sigma_k) \phi_j(\sigma_\ell) \Big) \cdot$$

$$\cdot \, \sigma_\ell \Big(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i^{N - \ell + k} \phi_i(\sigma_k) \phi_i(\sigma_\ell) \Big) \Big\}$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_k = \pm 1, \sigma_\ell = \pm 1} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_j^{\ell - k} \lambda_i^{N - \ell + k} \sigma_k \phi_j(\sigma_k) \phi_i(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_j(\sigma_\ell) \phi_i(\sigma_\ell) \Big\}$$

Aus $Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$ folgt:

$$\langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle_N = \frac{1}{\lambda_1^N + \lambda_2^N} \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \sum_{i,j=1}^{2}{}' \lambda_j^{\ell-k} \lambda_i^{N-\ell+k} \sigma_k \phi_j(\sigma_k) \phi_i(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_j(\sigma_\ell) \phi_i(\sigma_\ell) \right\}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N} \cdot \frac{1}{\lambda_1^N} \cdot \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \sum_{i,j=1}^{2}{}' \lambda_j^{\ell-k} \lambda_i^{N-\ell+k} \sigma_k \phi_j(\sigma_k) \phi_i(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_j(\sigma_\ell) \phi_i(\sigma_\ell) \right\}$$

$$= \frac{1}{1 + \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{<1}^N} \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \sum_{i,j=1}^{2}{}' \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{\ell-k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{N-\ell+k} \cdot \sigma_k \phi_j(\sigma_k) \phi_i(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_j(\sigma_\ell) \phi_i(\sigma_\ell) \right\}$$

Nun

$$\langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_k \sigma_\ell \rangle_N =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \sum_{i,j=1}^{2}{}' \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{\ell-k} \delta_{i1} \, \sigma_k \phi_j(\sigma_k) \phi_i(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_j(\sigma_\ell) \phi_i(\sigma_\ell) \right\}$$

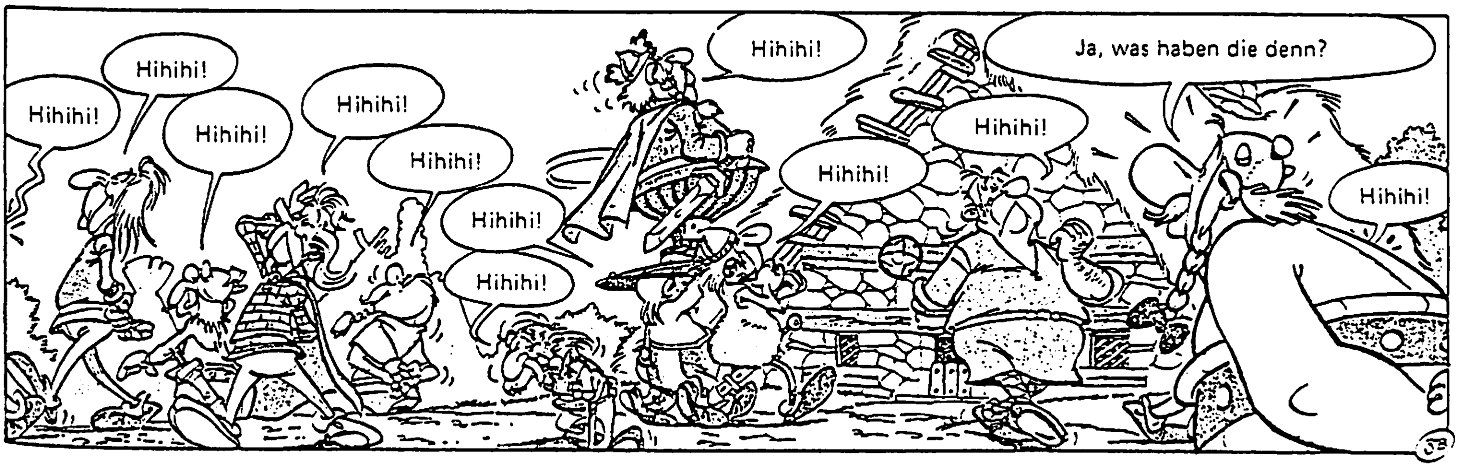
$$= \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \sum_{j=1}^{2}{}' \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{\ell-k} \sigma_k \phi_1(\sigma_k) \phi_j(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_1(\sigma_\ell) \phi_j(\sigma_\ell) \right\}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \sigma_k \phi_1(\sigma_k) \phi_1(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_1(\sigma_\ell) \phi_1(\sigma_\ell) \right\} \quad 0$$

$$+ \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ \sigma_\ell = \pm 1}}' \left\{ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\ell-k} \sigma_k \phi_1(\sigma_k) \phi_2(\sigma_k) \sigma_\ell \phi_1(\sigma_\ell) \phi_2(\sigma_\ell) \right\}$$

$$= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{l-k} \left\{ \underbrace{\phi_1(1)^2 \ \phi_2(1)^2}_{= 1/4} - 2 \underbrace{\phi_1(1)\,\phi_2(1)\ \phi_1(-1)\,\phi_2(-1)}_{-1/4} + \underbrace{\phi_1(-1)^2\ \phi_2(-1)^2}_{1/4} \right\}$$

$$= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{l-k} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \right\} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{l-k} \underset{139}{=} \underline{\underline{\left(\frac{\cosh u}{\sinh u}\right)^{l-k} = \langle \sigma_k \sigma_l \rangle}}$$



12. Selbstadjungierte Matrizen

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Nach Def. gilt: $A^* = \overline{A}^T$

Falls $A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^* = A^T$.

Bemerkung zur Notation: Es schreiben

Physiker	Mathematiker
$\dagger$	$*$
$*$	$-$

(konjugieren)

Definition.

$\mathrm{Sym}_n := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T = A\}$ symmetrischen Matrizen

$\mathrm{Herm}_n := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$ hermitesche oder selbstadjungierte Matrix.

Satz 1:

(1) Sei $A \in \mathrm{Sym}_n \cap M_n(\mathbb{R})$ eine reelle symm. Matrix. Dann sind alle Eigenwerte reell.

(2) Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$. Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

Insbesondere folgt also:

(1) $A \in \mathrm{Sym}_n \cap M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(\lambda \mathbb{1} - A)$ hat reelle Nullstellen.

(2) $A \in \mathrm{Herm}_n \Rightarrow \det(\lambda \mathbb{1} - A)$ hat reelle NS.

Beweis.

(2) Sei λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v, d.h. $Av = \lambda v$ $(v \neq 0)$

$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$ Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$, $v, w \in \mathbb{C}^n$.

Aus Kapitel 8 Lemma 1 wissen wir, dass

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ gilt: } \langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle \quad \forall v,w \in \mathbb{C}^n.$$

Somit bekommen wir also für $A \in \mathrm{Herm}_n$:

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \quad \forall v,w \in \mathbb{C}^n.$$

Insbesondere also für $v = w$:

$$\begin{array}{ccc} \langle Av, v\rangle & = & \langle v, Av\rangle \\ \| & & \| \\ \langle \lambda v, v\rangle & & \langle v, \lambda v\rangle \\ \| & & \| \\ \lambda \langle v,v\rangle & & \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\substack{\| \\ |v|^2 \neq 0, \text{ da } v \neq 0}} = \overline{\lambda}\langle v,v\rangle \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

(1) folgt sofort aus (2), da $A^* = A^T$ für $A \in M_n(\mathbb{R})$.

□

Satz 2. Sei $A \in U(n)$ und λ ein Eigenwert von A. Dann folgt:

$$|\lambda| = 1.$$

Beweis. Sei $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ der zu λ gehörende Eigenvektor, d.h. $Av = \lambda v$.

$$\Rightarrow \lambda \cdot \overline{\lambda}\langle v,v\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle Av, Av\rangle \underset{\substack{A \in U(n) \\ \text{Kap. 8 Lemma 2}}}{=} \langle v,v\rangle$$

Da $v \neq 0 \Rightarrow \langle v,v\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1.$$

□

Vergleichen wir nun einmal $\mathbb{C}$ und $M_n(\mathbb{C})$

$\mathbb{C}$	$M_n(\mathbb{C})$
$-: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$ $-$ ist Involution, dh. $-^2 = \mathbb{1}d_{\mathbb{C}}$	$*: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, $A \longmapsto A^*$ ist Involution $(A^*)^* = A \Rightarrow *^2 = \mathrm{id}$.
Fixpunkte von $-$ $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow - = \mathrm{id}$ auf <u>reeller Achse</u>	Fixpunkte von $*$ $A^* = A \Leftrightarrow A \in \mathrm{Herm}_n$ $\Rightarrow$ alle Eigenwerte <u>reell</u>.
$z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{S}^1$ $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ mit $z = e^{i\theta}$	$A^* A = \mathbb{1} \Leftrightarrow A \in U(n)$ ($\Rightarrow$ alle Eigenwerte Betrag 1) $\exists\, T \in \mathrm{Herm}_n$ mit $A = e^{iT}$

Bemerkung: $U(1) = \{a \in \mathbb{C} \mid a^{-1} = a^* = \bar{a}\} = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

<u>Gruppenisomorphismus</u>.

Satz 3: Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$. Dann gilt:

$$e^{iA} \in U(n)$$

Beweis.

$$(e^{iA}) \cdot (e^{iA})^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Übung} \\ \text{Serie 13}}}{=} e^{iA} \cdot e^{-iA} \underset{[A,-A]=0}{=} e^{i(A-A)} = \mathbb{1}.$$

$$\Rightarrow (e^{iA})^* = (e^{iA})^{-1} \Rightarrow e^{iA} \in U(n).$$

$\square$

<u>Satz 4.</u> Die Abb.

$$\varphi: \mathrm{Herm}_n \twoheadrightarrow U(n)$$
$$A \longmapsto e^{iA}$$

ist surjektiv, ~~aber~~ <u>nicht</u> injektiv.

<u>Beweis:</u>

(1) Nach Satz 3 ist φ wohldefiniert.

(2) Sei

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}_n \iff d_i \in \mathbb{R} \; 1 \le i \le n.$$

$$e^{iD} = \begin{pmatrix} e^{id_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{id_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{i(D + 2\pi \mathbb{1})} = e^{iD} \qquad \Rightarrow \varphi \text{ \underline{nicht} injektiv}.$$

(3) φ surjektiv: Übung Serie 13, Aufgabe 1.
(Man benötigt Satz 5)

$\square$

<u>Definition:</u> Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heisst <u>diagonalisierbar</u>, falls es $C \in GL(n, \mathbb{C})$ gibt, mit

$$C^{-1} A C = \text{diagonal}.$$

<u>Satz 5.</u> Sei $A \in U(n)$. Dann gibt es ein $C \in U(n)$ mit

$$C^{-1} A C = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

und $e^{i\theta_j}$ sind <u>Eigenwerte von A</u> (nach Satz 2 gilt: $|\lambda| = 1$!)

Zur Vorbereitung des Beweises benötigen wir das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren:

<u>Satz 6</u>: Seien $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{C}^n$. Dann sind die Vektoren

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1\|}$$

$$\vdots$$

$$u_k = \frac{v_k - \langle u_1, v_k \rangle u_1 - \langle u_2, v_k \rangle u_2 - \dots - \langle u_{k-1}, v_k \rangle u_{k-1}}{\|v_k - \langle u_1, v_k \rangle u_1 - \langle u_2, v_k \rangle u_2 - \dots - \langle u_{k-1}, v_k \rangle u_{k-1}\|}$$

orthonormiert, d.h. $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ (insbesondere linear unabh.)

<u>Beweis.</u>

Für die obigen Vektoren $u_1, \dots, u_k$ gilt offensichtlich

(1) $\langle u_i, u_i \rangle = 1 \qquad 1 \le i \le k$

(2) $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad i \neq j.$

$u_1, \dots, u_k$ sind linear unabh., denn:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0 \qquad \| \langle \cdot, u_i \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \underbrace{\langle u_1, u_i \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} + \dots + \lambda_k \underbrace{\langle u_k, u_i \rangle}_{=0} = 0$$

Also: $\qquad \lambda_i = 0 \qquad \forall\, 1 \le i \le k.$

$\Rightarrow u_1, \dots, u_k$ l.u.

$\square$

Korollar 7 (rotes Lemma!)

Sei V ein k-dim. Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis (ONB) $v_1, \dots, v_k \in V$ $(\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij})$ mit $V \ni v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, v_j \rangle v_j$.

Beweis.

(1) Existenz einer solchen ONB folgt sofort aus Satz 2 Kapitel 3 und Satz 6.

(2) Sei $v \in V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$ $\quad$ ($v_1, \dots, v_k$ ONB)

$$\Rightarrow \langle v, v_\ell \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j, v_\ell \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_\ell \rangle}_{\delta_{j\ell}}$$

$$= \lambda_\ell \qquad \forall\, 1 \leq \ell \leq k.$$

$$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, v_j \rangle v_j.$$

□

Beweis (Satz 5)

Induktion

$n=1$: $\quad U(1) \cong S^1$

$$\underset{A}{\overset{\psi}{}} A = (a) = (e^{i\theta}) \Rightarrow 1^{-1} A 1 = (e^{i\theta}) \text{ fertig.}$$

Induktionsschritt: Sei Satz 5 richtig für alle $F \in U(n-1)$

Sei $A \in U(n)$. Sei λ_1 ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v_1, $\|v_1\| = 1$ (immer möglich, ev. normieren!). Nach Satz 2 gilt: $|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = e^{i\theta_1}$

Sei $E := \{ w \in \mathbb{C}^n \mid \langle v_1, w \rangle = 0 \}$. E ist ein $(n-1)$-dim. Unterraum von $\mathbb{C}^n$ (Übung!). E ist weiter invariant unter A:

Sei $w \in W \Rightarrow Aw \in W$: $\quad \langle v_1, Aw \rangle = \langle e^{-i\theta_1} A v_1, Aw \rangle = e^{i\theta_1} \langle A v_1, A w \rangle$

$$= e^{i\theta_1} \underset{A \in U(n)\text{ Kap. 8 Lemma 2}}{\langle v_1, w \rangle} = 0, \text{ da } \langle v_1, w \rangle = 0.$$

Nun nach Korollar 7 gibt es eine orthonormierte Basis $u_2, \dots, u_n$ von E, d.h. $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$.

Setze $\mathcal{B} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$

Nach Übung Serie 11 gilt: $\underline{\mathcal{B} \in \mathcal{U}(n)}$

Nun

$$(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{1} = \mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{B} = (\mathcal{B}^{-1} v_1, \mathcal{B}^{-1} u_2, \dots, \mathcal{B}^{-1} u_n)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{e_1 = \mathcal{B}^{-1} v_1} \quad \text{oder} \quad \underline{v_1 = \mathcal{B} e_1}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B} &= \mathcal{B}^{-1} A (v_1, u_2, \dots, u_n) \\
&= \mathcal{B}^{-1} (A v_1, A u_2, \dots, A u_n) \\
&= \mathcal{B}^{-1} (\lambda_1 v_1, A u_2, \dots, A u_n) \\
&= (\mathcal{B}^{-1}(\lambda_1 v_1), \mathcal{B}^{-1} A u_2, \dots, \mathcal{B}^{-1} A u_n) \\
&= (\lambda_1 \cdot \underbrace{\mathcal{B}^{-1} v_1}_{e_1 \text{ (oben)}}, \mathcal{B}^{-1} A u_2, \dots, \mathcal{B}^{-1} A u_n) \\
&= (\lambda_1 e_1, \mathcal{B}^{-1} A u_2, \dots, \mathcal{B}^{-1} A u_n)
\end{aligned}$$

Weiter gilt: $\underbrace{(\mathcal{B}^{-1} A u_j)_1}_{\text{erste Komp.}} = \langle \underbrace{\mathcal{B}^{-1}}_{\overset{\|}{\mathcal{B}^*}, \text{ da } \underline{\mathcal{B} \in \mathcal{U}(n)}} A u_j, e_1 \rangle = \langle \mathcal{B}^* A u_j, e_1 \rangle$

$$= \langle A u_j, \underbrace{\mathcal{B} e_1}_{v_1 \text{ (oben)}} \rangle = \langle \underbrace{A u_j}_{\in E, \text{ da } E \text{ invariant unter } A}, v_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Nun $\mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B} \in U(n) \Rightarrow F \in U(n-1)$.

Nach Ind.voraussetzung gibt es also ein $G \in U(n-1)$ mit

$$G^{-1} F G = \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Sei $\tilde{G} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & G & \\ 0 & & & \end{array}\right) \underline{\in U(n)}$!

$$\Rightarrow \tilde{G}^{-1} \mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B} \tilde{G} = \tilde{G}^{-1} \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right] \tilde{G}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & G^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & G & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & G^{-1} F G & \\ 0 & & & \end{array}\right] \underset{\lambda_1 = e^{i\theta_1}}{=} \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}.$$

Setze $C = \mathcal{B}\tilde{G} \in U(n) \Rightarrow C^{-1} A C = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$

$\square$

Als nächstes möchten wir ein zu Satz 5 analoges Resultat für Hermitesche-Matrizen:

Erinnerung: $\mathrm{Herm}_n = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = A^* \}$.

Bsp. $\Delta_n \in \mathrm{Herm}_n$ der diskrete Laplaceoperator.

In Lemma 4 (Kap 8) haben wir gesehen, dass

$$\mathcal{F}_n^{-1} \Delta \mathcal{F}_n = \text{diagonal} \quad , \mathcal{F}_n \in U(n).$$

Gilt dies auch allgemein, für $A \in \mathrm{Herm}_n$?

Zuerst ein kleines Lemma:

Lemma 8: Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gibt es ein B_1 und $B_2 \in \mathrm{Herm}_n$, sodass

$$A = B_1 + i B_2$$

Beweis:

Für komplexe Zahlen gilt: $\mathbb{C} \ni z = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + i \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z = x+iy.$

Vgl. nun Tabelle p. 145 $\Rightarrow$

$$A = \frac{A+A^*}{2} + i \ \frac{A-A^*}{2i}$$

$$\text{Nun} \quad \left(\frac{A+A^*}{2}\right)^* = \frac{A^* + \overbrace{(A^*)^*}^{= A}}{2} = \frac{A+A^*}{2} \in \mathrm{Herm}_n.$$

$$\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)^* = \frac{A^* - \overbrace{(A^*)^*}^{= A}}{-2i} = \frac{A-A^*}{2i} \in \mathrm{Herm}_n.$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{A+A^*}{2} \quad \text{und} \quad B_2 = \frac{A-A^*}{2i}$$

$\square$

! **Satz 9** (Spektralsatz I) (Rambo I)

Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$. Dann gibt es $C \in U(n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

! **Bemerkung 10.** Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$, $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Dann gilt:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Beweis (Bem. 10)

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle A v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \underset{\substack{\| \\ A}}{A^*} v_2 \rangle$$

A, da $A \in \mathrm{Herm}_n$

$$= \langle v_1, A v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle$$

$$= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{(Eigenwerte reell!!)}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

$\square$

Beweis (Spektralsatz I)

Induktion.

$n = 1$ $\quad A \in \mathrm{Herm}_1 \Rightarrow A = (a), \ a \in \mathbb{R}$ $\quad$ fertig.

Induktionsschritt: Sei Satz gültig für alle $F \in \mathrm{Herm}_{n-1}$.

Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$, λ_1 ein Eigenwert von $A \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$
und v_1 ein Eigenvektor mit $\|v_1\| = 1$ zu λ_1,

d.h. $Av_1 = \lambda v_1$.

Wiederum betrachten wir $E = \{ w \in \mathbb{C}^n \mid \langle w, v_1 \rangle = 0 \}$.

E ist ein $(n-1)$-dim. UR von $\mathbb{C}^n$, E ist invariant unter A:

$E \ni w \Rightarrow Aw \in E$

$$\langle Aw, v_1\rangle = \langle w, A^* v_1\rangle \underset{A\in \mathrm{Herm}_n}{=} \langle w, Av_1\rangle = \langle w, \lambda_1 v_1\rangle$$

$$\underset{\lambda_1\in\mathbb{R}}{=} \lambda_1 \underbrace{\langle w, v_1\rangle}_{=0} = 0$$

Sei $w_2, \dots, w_n$ eine orthonormierte Basis von E, d.h.

$$\langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Setze $B := (v_1, w_2, \dots, w_n) \in U(n)$
$\uparrow$
Übung Serie 11

$$(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{1} = B^{-1}B = (B^{-1}v_1, B^{-1}w_2, \dots, B^{-1}w_n)$$

$$\Rightarrow \underline{e_1 = B^{-1}v_1} \quad \text{oder} \quad \underline{v_1 = Be_1}.$$

$$\Rightarrow B^{-1}AB = B^{-1}A(v_1, w_2, \dots w_n)$$

$$= B^{-1}(\underbrace{Av_1}_{\lambda_1 v_1 \text{ oben.}}, Aw_2, \dots, Aw_n)$$

$$=$$

$$= (\lambda_1 \underbrace{B^{-1}v_1}_{=e_1 \text{ oben}}, B^{-1}Aw_2, \dots, B^{-1}Aw_n)$$

Nun $\underbrace{(B^{-1}Aw_j)_1}_{\text{erste Komponente}} = \langle B^{-1}Aw_j, e_1\rangle =$

$B^{-1} = B^*$, da $B \in U(n)$

$$= \langle Aw_j, \underbrace{Be_1}_{v_1}\rangle = \langle \underbrace{Aw_j}_{\in E}, v_1\rangle = 0.$$

Somit haben wir also:

$$B^{-1} A B = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

$$\text{Nun } (B^{-1}AB)^* = B^* A^* (B^{-1})^* \underset{\substack{B \in U(n) \\ A \in \mathrm{Herm}_n}}{=} B^{-1} A B$$

Also folgt, dass $\underline{F \in \mathrm{Herm}_{n-1}}$

Nach Ind.vor. gibt es ein $G \in U(n-1)$ mit

$$G^{-1} F G = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Setze $\tilde{G} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & G \end{array}\right) \in U(n)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{G}^{-1} B^{-1}}_{= D^{-1}} A \underbrace{B \tilde{G}}_{\substack{= D \\ \cap \\ U(n)}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\square$

<u>Korollar 11:</u> Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$. Nach Satz 9 gibt es $C \in U(n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Sei $C = (v_1, \dots, v_n) \in U(n) \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Dann gilt: $A v_j = \lambda_j v_j$, d.h. <u>Spalten von C sind die Eigenvektoren von A.</u>

<u>Bemerkung.</u> Korollar 11 gilt natürlich für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ für welche es ein $C \in U(n)$ mit $C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ gibt.

<u>Beweis</u> (Korollar).

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = C^{-1} A C \Rightarrow A C = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Falls $C = (v_1, \dots, v_n)$

$$\Rightarrow (A v_1, \dots, A v_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n)$$

$\square$

<u>Satz 12</u> (Spektralsatz II) Rambo 2.
Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$. Dann gibt es eine ONB $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{C}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$A v_j = \lambda_j v_j \qquad 1 \le j \le n.$$

<u>Beweis:</u>
Zusammensetzung von Rambo 1 und Korollar 11.

$\square$

<u>Satz 13.</u> Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $\det(A - \lambda 1\!\!1) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda)$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n$.
Dann gibt es ein $C \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Beweis.</u> Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Eigenvektoren zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\|v_i\| = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Nach Satz 5 (Kapitel 4) sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Sei $C = (v_1, \ldots, v_n) \quad \in GL(n, \mathbb{C})$, da $v_1, \ldots, v_n$ l.u.

$$C^{-1} A C = C^{-1} (Av_1, \ldots, Av_n) = C^{-1}(\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)$$
$$= (C^{-1}\lambda_1 v_1), \ldots, C^{-1}(\lambda_n v_n) = (\lambda_1 C^{-1} v_1, \ldots, \lambda_n C^{-1} v_n)$$

Nun $C \cdot e_j = v_j \quad 1 \leq j \leq n, \quad e_j = (0, \ldots, \underset{j\text{-te Stelle}}{1}, 0 \ldots 0)$

$$\Rightarrow e_j = C^{-1} v_j$$

Also: $C^{-1} A C = (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\square$

<u>Beispiel einer wichtigen Anwendung in der Analysis.</u>

Sei $A \in \mathrm{Herm}_n$ mit strikt positiven Eigenwerten $\lambda_n > \lambda_{n-1} > \ldots > \lambda_1 > 0$.

Berechnen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle} d\underline{x}$.

Nach Satz 9 gibt es ein $C \in U(n)$ mit $C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Dann folgt mit dem Satz über die Koordinatentransformation

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle}\, d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Cx, ACx\rangle} \underbrace{|\det C|}_{=1}\, d\underline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Cx, ACx\rangle}\, d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, C^* ACx\rangle}\, d\underline{x}$$

$$\underset{\substack{C^* = C^{-1} \\ \text{da } C \in U(n)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, C^{-1} ACx\rangle}\, d\underline{x} \underset{\lambda_i \in \mathbb{R}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}\, d\underline{x}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x_1^2}\, dx_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_2 x_2^2}\, dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_n x_n^2}\, dx_n$$

Berechnen wir zuerst $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i x_i^2}\, dx_i$

Setze $y = \sqrt{\lambda_i}\, x_i$ $\qquad \lambda_i > 0$!

$dy = \sqrt{\lambda_i}\, dx_i$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i x_i^2}\, dx_i = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

Also müssen wir $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$ berechnen.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}\, dz \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}} dy\, e^{-\frac{(z^2+y^2)}{2}}$$

$$\underset{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}}{=} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \; r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} \qquad \text{(Koordinatentransformation)}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = -2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^\infty$$

$$= 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi} \, .$$

Also: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-1/2 \, \lambda_i x_i^2} dx_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right)^{1/2}$

Somit: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-1/2 \langle x, Ax \rangle} d\underline{x} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\right)^{1/2} \cdots \left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)^{1/2}$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-1/2 \langle x, Ax \rangle} d\underline{x} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(A)^{1/2}}}$$

Betrachten wir $M_n(\mathbb{C})$.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ und setzen wir $\|A\| = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Seien nun $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dann definieren wir

$$d(A,B) = \|A - B\|$$

<u>Lemma 14</u>: $(M_n(\mathbb{C}), d)$ ist ein <u>metrischer Raum</u>.

<u>Beweis</u>: Übung $\square$

<u>Definition</u>. Sei (X,d) ein metr. Raum

(1) $A \subseteq M$ heisst <u>dicht</u> in M, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in M$ ein $y \in A$ mit $d(x,y) < \varepsilon$ gibt.

(2) Sei $\varepsilon > 0$, $x \in X$. $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ heisst ε-Umgebung von X.
$A \subseteq X$ heisst <u>offen</u>, falls es zu jedem $x \in A$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset A$ gibt.

(3) (X,d) heisst <u>wegzusammenhängend</u>, falls es für alle $x, y \in X$ einen Weg γ, d.h. eine stetige Abb. $\gamma : I = [0,1] \longrightarrow X$, mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

<u>Satz 15</u>. Sei $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A$ hat nur einfache Eigenwerte$\}$

Für V gilt: (a) V ist dicht in $M_n(\mathbb{C})$

(b) V ist offen in $M_n(\mathbb{C})$

(c) V ist wegzusammenhängend.

<u>Beweis</u>.

(a) Sei $B \in M_n(\mathbb{C})$. Nach Satz 15 Kapitel 9 gibt es $C \in GL(n, \mathbb{C})$, mit $C^{-1} B C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Setze $\delta := \varepsilon / n^2 \cdot \|C\| \cdot \|C^{-1}\|$.

Wähle $\delta_1, \dots, \delta_n < \delta$ so, dass

$$\lambda_i + \delta_i \neq \lambda_j + \delta_j .$$

Sei $$T_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \delta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + \delta_n \end{pmatrix} .$$

Nun $A_\delta = C T_\delta C^{-1} \in V \quad (A_0 = B)$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|B - A_\delta\| &= \|C D C^{-1} - C T_\delta C^{-1}\| \\ &= \|C (D - T_\delta) C^{-1}\| \\ &\leq n \|C\| \cdot \|D - T_\delta\| \cdot n \|C^{-1}\| \\ &= n^2 \cdot \|C\| \cdot \|C^{-1}\| \cdot \underbrace{\|D - T_\delta\|}_{< \delta} \\ &< \varepsilon . \end{aligned}$$

Also $d(B, A_\delta) < \varepsilon$ wie gewünscht.

(b) (B. Keller)

Sei $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ der komplexe Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Wir versehen $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ mit der Metrik

$$d(f,g) := \max_{0 \leq k \leq n} |a_k - b_k|$$

wobei $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$.

Die Abbildung

$$\chi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$$
$$A \longmapsto p_A = \text{charakteristische Polynom}$$

ist dann stetig und es gilt für $V \subset M_n(\mathbb{C})$:

$$V = \chi^{-1}(\underbrace{\{f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \mid f \text{ hat nur einfache Nullstellen}\}}_{U})$$

Die Behauptung wird folgen, wenn gezeigt ist, dass U offen ist. Nun liegt $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ in U genau dann, wenn $f(z)$ und $f'(z) := \frac{d}{dz} f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1) z^k$ keine gemeinsame Nullstelle haben (Übung!). Folglich (vgl. Anhang) ist U das Urbild der offenen Menge $\mathbb{C} - \{0\}$ unter der stetigen Abbildung (Übung)

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f(z) \longmapsto \mathrm{Res}(f(z), f'(z)).$$

Anhang: Die Resultante

Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{m}{}' a_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_k z^k$,

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $m, n \geq 1$.

Wir definieren die Resultante von f und g als

$$\operatorname{Res}(f,g) = \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \end{matrix}$$

Behauptung: $\operatorname{Res}(f,g) = a_m^n \, b_n^m \prod_{i,j} (\beta_j - \alpha_i)$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bzw $\beta_1, \dots, \beta_n$ die (entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführten) Nullstellen von f bzw g sind.

Beweis.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & & \beta_n^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1^p & \beta_2^p & & \beta_n^p & \alpha_1^p & \alpha_2^p & \cdots & \alpha_m^p \end{bmatrix}$$

wobei $p = n + m - 1$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\hphantom{f(\beta_1)\quad f(\beta_2)\quad \cdots\quad \beta_n^{n-1}f(\beta_n)}}^{n} \hphantom{\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad \alpha_m^{m-1}g(\alpha_m)} & \\
= & n\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \begin{pmatrix}
f(\beta_1) & f(\beta_2) & \cdots & f(\beta_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\beta_1 f(\beta_1) & \beta_2 f(\beta_2) & \cdots & \beta_n f(\beta_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\beta_1^{n-1} f(\beta_1) & \beta_2^{n-1} f(\beta_2) & \cdots & \beta_n^{n-1} f(\beta_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & \cdots & g(\alpha_m) \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 g(\alpha_1) & \alpha_2 g(\alpha_2) & \cdots & \alpha_m g(\alpha_m) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1^{m-1} g(\alpha_1) & \alpha_2^{m-1} g(\alpha_2) & \cdots & \alpha_m^{m-1} g(\alpha_m)
\end{pmatrix} \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m & \\
 & \hphantom{f(\beta_1)\quad f(\beta_2)\quad \cdots\quad \beta_n^{n-1}f(\beta_n)} \underbrace{\hphantom{\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad \alpha_m^{m-1}g(\alpha_m)}}_{m} &
\end{array}
$$

Nun nehmen wir beidseitig die Determinante. Links wenden wir den Determinantenmultiplikationssatz und die Van der Monde Determinante (Übung Serie 8) an. Rechts erhalten wir das Produkt der Determinanten der beiden Blöcke (gilt allgemein für Determinanten von diagonalen Blockmatrizen. Übung). Im ersten Block ziehen wir

$$f(\beta_1) \cdots f(\beta_n)$$

aus der Determinante, im zweiten Block

$$g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_m).$$

Dann bleibt rechts das Produkt von zwei Van der Monde Determinanten stehen. Summa summarum gibt die rechte Seite

$$f(\beta_1) \cdots f(\beta_n)\, g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_m) \prod_{i<j} (\beta_j - \beta_i) \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Auf der linken Seite bekommen wir

$$\operatorname{Res}(f,g) \cdot \prod_{i<j} (\beta_j - \beta_i) \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) \prod_{i,j} (\alpha_j - \beta_i).$$

Nehmen wir vorläufig an, alle Nullstellen von f und g seien einfach. Dann können wir $\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)\ \prod_{i<j}(\beta_j-\beta_i)$ kürzen, und erhalten

$$\mathrm{Res}(f,g)\ \prod_{i,j}(\alpha_j-\beta_i) = f(\beta_1)\cdots f(\beta_n)\cdot g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_m).$$

Da
$$f(z) = a_m(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_m)$$
$$g(z) = b_n(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)$$

folgt:
$$f(\beta_1)\cdots f(\beta_n)\cdot g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_m) = a_m^n\cdot b_n^m\left(\prod_{i,j}(\beta_i-\alpha_j)\right)\left(\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)\right)$$

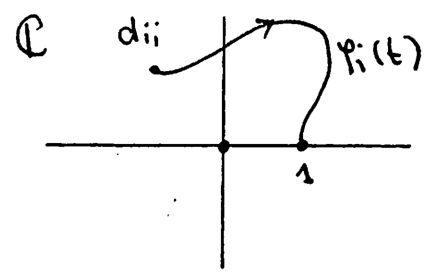
Wenn die β's und α's paarweise verschieden sind können wir $\prod_{i,j}(\alpha_j-\beta_i)$ beidseitig kürzen und erhalten die Gleichung der Behauptung.

Aus "Stetigkeitsgründen" gilt sie auch für jene Fälle, die wir in der Herleitung ausgeschlossen haben (beide Seiten sind stetige Funktionen des Vektors $(a_m, b_n; \alpha_1,\dots,\alpha_m, \beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{C}^{2+n+m}$. Diese Funktionen stimmen auf einer dichten Teilmenge des $\mathbb{C}^{2+n+m}$ überein, also überall)
Übung!

(c) Schritt 1: $GL(n,\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.

Sei $A\in GL(n,\mathbb{C})$. Nach Satz 15 (Kapitel 9) gibt es ein $C\in GL(n,\mathbb{C})$ mit
$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n}\\ & \ddots & \vdots\\ & & d_{nn}\end{pmatrix}$$

Für jedes $1\le i\le n$ gibt es einen Weg $\varphi_i : [0,1]\longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ mit $\varphi_i(0)=d_{ii}$, $\varphi_i(1)=1$ (vgl. Bild p. 165).
Dies gilt nicht in $\mathbb{R}$!!



Damit haben wir also einen stetigen Weg in $GL(n,\mathbb{C})$ von

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & d_{12} \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

gefunden.

Sei $\gamma : t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & (1-t)d_{12} & \cdots & (1-t)d_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

Nun $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$\gamma(1) = \mathbb{1}$,

also ist γ ein Weg von $\begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

in $GL(n,\mathbb{C})$.

Insgesamt haben wir einen Weg von

$$C^{-1}AC \quad \text{nach} \quad \mathbb{1}$$

in $GL(n,\mathbb{C})$ gefunden, also auch einen von

$$A \quad \text{nach} \quad C\,\mathbb{1}\,C^{-1} = \mathbb{1}.$$

Also lässt sich jedes $A \in GL(n,\mathbb{C})$ durch einen Weg in $GL(n,\mathbb{C})$ mit $\mathbb{1}$ verbinden. Somit ist $GL(n,\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ($GL(n,\mathbb{R})$ ist <u>nicht</u> wegzusammenhängend!).

<u>Schritt 2:</u> Konjugationsklassen sind zusammenhängend.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Betrachten wir die Abb.

$$\begin{aligned} k_A : GL(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ T &\longmapsto T^{-1}AT . \end{aligned}$$

k_A ist stetig (Übung), $GL(n,\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend, also ist $k_A(GL(n,\mathbb{C})) = \underbrace{\{T^{-1}AT \mid T \in GL(n,\mathbb{C})\}}_{\text{Konjugationsklasse von } A.}$ wegzusammenhängend

<u>Schritt 3:</u>

Die Diagonalmatrizen in V sind wegzusammenhängend.

Seien $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \in V$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t\mu_1 + (1-t)\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t\mu_n + (1-t)\lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Weg in V mit $\gamma(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und

$\gamma(1) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$

<u>Schritt 4:</u> V ist wegzusammenhängend.

Seien $A, B \in V$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bzw $\mu_1, \ldots, \mu_n$ die verschiedenen Eigenwerte von A bzw B.

Nach Schritt 2 gibt es einen Weg in V von

$$A \text{ nach } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

nach Schritt 3 einen Weg von $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$

und wiederum nach Schritt 2 einen Weg in V von

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \text{ nach } B.$$

$\square$

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

Lineare Algebra I

Serie 1

1. Zeige, dass für beliebige A, B, C $\in M^2(R)$ gilt:

   (i) $A(BC) = (AB)C$
   (ii) $A(B+C) = AB + AC$
   (iii) $(B+C)A = BA + CA$
   (iv) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Sei $M^2(C) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{C} \right\}$

   Definition: Die Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in M^2(C)$, mit

   $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   heissen ***Pauli - Matrizen*.**

   Berechne: (i) $\sigma_k \cdot \sigma_j$, für alle $k,j \in \{1,2,3\}$.
   (ii) σ_k^{-1}, $k = 1,2,3$.
   (iii) Ist $\sigma_k \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_k$ für $j \neq k$?

3. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit dem Verfahren von Gauss:

   a)
   $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 32 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   c) Für welche Werte $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ hat das System

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + \lambda x_3 &= \mu \end{aligned}$$

   (i) genau eine Lösung
   (ii) keine Lösung
   (iii) unendlich viele Lösungen?

4. Für die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

gilt: $A^2 = I$.

Gibt es weitere solche Matrizen $A \in M^2(\mathbf{R})$ mit $A^2 = I$? Gib eine Liste.

5.

Sei $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Berechne $R_\alpha \cdot R_\beta$.

Lineare Algebra I / Serie 1 : Lösungen

1. klar
2. (i) $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_1 \cdot \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 \cdot \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$\sigma_3 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

(ii) $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$, $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$, $\sigma_3^{-1} = \sigma_3$ mit (i)
(iii) ✓

3. a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 8 & 3 & 32 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 16 & 7 & 28 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 16 & 7 & 28 \\ 0 & 0 & 21 & -196 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -20/3 \\ x_2 &= 70/12 = 35/6 \\ x_3 &= -196/21 = -\tfrac{28}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 18 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ & & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \lambda - 9 \\ x_2 &= 9 - 2\lambda \end{aligned}$$
$x_3 = \lambda$, beliebig $\lambda \in \mathbb{R}$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & \lambda & \mu \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -25 & -1 \\ 0 & 3 & \lambda+16 & \mu \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -25 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+41 & \mu+1 \end{array}\right)$$

(i) sonst
(ii) $\lambda = -41$, $\mu \neq -1$
(iii) $\lambda = -41$ <u>und</u> $\mu = -1$ $\rightarrow x_3$ beliebig.

4. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$

(i) $b=0$, $c=0$: $\quad a^2 = d^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$, $d = \pm 1$.
(ii) $b \neq 0$, $c \neq 0$: $\quad a = -d$, $a^2 + bc = 1$
$\Rightarrow$ Parametrisierung der Lsg.menge : $a^2 = 1 - t$, $t = b \cdot c \in \mathbb{R}$
$a = -d$

5. $R_\alpha \cdot R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

Lineare Algebra I

Serie 2

1. Beweise:

   Für $A, B \in M^3(\mathbf{R})$ gilt: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

2. **Definition:** $GL(3,\mathbf{R}) = \{ A \in M^3(\mathbf{R}) \mid \det A \neq 0 \}$.

   Sei $A \in GL(3,\mathbf{R})$. In der Vorlesung wurde für A^{-1} eine explizite Formel hergeleitet.

   Zeige mit ihrer Hilfe: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

3. **Definition:** Seien $A, B \in M^k(\mathbf{R})$ für $k = 2,3$.
   $[A,B] = A \cdot B - B \cdot A$ heisst ***Kommutator*** der Matrizen A,B.

   Seien

   $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berechne: $[A_i, A_j]$ für alle $i,j \in \{1,2,3\}$.

4. Seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Pauli - Matrizen von Übung 1.

   Berechne: $[\sigma_i,\sigma_j]$.

5. Gib eine Liste derjenigen $A \in M^3(\mathbf{R})$ für welche gilt: $A^2 = I$.

Lösungen : Serie 2.

1. Skript p. 107

2. –

3. $[A_1, A_2] = -A_3 = -[A_2, A_1]$
$[A_1, A_3] = A_2 = -[A_3, A_1]$
$[A_2, A_3] = -A_1 = -[A_3, A_2]$

4. $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$
$[\sigma_1, \sigma_3] = -2i\sigma_2$
$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$

5. $A \in M^3(\mathbb{R})$ mit $A^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ Eigenwerte $= \{\pm 1\}$

Sei $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}$ Eigenraum zum Eigenwert $+1$
$E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\}$ Eigenraum zum Eigenwert -1

Nun $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-1}$:

- $\mathbb{R}^3 \ni x = \underbrace{\frac{1}{2}(Ax + x)}_{u} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - Ax)}_{v}$

$E_1 \ni u : \quad Au = \frac{1}{2}(A^2x + Ax) = \frac{1}{2}(x + Ax) = u.$

$E \ni v : \quad Av = \frac{1}{2}(Ax - A^2x) = -\frac{1}{2}(x - Ax) = -v.$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = E_1 + E_{-1}$

- $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$

$$\underset{v}{\overset{\cup\!\!\!\!\!|}{}}$$

$$Av \underset{v \in E_1}{\uparrow}{=} v \underset{v \in E_{-1}}{\uparrow}{=} -v \Rightarrow v = 0.$$

Klassifikation.

E_1	E_{-1}
$\mathbb{R}^3$	$\{0\}$
Ebene E mit $0 \in E$ $\mathbb{R}^2$	Gerade h durch 0 mit $h \notin E$ $\mathbb{R}$
Gerade g durch 0 $\mathbb{R}$	Ebene F mit $0 \in F$ und $g \notin F$ $\mathbb{R}^2$
$\{0\}$	$\mathbb{R}^3$

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

Lineare Algebra I

Serie 3

1. Sei $A,B \in M_3(R)$. Zeige, dass für die Transponierten Matrizen gilt:
   (i) $(A^T)^T = A$
   (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$
   (iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
   (iv) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad , A \in GL(3,R)$
   (v) $\det(A^T) = \det A$.

2. Seien $x,y \in \mathbf{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Das Standardskalarprodukt im $\mathbf{R}^3$ ist gegeben durch $\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Weiter definieren wir $\|x\|^2 = \langle x,x \rangle$. Zeige:
   (i) $\langle \alpha x + ßy,z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + ß \langle y,z \rangle, \quad x,y,z \in \mathbf{R}^3, \quad \alpha, ß \in \mathbf{R}$
   $\langle x,\alpha y + ßz \rangle = \alpha \langle x,y \rangle + ß \langle x,z \rangle, \quad x,y,z \in \mathbf{R}^3, \quad \alpha, ß \in \mathbf{R}$
   d.h. $\langle ..,.. \rangle$ ist bilinear.
   (ii) $4 \langle x,y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ Polarisationsidentität.
   (iii) $\langle Ax,y \rangle = \langle x,A^Ty \rangle$ für $A \in M_3(R)$.
   (iv) Es sind äquival ent:
   (a) $\langle Ax,Ay \rangle = \langle x,y \rangle \quad \forall x,y \in \mathbf{R}^3$
   (b) $\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbf{R}^3$
   (c) $A \in O(3) = \{A \in GL(3,R) \mid A^{-1} = A^T\}$.
   (v) $\langle x,y \rangle = \|x\| \|y\| \cos ß$, wobei $ß = \sphericalangle(x,y)$.
   (vi) $\langle x,y \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^3 \Rightarrow y = 0$.

3. Seien $f, g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ $(d = 2,3)$ lineare Abbildungen mit zugehörigen Matrizen A bzw. B.
   Zeige: (a) Die Verknüpfung $f \cdot g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ $(d = 2,3)$ ist wieder eine lineare Abbildung.
   (b) Für die zur Verknüpfung gehörende Matrix C gilt: $C = A \cdot B$.

4. Betrachte $\mathbf{R}^2$ mit der Standardbasis $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.
   (i) Beschreibe die Symmetriegruppe D_3 des gleichseitigen Dreiecks (Drehungen und Spiegelungen die das Dreieck in sich überführen) in Matrixform und berechne die Gruppentafel. Die Gruppe D_3 heisst Diedergruppe der Ordnung 6.

   (ii) Beschreibe die Symmetriegruppe D_4 des Quadrates analog zu (i) in Matrixform und berechne auch für sie die Gruppentafel. D_4 heisst Diedergruppe der Ordnung 8.

5. **Definition.** $SU(2) = \{A \in M_2(C) \mid A^* = A^{-1}, \det A = 1\}$, wobei $A^* = \overline{A}^T$.

   Zeige: $SU(2) = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in C, \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1 \}$

6. Sei $A \in M_d(R)$ (d=2,3), wobei $A \neq 0$ und $\det A = 0$.
   Zeige: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ (d=2,3), so dass $Ax = 0$.

UB.

<u>Lineare Algebra I</u> Serie 3 WS 88/89

1. Für die vorkommenden Matrizen bezeichnen wir mit Indizen ij das Element in der i-ten Zeile und j-ten Kolonne und vergleichen wir sie koeffizientenweise:

a. $((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}$ d.h. $(A^T)^T = A$

b. $((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} =$
$= (A^T + B^T)_{ij}$ d.h. $(A+B)^T = A^T + B^T$

c. $((A\cdot B)^T)_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} B_{ki}$

$(B^T\cdot A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{3} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} B_{ki}$

d.h. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

d. Sei $A \in GL(3, \mathbb{R})$ dann existiert A^{-1} mit
$I = A^{-1}\cdot A = A \cdot A^{-1}$. Daraus folgt
$I = I^T \underset{c.}{=} A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ d.h. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

e. Mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Die explizite Berechnung der Determinante liefert für beide Matrizen dasselbe Resultat also: $\det(A) = \det(A^T)$

2. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. $x = (x_1, x_2, x_3)$ $y = (y_1, y_2, y_3)$

Wir definieren $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$
$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

i. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 + (\alpha x_3 + \beta y_3) z_3 \\ &= \alpha (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + \beta (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) \\ &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

analog: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

ii. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle \underset{i.}{=} \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$
$\underset{def.}{=} \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

also $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$

iii. Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$

$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} (Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j \right) y_i$

$\langle x, A^T y \rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j (A^T y)_j = \sum_{j=1}^{3} x_j \left(\sum_{i=1}^{3} (A^T)_{ji} y_i \right) = \sum_{j=1}^{3} x_j \sum_{i=1}^{3} A_{ij} y_i$

also $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$

vi. Sei $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
Betrachte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Nach Voraussetzung ist das Skalarprodukt dieser 3-Tupeln mit y immer 0 also $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$
d.h. $y = 0$.

iv. Wir zeigen (a) $\to$ (c) $\to$ (b) $\to$ (a)

(a) $\to$ (c) : Sei $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

dann $\langle x, A^T A y \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ (iii)

d.h. $\langle x, A^T A y - y \rangle = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ (i)

d.h. $A^T A y - y = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ (vi)

d.h. $A^T A y = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ d.h. $A^T A = I$

Analog: $AA^T = I$ also $A = O(3)$

(c) $\to$ (b) : Sei $A \in O(3)$. Sei $x \in \mathbb{R}^3$

$\| Ax \|^2 = \langle Ax, Ax \rangle \underset{iii}{=} \langle x, A^T A x \rangle \underset{Vor.}{=} \langle x, x \rangle$

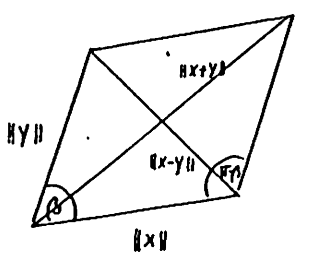
also $\| Ax \| = \| x \|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$

(b) $\to$ (a) : Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\langle Ax, Ay \rangle \underset{ii}{=} \frac{1}{4} \left(\| Ax + Ay \|^2 - \| Ax - Ay \|^2 \right)$$
$$\underset{A \text{ lin.}}{=} \frac{1}{4} \left(\| A(x+y) \|^2 - \| A(x-y) \|^2 \right)$$
$$\underset{Vor.}{=} \frac{1}{4} \left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 \right) \underset{ii}{=} \langle x, y \rangle$$

also $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

v. Wir interpretieren die Elemente von $\mathbb{R}^3$ als Vektoren im Raum. Wir können dann folgendes Parallelogramm betrachten:



Es gilt:

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \| y \| \cos\beta$$
$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \| y \| \underbrace{\cos(\pi - \beta)}_{-\cos\beta}$$

also
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 \right)$$
$$= \| x \| \| y \| \cos\beta$$

3. $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $d = 2, 3$ seien lin. Abb. mit zugehörigen Matrizen A, B.

(a) $f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $d = 2, 3$ ist linear:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ $d = 2, 3$; $\alpha \in \mathbb{R}$

dann: $(f \cdot g)(x + y) = f(g(x+y)) = f(g(x) + g(y))$
$= f(g(x)) + f(g(y))$
$= (f \cdot g)(x) + (f \cdot g)(y)$

$(f \cdot g)(\lambda x) = f(g(\lambda x)) = f(\lambda g(x)) = \lambda f(g(x))$
$= \lambda (f \cdot g)(x)$

(b) für die Matrix C von $f \cdot g$ gilt $C = A \cdot B$:

$d = 2$: wir betrachten die Basis $\{ e_1, e_2 \}$ bezüglich welcher $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ bestimmt worden sind. Dann:

$(f \cdot g)(e_1) = f(g(e_1)) = f(b_{11} e_1 + b_{21} e_2)$
$= b_{11} f(e_1) + b_{21} f(e_2)$
$= (b_{11} a_{11} + b_{21} a_{12}) e_1 + (b_{11} a_{21} + b_{21} a_{22}) e_2$

analog finden wir

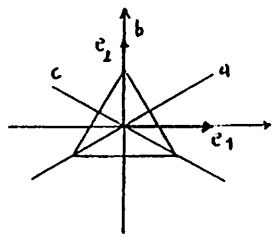
$(f \cdot g)(e_2) = (b_{12} a_{11} + b_{22} a_{12}) e_1 + (b_{12} a_{21} + b_{22} a_{22}) e_2$

d.h. $C = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix} = AB$

$d = 3$: analog

4. $\mathbb{R}^2$ mit Basis $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$

i. D_3 besteht aus drei Drehungen und drei Spiegelungen, die wir uns folgendermassen vorstellen können:



Es genügt, wenn wir das Bild von e_1 und e_2 betrachten, unter Drehung um $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ und unter Spiegelung an a, b, c. Dies ergibt folgende Matrizen:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{120} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{240}$$

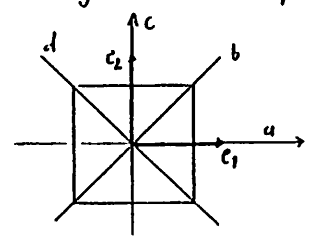
$$x_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} a \qquad x_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \qquad x_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} c$$

Dazu betrachten wir noch die Identität $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\circ$	e	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e	e	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	x_1	x_2	e	x_4	x_5	x_3
x_2	x_2	e	x_1	x_5	x_3	x_4
x_3	x_3	x_5	x_4	e	x_2	x_1
x_4	x_4	x_3	x_5	x_1	e	x_2
x_5	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	e

ii. D_4 besteht aus vier Drehungen und vier Spiegelungen.

Analog wie für D_3 betrachten wir die Drehungen um $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ und die Spiegelungen an a, b, c, d.



Wir bekommen die Matrizen:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gruppentafel:

$\circ$	e	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
e	e	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	x_1	x_2	x_3	e	x_5	x_6	x_7	x_4
x_2	x_2	x_3	e	x_1	x_6	x_7	x_4	x_5
x_3	x_3	e	x_1	x_2	x_7	x_4	x_5	x_6
x_4	x_4	x_7	x_6	x_5	e	x_3	x_2	x_1
x_5	x_5	x_4	x_7	x_6	x_1	e	x_3	x_2
x_6	x_6	x_5	x_4	x_7	x_2	x_1	e	x_3
x_7	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	e

5. Wir definieren: $SU(2) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T = A^{-1},\ \det A = 1 \right\}$

Wir zeigen $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1 \right\}$

in dem wir beide Inklusionen beweisen:

$\subseteq$: sei $A \in SU(2)$, dann ist $\det A = 1$ und $\bar{A}^T = A^{-1}$

d.h. mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bekommen wir

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

d.h. $\begin{cases} \bar{a}_{11} = a_{22} & (\text{und } \bar{a}_{22} = a_{11}) \\ \bar{a}_{21} = -a_{12} & (\text{und } \bar{a}_{12} = -a_{21}) \end{cases}$

oder $a_{11} = \alpha$ $\quad a_{22} = \bar{\alpha}$ $\quad$ d.h. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$

$a_{12} = \beta$ $\quad a_{21} = -\bar{\beta}$

$\supseteq$: sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1$

Dann ist $\det A = 1$ und $\bar{A}^T \cdot A = A \cdot \bar{A}^T = I$

d.h. $A \in SU(2)$.

6. Sei $d = 2, 3$

Sei $A \in M_d(\mathbb{R})$ mit $A \neq 0$ und $\det A = 0$

Wir wollen zeigen, dass es dann ein $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt, mit $Ax = 0$

<u>1. Methode</u> Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass A, als lin. Abb. aufgefasst, nicht injektiv ist.

<u>2. Methode</u> Explizite Bestimmung eines solchen x:

$d = 2$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow$ ex. $a_{ij} \neq 0$

1. Fall : $i = 2$ dann $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Fall : $i = 1$ dann $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = 3$: 1. Fall : es ex. eine 2×2 – Untermatrix $\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{pmatrix}$ mit Determinante $\neq 0$.

OBdA $j < l$, $i < k$. Sei $m \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, k\}$

Dann nehme*

$$x = \left((-1)^{m+1} \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix},\ (-1)^{m+2} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k3} \end{vmatrix},\ (-1)^{m} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{k1} & a_{k2} \end{vmatrix} \right)$$

2. Fall : 1. Fall ist nicht erfüllt. Es ex. $a_{ij} \neq 0$.

Betrachte $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = 0$ **

OBdA $a_{i1} \neq 0$ dann nehme $x = \left(-\frac{a_{i2}}{a_{i1}}, 1, 0 \right)$

* Ax ist das Tupel mit 0 an der i-ten und k-ten Stelle und $\det A$ an der m-ten Stelle.

** alle Zeilen sind ein Vielfaches der i-ten Zeile

Prof. E. Trubowitz
WS 98/99

Lineare Algebra I
Serie 4

1. Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$

Def. $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1)$

Zeige.

(a) $v \times w = -w \times v$ antisymmetrisch

(b) $(v_1 + v_2) \times w = v_1 \times w + v_2 \times w$

$(\lambda v) \times w = \lambda (v \times w) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$

(d) $\langle u, v \times w \rangle = - \langle v \times u, w \rangle$

(e) Zeige $L_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $v \in \mathbb{R}^3$

$w \longmapsto v \times w$

ist eine lineare Abbildung und bestimme die zugehörige Matrix bzgl. der Standardbasis $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$.

2. Definition. Sei G eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ heisst Untergruppe von G $(H < G)$, falls

(i) $\forall a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

(ii) $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

In der Vorlesung wurde eine Zerlegung für $SL(2,\mathbb{R})$ hergeleitet, d.h. es wurde gezeigt, falls $A \in SL(2,\mathbb{R})$, so ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit eindeutigen $0 \leq \theta < 2\pi$, $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Setze $K = SO(2)$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} ; 0 < \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Zeige</u>: K, A, N sind Untergruppen von $SL(2,\mathbb{R})$

Somit können wir schreiben $SL(2,\mathbb{R}) = KAN$.

3. Sei $A \in SL(2,\mathbb{C}) = \{ A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$

<u>Definition</u> $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$T_A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} , \qquad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$, heisst <u>Möbiustransformation</u> oder <u>gebrochen lineare Transformation</u>.

(a) <u>Zeige</u>: $T_A \circ T_B = T_{AB}$ $\qquad A, B \in SL(2,\mathbb{C})$

$$(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$$
$$T_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$$

Somit bilden die Möbiustransformationen eine Gruppe.

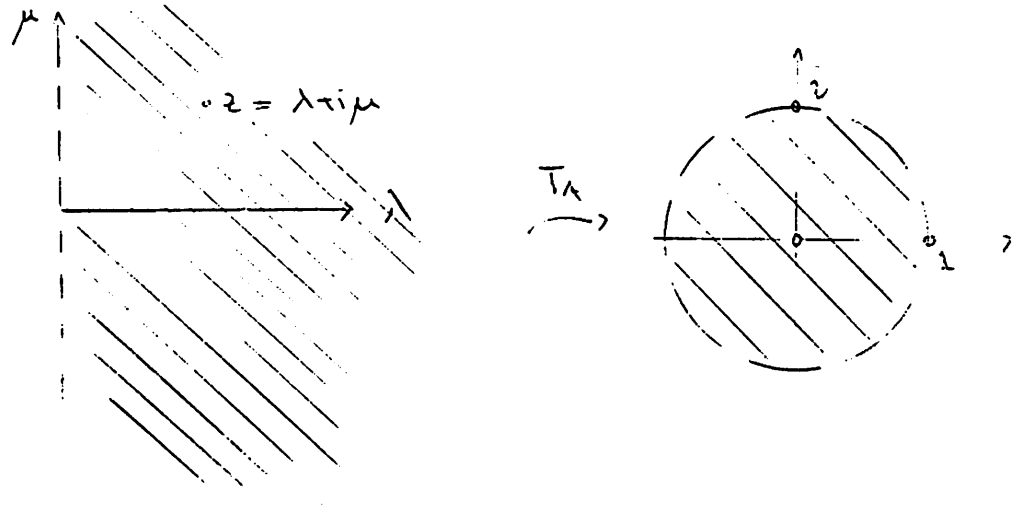
<u>Zeige</u>: $T_A = T_B$ $\qquad A, B \in SL(2,\mathbb{C})$

genau dann wenn $A = \pm B$.

(b) Betrachte die Transformation T_A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Zeige: T_A liefert eine Bijektion zwischen der offenen Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} = \{z = \lambda + i\mu \mid \lambda > 0\}$ und der offenen Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.



(c) Betrachte die Zerlegung

$$SL(2,\mathbb{R}) = \underset{\substack{\| \\ SO(2)}}{K} \cdot A \cdot N$$

(i) $SO(2)$ hat die geometrische Struktur von S^1

(ii) Schliesse aus (c) auf die geometrische Struktur von $A\,N$

Zeige, dass aus (i) und (ii) folgt, dass es eine bijektive Abb

$$\varphi : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ \{|z|=1\}}}{S^1} \times \underbrace{\{|z|<1\}}_{\text{offene Kreisscheibe}} = S^1 \times D$$

gibt. $S^1 \times D$ heisst offener Volltorus.

(11) <u>Definition</u>. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig $/\mathbb{R}$. Die Teilmenge

$$\Gamma = \{ m\gamma_1 + n\gamma_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

heisst Gitter mit Basis γ_1, γ_2.

(a) Zeige: Γ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$

(b) Jedes $x \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als $x = \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sei nun $x \in \Gamma$. Zeige, dass $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

(c) <u>Definition</u> Zwei beliebige Gitter Γ und Γ' heissen isomorph, falls es ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $\Gamma' = \alpha\Gamma$ (in Zeichen $\Gamma \cong \Gamma'$).

Zeige. Seien Γ mit Basis γ_1, γ_2 und Γ' mit Basis γ_1', γ_2' unsere Gitter. Dann gilt:

$$\Gamma \cong \Gamma' \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\} \\ \text{so dass} \quad \dfrac{\gamma_1'}{\gamma_2'} = \dfrac{a \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + b}{c \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + d} \end{array} \right.$$

Somit ist also jedes Gitter $(\Gamma, (\gamma_1, \gamma_2))$ isomorph zu einem Gitter $(\Gamma', (1, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}))$, wobei wir die Basis γ_1, γ_2 so wählen, dass $\operatorname{Im} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > 0$ ist (orientierte Basis). So ein Gitter heisst Standardgitter.

<u>Zeige</u>:

Seien Γ, Γ' Standardgitter.

$$\left. \begin{array}{l} (\Gamma, (1, \tau)) \cong (\Gamma', (1, \tau')) \\ \operatorname{Im} \tau > 0 \qquad \operatorname{Im} \tau' > 0 \end{array} \right\} \iff \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

1. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Wir definieren $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1)$

a. $v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1)$
$= -(w_2v_3 - w_3v_2,\ w_3v_1 - w_1v_3,\ w_1v_2 - w_2v_1)$
$= -\ w \times v$

b. $(u+v) \times w = ((u_2+v_2)w_3 - (u_3+v_3)w_2, \dots, \dots)$
$= (u_2w_3 - u_3w_2, \dots, \dots) + (v_2w_3 - v_3w_2, \dots, \dots)$
$= u \times w + v \times w$

$(\lambda v) \times w = (\lambda v_2 w_3 - \lambda v_3 w_2, \dots, \dots) = \lambda(v_2w_3 - v_3w_2, \dots, \dots)$
$= \lambda\ (v \times w)$

c. $\langle u, v \times w\rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

Die zwei Ausdrücke sind gleich! Daraus folgt d.
$(\langle u, v\times w\rangle = \langle w, u \times v\rangle = -\langle v \times u, w\rangle)$

e. $L_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad w \longmapsto v \times w$
Sei $v = (v_1, v_2, v_3)$. Analog wie in b. zeigt man
dass $v \times (w + u) = v \times w + v \times u$ und $v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w)$
d.h. L_v ist linear.
Um die zugehörige Matrix bezüglich der Standardbasis zu bestimmen, betrachten wir die Bilder der Basisvektoren:

$L_v(e_1) = v \times e_1 = (0, v_3, -v_2) = v_3e_2 - v_2e_3$
$L_v(e_2) = v \times e_2 = (-v_3, 0, v_1) = -v_3e_1 + v_1e_3$
$L_v(e_3) = v \times e_3 = (v_2, -v_1, 0) = v_2e_1 - v_1e_2$

Damit ist die gesuchte Matrix:
$$\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

2. Beh. 1: $SO(2)$ ist Untergruppe von $SL(2,\mathbb{R})$
Bew. • $SO(2) \subseteq SL(2,\mathbb{R})$ nach Definition
Seien $A, B \in SO(2)$ dann gilt $A^{-1} = A^T$, $\det(A) = 1$
und $B^{-1} = B^T$, $\det(B) = 1$; damit haben wir:

• $\left.\begin{array}{l} (A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T \\ \det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = 1 \end{array}\right\}$ d.h. $A\cdot B \in SO(2)$

• $\left.\begin{array}{l} (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} \\ \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 1 \end{array}\right\}$ d.h. $A^{-1} \in SO(2)$

Beh. 2: A ist Untergruppe von $SL(2,\mathbb{R})$
Bew. • $A \subseteq SL(2,\mathbb{R})$ nach Definition
Seien $A_1, A_2 \in A$ dann $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1}\end{pmatrix}$
mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda$, $0 < \mu$.
Dann: $A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & (\lambda\mu)^{-1}\end{pmatrix}$; $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ mit $0<\lambda\mu \in \mathbb{R}$,
$0 < \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$; d.h. $A_1 \cdot A_2 \in A$ und $A_1^{-1} \in A$.

Beh. 3: N ist Untergruppe von $SL(2,\mathbb{R})$

Bew. • $N \subseteq SL(2,\mathbb{R})$ nach Definition

Seien $A, B \in N$ dann $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es ist:

• $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$

• $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$

---

3. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$

Wir definieren $T_A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ $\quad z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

a. Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ aus $SL(2,\mathbb{C})$

Dann:

• $$(T_A \circ T_B)(z) = T_A(T_B(z)) = \frac{a_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + c_1 b_2 + d_1 d_2} = T_{A \cdot B}(z)$$

d.h. $T_A \circ T_B = T_{A \cdot B}$

• Wir wollen $(T_A)^{-1}$ bestimmen: $T_A(z) = w$ genau dann wenn $z = \dfrac{d_1 w - b_1}{-c_1 w + a_1}$ d.h. $(T_A)^{-1}(z) = \dfrac{d_1 z - b_1}{-c_1 z + a_1}$.

Andererseits ist $T_{A^{-1}}(z) = \dfrac{d_1 z - b_1}{-c_1 z + a_1}$ d.h. $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$

• $T_I(z) = \dfrac{z}{1} = z$. also $T_I = Id$

• Beh. $T_A = Id$ genau dann wenn $A = \pm I$

Bew. 1. Falls $A = \pm I$ ist, dann ist es klar, dass $T_A(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. $T_A = Id$

2. Umgekehrt sei $T_A(z) = z$ alle $z \in \mathbb{C}$ dann:

$\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = z$ d.h. $a_1 z + b_1 = c_1 z^2 + d_1 z$

d.h. $c_1 z^2 + (d_1 - a_1) z - b_1 = 0$

Da dies für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten muss, bekommen wir $c_1 = 0$, $d_1 = a_1$, $b_1 = 0$. Also $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Da $A \in SL(2,\mathbb{C})$ soll gelten $a^2 = 1$ d.h. $a = \pm 1$

• Beh. $T_A = T_B$ genau dann wenn $A = \pm B$

Bew. Wir benützen, was wir oben gezeigt haben:

$T_A = T_B \iff T_A \circ (T_B)^{-1} = Id \iff T_{A \cdot B^{-1}} = Id \iff$

$\iff A \cdot B^{-1} = \pm I \iff A = \pm B$

b. Wir betrachten jetzt $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Wir wissen bereits, dass $T_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Bijektion ist und wollen jetzt zeigen: $T_A : H \longrightarrow D$ ist ebenfalls eine Bijektion. Es genügt zu zeigen:

• $T_A(H) \subset D$: sei $z \in H$ dann $z = \lambda + i\mu$, $\lambda > 0$

$$|T_A(z)|^2 = \left| \frac{z-1}{z+1} \right|^2 = \frac{(\lambda-1)^2 + \mu^2}{(\lambda+1)^2 + \mu^2}$$

Da $\lambda > 0$, ist $(\lambda-1)^2 < (\lambda+1)^2$; also $|T_A(z)|^2 < 1$ d.h. $T_A(z) \in D$

- $T_{A^{-1}}(\mathcal{D}) \subset \mathbb{H}$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Sei $z = x + iy \in \mathcal{D}$

dann ist $x^2 + y^2 < 1$ und wir bekommen:

$$T_{A^{-1}}(z) = \frac{z+1}{-z+1} = \frac{(x+1)+iy}{(-x+1)-iy} = \frac{(x+1)(-x+1) - y^2 + 2iy}{(-x+1)^2 + y^2}$$

Wir müssen verifizieren, dass $T_{A^{-1}}(z) \in \mathbb{H}$ also, dass

$(x+1)(-x+1) - y^2 > 0$ d.h. $+x^2 + y^2 < 1$

Dies ist nach Voraussetzung erfüllt.

c. $SL(2,\mathbb{R}) = SO(2) \cdot A \cdot N$

i. Bijektion zwischen $SO(2)$ und S^1 : in der Vorlesung wurde gezeigt, dass man zu jeder Matrix $A \in SO(2)$ eindeutig ein $\vartheta \in [0, 2\pi[$ zuordnen kann, so dass $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$. Es ist also naheliegend die folgende Bijektion zu betrachten:

$$\alpha : \quad SO(2) \longrightarrow S^1$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \longmapsto e^{i\vartheta}$$

ii. Bch. Es existiert eine Bijektion $\beta_1 : \mathbb{H} \longrightarrow A \cdot N$

Bew. Betrachte $z = \lambda + i\mu \in \mathbb{H}$ und setze

$$\beta_1(z) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \beta_1(z) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu\lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A N$$

und die Abbildung ist offensichtlich bijektiv.

Wir nennen β die Inverse von β_1 ; $\beta : A \cdot N \longrightarrow \mathbb{H}$

Wir bekommen aus i. und ii. die Bijektion

$$\varphi : \quad SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow S^1 \times \mathcal{D}$$
$$R = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \longmapsto \left(\alpha(A_1), T_A(\beta(A_2 \cdot A_3))\right)$$

wobei T_A, die in b. betrachtete Abbildung ist und $R = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ die eindeutige Zerlegung von R bezeichnet ($A_1 \in SO(2)$, $A_2 \cdot A_3 \in A \cdot N$)

---

4. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$, linear unabhängig über $\mathbb{R}$.
$\Gamma = \{ m\gamma_1 + n\gamma_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$

a. Bch. Γ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$

Bew. - $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$

Seien $z_1 = m_1\gamma_1 + n_1\gamma_2$, $z_2 = m_2\gamma_1 + n_2\gamma_2$ aus Γ $(m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z})$. Dann ist:

- $z_1 + z_2 = (m_1 + m_2)\gamma_1 + (n_1 + n_2)\gamma_2 \in \Gamma$
- $-z_1 = (-m_1)\gamma_1 + (-n_1)\gamma_2 \in \Gamma$

b. Bch. Jedes $x \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als $x = \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Falls $x \in \Gamma$ dann $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

Bew. Folgt sofort aus der Tatsache, dass die Dimension von $\mathbb{C}$, als reeller Vektorraum aufgefasst, 2 ist.

Oder: man kann λ, μ explizit berechnen. Falls $x \in \Gamma$ dann $x = m\gamma_1 + n\gamma_2$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Aus der Eindeutigkeit von λ und μ folgt $\lambda = m$, $\mu = n$.

Explizite Berechnung: schreibe $x = x_1 + ix_2$

$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{12}$; $\gamma_2 = \gamma_{21} + i\gamma_{22}$. Dann muss gelten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \gamma_{21} \\ x_2 & \gamma_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}} ; \mu = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & x_1 \\ \gamma_{12} & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}}$$

(Bem. $\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ wegen Voraussetzung; λ, μ eindeutig!)

c. Wir sagen: $\Gamma \cong \Gamma'$ falls es existiert $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\Gamma' = \alpha\Gamma$

Beh*. $\Gamma \cong \Gamma' \iff$ es ex. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\det(A) = \pm 1$ und $\dfrac{\gamma_1'}{\gamma_2'} = \dfrac{a\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + b}{c\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + d}$

Bew. 1. Sei Γ mit Basis γ_1, γ_2 und Γ' mit Basis γ_1', γ_2'. Dann folgt aus $\Gamma' = \alpha\Gamma$ für $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$\gamma_1' = \alpha(a\gamma_1 + b\gamma_2)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$

$\gamma_2' = \alpha(c\gamma_1 + d\gamma_2)$ mit $c, d \in \mathbb{Z}$

und somit $\dfrac{\gamma_1'}{\gamma_2'} = \dfrac{a\gamma_1 + b\gamma_2}{c\gamma_1 + d\gamma_2} = \dfrac{a\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + b}{c\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + d}$

Wir müssen noch zeigen: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$:

$\alpha\gamma_1 \in \Gamma' \implies \alpha\gamma_1 = m\gamma_1' + n\gamma_2'$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

$\alpha\gamma_2 \in \Gamma' \implies \alpha\gamma_2 = p\gamma_1' + q\gamma_2'$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$

also $\gamma_1' = a(m\gamma_1' + n\gamma_2') + b(p\gamma_1' + q\gamma_2')$ und

$$\gamma_2' = c(m\gamma_1' + n\gamma_2') + d(p\gamma_1' + q\gamma_2')$$

d.h. $\gamma_1' = (am + bp)\gamma_1' + (an + bq)\gamma_2'$

und $\gamma_2' = (cm + dp)\gamma_1' + (cn + dq)\gamma_2'$

oder $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Da alle Koeffizienten ganze Zahlen sind, haben wir $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$ und somit auch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$

2. Wenn es eine solche Matrix A gibt, dann haben wir $\gamma_1' = \dfrac{a\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + b}{c\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + d}\,\gamma_2'$ und somit

$$m'\gamma_1' + n'\gamma_2' = \frac{\gamma_2'}{c\gamma_1 + d\gamma_2}\left(m'(a\gamma_1 + b\gamma_2) + n'(c\gamma_1 + d\gamma_2)\right)$$
$$= \frac{\gamma_2'}{c\gamma_1 + d\gamma_2}\left(\underbrace{(m'a + n'c)}_{\in \mathbb{Z}}\gamma_1 + \underbrace{(m'b + n'd)}_{\in \mathbb{Z}}\gamma_2\right)$$

Wir wählen $\alpha = \det(A)\dfrac{\gamma_2'}{c\gamma_1 + d\gamma_2}$, dann ist $m'\gamma_1' + n'\gamma_2' \in \alpha\Gamma$

also $\Gamma' \subseteq \alpha\Gamma$

Umgekehrt haben wir:

$$m\gamma_1 + n\gamma_2 = \det(A)\left[\det(A)m\gamma_1 + \det(A)n\gamma_2\right]$$
$$= \det(A)\left[\gamma_1(adm - bcm - acn + acn) + \gamma_2(adn - bcn + bdm - bdm)\right]$$
$$= \det(A)\left[(a\gamma_1 + b\gamma_2)(dm - cn) + (c\gamma_1 + d\gamma_2)(-bm + an)\right]$$

$$= \det(A)\left[\frac{\gamma_1'}{\gamma_1'}(c\gamma_1+d\gamma_2)(dm-cn) + \frac{\gamma_2'}{\gamma_2'}(c\gamma_1+d\gamma_2)(-bm+an)\right]$$

$$= \underbrace{\det(A)\,\frac{c\gamma_1+d\gamma_2}{\gamma_2'}}_{\alpha^{-1}}\Big[\underbrace{(dm-cn)}_{\in\mathbb{Z}}\gamma_1' + \underbrace{(-bm+an)}_{\in\mathbb{Z}}\gamma_2'\Big]$$

also $\quad m\gamma_1 + n\gamma_2 \in \alpha^{-1}\Gamma'$

also $\quad \Gamma \subseteq \alpha^{-1}\Gamma' \quad$ oder $\quad \alpha\Gamma \subseteq \Gamma'$

Bch. Seien Γ mit Basis $1, \tau$ und $\mathrm{Im}(\tau) > 0$

Γ' mit Basis $1, \tau'$ und $\mathrm{Im}(\tau') > 0$. Dann:

$$\Gamma \cong \Gamma' \iff \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{für eine Matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

Bew. 1. Eine Richtung der Aequivalenz folgt sofort aus der vorhergehenden Behauptung*: falls $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wie angegeben existiert dann ist

$$\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} = \frac{a\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + b}{c\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + d} \qquad \text{also} \quad \frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} = \frac{d\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + c}{b\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + a}$$

und $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ erfüllt die obigen Voraussetzungen also haben wir $\Gamma \cong \Gamma'$

2. Aus der obigen Behauptung* wissen wir, dass eine Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ existiert mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ und Determinante ± 1, so dass

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{\alpha\frac{1}{\tau} + \beta}{\gamma\frac{1}{\tau} + \delta} \qquad \text{oder} \qquad \tau' = \frac{\delta\tau + \gamma}{\beta\tau + \alpha}$$

Es genügt jetzt zu zeigen: $\det\begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = 1$;

damit haben wir die Behauptung gezeigt, denn es genügt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ zu wählen.

Wir setzen $\tau = x + iy$, dann haben wir:

$$\tau' = \frac{\delta x + \gamma + i\delta y}{\beta x + \alpha + i\beta y} = \frac{(\delta x+\gamma)(\beta x+\alpha) + iy\,(\delta(\beta x+\alpha) - \beta(\delta x+\gamma))}{(\beta x+\alpha)^2 + (\beta y)^2}$$

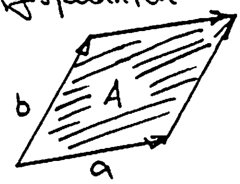
Da $\mathrm{Im}(\tau') > 0$, muss gelten: $y(\delta\alpha - \beta\gamma) > 0$

d.h. $\delta\alpha - \beta\gamma > 0$ und da $\delta\alpha - \beta\gamma = \pm 1$ bekommen wir das gewünschte Resultat.

(1) a) Seien $a = \binom{a_1}{a_2}$, $b = \binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2$

<u>Zeige</u>. Für die Fläche A des von a, b aufgespannten Parallelogramms gilt:

$$A = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = |\det(a,b)|$$



b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. <u>Zeige</u>. Für das Volumen V des von a, b, c aufgespannten Spates gilt:

$$V = |\det(a,b,c)|$$

(2) Sei $A \in M_k(\mathbb{R})$ $\quad k = 2, 3$.
$B \in GL(k, \mathbb{R})$

$p_A(x) = \det(A - x\mathbb{1})$ das charakteristische Polynom

<u>Zeige</u>: Das charakteristische Polynom $p_A(x)$ ist <u>invariant</u> unter Konjugation, d.h. $p_A(x) = p_{BAB^{-1}}(x)$.

(3) In Kapitel 4 des Skriptes haben wir die Zerlegung von $SL(2,\mathbb{R})$ in Konjugationsklassen bewiesen. Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ mit $c > 0$ und $\operatorname{tr} A = a + d = 2$.
Bestimme <u>explizit</u> ein $T \in SL(2,\mathbb{R})$, so dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

(4) a) Zeige die Reihe $\log(1+x) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ ist konvergent für alle $|x| < 1$.

b) Zeige: Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\mu = \max_{i,j} |a_{ij}| < 1/n$

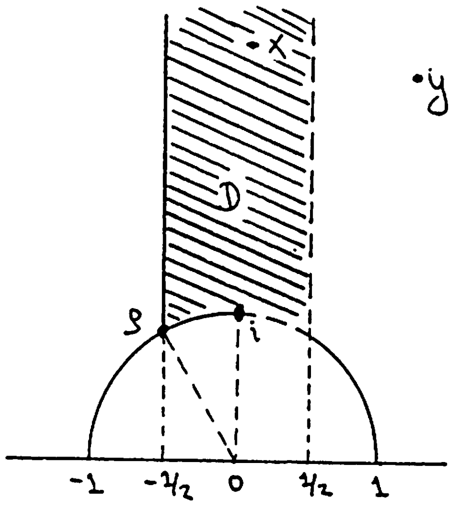
$$\log(1+A) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k}{k} \quad \text{ist konvergent.}$$

./.

Schliesse weiter, dass für unser A gilt:

$$e^{\log(1+A)} = \mathbb{1} + A .$$

*(5) Fundamentalbereich von $SL(2,\mathbb{Z})$.



$$\rho = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

Sei D der in obiger Figur schraffierte Bereich in $H^2 = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

Zeige. Zu jedem Pkt $y \in H^2 - D$ gibt es genau ein $x \in D$ so dass

$$y = T_A(x) \quad \text{für ein } A \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

Hinweis.

Für die Existenz benütze die Transformationen T_A, T_B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_A z = z + 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_B z = -\frac{1}{z}$$

* freiwillige, schwierigere Aufgabe

1.) **1. Bemerkung** Für die Fläche F des von zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms gilt:

$$F = \|a \times b\|$$

Beweis: $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

o.B.d.A.: $a \neq 0$, $b \neq 0$ (sonst trivial)

$$F^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \cdot \sin^2\alpha = \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle(1-\cos^2\alpha)$$

$$= \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\left(1 - \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle}\right) \quad (\text{Aufg. } 2, \text{ Serie } 3)$$

$$= \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2$$

$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

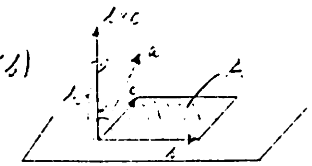
$$= \langle a\times b, a\times b\rangle$$

2. Bemerkung: Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\langle a, a\times b\rangle = \langle b, a\times b\rangle = 0$, d.h. $a \times b$ steht senkrecht auf a und b.

Beweis: Für $a \in \mathbb{R}^3$ gilt $a \times a = 0$.

$\Rightarrow \langle a, a\times b\rangle = -\langle a\times a, b\rangle = 0$ (Aufg. 1d, Serie 4)

$\langle b, a\times b\rangle = -\langle b, b\times a\rangle = 0$ (Aufg. 1a, Serie 4)

1b) 

$V = h \cdot A = h \cdot \|b \times c\|$ (1. Bemerkung)

Sei α der Zwischenwinkel von a und $b\times c$.

Da $b\times c$ senkrecht auf b und c steht, gilt für h: $h = \|a\|\,|\cos\alpha|$

$\Rightarrow V = \|a\|\,\|b\times c\|\,|\cos\alpha| \underset{\text{Aufg. 2d, Serie 3}}{=} |\langle a, b\times c\rangle| \underset{\text{Aufg. 1c, Serie 4}}{=} \underline{\underline{|\det(a,b,c)|}}$

1c) Bezeichne [illegible] $a = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ [illegible]

[illegible]

$\therefore A = A \cdot h = V \overset{(1b)}{=} |\det(a, b, c)| =$ [illegible]

---

2) $$p_{BAB^{-1}}(x) = \det(BAB^{-1} - x\cdot 1\!\!1)$$

$$= \det(B(A - x\cdot 1\!\!1)B^{-1})$$

$$= \det B \cdot \det(A - x\cdot 1\!\!1)\cdot \det B^{-1}$$

$$= \det(A - x\cdot 1\!\!1)$$

$$= p_A(x)$$

3) $p_A(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Eigenvektoren: $\begin{aligned} 0x + by &= x \\ cx + dy &= y \end{aligned} \iff \begin{aligned} (a-1)x + by &= 0 \\ cx + (d-1)y &= 0 \end{aligned}$

Wegen $c \neq 0$ hat dieses Gleichungssystem bis auf skalare Vielfache genau eine Lösung

$$v_1' := \begin{pmatrix} 1-d \\ c \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen v_1' zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$: wegen $c \neq 0$ genügt $v_2' := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mit den Bezeichnungen von Satz 4, Seite 30 des Skriptes gilt nun

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1-d & -1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $T = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 1-d \end{pmatrix}$, $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt $\det T = \frac{1}{c} \Rightarrow \tilde{T} := \sqrt{c}\cdot T = \frac{1}{\sqrt{c}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$

$\tilde{T} A \tilde{T}^{-1} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\tilde{T}$ ist gesuchte Matrix.

4) a) $\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}|x|^n = \frac{1-|x|^{N+1}}{1-|x|}-1, \forall N\in\mathbb{N}$

$|\log(1+x)| = \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| \leq \lim_{N\to\infty}\frac{1-|x|^{N+1}}{1-|x|}-1 = \frac{1}{1-|x|}-1$ für $|x|<1$

d.h. die Reihe $\log(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ ist konvergent.

b) Beh: Für das Element $(A^N)_{ij}$ der Matrix A^N in der i-ten Zeile und der j-ten Kolonne gilt:

$|(A^N)_{ij}| \leq (n\mu)^N$

Beweis. Induktion nach N: $N=1$ klar

$|(A^N)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(A^{N-1})_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|A_{ik}||(A^{N-1})_{kj}| \leq (n\mu)^N$

[illegible]

Damit sind die die n^2 Reihen von $\log(1+A)$ absolut konvergent nach a) sobald $\mu < \frac{1}{n}$.

c) Durch Einsetzen der Potenzreihe für $\log(1+A)$ in die Potenzreihe für e^B verifiziert man, dass $e^{\log(1+A)} = 1+A$.

5.) Bezeichnungen:

$G := SL(2,\mathbb{Z})$

$\overline{D} := \{z\in H^2 \mid |z|\geq 1,\ |Re(z)|\leq 1/2\}$

(i) Beh $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G,\ z\in\mathbb{C} \Rightarrow Im(T_A(z)) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$

(woraus $T_A(H^2)\subset H^2$ folgt)

Beweis: $z = z_1 + iz_2$

$T_A(z) = \frac{(az_1+b)+iaz_2}{(cz_1+d)+icz_2} = \frac{(az_1+b)(cz_1+d)+ac z_2^2 + i\overbrace{[az_2(cz_1+d)-cz_2(az_1+b)]}^{=z_2}}{(cz_1+d)^2+(cz_2)^2}$

(ii) $z\in H^2$. Dann gibt es ein $C\in G$ mit $Im\,T_C(z) = \max_{D\in G}\{Im\,T_D(z)\}$

Beweis: Innerhalb: Zu jedem $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$, gibt es ein

$D=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\in G$ mit $Im\,T_D(z) > Im\,T_C(z)$, d.h.

(nach (i)) mit: $|c'z+d'| < |cz+d|$.

Aber die Menge $\{(c',d')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid |c'z+d'| < |cz+d|\}$ ist endlich. Damit gilt (ii).

(iii) Zu $y\in H^2$ gibt es $F\in G$ mit $T_F(y)\in\overline{D}$

Beweis: Sei $C\in G$ so wie in (ii). Wähle $n\in\mathbb{Z}$ so dass $|Re\,T_{A^n}(T_C(y))| \leq 1/2$. Setze $y' := T_{A^n}T_C(y) = T_{A^nC}(y)$

$\left(A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ T_A(z) = z+1,\ T_{A^n}(z) = z+n,\ B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right.$
$\left.T_B(z) = -\frac{1}{z}\right)$

Wir zeigen: $y'\in\overline{D}$.

Annahme: $|y'|<1$. Dann gilt:

$Im\,T_{BA^nC}(y) = Im\,T_B(y') = Im\left(-\frac{1}{y'}\right) = \frac{Im(y')}{|y'|^2} > Im(y')$
$= Im\,T_{A^nC}(y)$
$= Im\,T_C(y)$

[illegible]

$|y'|\geq 1$, i.e. $y'\in\overline{D}$. Es folgt für $F = A^nC$.

(iv) Zu $y \in H^2$ gibt es $x \in \mathcal{D}$ mit $T_R(x) = y$ für ein $R \in G$.

Beweis: Setze $y' := T_{A^n C}(y)$ wie im Beweis von (iii).
Falls $y' \in \mathcal{D}$, setze $x := y'$, $R = (A^n C)^{-1}$.
Falls $y' \notin \mathcal{D}$, dann gilt (nach Def. von $\overline{\mathcal{D}}$):

a) $\mathrm{Re}\, y' = \frac{1}{2}$

oder b) $|y'| = 1$ und $0 < \mathrm{Re}\, y' < \frac{1}{2}$.

Im Fall a) setze: $x := T_{A^{-1}}(y')$, $R := (A^{n-1} C)^{-1}$

b) setze: $x := T_B(y')$, $R := (B A^n C)^{-1}$

(v) Beh.: Falls $x, x' \in \overline{\mathcal{D}}$, $x \neq x'$ und $\exists\, C \in G$ mit $x' = T_C(x)$ dann ist

entweder: $\mathrm{Re}(x) = \pm \frac{1}{2}$, $x = x' \pm 1$

oder: $|x| = 1$, $x' = -\frac{1}{x}$.

Beweis: Sei $x \in \overline{\mathcal{D}}$ und $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ so, dass $T_C(x) \in \overline{\mathcal{D}}$.
o.B.d.A.: $\mathrm{Im}\, T_C(x) \geq \mathrm{Im}(x)$, d.h. $|cx + d| \leq 1$ (nach (i))
(andernfalls ersetze x durch $T_C(x)$ und C durch C^{-1}).

$|cx+d|^2 = (cx+d)(c\bar{x}+d) = c^2 |x|^2 + cd(x+\bar{x}) + d^2 \geq c^2 - |cd| + d^2$

$d = 0 \Rightarrow |cx+d|^2 \geq c^2$

$d \neq 0 \Rightarrow |cx+d|^2 \geq c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq |cd|$

Damit ist für $|c| \geq 2$ $|cx+d| > 1$.

Also muss gelten, $c = 0$ oder $c = \pm 1$.

Der Fall $c = -1$ kann auf den Fall $c = 1$ zurückgeführt werden indem man C durch $-C$ ersetzt
$(T_C = T_{-C})$

$c = 0$: $\Rightarrow d = \pm 1$ und C ist die Translation um $\pm b$.
Da $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(x)$, $\mathrm{Re}\, T_C(x) \leq \frac{1}{2}$ muss $b = 0$
und $C = 1$ oder $b = \pm 1$ und damit
$\mathrm{Re}(x) = -\mathrm{Re}\, T_C(x) = \pm \frac{1}{2}$.

$c = 1$: $|cx + d| = |x + d| \leq 1$ impliziert einen der folgenden Fälle:

a) $d = 0$

b) $x = \rho = e^{i\pi/3}$, $d = 0, 1$

c) $x = e^{i 2\pi/3}$, $d = 0, -1$

a) $d = 0$: $|x| \leq 1 \Rightarrow |x| = 1$
$ad - bc = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow T_C(x) = \frac{ax - 1}{x} = a - \frac{1}{x}$.
$T_C(x) \in \overline{\mathcal{D}} \Rightarrow a = 0$ oder $x = \rho$ und $a = 0, -1$
oder $x = e^{i 2\pi/3}$ und $a = 0, 1$.

b) $x = \rho$, $d = 1 \Rightarrow a - b = 1$, $T_C(\rho) = \frac{a\rho + a - 1}{\rho + 1} = a - \frac{1}{\rho + 1} = a + \rho$
$\Rightarrow a = 0, 1$

c) $x = e^{i 2\pi/3}$, $d = -1$: analog b)

(vi) Seien nun $x, x' \in \mathcal{D}$ mit $y = T_C(x)$ und $y = T_{C'}(x')$ für $C, C' \in SL(2, \mathbb{Z})$. Dann gilt $T_{C^{-1}C'}(x') = x$.
Mit (v) schliesst man, dass $x = x'$.

(iv) und (vi) liefern den Beweis zu Aufgabe 5.

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

Lineare Algebra I
Serie 6

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$su(2) = \left\{ a_x = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(a) Zeige: $e^{a_x} = \cos|x| \cdot \mathbb{1} + \frac{\sin|x|}{|x|} \cdot a_x$

(b) Zeige: $\exp(a_x) = e^{a_x} \in SU(2)$

(c) Betrachte die Abb.

$$\begin{array}{rccc} \exp: & su(2) & \longrightarrow & SU(2) \\ & a_x & \longmapsto & e^{a_x} \end{array}$$

Zeige, dass exp surjektiv ist. Ist exp auch injektiv?

2. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$, $a_x, a_y \in su(2)$

Berechne $[a_x, a_y] = a_x a_y - a_y a_x$

3. Sei $A \in SU(2)$

Betrachte die Abbildung $R_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rccccccc} R_A: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & su(2) & \longrightarrow & su(2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & a_x & \longmapsto & A a_x A^{-1} & & \\ & & & & & \| & & \\ & & & & & a_y & \longmapsto & y \end{array}$$

Also $R_A(x) = y$

Berechne die Matrix von R_A bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3.

<u>Hinweis:</u>

Falls $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, dann gilt für $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$y_1 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)x_1 + (2\,\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\beta})x_2 + (2\,\mathrm{Re}\,\alpha\bar{\beta})x_3$$

$$y_2 + i \cdot y_3 = i(-2\alpha\beta x_1 + x_3(\alpha^2 - \beta^2)) + x_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$.

4. Sei $sl(2,\mathbb{C}) := \{a \in M_2(\mathbb{C}) \mid sp\, a = 0\}$

<u>Zeige</u>:

(i) $sl(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$

(ii) Sei $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbb{C})$

<u>Behauptung</u>: $e^a = \cosh\mu \cdot \mathbb{1} + \frac{\sinh\mu}{\mu} \cdot a$

wobei $\mu = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}$

<u>Hinweis</u>:

- $\cosh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(iii) Zeige: $e^a \in SL(2,\mathbb{C})$ für $a \in sl(2,\mathbb{C})$

$\exp: sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$

ist <u>nicht</u> surjektiv. Ist exp auch injektiv?

5. Sei $sl(2,\mathbb{R}) := \{a \in M_2(\mathbb{R}) \mid sp\, a = 0\}$

<u>Zeige</u>:

(i) $\exp(a) = e^a \in SL(2,\mathbb{R})$ für $a \in sl(2,\mathbb{R})$

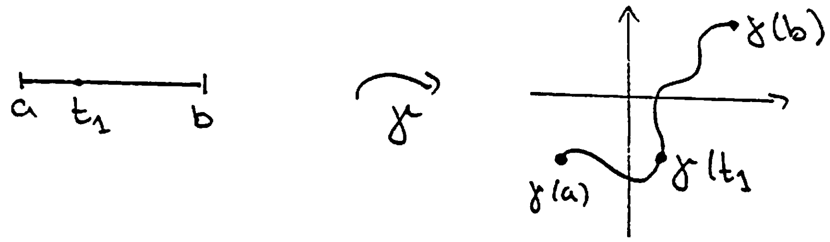
(ii) $$\begin{aligned} \exp: sl(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow SL(2,\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto e^a \end{aligned}$$

ist <u>nicht</u> surjektiv.

<u>Hinweis</u>.

Berechne die Werte der Spur (e^a) für $a \in sl(2,\mathbb{R})$ und konstruiere dann ein Gegenbeispiel.

6. Sei $\gamma(t) := (x_1(t), x_2(t))$ eine Parametrisierung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$, $a \leq t \leq b$.



Definition:

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}\, dt$$

die Bogenlänge von γ, wobei

$$\dot{x}_1(t) = \frac{d x_1(t)}{dt}, \quad \dot{x}_2(t) = \frac{d x_2(t)}{dt}.$$

<u>Zeige</u>: Für $A \in O(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$L(A\gamma + b) = L(\gamma)$$

Drehung Spiegelung von γ Translation

Lineare Algebra I Serie 6 WS 88/89

1a) $a_x^2 = -|x|^2 \cdot \mathbb{1}$. Daraus folgt mit Induktion:

$$a_x^{2\ell} = (-1)^\ell |x|^{2\ell} \cdot \mathbb{1} \qquad \ell \in \mathbb{N}_0$$

$$a_x^{2k+1} = (-1)^k |x|^{2k} \cdot a_x \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow e^{a_x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_x^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{|x|^{2\ell}}{(2\ell)!}\mathbb{1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{|x|^{2\ell}}{(2\ell+1)!} \cdot a_x$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{|x|^{2\ell}}{(2\ell)!}\right)}_{=\cos|x|} \cdot \mathbb{1} + \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{|x|^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\right)}_{=\sin|x|} \cdot \frac{a_x}{|x|}$$

1b) Wegen $a_x^* = -a_x$, $\operatorname{tr} a_x = 0$ und Satz 2, p 49 gilt:

$$\left.\begin{array}{l} (e^{a_x})^* = e^{a_x^*} = e^{-a_x} = (e^{a_x})^{-1} \\ \det(e^{a_x}) = e^{(\operatorname{sp} a_x)} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{a_x} \in SU(2)$$

1c) Sei $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$, i.e. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$. Es gilt: $-1 \le \alpha_1 \le 1$

$\alpha_1 = 1 \Rightarrow A = \mathbb{1}$. Für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $e^{a_x} = A$

$\alpha_1 = -1 \Rightarrow A = -\mathbb{1}$. Für $x = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $e^{a_x} = A$

$|\alpha_1| \neq 1 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \overset{>}{\neq} 0$ mit $\alpha_1 = \cos\lambda$ (insbes.: $\sin\lambda \neq 0$)

Setze: $x_1 := \frac{\alpha_2 \cdot \lambda}{\sin\lambda}$, $x_2 := \frac{\beta_1 \cdot \lambda}{\sin\lambda}$, $x_3 := \frac{\beta_2 \cdot \lambda}{\sin\lambda}$

$\Rightarrow$ Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|x|^2 = \frac{\lambda^2}{\sin^2\lambda}(\alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2) = \frac{\lambda^2}{\sin^2\lambda}(1 - \alpha_1^2) = \lambda^2$

und nach (a): $e^{a_x} = \cos\lambda \cdot \mathbb{1} + \frac{\sin\lambda}{\lambda} \cdot a_x = A$.

d.h. $\exp : su(2) \longrightarrow SU(2)$ ist surjektiv.

exp ist nicht injektiv, denn für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ist: $e^{a_x} = e^{a_y} = \mathbb{1}$.

2.) $$a_x a_y = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iy_1 & y_2 + iy_3 \\ -y_2 + iy_3 & -iy_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + i(x_2y_3 - x_3y_2) & x_3y_1 - x_1y_3 + i(x_1y_2 - x_2y_1) \\ x_1y_3 - x_3y_1 + i(x_1y_2 - x_2y_1) & -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + i(x_3y_2 - x_2y_3) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [a_x, a_y] = a_x a_y - a_y a_x = \begin{pmatrix} 2i(x_2y_3 - x_3y_2) & 2(x_3y_1 - x_1y_3) + 2i(x_1y_2 - x_2y_1) \\ -2(x_3y_1 - x_1y_3) + 2i(x_1y_2 - x_2y_1) & -2i(x_2y_3 - x_3y_2) \end{pmatrix}$$

$$= a_{2x \times y}$$

3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$

$$a_y = A a_x A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\alpha & -\beta \\ \bar\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha ix_1 + \beta(-x_2 + ix_3) & \alpha(x_2 + ix_3) - \beta ix_1 \\ -\bar\beta ix_1 + \bar\alpha(-x_2 + ix_3) & -\bar\beta(x_2 + ix_3) - \bar\alpha ix_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\alpha & -\beta \\ \bar\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\bar\alpha ix_1 + \bar\alpha\beta(-x_2 + ix_3) + \alpha\bar\beta(x_2 + ix_3) - \beta\bar\beta ix_1 & -\alpha\beta ix_1 - \beta^2(-x_2 + ix_3) + \alpha^2(x_2 + ix_3) - \alpha\beta ix_1 \\ -\bar\alpha\bar\beta ix_1 + \bar\alpha^2(-x_2 + ix_3) - \bar\beta^2(x_2 + ix_3) - \bar\alpha\bar\beta ix_1 & \beta\bar\beta ix_1 - \bar\alpha\beta(-x_2 + ix_3) - \alpha\bar\beta(x_2 + ix_3) - \alpha\bar\alpha ix_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i[x_1(|\alpha|^2 - |\beta|^2) + 2x_2 \operatorname{Im}(\alpha\bar\beta) + 2x_3 \operatorname{Re}(\alpha\bar\beta)] & x_2(\alpha^2 + \beta^2) + ix_3(\alpha^2 - \beta^2) - i \cdot 2\alpha\beta x_1 \\ -x_2(\bar\alpha^2 + \bar\beta^2) + ix_3(\bar\alpha^2 - \bar\beta^2) - i \cdot 2\bar\alpha\bar\beta x_1 & i[x_1(|\beta|^2 - |\alpha|^2) - 2x_2 \operatorname{Im}(\alpha\bar\beta) - 2x_3 \operatorname{Re}(\alpha\bar\beta)] \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $y_1 = x_1(|\alpha|^2 - |\beta|^2) + 2x_2 \operatorname{Im}(\alpha\bar\beta) + 2x_3 \operatorname{Re}(\alpha\bar\beta)$

$$y_2 + iy_3 = x_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2) - 2x_3(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + 2x_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$
$$+ i\left(2x_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + x_3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2) - 2x_1(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)\right)$$

Damit hat man für die Matrix C der Abbildung $R_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 & 2(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) & 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) \\ 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 & -2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) \\ 2(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1) & 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 \end{pmatrix}$$

i) $sl(2,\mathbb{C}) = \{a \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} a = 0\}$

ii) $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbb{C}) \iff \alpha + \delta = 0 \iff a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$

iii) $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbb{C}) \Rightarrow a^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta\gamma \end{pmatrix} = -\det(a)\,\mathbb{1}$.

Mit Induktion folgt: $a^{2k} = (-\det(a))^k \cdot \mathbb{1}$, $k \in \mathbb{N}_0$

$a^{2k+1} = (-\det(a))^k \cdot a$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{2k}}{(2k)!}\cdot \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{a}{\mu}$$

$$e^a = \cosh\mu \cdot \mathbb{1} + \frac{\sinh\mu}{\mu}\cdot a \quad \text{für } \mu := \pm\sqrt{-\det(a)} = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}$$

(iii) $\det(e^a) = e^{\operatorname{tr}(a)} = 1 \Rightarrow e^a \in SL(2,\mathbb{C})$.

$\exp: sl(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})$ ist <u>nicht surjektiv:</u>

Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. Angenommen es gäbe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbb{C})$ mit $\exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = A$, dann müsste nach (ii) gelten:

$$\cosh\mu = -1$$
$$2\alpha \cdot \frac{\sinh\mu}{\mu} = 0$$
$$\beta \cdot \frac{\sinh\mu}{\mu} = 1$$
$$\gamma \cdot \frac{\sinh\mu}{\mu} = 0 \qquad \text{wobei } \mu^2 = \alpha^2 + \beta\gamma.$$

Wegen $\cosh\mu = -1$ gilt: $\sinh\mu = 0$

$\beta \cdot \frac{\sinh\mu}{\mu} = 1 \Rightarrow \mu = 0$ <u>im Widerspruch</u> zu $\cosh\mu = -1$.

exp ist auch <u>nicht injektiv</u>, denn $\mathbb{1} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}$

---

5. Es ist $\det e^a = e^{\operatorname{tr} a} = 1 \Rightarrow e^a \in SL(2,\mathbb{R})$

Aus (ii) folgt $e^a = \cosh\mu\,\mathbb{1} + \frac{\sinh\mu}{\mu}\,a$

wobei $\mu = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}$.

Es gilt $\operatorname{tr}(e^a) = 2\cosh\mu$

entweder $\mu \in \mathbb{R}$: $\operatorname{tr}(e^a) \geq 2$ da $\cosh\mu \geq 1$

oder $\mu = it$, $t \in \mathbb{R}$: $|\operatorname{tr}(e^a)| \leq 2$ da $\cosh\mu = \cos t$

Also ist $A \notin \exp(sl(2,\mathbb{R}))$ für $A \in SL(2,\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr}(A) < -2$, d.h. exp ist nicht surjektiv.

6.) Parametrisierung von γ: $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$

Parametrisierung von $A\gamma + b$: $y(t) = A \cdot x(t) + b$

Es gilt $\dot y(t) = A \cdot \dot x(t)$

$$\Rightarrow |\dot y|^2 = \langle \dot y, \dot y\rangle = \langle A\dot x, A\dot x\rangle \underset{\text{unitär, Satz 3}}{=} \langle \dot x, \dot x\rangle = |\dot x|^2$$

$\Rightarrow$ <u>$L(A\gamma + b) = L(\gamma)$</u>

Lineare Algebra I
Serie 7

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

Betrachten wir den 3-dimensionalen Minkowskiraum.

Definitionen:

- $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_M)$ wobei $\langle x,y\rangle_M = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ heisst 3-dim. Minkowskiraum, $x,y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_0, x_1, x_2)$.
- $O(-1,2) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay\rangle_M = \langle x,y\rangle_M \ \forall x,y \in \mathbb{R}^3\}$
- $SO(-1,2) = \{A \in O(-1,2) \mid \det A = +1\}$.

1. Sei $A \in O(-1,2)$

Zeige: $\det A = \pm 1$

$A^T g = g A^{-1}$ wobei $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sei $A \in SO(-1,2)$.

Zeige: es gibt ein $x \in \mathbb{R}^3$, so dass $Ax = x$ ($\leadsto$ Achse!)

3.

Sei $B_x = \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ +x_1 & -x_0 & 0 \end{bmatrix}$ wobei $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$.

Zeige: (a) $B_x \cdot x = 0$

(b) $e^{B_x} \in SO(-1,2)$

(c) $B_x^{\,3} = (-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \cdot B_x$

(d) $e^{B_x} = \mathbb{1} + \dfrac{\sinh\sqrt{-x_0^2+x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{-x_0^2+x_1^2+x_2^2}} B_x + \dfrac{\cosh\sqrt{-x_0^2+x_1^2+x_2^2} - 1}{-x_0^2+x_1^2+x_2^2} B_x^2$.

(e) Zeige: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(-1,2)$.

4. Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x,x\rangle_M < 0$.

   (a) Zeige: Es gibt eine Ebene E_x, so dass
   für alle $y \in E_x$ gilt: $\langle x,y\rangle_M = 0$

   (b) Zeige: Für alle $y \in E_x$ gilt: $\langle y,y\rangle_M \geq 0$.

   (c) $e^{Bx}|_{E_x}$ ist eine euklidische Drehung.

5. Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x,x\rangle_M > 0$.

   (a) Es gibt eine Ebene E_x so dass $\langle x,y\rangle_M = 0 \quad \forall y \in E_x$.

   (b) $e^{Bx}|_{E_x} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix}$ bzgl. einer Basis.

6. (a) Versuche zu den Aufgaben 4 und 5 analoge Aussagen für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x,x\rangle_M = 0$ zu geben, $x \neq 0$.

   (b) Seien $x,y \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x,x\rangle_M = \langle y,y\rangle_M \quad x \neq 0, y \neq 0$.

   Zeige: Es gibt ein $A \in O(-1,2)$ so, dass

$$Ax = y.$$

<u>Hinweis zu 4)</u> Benütze, dass e^{Bx} den Vektor x invariant lässt. (Folgt aus 3(d)).

1. Es ist

$$\langle x,y\rangle_M = x^T g y \qquad , x,y \in \mathbb{R}^3,$$

und somit hat man

$$O(-1,2) = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay\rangle_M = \langle x,y\rangle_M \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^3 \}$$
$$= \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid x^T A^T g A y = x^T g y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^3 \}$$
$$= \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T g A = g \}.$$

Für $A \in M_3(\mathbb{R})$ ist also

$$A \in O(-1,2) \iff A^T g A = g ,$$

woraus

$$\det(A^T g A) = \det g = -1 \neq 0$$
$$\|$$
$$\det A^T \cdot \det g \cdot \det A = (\det A)^2 \det g$$
$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$$

und

$$A^T g = g A^{-1}$$

folgen.

Es ist klar, dass $O(-1,2)$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

2. Das charakteristische Polynom von A besitzt als reelles Polynom dritten Grades mindestens eine reelle Nullstelle, und allfällige nicht reelle Nullstellen treten in Paaren komplex konjugierter Zahlen auf. Man muss zeigen, dass 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist. Da das Produkt der drei Nullstellen gleich $\det A = 1$ ist, genügt es also zu sehen, dass man zwei der drei Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A so auswählen kann, dass ihr Produkt gleich 1 ist.

Sind λ, μ EW von A, genauer

$$Ax = \lambda x , \quad Ay = \mu y \qquad , x,y \in \mathbb{C}^3 - 0 ,$$

[beachte, dass x,y komplexe EV sind], so gilt

$$(*) \qquad \lambda\mu x^T g y = (\lambda x)^T g (\mu y) = (Ax)^T g (Ay) = x^T A^T g A y = x^T g y .$$

Insbesondere folgt aus (*): Ist $\lambda \neq \pm 1$ ein EW von A, so gilt für einen zugehörigen EV x die Identität $x^T g x = 0$.

<u>Lemma</u> Ist $x,y \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig mit $x^T g x = y^T g y = 0$, so gilt $x^T g y \neq 0$.

Beweis: Vektoren $x,y \in \mathbb{R}^3$ mit $x^T g x = y^T g y$ lassen sich schreiben als

$$x = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} , \quad y = \upsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \xi, \alpha, \upsilon, \beta \in \mathbb{R}.$$

Nun ist

$$x^T g y = \xi\upsilon(-1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \xi\upsilon(-1 + \cos(\alpha-\beta))$$

und daher

$$x^T g y = 0 \quad \to \quad \xi = 0 \text{ oder } \upsilon = 0 \text{ oder } \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$$
$$\to \quad x,y \text{ linear abhängig} . \blacksquare$$

<u>1. Fall</u> Alle EW sind reell.

- $\{EW\} \subseteq \{1,-1\}$: ✓
- $\{EW\} \not\subseteq \{1,-1\}$: Hier gibt es zwei verschiedene EW $\lambda, \mu \neq \pm 1$ mit zugehörigen reellen EV x,y. Das Lemma zeigt, dass dann $x^T g y \neq 0$ gilt, und mit (*) folgt $\lambda\mu = 1$.

<u>2. Fall</u> Es gibt EW $\lambda \neq \bar\lambda$. Sei z ein EV zum EW λ. Dann ist $\bar z$ ein EV zum EW $\bar\lambda$. Es ist $z, \bar z$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$. Wäre $\lambda\bar\lambda \neq 1$ so hätte man gemäss (*) $z^T g \bar z = 0$. Mit

$$x := z + \bar z , \quad y := i(z - \bar z)$$

erhält man so einen Widerspruch zum Lemma. Es gilt also $\lambda\bar\lambda = 1$.

3. (a) $B_x x = \begin{pmatrix} 0 & -x_2 & x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Man erhält $-B_x^T$ aus B_x, indem man die erste Zeile und die erste Spalte in B_x mit -1 multipliziert, also

$$-B_x^T = g B_x g$$

oder

$$B_x^T = -g B_x g = g(-B_x) g^{-1}.$$

Nun ist

$$(e^{B_x})^T g\, e^{B_x} = e^{B_x^T} g\, e^{B_x} = e^{g(-B_x)g^{-1}} g\, e^{B_x} = g\, e^{-B_x} g^{-1} g\, e^{B_x} = g,$$

also $e^{B_x} \in O(-1,2)$, und weiter gilt

$$\det e^{B_x} = e^{\operatorname{tr} B_x} = e^0 = 1,$$

d.h. $e^{B_x} \in SO(-1,2)$.

[Variante: Man kann auch zuerst (c), (d) lösen und dann mit dem Resultat aus (d) rechnen.]

(c) Wer den Satz von Cayley-Hamilton noch nicht kennt kann rechnen

$$B_x^3 = \begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & x_0 J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & x_0 J \end{pmatrix}^2 \qquad \left[\text{wobei } X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} X^T X & x_0 X^T J \\ x_0 J X & X X^T - x_0^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & x_0 J \end{pmatrix} \qquad \Big|\ J^2 = -1$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 X^T J X & X^T X X^T - x_0^2 X^T \\ X X^T X - x_0^2 X & x_0 J X X^T + x_0 X X^T J - x_0^3 J \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (X^T X - x_0^2) X^T \\ X(X^T X - x_0^2) & x_0 J (X X^T - J X X^T J - x_0^2 1) \end{pmatrix} \qquad \Big|\ X^T J X = 0$$

und mit

$$X^T X - x_0^2 = \langle x, x\rangle_M$$

$$X X^T - J X X^T J - x_0^2 1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}(-x_2\ \ x_1) - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(-x_1\ \ -x_2) - x_0^2 1$$

$$= \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_1^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & -x_2^2 \end{pmatrix} - x_0^2 1 = \langle x, x\rangle_M 1$$

folgt

$$B_x^3 = \langle x, x\rangle_M B_x.$$

(d) Aus (c) erhält man sofort

$$B_x^{2n+1} = \langle x, x\rangle_M^n B_x \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$B_x^{2n} = \langle x, x\rangle_M^{n-1} B_x^2 \qquad n \in \mathbb{Z}_{> 0}.$$

Dies wird in die Exponentialreihe eingesetzt:

$$e^{B_x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} B_x^n = 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} B_x^{2n+1} + \sum_{n>0} \frac{1}{(2n)!} B_x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} \langle x, x\rangle_M^n B_x + \sum_{n>0} \frac{1}{(2n)!} \langle x, x\rangle_M^{n-1} B_x^2$$

$$= 1 + \left(\frac{\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle_M}^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sqrt{\langle x,x\rangle_M}} \right) B_x + \left(\frac{\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle_M}^{2n}}{(2n)!}\right) - 1}{\langle x,x\rangle_M} \right) B_x^2$$

$$= 1 + \frac{\sinh \sqrt{\langle x,x\rangle_M}}{\sqrt{\langle x,x\rangle_M}} B_x + \frac{\cosh \sqrt{\langle x,x\rangle_M} - 1}{\langle x,x\rangle_M} B_x^2.$$

Mit (a) folgt noch

$$e^{B_x} x = x.$$

(e) Mit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}^T g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g$$

und

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix} = 1 \cdot \det R_\theta = 1.$$

4,5.,6.(a) Sei $x \in \mathbb{R}^3 - 0$. Setze

$$E_x := \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x,y\rangle_M = 0 \}.$$

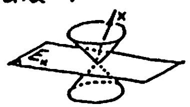
E_x ist eine Ebene, denn wegen $x \neq 0$ schneidet die Bedingung $\langle x,y\rangle_M = 0$ einen Unterraum der Kodimension 1 aus $\mathbb{R}^3$ aus. Wegen

$$y \in E_x \quad\Rightarrow\quad 0 = \langle x,y\rangle_M = \langle e^{B_x}x, e^{B_x}y\rangle_M = \langle x, e^{B_x}y\rangle_M \quad\Rightarrow\quad e^{B_x}y \in E_x$$

hat man

$$e^{B_x}\big|_{E_x} : E_x \longrightarrow E_x .$$

Man betrachtet nun drei Fälle.



1. Fall $\langle x,x\rangle_M < 0$

Hier ist

$$x = \xi \begin{pmatrix} \cosh\alpha \\ \sinh\alpha\cos\beta \\ \sinh\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^*$$

und

$$E_x = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} \sinh\alpha \\ \cosh\alpha\cos\beta \\ \cosh\alpha\sin\beta \end{pmatrix}, \check{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right\}.$$

Beachte: $\langle \hat{x},\hat{x}\rangle_M = 1$, $\langle \check{x},\check{x}\rangle_M = 1$, $\langle \hat{x},\check{x}\rangle_M = 0$;
$y \in E_x \Rightarrow y = \hat{\lambda}\hat{x} + \check{\lambda}\check{x}$ mit $\hat{\lambda},\check{\lambda}\in\mathbb{R}$;
$\langle y,y\rangle_M = \hat{\lambda}^2 + \check{\lambda}^2 \geq 0$, $= 0$ nur für $y = 0$.

Es bleibt $e^{B_x}\big|_{E_x}$ zu berechnen:

$$B_x = \xi \begin{pmatrix} 0 & -\sinh\alpha\sin\beta & \sinh\alpha\cos\beta \\ -\sinh\alpha\sin\beta & 0 & \cosh\alpha \\ \sinh\alpha\cos\beta & -\cosh\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

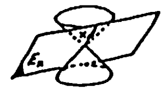
$B_x\hat{x} = -\xi\check{x}$, $B_x\check{x} = \xi\hat{x} \Rightarrow B_x^2\hat{x} = -\xi^2\hat{x}$, $B_x^2\check{x} = -\xi^2\check{x}$,
und aus 3(d) entnimmt man

$$e^{B_x}\hat{x} = \hat{x} - \sin\xi\,\check{x} + (\cos\xi - 1)\,\hat{x}$$
$$e^{B_x}\check{x} = \check{x} + \sin\xi\,\hat{x} + (\cos\xi - 1)\,\check{x}$$

d.h. die Matrix von $e^{B_x}\big|_{E_x}$ bzgl. $\hat{x},\check{x}$ lautet

$$\begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}.$$

Bzgl. der o.n. Basis $\hat{x},\check{x}$ wird $e^{B_x}\big|_{E_x}$ durch eine spezielle orthogonale Matrix beschrieben, d.h. $e^{B_x}\big|_{E_x}$ ist euklidische Drehung.



2. Fall $\langle x,x\rangle_M = 0$

Hier ist

$$x = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^*$$

und

$$E_x = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \check{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right\}.$$

Beachte: $\langle \hat{x},\hat{x}\rangle_M = 0$, $\langle \check{x},\check{x}\rangle_M = 1$, $\langle \hat{x},\check{x}\rangle_M = 0$;
$y \in E_x \Rightarrow y = \hat{\lambda}\hat{x} + \check{\lambda}\check{x}$ mit $\hat{\lambda},\check{\lambda}\in\mathbb{R}$;
$\langle y,y\rangle_M = \check{\lambda}^2 \geq 0$, $= 0$ nur für $y \in \mathbb{R}\hat{x}$.

Es bleibt $e^{B_x}\big|_{E_x}$ zu berechnen:

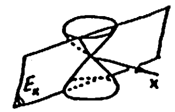
$$B_x = \xi \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta & \cos\beta \\ -\sin\beta & 0 & 1 \\ \cos\beta & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$B_x\hat{x} = 0$, $B_x\check{x} = \xi\hat{x} \Rightarrow B_x^2\hat{x} = 0$, $B_x^2\check{x} = 0$,
und aus 3(d) oder 3(c) entnimmt man

$$e^{B_x}\hat{x} = \hat{x}$$
$$e^{B_x}\check{x} = \check{x} + \xi\hat{x}$$

d.h. die Matrix von $e^{B_x}\big|_{E_x}$ bzgl. $\hat{x},\check{x}$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



3. Fall $\langle x,x\rangle_M > 0$

Hier ist

$$x = \xi \begin{pmatrix} \sinh\alpha \\ \cosh\alpha\cos\beta \\ \cosh\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^*$$

und

$$E_x = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha \\ \sinh\alpha\cos\beta \\ \sinh\alpha\sin\beta \end{pmatrix}, \check{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right\}.$$

Beachte: $\langle \hat{x},\hat{x}\rangle_M = -1$, $\langle \check{x},\check{x}\rangle_M = 1$, $\langle \hat{x},\check{x}\rangle_M = 0$;
$y \in E_x \Rightarrow y = \hat{\lambda}\hat{x} + \check{\lambda}\check{x}$ mit $\hat{\lambda},\check{\lambda}\in\mathbb{R}$;
$\langle y,y\rangle_M = -\hat{\lambda}^2 + \check{\lambda}^2$.

Es bleibt $e^{B_x}\big|_{E_x}$ zu berechnen:

$$B_x = \xi \begin{pmatrix} 0 & -\cosh\alpha\sin\beta & \cosh\alpha\cos\beta \\ -\cosh\alpha\sin\beta & 0 & \sinh\alpha \\ \cosh\alpha\cos\beta & -\sinh\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$B_x\hat{x} = \xi\check{x}$, $B_x\check{x} = \xi\hat{x} \Rightarrow B_x^2\hat{x} = \xi^2\hat{x}$, $B_x^2\check{x} = \xi^2\check{x}$,
und aus 3(d) entnimmt man

$$e^{B_x}\hat{x} = \hat{x} + \sinh\xi\,\check{x} + (\cosh\xi - 1)\,\hat{x}$$
$$e^{B_x}\check{x} = \check{x} + \sinh\xi\,\hat{x} + (\cosh\xi - 1)\,\check{x}$$

d.h. die Matrix von $e^{B_x}\big|_{E_x}$ bzgl. $\hat{x},\check{x}$ lautet

$$\begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi \\ \sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Es ist nicht nötig die Abbildungen explizit bezüglich einer Basis auszurechnen. Dass z.B. im 1. Fall $e^{B_x}/_{E_x}$ eine euklidische Drehung ist, lässt sich auch so einsehen:
Oben wurde gezeigt, dass $(E_x, \langle .,. \rangle_M|_{E_x \times E_x})$ ein euklidischer Raum ist. Wegen

$$\langle y_1, y_2 \rangle_M = \langle e^{B_x} y_1, e^{B_x} y_2 \rangle_M \quad , y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3, \text{ insbesondere } y_1, y_2 \in E_x,$$

ist daher $e^{B_x}|_{E_x}$ eine orthogonale Abbildung und mit

$$e^{B_x} \in SO(-1,2)$$
$$e^{B_x} x - x \notin E_x$$

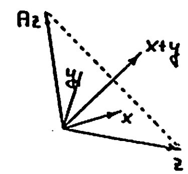
folgt $\det\left(e^{B_x}|_{E_x}\right) = 1$.

6.(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3 - 0$ mit $\langle x,x \rangle_M = \langle y,y \rangle_M$.

1. Fall $\langle x+y, x+y \rangle_M \neq 0$ oder $\langle x-y, x-y \rangle_M \neq 0$ oder $\langle x+gy, x+gy \rangle_M \neq 0$.

Wegen $-1, g \in O(-1,2)$ darf man annehmen $\langle x+y, x+y \rangle_M \neq 0$.
Es wird behauptet, dass man

$$Az = -z + 2 \frac{\langle z, x+y \rangle_M}{\langle x+y, x+y \rangle_M} (x+y) \quad , z \in \mathbb{R}^3,$$



wählen kann. Es ist

$$Ax = -x + 2 \frac{\langle x, x+y \rangle_M}{\langle x, x+y \rangle_M + \underbrace{\langle y, x+y \rangle_M}_{= \langle x, x+y \rangle_M}} (x+y) = -x + (x+y) = y.$$

Man muss noch $A \in O(-1,2)$ zeigen. Wegen $\langle z_1, z_2 \rangle_M = \frac{1}{4}\left(\langle z_1+z_2, z_1+z_2 \rangle_M - \langle z_1-z_2, z_1-z_2 \rangle_M\right)$ genügt es zu sehen, dass gilt $\langle Az, Az \rangle_M = \langle z, z \rangle$ für alle $z \in \mathbb{R}^3$.

$$\langle Az, Az \rangle_M = \left\langle -z + 2 \frac{\langle z, x+y \rangle_M}{\langle x+y, x+y \rangle_M}(x+y), -z + 2 \frac{\langle z, x+y \rangle_M}{\langle x+y, x+y \rangle_M}(x+y) \right\rangle_M$$
$$= \langle z,z \rangle_M - 4 \frac{\langle z, x+y \rangle_M}{\langle x+y, x+y \rangle_M} \langle z, x+y \rangle_M$$
$$+ 4 \frac{\langle z, x+y \rangle_M^2}{\langle x+y, x+y \rangle_M^2} \langle x+y, x+y \rangle_M = \langle z,z \rangle_M.$$

2. Fall $\langle x+y, x+y \rangle_M = \langle x-y, x-y \rangle_M = \langle x+gy, x+gy \rangle_M = 0$.

Dann ist $\langle x,y \rangle_M = 0$, $\langle x,x \rangle_M = \langle y,y \rangle_M = 0$. Das Lemma aus Aufgabe 2 zeigt, dass x,y linear abhängig ist:

$$y = \lambda x \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}^{\cdot}.$$

Schließlich hat man

$$0 = \langle x+gy, x+gy \rangle_M = 2 \langle x, gy \rangle_M = 2 \langle x, g\lambda x \rangle_M$$
$$= 2\lambda x^T ggx - 2\lambda x^T x$$

also

$$x = 0 \quad \#.$$

Der 2. Fall kann also nicht eintreten.

Lineare Algebra I
Serie 8

(1) Seien $A, B \in M_k(\mathbb{R})$.

(a) Zeige, falls $[A, B] = 0$, dann gilt $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

(b) Betrachte $e^A \cdot e^B = e^C$.
Berechne die ersten drei Summanden von C in Funktion von A und B für allgemeine $A, B \in M_k(\mathbb{R})$.

(2) Sei $\mathcal{F}$ die diskrete Fouriertransformation, $\mathcal{F} = \left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} jk}}{\sqrt{n}} \right)_{1 \leq j,k \leq n}$.

Zeige:
$$\mathcal{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & & & \vdots \\ 1 & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}.$$

(3) Diskrete Wärmeleitungsgleichung.

(a) Sei $q_0 \in \mathbb{R}^n$.

Löse mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation $\mathcal{F}$
$$\frac{d}{dt} q = \Delta q$$
Anfangsbedingung: $q(0) = q_0$
$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Zeige, dass $q(t) = e^{+t\Delta} \cdot q_0$ auch eine Lösung von (a) ist.

(4) Diskrete Schrödingergleichung.

(a) Sei $q_0 \in \mathbb{R}^n$
Löse wiederum mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation
$\forall$ die diskrete Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} q(t) = \Delta q$$

$$q(0) = q_0 .$$

(b) Zeige, dass auch $q(t) = e^{-it\Delta} q_0$ eine Lösung von (a) ist.

(c) Zeige $e^{-it\Delta} \in U(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Lineare Algebra I Lösungen zur Serie 8 WS 88/89

1.(a) Ist M eine von t unabhängige komplexe $k\times k$ - Matrix, so gilt

$$\frac{d}{dt}e^{tM} = \frac{d}{dt}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(tM)^n = \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{d}{dt}\frac{t^n}{n!}M^n}_{\text{konvergente Potenzreihe}}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}M^n = M\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(tM)^n = Me^{tM}.$$

$[A,B]=0 \Rightarrow [tA,B]=0 \Rightarrow [(tA)^n,B]=0 \Rightarrow [e^{tA},B]=0 \quad (t\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$.

$f(t) := e^{tA}e^{tB}$; $\frac{d}{dt}f(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)f(t)$

$\overset{f(0)=1}{\Longrightarrow} f(t) = e^{t(A+B)} \overset{t=1}{\Longrightarrow} e^Ae^B = e^{A+B}$

oder

$$e^Ae^B = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}A^n\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}B^m = \sum_{\ell\geq 0}\frac{1}{\ell!}\sum_{j=0}^{\ell}\frac{\ell!}{j!(\ell-j)!}A^jB^{\ell-j} = \sum_{\ell\geq 0}\frac{1}{\ell!}(A+B)^\ell = e^{A+B}.$$

(b) Wähle $\quad e^{tA}e^{tB} \quad = \quad e^{tC_1+t^2C_2+t^3C_3+\dots}$

$$\sum_{n,m\geq 0}\frac{t^{n+m}}{n!m!}A^nB^m \qquad \sum_{\ell\geq 0}\frac{1}{\ell!}(tC_1+t^2C_2+t^3C_3+\dots)^\ell.$$

(the two sums are written under the two sides, joined to them by $=$ signs)

Koeffizientenvergleich

$t \qquad \underbrace{A+B = C_1}$

$t^2 \qquad \frac{1}{2}A^2+AB+\frac{1}{2}B^2 = \frac{1}{2}C_1^2+C_2 = \frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BA+\frac{1}{2}B^2+C_2$

$\Longrightarrow \underbrace{C_2} = \frac{1}{2}(AB-BA) = \underbrace{\frac{1}{2}[A,B]}$

$t^3 \qquad \frac{1}{6}A^3+\frac{1}{2}A^2B+\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{6}B^3 = \frac{1}{6}C_1^3+\frac{1}{2}C_1C_2+\frac{1}{2}C_2C_1+C_3$

$= \frac{1}{6}A^3+\frac{1}{6}A^2B+\frac{1}{6}ABA+\frac{1}{6}BA^2$

$+\frac{1}{6}AB^2+\frac{1}{6}BAB+\frac{1}{6}B^2A+\frac{1}{6}B^3$

$+\frac{1}{4}A^2B-\cancel{\frac{1}{4}ABA}+\cancel{\frac{1}{4}BAB}-\frac{1}{4}B^2A$

$+\cancel{\frac{1}{4}ABA}-\frac{1}{4}BA^2+\frac{1}{4}AB^2-\cancel{\frac{1}{4}BAB}+C_3$

$\Longrightarrow \underbrace{C_3} = \frac{1}{12}\left((A^2B-2ABA+BA^2)+(B^2A-2BAB+AB^2)\right) = \underbrace{\frac{1}{12}\left([A,[A,B]]+[B,[B,A]]\right)}$

2. Es gilt $e^{\frac{2\pi i}{n}(j+\ell n)(k+mn)} = e^{\frac{2\pi i}{n}jk} \qquad (\ell,m\in\mathbb{Z}).$

Identifiziert man Indizes, welche zueinander kongruent modulo n sind, und wird noch zur Abkürzung $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gesetzt, so ist

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\zeta^{jk}}{\sqrt{n}}\right)_{j,k\in\mathbb{Z}/(n)}.$$

$$(\mathcal{F}^2)_{j,k} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}/(n)}\mathcal{F}_{j,\ell}\mathcal{F}_{\ell,k} = \frac{1}{n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}/(n)}\zeta^{j\ell}\zeta^{\ell k} = \frac{1}{n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}/(n)}(\zeta^{j+k})^\ell$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{, falls } j+k=0 \\ \dfrac{1-(\zeta^{j+k})^n}{1-\zeta^{j+k}} = 0 & \text{, falls } j+k\neq 0\end{array}\right\} = \delta_{j+k,0}.$$

$$\mathcal{F}^2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ 1 & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & & n-2 & n-1 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} - 1 \\ \\ \\ - n-2 \\ - n-1 \\ - 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{F}^4)_{j,k} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}/(n)}(\mathcal{F}^2)_{j,\ell}(\mathcal{F}^2)_{\ell,k} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}/(n)}\delta_{j+\ell,0}\,\delta_{\ell+k,0} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}/(n)}\delta_{j,k}\,\delta_{\ell+k,0} = \delta_{j,k}.$$

3.(a) $\frac{d}{dt}q = \Delta q \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{d}{dt}p = (\mathcal{F}^{-1}\Delta\mathcal{F})p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skript p. 92-93.}}}{=} \Omega p$, wo $p = \mathcal{F}^{-1}q$.

$\Longrightarrow \frac{d}{dt}p_k = -\omega_k^2p_k \quad , k\in\mathbb{Z}/(n)$

$\Longrightarrow p_k(t) = e^{-t\omega_k^2}p_k(0) \quad , k\in\mathbb{Z}/(n)$.

$q(t) = \mathcal{F}p(t)$ ist die gesuchte Lösung.

(b) $\frac{d}{dt}e^{t\Delta}q_0 = \Delta e^{t\Delta}q_0$.

4.(a) $q(t) = \mathcal{F}p(t)$ ist die gesuchte Lösung, wo $p_k(t) = e^{it\omega_k^2}p_k(0)$, $k\in\mathbb{Z}/(n)$.

(b) $i\frac{d}{dt}e^{-it\Delta}q_0 = i(-i\Delta)e^{-it\Delta}q_0 = \Delta e^{-it\Delta}q_0$.

(c) Wegen $\Delta^* = \Delta$, $t^* = t$ hat man

$(e^{-it\Delta})^*(e^{-it\Delta}) = e^{it\Delta}e^{-it\Delta} = 1 \quad \longrightarrow \quad e^{-it\Delta}\in U(n)$.

oder

$e^{-it\Delta} = e^{\mathcal{F}(it\Omega)\mathcal{F}^{-1}} = \mathcal{F}e^{-it\Omega}\mathcal{F}^{-1}$; $e^{-it\Omega}$ ist offensichtlich unitär. Die Behauptung folgt wegen $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

Lineare Algebra I
Serie 9

(1) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bezeichne die Kolonnen von A, dh.

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Wir schreiben für $\det(A) = \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Zeige:

(a) $\det(\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_k, \dots, \alpha_n) = \lambda \cdot \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

(b) $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_k' + \alpha_k'', \dots, \alpha_n)$
$= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_k', \dots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \dots, \alpha_k'', \dots, \alpha_n)$.

(c) Sei $\alpha_i = \alpha_j$ für $i \neq j$. Dann gilt
$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$

(d) $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ wobei $e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0 \dots 0)$.

(2) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

(a)
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$ Diagonalmatrix

(b)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ ⚠ Warnung: $A \neq \Delta$!

(d) Zeige: (Vandermondésche Determinante)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i<j} (c_j - c_i)$$

Hinweis: Benütze 1.

(e) Berechne die Determinante der $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ als Funktion von n; wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ n+1-j & i > j \end{cases} \qquad 1 \leq i,j \leq n.$$

(3) Zeige:

$$\det(A) = \det(A^T) \qquad , A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Lineare Algebra I — Lösungen zu Serie 9 — WS 88/89

Aufg. 1

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ und $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $1 \le j \le n$

Wir setzen $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det A := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

wo S_n die Gruppe der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\}$ bezeichnet und wir $(-1)^\sigma$ als Abkürzung für $\operatorname{sign}(\sigma)$ schreiben.

a) Beh.: $\det(\alpha_1, .., \lambda\alpha_k, \dots \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Bew.: Ist $b_{ij} = a_{ij}$ für $j \ne k$ und $b_{ik} = \lambda a_{ik}$, $1 \le i \le n$, so gilt

$$\det(\alpha_1 .., \lambda\alpha_k, .. \alpha_n) = \det B = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(k)k} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} \cdots \lambda a_{\sigma(k)k} \cdots a_{\sigma(n)n} = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \lambda \det(\alpha_1, \dots, \alpha_k, .. \alpha_n).$$

b) Beh.: $\det(\alpha_1, .., \alpha_k' + \alpha_k'', .. \alpha_n) = \det(\alpha_1, .., \alpha_k', .., \alpha_n) + \det(\alpha_1, .., \alpha_k'', .. \alpha_n)$

Bew.: $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_k' + \alpha_k'', .. \alpha_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} \cdots (a'_{\sigma(k)k} + a''_{\sigma(k)k}) \cdots a_{\sigma(n)n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} .. a'_{\sigma(k)k} .. a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} \cdots a''_{\sigma(k)k} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \det(\alpha_1, .., \alpha_k', \dots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, .., \alpha_k'', .., \alpha_n)$$

c) Beh.: Ist $\alpha_i = \alpha_j$ für $i < j$, so ist $\det(\alpha_1, .., \alpha_i, .., \alpha_j, .., \alpha_n) = 0$

Bew.: Sei $U = \{ g \in S_n / g(i) < g(j) \} \subseteq S_n$ und sei $\tau = (i\,j)$.
Ist $\sigma \in S_n$, so ist entweder $\sigma \in U$ (wenn $\sigma(i) < \sigma(j)$) oder $\sigma = g\tau$ für ein $g \in U$ (nämlich für $g = \sigma\tau^{-1} = \sigma\tau$, wenn $\sigma(i) > \sigma(j)$). Also

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = \sum_{g \in U} \left((-1)^g a_{g(1)1} \cdots a_{g(n)n} + (-1)^{g\tau} a_{g\tau(1)1} \cdots a_{g\tau(n)n} \right)$$

Aber $g\tau(k) = g(k)$ für alle $k \ne i, j$, $g\tau(i) = g(j)$ und $g\tau(j) = g(i)$.
Also $a_{g\tau(1)1} \cdots a_{g\tau(i)i} \cdots a_{g\tau(j)j} \cdots a_{g\tau(n)n} = a_{g(1)1} \cdots \underbrace{a_{g(j)i}}_{= a_{g(j)j}} \cdots \underbrace{a_{g(i)j}}_{= a_{g(i)i}} \cdots a_{g(n)n}$ nach Vor.

Wegen $(-1)^{g\tau} = -(-1)^g$ verschwinden also rechts alle Summanden.

d) Beh.: $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ wobei $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ jte Stelle.

Beweis: $e_{ij} = \delta_{ij}$ also verschwinden in

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \delta_{\sigma(1)1} \cdots \delta_{\sigma(n)n}$$

alle Summanden ausser dem zu σ mit $\sigma(i) = i\ \forall i$ d.h. $\sigma = 1$ und dieser hat $(-1)^\sigma = 1$.

Aufg. 2:

a) $\det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \overset{1a)}{=} a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{1d)}{=} a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

Im folgenden benützen wir :

- Die Determinante ändert sich nicht ~~bei elementaren~~ - Spalten- und ~~Zeilenoperationen~~ wenn man eine Spalte λa_i $(\lambda \in \mathbb{C})$ zu einer Spalte a_j, $j \neq i$ addiert. Analog für Zeilen (dies folgt aus 1c), 1b) und 3))
- Die Determinante lässt sich durch Entwicklung nach Spalten (siehe Stammbach p 133, 2.11 Formel ***) oder (wegen 3)) Zeilen berechnen.

b) Entwickeln wir nach der ersten Spalte, so erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \,,$$

wo wir zuletzt Induktion nach n benutzt haben.

c) Sei n die Grösse der gegebenen Matrix und D_n ihre Determinante. Wir subtrahieren von der 1. Spalte $1/n$ mal die Summe der übrigen Spalten und erhalten

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{n-1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte liefert $D_n = \frac{2n-n+1}{n} \cdot D_{n-1} = \frac{n+1}{n} D_{n-1}$ woraus wegen $D_2 = 3$ mit Induktion sofort $D_n = n+1$ folgt.

d)

Beh: $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i<j} (c_j - c_i)$

Bew.: Sei $P(x) = (x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdot \ldots \cdot (x-c_{n-1})$

$$= x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Wir addieren zur letzten Zeile a_0 mal die erste, a_1 mal die zweite, ... a_k mal die $(k+1)$te ... a_{n-2} mal die $(n-1)$te und erhalten für das $i$te Element der letzten Zeile :

$$c_i^{n-1} + a_{n-2}c_i^{n-2} + \ldots + a_1c_i + a_0 = P(c_i) = (c_i-c_1)(c_i-c_2)\ldots(c_i-c_{n-1}).$$

Also 0 ausser, wenn $i = n$ ist. Die umgeformte Matrix sieht also so aus

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & & c_{n-1} & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_1^{n-2} & c_2^{n-2} & \cdots & c_{n-1}^{n-2} & c_n^{n-2} \\ 0 & 0 & & 0 & P(c_n) \end{bmatrix}.$$

Mit Entwicklung nach der letzten Zeile und Induktion erhalten wir für ihre Determinante

$$P(c_n) \cdot \prod_{i<j\leq n-1} (c_j - c_i) = (c_n-c_1)\ldots(c_n-c_{n-1}) \cdot \prod_{i<j\leq n-1} (c_j-c_i) = \prod_{i<j} (c_j - c_i)$$

e)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Wir subtrahieren n mal die letzte Spalte von der ersten und entwickeln dann nach der ersten Spalte.

$$\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & n-1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Mit Induktion folgt

$$\det A = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \quad .$$

<u>Aufg. 3</u>

Beh.: $\det A^T = \det A$

Bew.: $\det A^T = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}$ (denn $a^T_{\sigma(i)i} = a_{i\sigma(i)}$)

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} .$$

Die Beh. folgt, wenn gezeigt ist, dass für $\tau = \sigma^{-1}$ gilt

$$(-1)^\tau a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} .$$

In der Tat ist $(-1)^\tau = \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)^{-1} = \operatorname{sign}\sigma = (-1)^\sigma$ und a_{ij} tritt links als Faktor auf $\Leftrightarrow$ $\tau(i) = j$ $\Leftrightarrow$ $i = \sigma(j)$ $\Leftrightarrow$ a_{ij} tritt rechts als Faktor auf.

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

Lineare Algebra
Serie 10

(1) Seien $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

die Pauli Matrizen von Serie 1.

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_1, σ_2 und σ_3.

(2) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$ und

$L(a_1, \dots, a_n)$ eine Funktion von $\mathbb{C}^{n^2}$ nach $\mathbb{C}$.

mit den Eigenschaften (a), (b), (c) und (d) aus Aufgabe 1 Serie 9.

Zeige: $L(a_1, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_n)$.

(3)

Sei

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}).$$

(a) <u>Beh.</u> $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_k$ für ein festes i.

$$\text{wobei} \quad D_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & & \cancel{a_{ik}} & & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Sind gestrichen}$$

Entwicklung nach Zeilen.

(b) Zeige, dass es auch eine Entwicklung nach Kolonnen gibt!

(4) Zeige: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Lineare Algebra I   Lösungen zu Serie 10   WS 88/89

Aufg. 1

a) Sei $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$p_{B_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

wo $p_{B_1}(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Matrix B_1 bezeichnet.
$p_{B_1}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ ergibt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$\underline{\lambda_1 = 1}$: Der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist gleich $\ker(B_1 - \lambda_1 \mathbb{1})$, d.h. dem Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

also $E_1 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$.

$\underline{\lambda_2 = -1}$: analog

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

b) Sei $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

$p_{B_2}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow$ Eigenwerte zu B_2: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1} = \left\{ \mu \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$

c) Sei $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $p_{B_3}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$.

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1} = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$.

Aufg. 2, 3, 4   siehe Skript!

Lineare Algebra
Serie 11

(1) Berechne das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

(a) $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) $$B = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

(2) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne analog wie in der Vorlesung für $\mathcal{F}(n)^2$ eine orthonormierte Familie von Eigenvektoren $\{f_1, \ldots, f_n\}$, dh $A \cdot f_j = \lambda f_j$, $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$.

(b) Sei $C = (f_1, \ldots, f_n)$

Berechne $C^{-1} A C$.

(3) Sei $A \in M_2(\mathbb{C})$, $p_A(x)$ das zugehörige charakteristische Polynom.

(a) Zeige $p_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton)

(b) Bestimme die Konjugationsklassen der $A \in M_2(\mathbb{C})$ mit $A^3 = \mathbb{1}$

(4) Berechne für folgendes $A \in M_n(\mathbb{C})$ die Determinante, in Abhängigkeit von n: $(n \geq 4)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \; -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(5) Sei $f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ eine lineare Abbildung. Weiter soll

$$f^m = 0 \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}$$

gelten.

Zeige: Alle Eigenwerte von f sind Null.

(6) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$

(ii) Die Spalten der Matrix A bilden eine orthonormierte Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt.

(iii) Die Zeilen der Matrix A bilden eine orthonormierte Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt.

(7) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^* = \bar{A}^T\}$.

(ii) Die Spalten von A bilden eine orthonormierte Basis von $\mathbb{C}^n$, bzgl. dem Standardskalarprodukt.

(iii) Die Zeilen von A bilden eine orthonormierte Basis von $\mathbb{C}^n$ bzgl. dem Standardskalarprodukt.

Aufg. 1:

Das charakteristische Polynom einer komplexen 2×2-Matrix A ist
$p_A(X) = \det(A - X I) = X^2 - X \cdot \operatorname{Spur} A + \det A$.

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(X) = X^2 - X\cdot 2\cos\vartheta + 1 = (X - e^{i\vartheta})(X - e^{-i\vartheta})$.

Eigenwerte: $e^{\pm i\vartheta}$.

b) $A = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(X) = X^2 - X\cdot 2\cosh\vartheta + 1 = (X - e^{\vartheta})(X - e^{-\vartheta})$.

Eigenwerte: $e^{\pm\vartheta}$.

Aufg. 2:

Sei $0 \neq n \in \mathbb{N}$ und seien $e_1, \dots, e_n$ die Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{C}^n$.
Für $1 \le i \le n$ sei $i^* = n+1-i$ $\;(\Rightarrow (i^*)^* = i\;!)$.
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die lineare Abbildung $g: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, die durch
$g(e_i) = e_{i^*}$ definiert wird (in der i-ten Spalte von A steht e_{i^*} !)

a) Gesucht sind n orthonormierte Eigenvektoren für g. Es ist

$g(e_i + e_{i^*}) = g(e_i) + g(e_{i^*}) = e_{i^*} + e_{i^{**}} = e_{i^*} + e_i = 1\cdot(e_i + e_{i^*})$,
$g(e_i - e_{i^*}) = g(e_i) - g(e_{i^*}) = e_{i^*} - e_{i^{**}} = e_{i^*} - e_i = -1\cdot(e_i - e_{i^*})$.

Fall 1: $n = 2\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Dann ist $i^* \neq i$ für alle i und wir setzen

$f_1 := \frac{1}{\sqrt2}(e_1 + e_{1^*}),\ f_2 := \frac{1}{\sqrt2}(e_2 + e_{2^*}),\ \dots,\ f_\ell = \frac{1}{\sqrt2}(e_\ell + e_{\ell^*})$

$f_{\ell+1} := \frac{1}{\sqrt2}(e_1 - e_{1^*}),\ f_{\ell+2} := \frac{1}{\sqrt2}(e_2 - e_{2^*}),\ \dots,\ f_n = \frac{1}{\sqrt2}(e_\ell - e_{\ell^*})$.

Nach der obigen Rechnung sind $f_1, \dots, f_\ell$ Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\ell = 1$ und $f_{\ell+1}, \dots, f_n$ Eigenvektoren zu $\lambda_{\ell+1} = \lambda_{\ell+2} = \dots = \lambda_n = -1$. Weiter ist z.B. für $1 \le i \le \ell$

$\langle f_i, f_i\rangle = \frac12\langle e_i + e_{i^*}, e_i + e_{i^*}\rangle = \frac12\big(\langle e_i, e_i\rangle + \underbrace{\langle e_i, e_{i^*}\rangle}_{=0 \text{ weil } i\neq i^*} + \langle e_{i^*}, e_{i^*}\rangle\big)$
$= \frac12(1 + 0 + 1) = 1$

Wenn $1 \le i \le \ell$ ist, ist $\langle f_i, f_j\rangle = 0$ für $j \neq i, \ell+i$, weil $e_r \perp e_s$ für $r \neq s$ und

$\langle f_i, f_{\ell+i}\rangle = \frac12\langle e_i + e_{i^*}, e_i - e_{i^*}\rangle = \frac12\big(\overbrace{\langle e_i, e_i\rangle}^{=1} - \overbrace{\langle e_{i^*}, e_{i^*}\rangle}^{=1}\big) = 0$.

Fall 2: $n = 2\ell + 1$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\ell+1)^* = \ell+1$ und $i^* \neq i$ für alle $1 \le i \le \ell$ und wir setzen

$f_1 = \frac{1}{\sqrt2}(e_1 + e_{1^*}),\ \dots,\ f_\ell = \frac{1}{\sqrt2}(e_\ell + e_{\ell^*})$
$f_{\ell+1} = e_{\ell+1}$
$f_{\ell+2} = \frac{1}{\sqrt2}(e_1 - e_{1^*}),\ \dots,\ f_n = \frac{1}{\sqrt2}(e_\ell - e_{\ell^*})$

Dann sind die $f_1, \dots, f_{\ell+1}$ Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \dots = \lambda_{\ell+1} = 1$, die $f_{\ell+2}, \dots, f_n$ Eigenvektoren zu $\lambda_{\ell+2} = \dots = \lambda_n = -1$ und ähnliche Rechnungen wie oben zeigen, dass $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ ist $\forall i,j$.

b) Sei C die Matrix mit Spalten $f_1, \dots, f_n$. Um $C^{-1}AC$ zu berechnen, braucht man nur die Werte der zugehörigen linearen Abbildung auf den Vektoren $e_1, \dots, e_n$ der Standardbasis zu bestimmen:

$$e_i \longmapsto Ce_i = f_i \longmapsto ACe_i = Af_i = \lambda_i f_i \longmapsto C^{-1}ACe_i = C^{-1}\lambda_i f_i = \lambda_i C^{-1} f_i = \lambda_i e_i ,$$

wobei wir für die letzte Gleichung $C^{-1}f_i = e_i \iff f_i = Ce_i$ verwendet haben. Also

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right)$$

Zeile l falls $n = 2l$
Zeile $l+1$ falls $n = 2l+1$

<u>Aufg. 3</u>:

a) Sei $A \in M_2(\mathbb{C})$

Beh.: $p_A(A) = 0$ (d.h. $A^2 - (\operatorname{Spur} A)\cdot A + \det A \cdot \mathbb{1} = 0$)

Es ist zu zeigen, dass $A \cdot (A - (\operatorname{Spur} A)\mathbb{1}) = -(\det A)\cdot \mathbb{1}$ ist.

Mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt das

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & cb-ad \end{pmatrix} \checkmark$$

b) Sei $\zeta = e^{2\pi i/3}$.

Beh.: Jedes $A \in M_2(\mathbb{C})$ mit $A^3 = \mathbb{1}$ ist zu genau einer der folgenden Matrizen konjugiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Bemerkung</u>: Diese Matrizen haben alle verschiedene Spuren und liegen daher in verschiedenen Konjugationsklassen. An Spur A lässt sich ablesen, zu welcher Matrix A konj. ist; z.B. kommen für reelles A nur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$$

in Frage, denn nur diese beiden haben eine reelle Spur.

Bew.: Wir wissen, dass A einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt. Es gibt also $0 \neq v \in \mathbb{C}^2$ mit $Av = \lambda v$. Dann ist $v = A^3 v = \lambda^3 v$ und weil $v \neq 0$ ist, folgt $\lambda^3 = 1$ d.h. $\lambda \in \{1, \zeta, \zeta^2\}$.

<u>Fall 1</u>: A besitzt einen weiteren Eigenwert $\mu \neq \lambda$.

Nach Satz 5, p. 31 im Skript ist der Eigenvektor w zu μ linear unabhängig von v, also die Matrix C mit Spalten v und w invertierbar. Es ist

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{vgl. Aufg. 2)}$$

Natürlich ist auch $\mu^3 = 1$ und wir erhalten damit ($\lambda \neq \mu \in \{1, \zeta, \zeta^2\}$) für $C^{-1}AC$ genau folgende 6 Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}.$$

Die durch $\sqcup$ verbundenen Matrizen sind via $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ konjugiert. Je 2 nicht durch $\sqcup$ verbundene Matrizen haben verschiedene Spuren und sind somit nicht konjugiert.

A ist also in diesem Fall zu genau einer der 3 letzten Matrizen der Beh. konjugiert.

218

<u>Fall 2:</u> λ ist der einzige Eigenwert von A (also $p_A(x) = (x-\lambda)(x-\lambda)$).

Wir wählen v als erste Spalte der Matrix C und wählen die 2. Spalte beliebig, aber von v linear unabhängig. Dann ist

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a, b \in \mathbb{C}.$$

Weil aber $(x-\lambda)(x-b) = p_{C^{-1}AC}(x) = p_A(x) = (x-\lambda)(x-\lambda)$ ist, muss $b = \lambda$ sein und

$$C^{-1}AC = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a' \in \mathbb{C}.$$

Wegen

$$(C^{-1}AC)^3 = C^{-1}A^3C = \mathbb{1}$$

ist

$$\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^3 = \lambda^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Also $a' = 0$ und $C^{-1}AC = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $\lambda \in \{1, \zeta, \zeta^2\}$ ist A in diesem Fall zu genau einer der ersten 3 Matrizen der Beh. konjugiert.

<u>Aufg 4:</u>

Wir berechnen zuerst die Determinante von

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} : \quad \det A_n = 2 \det A_{n-1} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

wie Entwicklung nach der 1. Spalte zeigt. Entwickeln wir die letzte Matrix nach der 1. Zeile, so folgt $\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$. Also $\det A_n = n+1$ (Induktion).

Nun ist (Entwicklung nach 1. Spalte)

$$\det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \dots & -1 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \\ \vdots & & & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}}_{=0,}$$

denn die Summe der Spalten ist 0.

$$= -\det A_{n-2} \quad \text{(Entwicklung nach 1. Zeile)}$$
$$= -(n-2+1)$$
$$= 1-n.$$

<u>Aufg 5:</u>

Sei $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear mit $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Beh: Alle Eigenwerte von f sind 0.

Bew.: Sei λ ein Eigenwert und $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ mit $f(v) = \lambda v$. Dann ist $f^m(v) = \lambda^m v$ (denn $f^{i+1}(v) = f(f^i(v)) = f(\lambda^i v) = \lambda^i f(v) = \lambda^{i+1} v$) also $0 = \lambda^m v$ und wegen $0 \neq v$ muss $\lambda = 0$ sein.

<u>Aufg. 6:</u> Aufg. 7 ist ähnlich. Aus Platzmangel verzichten wir darauf (vgl. Storrmbach $\overline{V}$, 4.17). Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ mit Spalten $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

i) $\Rightarrow$ ii) : Aus i) folgt $1 = A^T A$ also

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a^T_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle . \checkmark$$

ii) $\Rightarrow$ i) : Aus ii) folgt mit obiger Rechnung $\mathbb{1} = A^T A$. Also ist $0 \neq (\det A)^2 = \det A^T A = 1$, A invertierbar und $A^{-1} = A^T A A^{-1} = A^T$

i) $\Longleftrightarrow$ iii) ist analog.

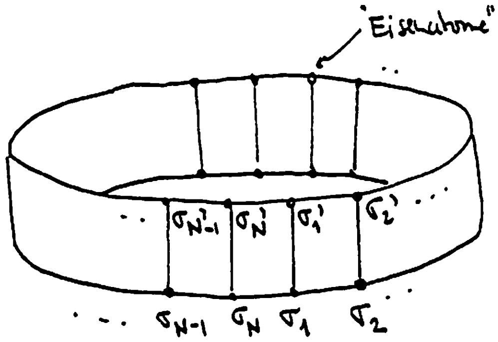
219

Lineare Algebra I
Serie 12.

Prof. E. Trubowitz (220
WS 88/89

Ising - Modell

Betrachten wir ein periodischen 2-N Ising - Modell, d.h.



mit $\sigma_i \in \{\pm 1\}$, $\sigma_j' \in \{\pm 1\}$.

Die Wechselwirkungsenergie $H(\Lambda)$ für eine Konfiguration Λ sei wie folgt definiert:

$$H(\Lambda) = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_i' - J \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_i' \sigma_{i+1}')$$

wobei $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, $\sigma_{N+1}' = \sigma_1'$ (Periodisch)

(a) Berechne die Zustandssumme

$$Z_N := \sum_{\Lambda} e^{-\beta(H(\Lambda))}$$

<u>Hinweise:</u> Es sei $\upsilon = \beta J$

Analog zum 1-dim. Ising-Modell (vgl. Vorlesung) definieren wir

$$L(\sigma_i, \sigma_{i+1}; \sigma_i', \sigma_{i+1}') = e^{\upsilon(\sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_i' \sigma_{i+1}') + \frac{\upsilon}{2}(\sigma_i \sigma_i' + \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}')}$$

$L(\sigma_i, \sigma_{i+1}; \sigma_i', \sigma_{i+1}')$ gibt uns hier eine (4×4)-Matrix

$$L := \begin{bmatrix} L(1,1;1,1) & L(1,1;+1,-1) & L(1,-1,1,1) & L(1,-1,1,-1) \\ L(1,1;-1,+1) & L(1,1,-1,-1) & L(1,-1,-1,1) & L(1,-1,-1,-1) \\ L(-1,1;1,1) & L(-1,1;1,-1) & L(-1,-1;1,1) & L(-1,-1;1,-1) \\ L(-1,1;-1,1) & L(-1,1;-1,-1) & L(-1,-1;-1,1) & L(-1,-1,-1,-1) \end{bmatrix}$$

- Berechne L
- Zeige jetzt analog zur Vorlesung, dass

$$Z_N = \mathrm{tr}(L^N)$$

(b) Berechne das charakteristische Polynom $\det(\lambda \mathbb{1} - L)$ von L.
(Entwicklung nach erster Spalte)

(c) Es ist möglich, mit dem char. Polynom von (b) die Eigenwerte und Eigenvektoren von L zu berechnen.

Man sieht aber, dass

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (e^{u} - e^{-3u}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von L zum Eigenwert λ.

Finde einen weiteren solchen (wirklich so einfachen!) Eigenvektor v_2.
Was ist sein Eigenwert?

(d) Betrachten wir

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeige: $\cdot$ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^4$.

- $V = \{\alpha v_3 + \beta v_4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ist invariant unter L,

  dh. $L(\alpha v_3 + \beta v_4) \in V$.

- Bestimme nun die beiden anderen Eigenwerte

  Tip: Benütze $\alpha = 1$ oder $\beta = 1$.

D'ont be discouraged!!

Lineare Algebra
Serie 12.

$$H(\Lambda) = -J\sum_{i=1}^{N}{}' \sigma_i\sigma_i' \; - J\sum_{i=1}^{N}{}'\left(\sigma_i\sigma_{i+1}+\sigma_i'\sigma_{i+1}'\right)$$

wobei $\sigma_{N+1} = \sigma_1 \;,\; \sigma_{N+1}' = \sigma_1$.

$$Z_N = \sum_{\Lambda}{}' e^{-\beta H(\Lambda)} = \sum_{\Lambda}{}' e^{\upsilon\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_i' + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i\sigma_{i+1}+\sigma_i'\sigma_{i+1}'\right)\right)}$$

Setzen wir $L(\sigma_i,\sigma_{i+1};\sigma_i',\sigma_{i+1}') = e^{\upsilon(\sigma_i\sigma_{i+1}+\sigma_i'\sigma_{i+1}')+\frac{\upsilon}{2}(\sigma_i\sigma_i'+\sigma_{i+1}\sigma_{i+1}')}$.

(a) Dann bekommen wir für

$$Z_N = \sum_{\Lambda}{}' e^{\upsilon\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_i' + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i\sigma_{i+1}+\sigma_i'\sigma_{i+1}'\right)\right)}$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1,\dots,\sigma_N=\pm1} L(\sigma_1,\sigma_2;\sigma_1',\sigma_2')\cdot L(\sigma_2,\sigma_3;\sigma_2',\sigma_3')\cdots L(\sigma_N,\sigma_1;\sigma_N,\sigma_1')$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1,\,\sigma_1'=\pm1} L^N(\sigma_1,\sigma_1;\sigma_1',\sigma_1')$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{tr} L^N}} \qquad \text{wobei}$$

$$L = \left[L(\sigma_i,\sigma_{i+1};\sigma_i',\sigma_{i+1}')\right] = \begin{bmatrix} e^{3\upsilon} & 1 & 1 & e^{-\upsilon} \\ 1 & e^{\upsilon} & e^{-3\upsilon} & 1 \\ 1 & e^{-3\upsilon} & e^{\upsilon} & 1 \\ e^{-\upsilon} & 1 & 1 & e^{3\upsilon} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\det(\lambda \mathbb{1} - L) = \begin{bmatrix} \lambda - e^{3u} & -1 & -1 & -e^{-u} \\ -1 & \lambda - e^{u} & -e^{-3u} & -1 \\ -1 & -e^{-3u} & \lambda - e^{u} & -1 \\ -e^{-u} & -1 & -1 & \lambda - e^{3u} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - e^{3u} + e^{-u} & -1 & -1 & -e^{-u} \\ 0 & \lambda - e^{u} & -e^{-3u} & -1 \\ 0 & -e^{-3u} & \lambda - e^{u} & -1 \\ -(\lambda - e^{3u} + e^{-u}) & -1 & -1 & \lambda - e^{3u} \end{bmatrix}$$

Berechnen wir zuerst die beiden Unterdeterminanten:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - e^{u} & -e^{-3u} & -1 \\ -e^{-3u} & \lambda - e^{u} & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - e^{3u} \end{bmatrix} = (\lambda - e^{u})^2(\lambda - e^{3u}) - 2e^{-3u} - 2(\lambda - e^{u}) - e^{-6u}(\lambda - e^{3u})$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(e^{3u} + 2e^{u}) + \lambda(2e^{4u} + e^{2u} - 2 - e^{-6u}) - e^{5u} - e^{-3u} + 2e^{u}.$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -1 & e^{-u} \\ \lambda - e^{u} & -e^{-3u} & -1 \\ -e^{-3u} & \lambda - e^{u} & -1 \end{bmatrix} = -2e^{-3u} - e^{-u}(\lambda - e^{u}) + e^{-7u} - 2(\lambda - e^{u})$$

$$= -\lambda^2 e^{-u} + e^{u} - 2e^{-3u} + e^{-7u}$$

Somit haben wir:

$$\det(\lambda \mathbb{1} - L) = (\lambda - e^{3u} + e^{-u})\left(\lambda^3 - \lambda^2(e^{3u} + 2e^{u} + e^{-u}) + \lambda(2e^{4u} + e^{2u} - 2 - e^{-6u}) - e^{5u} + 3e^{u} - 3e^{-3u} + e^{-7u}\right)$$

$$= \lambda^4 - \lambda^3(2e^{3u} + 2e^{u}) + \lambda^2(e^{6u} + 4e^{4u} + e^{2u} - 4 - e^{-2u} - e^{-6u})$$
$$- \lambda(2e^{7u} + 2e^{5u} - 4e^{3u} - 4e^{u} + 2e^{-u} + 2e^{-3u}) + e^{8u} - 4e^{4u} + 6 - 4e^{-4u} + e^{-8u}$$

$$= \lambda^4 - 4e^{2u}\cosh u\, \lambda^3 + 2(\sinh 6u + \sinh 2u + 4e^{2u}\sinh 2u)\lambda^2 - 4(e^{6u}\cosh u + \sinh 3u$$
$$- \sinh u - e^{2u}\cosh u)\lambda + 2(\cosh 8u - 4\cosh 4u + 3)$$

(c) $$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3u}-e^{-u}\\0\\0\\-e^{3u}+e^{-u}\end{pmatrix} = (e^{3u}-e^{-u})\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ ist Eigen~~wert~~ zum Eigenwert $e^{3u}-e^{-u}$

(d) $$v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \quad v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad v_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\langle v_i, v_j\rangle = 2\delta_{ij}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix}\beta+\gamma = 0 & , & -\beta+\gamma = 0\\ \alpha+\delta = 0 & , & -\alpha+\delta = 0\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$$

$$L(\alpha v_3+\beta v_4) = \alpha\cdot\begin{pmatrix}e^{-u}+e^{3u}\\2\\2\\e^{-u}+e^{3u}\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\e^{u}+e^{-3u}\\e^{u}+e^{-3u}\\2\end{pmatrix}$$

$$= \left(2\beta+(e^{-u}+e^{3u})\alpha\right) v_3 + \left((e^{u}+e^{-3u})\beta+2\alpha\right) v_4 .$$

$\Rightarrow$ Span$\langle v_3, v_4\rangle$ ist invariant unter L.

Matrix von $L|\mathrm{Span}\langle v_3,v_4\rangle = \begin{bmatrix} e^{-u}+e^{3u} & 2\\ 2 & e^{u}+e^{-3u}\end{bmatrix}$ bzgl. v_3, v_4

Nun $L|\mathrm{Span}\langle v_3, v_4\rangle = \begin{bmatrix} 2e^{u}\cosh 2u & 2 \\ 2 & 2e^{-u}\cosh 2u \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ charakteristisches Polynom

$$x^2 - \underbrace{(e^{u}+e^{-u})}_{2\cosh u} 2\cosh 2u \; x + 4\cosh^2 2u - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4\cosh u \cosh 2u \pm \sqrt{(16\cosh^2 u \cosh^2 2u) - 4(4\cosh^2 2u - 4)}}{2}$$

$$= 2\cosh u \cosh 2u \pm 2(\cosh^2 u \cosh^2 2u - \cosh^2 2u + 1)^{1/2}$$

$$x_{1/2} = \underline{\underline{2\cosh u \cosh 2u \pm 2(\sinh^2 u \cdot \cosh^2 2u + 1)^{1/2}}}$$

Prof. E. Trubowitz 227
WS 88/89

Lineare Algebra
Serie 13

(1) Beweise: Die Abb.

$$\mathrm{Herm}_n \longrightarrow U(n), \quad A \longmapsto e^{iA}$$

ist surjektiv.

Hinweis: Benütze, dass für jedes $A \in U(n)$ ein $C \in U(n)$ gibt, mit $C^{-1}AC$ diagonal.

(2)

Zeige: $$\left(\sum_{k \geq 0}' \frac{(iA)^k}{k!} \right)^* = \sum_{k \geq 0}' \frac{(-iA^*)^k}{k!}$$

(3) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar?

(4) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar?

(5) Seien $T, S \in \mathrm{Herm}_n$.
Finde notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass TS selbstadjungiert, d.h. $TS \in \mathrm{Herm}_n$.

1. Sei $A \in U(n)$.
Zu zeigen: Es gilt $B \in Herm_n$ mit
$$e^{iB} = A.$$
a) Sei $D \in U(n)$ eine Diagonalmatrix. Dann gilt
$$D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta_i < 2\pi \\ i = 1, \dots, n \end{matrix}$$
sei $B = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_n \end{pmatrix}$. Dann ist offensichtlich

$e^{iB} = D$ und $B \in Herm_n$.

b) Sei $A \in U(n)$. Es gilt $C \in U(n)$ so, dass
$D = C^{-1}AC$ diagonal ist.
Nach a) gibt es also $B \in Herm_n$ mit $e^{iB} = D$
$$\Rightarrow e^{iB} = C^{-1}AC$$
$$\Rightarrow C e^{iB} C^{-1} = A$$
$$\Rightarrow e^{i(CBC^{-1})} = A.$$
Es genügt also zu zeigen, dass $CBC^{-1} \in Herm_n$ ist.
$\underline{(CBC^{-1})^*} = (C^{-1})^* B^* C^* = \underline{CBC^{-1}}$, wobei die letzte Gleichheit aus $C \in U(n)$ und $B \in Herm_n$ folgt.

2. Sei $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Matrizen aus $GL(n,\mathbb{C})$ mit $A = \lim_{k\to\infty} A^{(k)}$
Wir zeigen: $A^* = \lim_{k\to\infty} (A^{(k)})^*$.
$$\underline{\underline{A^*}} = \left(\lim_{k\to\infty} A^{(k)}\right)^* = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{11}^{(k)} & \cdots & \lim_{k\to\infty} a_{1n}^{(k)} \\ \vdots & & \\ \lim_{k\to\infty} a_{n1}^{(k)} & \cdots & \lim_{k\to\infty} a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}^* \Rightarrow$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lim_{k\to\infty} a_{11}^{(k)}} & \overline{\lim_{k\to\infty} a_{21}^{(k)}} & \cdots & \overline{\lim_{k\to\infty} a_{n1}^{(k)}} \\ \overline{\lim_{k\to\infty} a_{12}^{(k)}} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \overline{\lim_{k\to\infty} a_{1n}^{(k)}} & \cdots & & \overline{\lim_{k\to\infty} a_{nn}^{(k)}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} \overline{a_{11}^{(k)}} & \cdots & \lim_{k\to\infty} \overline{a_{n1}^{(k)}} \\ \vdots & & \\ \lim_{k\to\infty} \overline{a_{1n}^{(k)}} & \cdots & \lim_{k\to\infty} \overline{a_{nn}^{(k)}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\lim_{k\to\infty} (A^{(k)})^*}}$$
wobei $\overline{\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \overline{a_{ij}^{(k)}}$ gilt, weil
$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \bar{z}$$
stetig ist.
Setze $A^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \frac{(iA)^l}{l!}$
Aus $\left(\lim_{k\to\infty} A^{(k)}\right)^* = \lim_{k\to\infty} (A^{(k)})^*$ folgt jetzt
$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iA)^l}{l!}\right)^* = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{((iA)^l)^*}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{((iA)^*)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i^* A^*)^l}{l!} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-iA^*)^l}{l!}, \text{ wie behauptet.}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Dreiecksmatrix, also stehen in der Diagonale von A die EW von A. $\lambda = 0$ ist somit Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Wäre A diagonalisierbar, müsste A zur Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ähnlich sein, was nicht möglich ist, da gilt $C \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist A nicht diagonalisierbar.

4. Das gleiche Argument wie in 3. zeigt dass $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist, da A ähnlich zu $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ sein müsste, was nicht möglich ist, da gilt $C \sim \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5. Sei $T, S \in \mathrm{Herm}_n$. Es gilt

$(TS)^* = S^*T^* = ST$, da $S=S^*$ und $T=T^*$.

Also $\underline{TS \in \mathrm{Herm}_n} \Leftrightarrow (TS)^* = TS$

$\Leftrightarrow \underline{ST = TS}$

Lineare Algebra
Serie 14.

Prof. E. Trubowitz
WS 88/89

(1) Sei $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ linear, selbstadjungiert und unitär ($T^* = T^{-1}$).
Was folgt daraus für die Eigenwerte von T?

(2) Sei $V = \mathbb{C}^3$, $T: V \longrightarrow V$ gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 0 \\ -4i & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. Standardbasis}$$

(a) Ist T selbstadjungiert, unitär?

(b) Finde die Eigenwerte und Eigenräume von T.

(c) Finde eine unitäre Abb. U, so dass $U^{-1} T U$ diagonal ist.

(d) Berechne die Matrix von T^{10}, T^{-1}.

(3) Es sei $N \in \mathbb{N}$, P_N bezeichne den reellen Vektorraum der Polynome vom Grade kleiner oder gleich N.

$$\begin{array}{ccc} P_N \times P_N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & (f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx \end{array}$$

definiert ein Skalarprodukt auf P_N.

(a) Beweise: Es gibt genau eine orthonormierte Basis von P_N, die für jedes $0 \leq n \leq N$ genau ein Polynom p_n vom Grade n enthält, dessen Leitkoeffizient > 0 ist. Die Basispolynome p_n der so definierten Basis heissen Legendre-Polynome.
Hinweis: Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt.

(b) Zeige, dass die Polynome p_n gegeben sind durch

$$p_n(x) = c_n \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

(Dabei ist c_n eine gewisse Normierungskonstante)

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $(p_m, p_n) = 0$ für $m \neq n$.

(c) Es sei T die lineare Abbildung $T: P_N \longrightarrow P_N$, definiert durch

$$(Tp)(x) = \frac{d}{dx}\left((x^2-1)\frac{d}{dx}p\right)(x) = (x^2-1)\cdot p''(x) + 2xp'(x).$$

Zeige, dass die Legendrepolynome Eigenvektoren von T sind, und berechne die zugehörigen Eigenwerte.

! Testatverteilung: Mittwoch, 15. Febr. 89 in den Übungen.
Testatbedingung: 9 Übungen.

Lineare Algebra
Serie 14.

(1) $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ selbstadjungiert $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte reell (Satz 12.1)
unitär $\Rightarrow$ Eigenwerte haben Betrag 1 (12.2)

Also $\Rightarrow \underbrace{\{EW\}}_{} \subseteq \mathbb{R} \cap S^1 = \underbrace{\{\pm 1\}}_{}$.

(2) (a) $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 0 \\ -4i & 0 & -3 \end{pmatrix} = T^*$

$\Rightarrow$ T selbstadjungiert.

$T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 2 ist EW

$\Rightarrow$ T <u>nicht</u> unitär.

(b) $\det(\lambda \mathbb{1} - T) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5)$

$\Rightarrow \underline{\underline{EW \subseteq \{2, 5, -5\}}}$.

(alle Eigenräume werden 1-dim.)

$E_2 = \{\lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_5 = \{\lambda v_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{-5} = \{\lambda v_3 \mid \lambda \in \mathbb{C}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) Sei $\tilde{v}_1 = v_1, \quad \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} v_2, \quad \tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} v_3$

$\Rightarrow \langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, also $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ bilden eine orthonormierte Basis von $\mathbb{C}^3$.

$U = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2i/\sqrt{5} & -i/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \in U(n)$

$\Rightarrow U^{-1} = U^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ i/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$U^{-1} T U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = D$

(d) $T = U D U^{-1}$

$T^{10} = U D^{10} U^{-1} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$

$T^{-1} = U D^{-1} U^{-1} = \begin{pmatrix} 3/25 & 0 & 4i/25 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -4i/25 & 0 & -3/25 \end{pmatrix}$

③ a) $\{p_0, \dots, p_N\}$, $\{q_0, \dots, q_N\}$ seien zwei Basen, die die Bedingungen erfüllen.

$$p_i = \sum_{j=0}^{N} r_{ij}\, q_j \qquad 0 \le i \le N$$

Dabei ist $R = (r_{ij})$ orthogonal.
Aus der Gradbedingung folgt, dass

$$r_{ij} = 0 \qquad \forall\ j > i$$

d.h. R ist eine untere Dreiecksmatrix.
Wegen $R^T = R^{-1}$ ist dann auch R^T eine untere Dreiecksmatrix. Also ist R eine Diagonalmatrix. Weil R orthogonal ist, können die Diagonalelemente nur ± 1 sein. Aus der Positivität der führenden Koeffizienten der Polynome folgt dann sogar $R = E$ q.e.d.

b) $m < n$

$$\int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n\right) dx = \text{(m-malige partielle Integration)}$$

$$= \int_{-1}^{1} (\text{const}) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-m} (x^2-1)^n\, dx$$

dabei haben wir verwendet

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} = 0 \qquad \forall\ \ell < n$$

Das letzte Integral ist

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-m-1} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} = 0$$

c) für $f, g \in P_N$ ist

$$(Tf, g) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx}f\right) g\, dx = (x^2-1)\frac{d}{dx}f \cdot g\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} (x^2-1)\frac{d}{dx}f \cdot \frac{d}{dx}g\, dx = -f\,(x^2-1)\frac{d}{dx}g\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} f\, \frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx}g\, dx$$

$$= 0 + (f, Tg) = (f, Tg)$$

(d.h. T ist selbstadjungiert)

6

induktiv nehmen wir nun an,

$$T p_\ell = \lambda_\ell p_\ell \qquad \ell \le n.$$

(dies gilt sicher für $n = 0$)
Für beliebige $\ell \le n$ erhalten wir

$$(T p_{n+1}, p_\ell) = (p_{n+1}, T p_\ell) = \lambda_\ell (p_{n+1}, p_\ell) = 0$$

Das Polynom $T p_{n+1}$ steht also senkrecht zu allen p_ℓ $(0 \le \ell \le n)$. Da es, wie wir leicht sehen, vom Grade $n+1$ ist, muss es ein konstantes Vielfaches von p_{n+1} sein, also

$$T p_{n+1} = \lambda_{n+1} p_{n+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

Die zugehörigen Eigenwerte finden wir durch explizite Rechnung:

$$(x^2-1)^n = \sum_m \binom{n}{m} x^{2m} (-1)^{n-m} \qquad \text{(alle Summen über } \mathbb{Z}\text{!)}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n = \sum_m \binom{n}{m}\binom{2m}{n} n!\, (-1)^{n-m}\, x^{2m-n} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} (x^2-1)^n = \sum_m \binom{n}{m}\binom{2m}{n+1} (n+1)!\, (-1)^{n-m}\, x^{2m-n-1}$$

$$(x^2-1)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} (x^2-1)^n = \sum_m \left(\binom{n}{m}\binom{2m}{n+1}(n+1)!(-1)^{n-m} + \binom{n}{m+1}\binom{2m+2}{n+1}(n+1)!(-1)^{n-m}\right) x^{2m-n-1}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)(x^2-1)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}(x^2-1)^n = \sum_m \binom{n}{m}\binom{2m}{n} n!\, (-1)^{n-m} \left((2m-n+1)(2m-n) + \frac{(n-m)(2m+2)(2m+1)}{(m+1)\cdots}\right) x^{2m-n}$$

$$= \sum_m \binom{n}{m}\binom{2m}{n} n!\, (-1)^{n-m}\, \big(n(n+1)\big)\, x^{2m-n} \qquad (2)$$

Vergleich von (1) und (2) liefert:

$$\underline{\underline{\lambda_n = n(n+1)}}$$

Lineare Algebra II

Notizen zu einer Vorlesung von
E. Trubowitz
aufgeschrieben von
Urs Barmettler

SS 1989
ETH-Zürich

Inhaltsverzeichnis

14. Jacobi Matrizen und Toda Gleichung

<u>Definition.</u> Eine Matrix $L \in M_n(\mathbb{R})$ der Form

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a_{n-2} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

mit $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ und $a_j \in \mathbb{R} - \{0\}$, $1 \leq j \leq n-1$.
heisst Jacobi Matrix.
(Jacobi 1804 - 1851, 'vollständig Tod').

<u>Beachte:</u> $L^T = L$.

Also eine Jacobi-Matrix ist eine symmetrische, reelle Matrix. Nach Satz 12.1 sind alle Eigenwerte von L <u>reell</u>.

<u>Lemma 1.</u> Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von L mit Eigenwert μ. Weiter soll $v_1 = 0$ sein. Dann gilt $v = 0$.
Also gibt es <u>keinen</u> Eigenvektor von L mit $v_1 = 0$!

<u>Beweis</u>

$$L \cdot v = \mu \cdot v \quad \Rightarrow \quad a_{\ell-1} \cdot v_{\ell-1} + b_\ell \cdot v_\ell + a_\ell \cdot v_{\ell+1} = \mu v_\ell \quad , \ell = 1, \ldots, n$$

wobei wir $a_0 = 0$, $a_n = 0$ setzen.

Also: für $\ell = 1$: $\quad b_1 v_1 + a_1 \cdot v_2 = \mu \cdot v_1 \underset{v_1=0}{\Rightarrow} a_1 \cdot v_2 = 0 \underset{a_1 \neq 0}{\Rightarrow} \underline{v_2 = 0}$

$\ell = 2$: $\quad \underbrace{a_1 \cdot v_1}_{=0} + \underbrace{b_2 \cdot v_2}_{=0} + a_2 \cdot v_3 = \underbrace{\mu \cdot v_2}_{=0} \underset{a_2 \neq 0}{\Rightarrow} \underline{v_3 = 0}$

Wenn wir so fortfahren, bekommen wir die Behauptung.

$\square$

<u>Satz 2</u>. Sei μ ein Eigenwert von L. Dann gilt für den Eigenraum $E_\mu = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Lv = \mu v\}$:

$$\dim_{\mathbb{R}} E_\mu = 1.$$

<u>Beweis:</u>

Seien $v, w \in E_\mu$, $v \neq w$.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 1 gilt: $w_1 \neq 0$. Also:

$$L\Big(\underbrace{\frac{v_1}{w_1}}_{\in \mathbb{R}} \cdot w\Big) = \frac{v_1}{w_1} \cdot L(w) = \frac{v_1}{w_1} \cdot \mu w \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{w_1} \cdot w \in E_\mu .$$

Nun setze $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := v - \frac{v_1}{w_1} \cdot w$

$$Lx = L\Big(v - \frac{v_1}{w_1} \cdot w\Big) = \mu \cdot \Big(v - \frac{v_1}{w_1} w\Big) = \mu \cdot x$$

Aber $x_1 = v_1 - \frac{v_1}{w_1} \cdot w_1 = 0 \underset{\text{Lemma } 1}{\Longrightarrow} x = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{v = \frac{v_1}{w_1} \cdot w} \quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}} E_\mu = 1.$$

$\square$

<u>Satz 3</u>: Sei L unsere Jacobi Matrix. Dann gibt es Eigenwerte

$$\mu_1 < \dots < \mu_n$$

und Eigenvektoren

$$g_j = \begin{pmatrix} g_j(1) \\ \vdots \\ g_j(n) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

mit

$$L g_j = \mu_j \cdot g_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Beweis:

Da $L \in \mathrm{Symm}_n \cap M_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Herm}_n$ folgt mit Satz 12.9, dass es Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$A \sim \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Da alle Eigenräume eindimensional sind, folgt weiter, dass

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$$

(eventuell umnummerieren).

Analog zum Beweis von Satz 12.9 konstruiert man eine orthonormale Basis $g_1, \dots g_n$ von $\mathbb{R}^n$ mit

$$L g_j = \mu_j \cdot g_j \qquad 1 \le j \le n.$$

$\square$

Bis war ja alles schön einfach. Jetzt wollen wir etwas Schlimmes tun:

Satz 4. Sei $\mathcal{L} = \left\{ L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a_j \in \mathbb{R} - \{0\}, & b_j \in \mathbb{R} \\ (1 \le j \le n-1) & (1 \le j \le n) \end{matrix} \right\}$

die Jacobimatrizen. Sei weiter $L \in \mathcal{L}$ und

$$\mu_j(L) = \mu_j(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_n) \qquad 1 \le j \le n$$

die Eigenwerte von L (Funktionen in den Matrixgliedern). Dann gilt,

(i) $\dfrac{\partial \mu_j}{\partial a_l} = 2 g_j(l) \cdot g_j(l+1) \qquad l = 1, \dots, n-1$

(ii) $\dfrac{\partial \mu_j}{\partial b_l} = g_j(l)^2 \qquad l = 1, \dots, n$

$j = 1, \dots, n.$

Beweis:

(i) vgl. Übungen Lineare Algebra II Serie 2, Aufgabe 1.

(ii) $L g_j = \mu_j \cdot g_j \quad \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial b_\ell}(L g_j)}_{\substack{\text{Komponentenweise} \\ \text{ableiten.}}} = \frac{\partial}{\partial b_\ell}(\mu_j \cdot g_j)$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial b_\ell} \cdot g_j + L \cdot \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} = \frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell} \cdot g_j + \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} \quad \Big| \langle g_j, - \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial b_\ell} \cdot g_j \right\rangle + \underbrace{\left\langle g_j, L \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} \right\rangle}_{\underset{L=L^T}{=} \left\langle L g_j, \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} \right\rangle} = \underbrace{\left\langle g_j, \frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell} g_j \right\rangle}_{\underset{1=\langle g_j, g_j\rangle}{=} \frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell}} + \left\langle g_j, \mu_j \cdot \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial b_\ell} g_j \right\rangle + \cancel{\left\langle \underbrace{L g_j}_{\mu_j g_j}, \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} \right\rangle} = \frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell} + \cancel{\mu_j \cdot \left\langle g_j, \frac{\partial g_j}{\partial b_\ell} \right\rangle}$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial b_\ell} g_j \right\rangle = \frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_\ell} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \ell \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\ \ \ell & \end{array} \quad \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial b_\ell} \cdot g_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_j(\ell) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial b_\ell} \cdot g_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} g_j(k) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial b_\ell} g_j \right)_k}_{= \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ g_j(\ell) & k = \ell \end{cases}} = g_j(\ell)^2$$

Also: $\dfrac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell} = g_j(\ell)^2.$

$\square$

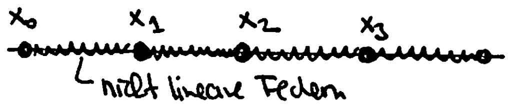
Betrachten wir nun folgende Differentialgleichung (Toda-Gleichung, ca 1965)

$$\frac{d^2}{dt^2} x_\ell(t) = e^{x_{\ell+1}(t) - x_\ell(t)} - e^{x_\ell(t) - x_{\ell-1}(t)} \qquad (*)$$

mit $e^{x_0} - e^{x_1} = 0 \quad , e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = 0 \quad , \ \ell = 1, \dots, n$.

Interpretation:

Betrachten wir Atome der Masse M, die auf einem Gitter angeordnet sind, etwa im $\mathbb{R}$ in den Punkten $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, und durch nicht lineare Federn verbunden sind (vgl. p. 89, diskrete Wellengleichung)



Falls wir nun x_2 um δ auslenken bewegt sich die ganze Konfiguration. Es stellt sich jedoch kein Gleichgewicht ein, sondern die gesamte "Bewegung" kommt wieder zu x_2 zurück. Dieses unerwartete Phänomen gibt die Gleichung (*) wieder. 1944/45 haben dies Fermi-Pasta-Ulam, die Erbauer der Atombombe, auf dem damals von John von Neumann entwickelten Computer simmuliert.

Sei nun $x_\ell(t)$, $\ell = 1, \dots, n$ eine Lösung der Toda Gleichung (*).

Setze
$$a_\ell(t) := \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(x_{\ell+1} - x_\ell)} \qquad \ell = 1, \dots, n-1$$
$$b_\ell(t) = \frac{1}{2} \dot{x}_\ell \qquad \ell = 1, \dots, n.$$

Damit bekommen wir nun eine 1-Parameterfamilie von Jacobi-Matrizen

$$L(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & a_1(t) & & & \\ a_1(t) & b_2(t) & a_2(t) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2}(t) & b_{n-1}(t) & a_{n-1}(t) \\ & & & a_{n-1}(t) & b_n(t) \end{bmatrix}$$

Es gilt nun der erstaunliche Satz

Satz 5. (ca 1974)

$$\frac{d}{dt}\mu_j(a_1(t),\dots,a_{n-1}(t),\ b_1(t),\dots,b_n(t)) = 0 \qquad j=1,\dots,n, \text{ d.h.}$$

alle Eigenwerte sind fest unabhängig von t! Wir haben n unabhängige Erhaltungssätze.

Beweis.

In Übung Serie 2 Aufgabe 2 haben wir gesehen, dass

$$(*) \iff \begin{cases} \dot a_\ell = a_\ell \cdot (b_{\ell+1} - b_\ell) \\ \dot b_\ell = 2(a_\ell^2 - a_{\ell-1}^2) \end{cases}$$

Nun $\frac{d}{dt}\mu_j(a_1(t),\dots,a_{n-1}(t),\ b_1(t),\dots,b_n(t))$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mu_j}{\partial a_k}\frac{da_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mu_j}{\partial b_k}\frac{db_k}{dt}$$

$$\underset{\text{Satz 4}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} 2g_j(k)\cdot g_j(k+1)\cdot a_\ell(b_{\ell+1}-b_\ell) + \sum_{k=1}^{n} g_j(k)^2 \cdot 2(a_\ell^2 - a_{\ell-1}^2) \qquad (**)$$

Nun aus $L(t)\cdot g_j = \mu_j \cdot g_j$ folgt:

$$a_{\ell-1}\cdot g_j(\ell-1) + b_\ell \cdot g_j(\ell) + a_\ell \cdot g_j(\ell+1) = \mu_j \cdot g_j(\ell) \qquad \ell = 1,\dots,n$$

wobei $a_0 = 0 = a_n$, $g_j(n+1) = 0$

Wir wollen nun diese Gleichung so manipulieren, damit wir $(**) = 0$ bekommen.

Setzen $g_j = g$.

$$\Rightarrow a_{\ell-1}\cdot g(\ell-1) + b_\ell\, g(\ell) + a_\ell \cdot g(\ell+1) = \mu_j\, g(\ell)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $a_\ell \cdot g(\ell+1)$:

$$a_{\ell-1} a_\ell \cdot g(\ell-1) \cdot g(\ell+1) + a_\ell b_\ell\, g(\ell)\, g(\ell+1) + a_\ell^2 g(\ell+1)^2 = \mu_j \cdot a_\ell \cdot g(\ell)\; g(\ell+1). \qquad (1)$$

Aus $L(t) \cdot g_j = \mu_j \cdot g_j$ folgt auch

$$a_\ell \cdot g(\ell) + b_{\ell+1}\, g(\ell+1) + a_{\ell+1} \cdot g(\ell+2) = \mu_j \cdot g(\ell+1).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $a_\ell \cdot g(\ell)$:

$$a_\ell^2 g(\ell)^2 + a_\ell \cdot b_{\ell+1}\, g(\ell) \cdot g(\ell+1) + a_\ell \cdot a_{\ell+1} g(\ell)\, g(\ell+2) = \mu_j a_\ell\, g(\ell)\, g(\ell+1) \qquad (2)$$

Aus (1) = (2) bekommen wir:

$$a_{\ell-1} a_\ell\, g(\ell-1)\, g(\ell+1) + \underline{a_\ell b_\ell\, g(\ell)\, g(\ell+1)} + \underline{a_\ell^2 g(\ell+1)^2} = \underline{a_\ell^2 g(\ell)^2} + \underline{a_\ell b_{\ell+1} \cdot g(\ell)\, g(\ell+1)} + a_\ell a_{\ell+1} g(\ell) \cdot g(\ell+2)$$

$$\Rightarrow \underline{(g(\ell)^2 - g(\ell+1)^2) a_\ell^2} + a_\ell (b_{\ell+1} - b_\ell)\, g(\ell)\, g(\ell+1) + a_\ell a_{\ell+1} g(\ell)\, g(\ell+2)$$

$$- a_{\ell-1} a_\ell\, g(\ell-1)\, g(\ell+1) = 0.$$

Summation über ℓ gibt:

$$\sum_{\ell=1}^{n}{}' (g(\ell)^2 - g(\ell+1)^2) a_\ell^2 + \sum_{\ell=1}^{n}{}' a_\ell (b_{\ell+1} - b_\ell)\, g(\ell)\, g(\ell+1)$$

$$+ \boxed{\sum_{\ell=1}^{n}{}' a_\ell a_{\ell+1}\, g(\ell)\, g(\ell+2) - \sum_{\ell=1}^{n}{}' a_{\ell-1} a_\ell\, g(\ell-1)\, g(\ell+1)} = 0$$

Beachte: $a_0 = a_n = g(n+1) = 0$

Betrachten wir nur

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{n}{}' a_\ell a_{\ell+1}\, g(\ell)\, g(\ell+2) - \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}{}' a_{\ell-1} a_\ell\, g(\ell-1)\, g(\ell+1)}_{\sum_{\ell'=0}^{n-1}{}' a_{\ell'} a_{\ell'+1}\, g(\ell')\, g(\ell'+2)}}$$

Aber $a_n = a_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{} = \sum_{l=1}^{n-2} a_l \cdot a_{l+1}\, g(l)\, g(l+2) - \sum_{l'=1}^{n-2} a_{l'}\, a_{l'+1} \cdot g(l')\, g(l'+2)$$

$$= 0$$

Also haben wir:

$$\sum_{l=1}^{n} (g(l)^2 - g(l+1)^2)\, a_l^2 + \sum_{l=1}^{n} a_l (b_{l+1} - b_l)\, g(l)\, g(l+1) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{n} g(l)^2 a_l^2 - \underbrace{\sum_{l=1}^{n} g(l+1)^2 a_l^2}_{} + \sum_{l=1}^{n} a_l (b_{l+1} - b_l)\, g(l)\, g(l+1) = 0$$

$$\sum_{l=1}^{n-1} g(l+1)^2 a_l^2 \quad , \text{da } g(n+1) = 0$$

$$\parallel$$

$$\sum_{l'=2}^{n} g(l')^2 a_{l'-1}^2$$

$$\parallel \; a_0 = 0$$

$$\sum_{l'=1}^{n} g(l')^2 a_{l'-1}^2$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{n} g(l)^2 (a_l^2 - a_{l-1}^2) + \sum_{l=1}^{n} a_l (b_{l+1} - b_l)\, g(l)\, g(l+1) = 0$$

Dies ist aber gerade $\frac{1}{2} \cdot (**)$ $\Rightarrow$ Beh.

$\square$

15. Wurzelsysteme

§1. Spiegelungen.

Betrachten wir den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt: $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\Theta$, wobei $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ und $\Theta = \measuredangle(x,y)$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$.

<u>Definition:</u>

$$\sigma_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\cdot\alpha$$

<u>Lemma 1:</u>

(a) σ_α ist eine lineare Abbildung.

(b) $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$

(c) Sei $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x,\alpha\rangle = 0\}$ Hyperebene senkrecht zu α.
$\dim_{\mathbb{R}} E_\alpha = n-1$
$\sigma_\alpha|E_\alpha = \mathrm{id}_{E_\alpha}$

(d) $\sigma_\alpha^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$
$\langle\sigma_\alpha(x),\sigma_\alpha(y)\rangle = \langle x,y\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \sigma_\alpha \in O(n)$

(e) $\det\sigma_\alpha = -1$.

<u>Beweis:</u>

(a) $$\sigma_\alpha(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 2\frac{\langle\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$$
$$= \lambda_1 x_1 - 2\cdot\frac{\lambda_1\langle x_1,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha + \lambda_2 x_2 - 2\frac{\lambda_2\langle x_2,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$$
$$= \lambda_1\cdot\sigma_\alpha(x_1) + \lambda_2\sigma_\alpha(x_2).$$

(b) $$\sigma_\alpha(\alpha) = \alpha - 2\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\cdot\alpha = -\alpha.$$

(c) $\dim_{\mathbb{R}} E_\alpha = n-1$ klar.

Sei $x \in E_\alpha$, dh. $\langle x, \alpha \rangle = 0$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{\cancel{\langle x,\alpha\rangle}^{=0}}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha = x.$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha|E_\alpha = \mathrm{id}_{E_\alpha}.$$

(d) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Nach (c) gilt: $x = \lambda\alpha + y$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in E_\alpha$.

$$\Rightarrow \sigma_\alpha^2(x) = \sigma_\alpha^2(\lambda\alpha + y) = \sigma_\alpha(-\lambda\alpha + y) = \lambda\alpha + y = x.$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha.$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \sigma_\alpha x, \sigma_\alpha y\rangle = \left\langle x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\cdot\alpha,\ y - 2\frac{\langle y,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha\right\rangle$$

$$= \langle x,y\rangle - 2\cdot\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\langle\alpha,y\rangle - 2\frac{\langle y,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\langle x,\alpha\rangle + 4\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\frac{\langle y,\alpha\rangle}{\cancel{\langle\alpha,\alpha\rangle}}\cdot\cancel{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

$$= \langle x,y\rangle.$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha \in O(n)$$

(e) Sei $v_1, \dots, v_{n-1}$ eine Basis von E_α

$$\Rightarrow \sigma_\alpha(v_j) = v_j \quad \forall\ 1 \le j \le n-1.$$

Sei $v_n = \alpha$.

Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Bezüglich dieser Basis hat σ_α folgende Matrix:

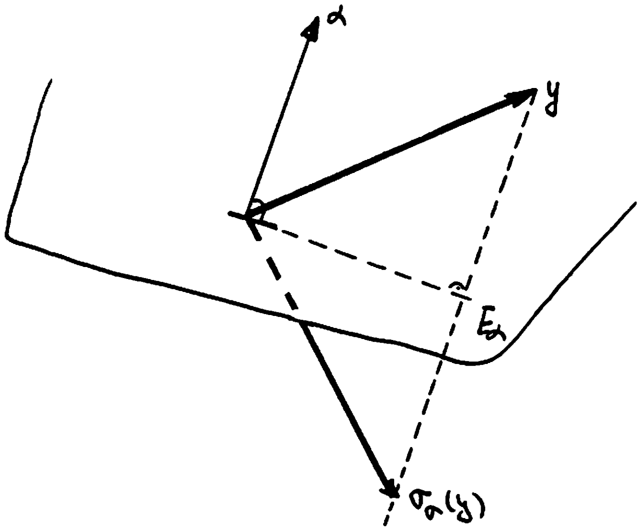
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \sigma_\alpha = -1.$$

□

Man nennt σ_α die Spiegelung an der Hyperebene E_α senkrecht zu α.

Bsp. $\mathbb{R}^3$



Lemma 2. Es sind äquivalent:

(i) $\sigma_\alpha(x) = x - 2\dfrac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha \quad , x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\sigma_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Automorphismus mit

$\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $\sigma_\alpha \in O(n)$ und
$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_\alpha(x) = x\}$ ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Lemma 1.

(ii) $\rightarrow$ (iii)

Es ist klar, dass $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\alpha \oplus H$ und $\sigma_\alpha^2 = id$.

Sei $x \in H$, $\langle x,\alpha\rangle = \langle \sigma_\alpha(x),\alpha\rangle \underset{\sigma_\alpha \in O(n)}{=} \langle x, \sigma_\alpha(\alpha)\rangle = -\langle x,\alpha\rangle$

$\Rightarrow H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x,\alpha\rangle = 0\}$.

Da eine lineare Abbildung eindeutig durch die Bilder einer Basis bestimmt ist, folgt die Behauptung. $\square$

§2. Definition eines Wurzelsystems

<u>Definition:</u> Sei R eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. R heisst ein Wurzelsystem (Root System), falls:

(i) R ist endlich, $0 \notin R$ und R erzeugt den $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sei $\alpha \in R$, dann ist auch $-\alpha \in R$.
Falls $\lambda\alpha \in R \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

(iii) Sei $\alpha \in R$, dann gilt $\sigma_\alpha(R) \subset R$, dh. R ist spiegelsymmetrisch.

(iv) Sei
$$\upsilon(\beta,\alpha) := 2\,\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

Dann muss gelten: $\upsilon(\beta,\alpha) \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha,\beta \in R$.

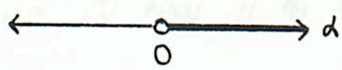
<u>Beachte:</u> • $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\,\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\cdot\alpha = \beta - \upsilon(\beta,\alpha)\cdot\alpha$.

• n nennt man den Rang von R, die Elemente von R nennt man Wurzeln.

<u>Bemerkung:</u> Die Wurzelsysteme treten im Zusammenhang mit der Klassifikation der halbeinfachen Lie Algebren auf (vgl. ev. später).

§3. Einfache Beispiele.

(1) $\mathbb{R}^1$:



A_1

$R = \{\alpha, -\alpha\}$, $E_\alpha = \{0\}$

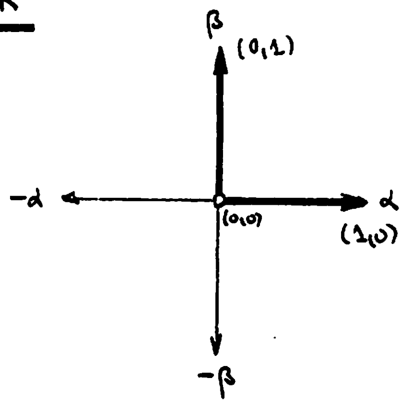
(i) ✓ (ii) ✓ (iii) $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$

(iv) Berechnung von $\upsilon(.,.)$:

	α	$-\alpha$
α	2	-2
$-\alpha$	-2	2

(2) $\underline{\mathbb{R}^2}$

(a)



$A_1 \times A_1$

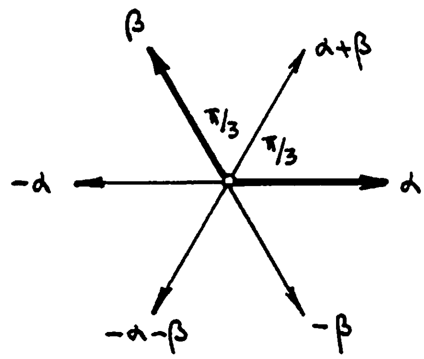
$R = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$, $E_\alpha = \{\lambda\beta ; \lambda \in \mathbb{R}\}$, $E_\beta = \{\lambda\alpha ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

(i) ✓ (ii) ✓ (iii) ✓

(iv) Berechnung von $v(\cdot,\cdot)$

	α	$-\alpha$	β	$-\beta$
α	2	-2	0	0
$-\alpha$	-2	2	0	0
β	0	0	2	-2
$-\beta$	0	0	-2	2

(b)



A_2

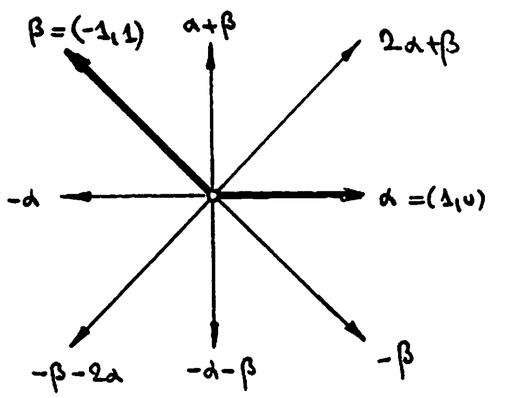
$R = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \alpha+\beta, -\alpha-\beta\}$, $\|\alpha\| = \|\beta\| = \|\alpha+\beta\|$

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) Berechnung von $v(.,.)$

	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	$\alpha+\beta$	$-\alpha-\beta$
α	2	-2	-1	1	1	-1
$-\alpha$	-2	2	1	-1	-1	1
β	-1	1	2	-2	1	-1
$-\beta$	1	-1	-2	2	-1	1
$\alpha+\beta$	1	-1	1	-1	2	-2
$-\alpha-\beta$	-1	1	-1	1	-2	2

(c)



B_2

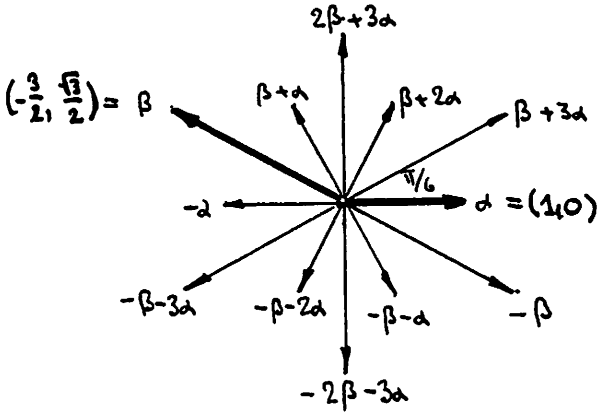
$R=\{\alpha,-\alpha,\beta,-\beta,\ \alpha+\beta,-\alpha-\beta,2\alpha+\beta,\ -2\alpha-\beta\}$

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) Berechnung von $v(.,.)$

	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	$\alpha+\beta$	$-\alpha-\beta$	$2\alpha+\beta$	$-2\alpha-\beta$
α	2	-2	-1	1	0	0	1	-1
$-\alpha$	-2	2	1	-1	0	0	-1	1
β	-2	2	2	-2	1	-1	0	0
$-\beta$	2	-2	-2	2	-1	1	0	0
$\alpha+\beta$	0	0	1	-1	2	-2	1	-1
$-\alpha-\beta$	0	0	-1	1	-2	2	-1	1
$2\alpha+\beta$	2	-2	0	0	2	-2	2	-2
$-2\alpha-\beta$	-2	2	0	0	-2	2	-2	2

(d)



G_2

$R = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \alpha+\beta, -\beta-\alpha, \beta+2\alpha, -\beta-2\alpha, \beta+3\alpha, -\beta-3\alpha, 2\beta+3\alpha, -2\beta-3\alpha\}$

(i), (ii), (iii) ✓

(iv) Berechnung von $v(.,.)$

	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	$\beta+\alpha$	$-\beta-\alpha$	$\beta+2\alpha$	$-\beta-2\alpha$	$\beta+3\alpha$	$-\beta-3\alpha$	$2\beta+3\alpha$	$-2\beta-3\alpha$
α	2	-2	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	0
$-\alpha$	-2	2	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0	0
β	-3	3	2	-2	3	-3	0	0	1	-1	1	-1
$-\beta$	3	-3	-2	2	-3	3	0	0	-1	1	-1	1
$\beta+\alpha$	-1	1	1	-1	2	-2	1	-1	0	0	1	-1
$-\beta-\alpha$	1	-1	-1	1	-2	2	-1	1	0	0	-1	1
$\beta+2\alpha$	1	-1	0	0	1	-1	2	-2	1	-1	1	-1
$-\beta-2\alpha$	-1	1	0	0	-1	1	-2	2	-1	1	-1	1
$\beta+3\alpha$	3	-3	-1	1	0	0	3	-3	2	-2	1	-1
$-\beta-3\alpha$	-3	3	1	-1	0	0	-3	3	-2	2	-1	1
$2\beta+3\alpha$	0	0	1	-1	3	-3	3	-3	1	-1	2	-2
$-2\beta-3\alpha$	0	0	-1	1	-3	+3	-3	3	-1	1	-2	2

$\|\beta\| = \sqrt{3}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

In der Tat werden wir sehen, dass dies die einzigen Wurzelsysteme im $\mathbb{R}^2$ sind.

§4. Paare von Wurzeln

Sei Θ der Winkel zwischen $\alpha, \beta \in R$, R unser Wurzelsystem.

Betrachten wir

$$v(\alpha,\beta) \cdot v(\beta,\alpha) = 2 \cdot \frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \beta,\beta \rangle} \cdot 2 \cdot \frac{\langle \beta,\alpha \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle}$$

$$= 4 \cdot \frac{\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cdot \cos\Theta}{\|\beta\|^2} \cdot \frac{\|\beta\| \cdot \|\alpha\| \cdot \cos\Theta}{\|\alpha\|^2}$$

$$= 4 \cdot \cos^2\Theta$$

Da $v(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}$ folgt aus dieser Berechnung, dass wir nur folgende Möglichkeiten für $v(\alpha,\beta) \cdot v(\beta,\alpha)$ haben:

$\mathbb{Z} \ni v(\alpha,\beta) \cdot v(\beta,\alpha) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Sei etwa $v(\alpha,\beta) \cdot v(\beta,\alpha) = 4$, d.h. $\Theta \in \{0, \pi\}$

$\Rightarrow$ $\underline{\alpha = \beta \text{ oder } \alpha = -\beta}$

Sei nun also $\alpha \neq \pm\beta$ und o.E.d.A. $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Dann bekommen wir für $v(\alpha,\beta)$ folgende Liste:

$v(\alpha,\beta)$	$v(\beta,\alpha)$	Θ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$	$v(\alpha,\beta)\cdot v(\beta,\alpha)$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	?	0
+1	+1	$\frac{\pi}{3}$	1	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1	
+1	+2	$\frac{\pi}{4}$	2	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2	
+1	+3	$\frac{\pi}{6}$	3	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3	

$$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{v(\beta,\alpha)}{v(\alpha,\beta)}$$

Lemma 3: Seien $\alpha, \beta \in R$ unserem Wurzelsystem mit $\alpha \neq \pm\beta$. Dann gilt:
(i) $\langle \alpha, \beta \rangle > 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in R$
(ii) $\langle \alpha, \beta \rangle < 0 \Rightarrow \alpha + \beta \in R$.

Beweis.
(i) Aus $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ folgt $v(\alpha, \beta) > 0$ und somit aus Tabelle von p. 16:

$$v(\alpha, \beta) = 1 \qquad \text{oder} \qquad v(\beta, \alpha) = 1$$

Falls $v(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \underbrace{2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}}_{= v(\alpha,\beta) = 1} \cdot \beta = \alpha - \beta \in R$ nach (iii)

in der Definition eines Wurzelsystems.

Analog für $v(\beta, \alpha) = 1 \Rightarrow \sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in R$ nach (iii).

$\Rightarrow \sigma_{\beta - \alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R$ nach (iii)

(ii) folgt aus (i) indem man in (i) anstelle von β die Wurzel $-\beta$ einsetzt.

$\square$

§ 5. Basis und Cartanmatrix eines Wurzelsystems

Definition. Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Wurzelsystem. $\Delta \subset R$ heisst eine Basis falls:
(i) Δ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$
(ii) Jedes $\beta \in R$ kann als eine Linearkombination
$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha \quad \text{mit } k_\alpha \in \mathbb{Z} \quad \text{und}$$
entweder alle $k_\alpha \geq 0$ oder alle $k_\alpha \leq 0$ geschrieben werden.

Beachte:
- $\operatorname{card}(\Delta) = n$
- Die Darstellung $R \ni \beta = \sum_{\alpha \in \Delta}' k_\alpha \cdot \alpha$ ist eindeutig.
- In den Figuren p. 12 - 15 wird die Basis durch etwas dickere "Striche" hervorgehoben.

Satz 4. Jedes Wurzelsystem $R \subset \mathbb{R}^n$ hat eine Basis Δ.

Beweis.

Wir geben eine konkrete Methode zur Konstruktion einer Basis.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Definiere $R^+(x) = \{\alpha \in R \mid \langle x, \alpha \rangle > 0\}$. $R^+(x)$ sind die Wurzeln von R, welche auf der "positiven" Seite der Hyperebene senkrecht zu x liegen.

Sei $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$, wobei $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \alpha \rangle = 0\}$

Beachte $\mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha \neq \emptyset$ (Übung: Hinweis R ist endlich).

Es gilt mit diesem $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$:

$$R = R^+(x) \cup (-R^+(x)).$$

Ein $\alpha \in R^+(x)$ nennen wir zerlegbar, falls es sich als Summe $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ für $\beta_1, \beta_2 \in R^+(x)$ schreiben lässt. Falls dies nicht der Fall ist, nennen wir α unzerlegbar.

Definition: $\Delta(x) := \{\alpha \in R^+(x) \mid \alpha \text{ unzerlegbar}\}$

Behauptung: $\Delta(x)$ ist eine Basis von $R \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Jedes Element aus $R^+(x)$ lässt sich als nichtnegative $\mathbb{Z}$-Linearkombination mit Elementen aus $\Delta(x)$ schreiben.

Annahme: (1) gilt nicht.
Wähle $\alpha \in R^+(x)$ mit $\langle x, \alpha \rangle$ minimal und (1) gilt nicht.
$\Rightarrow \alpha \notin \Delta(x) \Rightarrow \alpha = \beta_1 + \beta_2$ mit $\beta_1, \beta_2 \in R^+(x)$.
Nun $\langle x, \beta_1 \rangle$ und $\langle x, \beta_2 \rangle$ sind positiv. Um einen Widerspruch zur Minimalität von $\langle x, \alpha \rangle$ zu vermeiden muss für β_1 und β_2 (1) gelten $\Rightarrow$ (1) gilt auch für $\alpha \to$ Widerspruch.

(2) Falls $\alpha,\beta \in \Delta(x) \Rightarrow \langle \alpha,\beta\rangle \leq 0$ ausser $\alpha = \beta$.

⌜ Aus $\langle \alpha,\beta\rangle > 0$ folgt nach Lemma 3 $\alpha - \beta \in R$.

Da aus $\alpha,\beta \in \Delta(x)$ folgt, dass $\beta \neq -\alpha$ haben wir, dass $\alpha - \beta$ oder $\beta - \alpha$ in $R^+(x)$ ist.

- $\alpha - \beta \in R^+(x) \Rightarrow \alpha = \beta + (\alpha - \beta) \Rightarrow \alpha$ zerlegbar $\Rightarrow \alpha \notin \Delta(x)$ ↯.
- $\beta - \alpha \in R^+(x) \Rightarrow \beta = \alpha + (\beta - \alpha) \Rightarrow \beta$ zerlegbar $\Rightarrow \beta \notin \Delta(x)$ ↯.

⌟

(3) Die Elemente aus $\Delta(x)$ sind linear unabhängig.

⌜ Annahme: $\sum'_{\alpha \in \Delta(x)} r_\alpha \cdot \alpha = 0$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$

Wir können $\sum'_{\alpha \in \Delta(x)} r_\alpha \cdot \alpha = 0$ umschreiben zu

$$\sum_\alpha' m_\alpha \cdot \alpha = \sum_\beta' n_\beta \cdot \beta \qquad , m_\alpha > 0 \quad , n_\beta > 0$$

wobei wir diejenigen α mit $r_\alpha > 0$ von denjenigen mit $r_\alpha < 0$ getrennt haben.

Setze
$$\lambda = \sum_\alpha' m_\alpha \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \|\lambda\|^2 = \Big\langle \sum_\alpha' m_\alpha \alpha, \sum_\beta' n_\beta \cdot \beta \Big\rangle = \sum_{\alpha,\beta}' \underbrace{m_\alpha \cdot n_\beta}_{>0} \underbrace{\langle \alpha,\beta\rangle}_{\leq 0} \overset{(2)}{=} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \equiv 0 \Rightarrow 0 = \langle \lambda, x\rangle = \sum_\alpha' m_\alpha \underbrace{\langle \alpha, x\rangle}_{>0} \; \forall \alpha \qquad (\alpha \in R^+(x))$$

$$\Rightarrow \underline{m_\alpha = 0 \quad \forall \alpha}$$

Analog auch $0 = \langle \sum_\beta' n_\beta \beta, x\rangle = \sum_\beta' n_\beta \underbrace{\langle \beta, x\rangle}_{>0}$

$$\Rightarrow \underline{n_\beta = 0 \quad \forall \beta}$$

⌟

(4) $\Delta(x)$ ist eine Basis von R.

⌈ Nach Schritt (1) und da $R = R^+(x) \cup (-R^+(x))$ folgt (ii) der Definition einer Basis. Ebenso folgt aus (1), dass $\Delta(x)$ den $\mathbb{R}^n$ erzeugt. Zusammen mit (3) also (i) der Definition einer Basis. ⌋

□

Umgekehrt wollen wir nun zeigen, dass jede Basis Δ von R von der Form $\Delta(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$ ist.

⌈

Wähle ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$.

(So ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert: Sei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, ∂_i = Projektion von α_i auf das orthogonale Komplement von $\mathrm{Span}(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha_i}, \dots \alpha_n)$

Setze $x = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \partial_i \quad, r_i > 0 \quad \Rightarrow \langle x, \alpha_j \rangle = \sum_i r_i \underbrace{\langle \partial_i, \alpha_j \rangle}_{\substack{= 0 \quad i \neq j \\ = \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \quad i = j}} = r_j \cdot \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle > 0$)

Aus (ii) von Definition der Basis folgt, dass $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$.

Sei $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \cdot \beta$ und $k_\beta \geq 0 \ \forall \beta\}$

$\Rightarrow R^+ \subseteq R^+(x)$ und $(-R^+) \subseteq (-R^+(x))$

umgekehrt gilt aber auch

$R^+ \supseteq R^+(x)$ und $(-R^+) \supseteq (-R^+(x))$

($R^+(x) \ni \alpha \Rightarrow \alpha = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \cdot \beta$ mit $k_\beta \geq 0$ oder $k_\beta \leq 0$.

da $\langle x, \alpha \rangle > 0 \Rightarrow k_\beta \geq 0 \ \forall \beta \Rightarrow \alpha \in R^+$).

Also: $R^+ = R^+(x)$ und $-R^+ = -R^+(x)$.

Die Elemente aus Δ sind unzerlegbar (Basis von R !)

$\Rightarrow \Delta \subseteq \Delta(x)$.

Da $\mathrm{card}\,\Delta = n = \mathrm{card}\,\Delta(x) \Rightarrow \underline{\Delta = \Delta(x)}$

□

Somit haben wir also:

Satz 4^{bis}. Sei $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$. Dann ist die Menge $\Delta(x)$ der unzerlegbaren Wurzeln aus $R^+(x) = \{\alpha \in R \mid \langle x, \alpha\rangle > 0\}$ eine Basis von R und umgekehrt ist jede Basis von R auf diese Art erhältlich, dh. $\Delta = \Delta(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$.

Beispiel. Sei $n = 2$, dh. wir betrachten Wurzelsysteme $R \subset \mathbb{R}^2$.
Sei Δ eine Basis von R. Nach Satz 4^{bis} gibt es ein $x \in \mathbb{R}^2 - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$ mit $\Delta = \Delta(x)$.
Nach Schritt (2) im Beweis von Satz 4 gilt:

$$\Delta(x) = \{\alpha, \beta\} \implies \langle \alpha, \beta \rangle \leq 0 \implies v(\alpha, \beta) \leq 0$$

$\implies$ mit Tabelle von Seite 16, dass es nur folgende Typen von Wurzelsystemen gibt:

$v(\alpha,\beta) = 0$: $A_1 \times A_1$
$v(\alpha,\beta) = -1$: A_2
$v(\alpha,\beta) = -2$: B_2
$v(\alpha,\beta) = -3$: G_2

Damit haben wir eine vollständige Liste der 2-dim. Wurzelsysteme.

Definition. Sei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis unseres Wurzelsystems $R \subset \mathbb{R}^n$.
Die Matrix

$$\Big(v(\alpha_i, \alpha_j) \Big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

heisst <u>Cartan-Matrix</u> von R bezüglich Δ.

Beispiele.

Für die Wurzelsysteme vom Rang 2 bekommen wir folgende Cartan-Matrizen,

$A_1 \times A_1 \quad : \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 \quad : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$B_2 \quad : \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad G_2 \quad : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

§6. Konstruktion von Wurzelsystemen

Im folgenden bezeichne $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$

(a) Typ A_n, $n \geq 1$

Betrachten wir die lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad (x_1, \dots x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, -\sum_{i=1}^n x_i)$$

Nun ϕ ist injektiv, dh. $\ker \phi = \{0\}$. Was ist das Bild von ϕ?

$$\operatorname{im} \phi = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_{n+1} = -\sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

$$= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \quad \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

dh. $\operatorname{im} \phi$ ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei $\mathbb{Z}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein $(n+1)$-dimensionales Gitter im $\mathbb{R}^{n+1}$, dh

$\mathbb{Z}^{n+1} = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \in \mathbb{Z}, \; 1 \leq i \leq n+1 \}. \subset \mathbb{R}^{n+1}.$

Definiere $\underline{A_n \subset \operatorname{im}\phi} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\boxed{\begin{aligned} A_n &= \{\alpha \in \mathbb{Z}^{n+1} \cap \operatorname{im}\phi \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 2\} \\ &= \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 0 \text{ und } \langle \alpha, \alpha \rangle = 2 \right\} \end{aligned}}$$

Lemma 5.

(1) $A_n = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i,j \leq n+1, \; i \neq j\}$

$\operatorname{card} A_n = n \cdot (n+1)$ (Anzahl Wurzeln)

(2) A_n ist ein Wurzelsystem mit Basis

$\Delta_n = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_n = e_n - e_{n+1}\}$

dh. A_n ist ein <u>n-dim. Wurzelsystem</u>.

<u>Beweis:</u>

(1) • $e_i - e_j \in A_n$, $i \neq j$

$$e_i - e_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -i \\ \\ \\ -j \\ \\ \\ \\ \end{array} \;, \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 0 \;, \quad \|e_i - e_j\|^2 = 2$$

$\Rightarrow \{e_i - e_j \mid i \neq j\} \subseteq A_n$.

• Aus $\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 = 2 \Rightarrow \exists\, i \neq j$ mit $\begin{array}{l} \alpha_i = \pm 1 \\ \alpha_j = \pm 1 \end{array}$

Aus $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 0 \Rightarrow \alpha_i = \pm 1$, $\alpha_j = \mp 1$ (gekoppelt)

$\Rightarrow \alpha = e_i - e_j$ $i \neq j$ oder $e_j - e_i$ $i \neq j$

$\Rightarrow A_n \subset \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$.

• Aus $A_n = \{e_i - e_j \mid i \neq j\} \Rightarrow \operatorname{card} A_n = n \cdot (n+1)$.

(2) • $A_n = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ ist ein Wurzelsystem:

(i) A_n ist endlich ✓

$0 \notin A_n$ ✓

A_n erzeugt den $\operatorname{im}\phi$ $(\cong \mathbb{R}^n)$ ✓

(ii) $\alpha \in A_n \Rightarrow -\alpha \in A_n$ ✓

$\lambda \cdot \alpha \in A_n \Rightarrow \lambda = \pm 1$ ✓

(iii) Seien $\alpha, \beta \in A_n$

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha\rangle}{\underbrace{\|\alpha\|^2}_{2}} \cdot \alpha = \overset{A_n}{\beta} - \underbrace{\langle \beta, \alpha \rangle}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \overset{A_n}{\alpha} \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

Nun $$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\beta_i - \langle \beta, \alpha\rangle \cdot \alpha_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i}_{=0} - \langle \beta, \alpha \rangle \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}_{=0} = 0$$

$$\langle \sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta)\rangle \underset{\substack{\sigma_\alpha \in O(n+1) \\ \text{Lemma 1}}}{=} \langle \beta, \beta \rangle = 2.$$

Also $\sigma_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}^{n+1} \cap \operatorname{im}\phi$ und $\langle \sigma_\alpha\beta, \sigma_\alpha\beta\rangle = 2$

$\Rightarrow \sigma_\alpha(\beta) \in A_n$.

(iv) ✓

• $\Delta_n = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_n = e_n - e_{n+1}\}$ ist eine Basis

(i) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis von $\operatorname{im}\phi$: klar ✓

(ii) Sei $i < j$

$$\begin{aligned} e_i - e_j &= (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j) \\ &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1} \end{aligned}$$

□

Als nächstes bestimmen wir die Cartanmatrix von A_n bzgl. Δ_n und ihre Determinante.

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Es ist eine $(n \times n)$-Matrix, eine Jacobimatrix (vgl. Kapitel 14).

$$v(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 2 & i=j \\ -1 & j=i+1,\ j=i-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen wir die Determinante von A_n:

$n=1$: $A_1 = (2) \Rightarrow \det A_1 = 2 = 1+1$

$n=2$: $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 3 = 2+1$

Vermutung: $\det A_n = n+1$

Beweis (Induktion):

- $n=1$ ✓
- Entwicklung nach letzter Zeile:

$$\det A_n = 2 \cdot \det(A_{n-1}) + 1 \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{(-1)\cdot \det A_{n-2}}$$

$$= 2 \cdot n - n + 1 = \underset{\sim}{n+1}$$

□

Satz 6. ($A_n, n \geq 1$)

$A_n = \{ e_i - e_j \mid 1 \leq i,j \leq n+1, \, i \neq j \} \subset \operatorname{im}\phi \cong \mathbb{R}^n$ ist ein Wurzelsystem vom Rang n $(n \geq 1)$, mit $n \cdot (n+1)$ Wurzeln.

Seine Cartanmatrix hat die Form

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\Delta_n = \{ \alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots\ldots, \alpha_n = e_n - e_{n+1} \}$.

Die Cartanmatrix hat Determinante $\underline{n+1}$.

□

(b) <u>Typ B_n, $n \geq 2$.</u>

$\underline{B_n \subseteq \mathbb{R}^n}$, $\boxed{\begin{aligned} B_n &= \{ \alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 1 \text{ oder } 2 \} \\ &\underset{\text{(klar)}}{=} \{ \pm e_i \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n \} \end{aligned}}$

Satz 7 ($B_n, n \geq 2$)

$B_n = \{ \pm e_i \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n \} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Wurzelsystem vom Rang n mit $2n^2$ Wurzeln.

Seine Cartanmatrix hat die Form

$$B_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\Delta_n = \{ \alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = e_n \}$

Weiter gilt: $\underline{\det B_n = 2}$

Beweis: Übung: Serie 3. $\square$

(c) Typ C_n, $n \geq 3$

Satz 8. (C_n, $n \geq 3$)

$C_n = \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Wurzelsystem vom Rang n mit $2n^2$ Wurzeln.
Seine Cartanmatrix hat die Form

$$C_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\Delta_n = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = 2e_n\}$.
$\det C_n = 2$.

Beweis: Übung Serie 3. $\square$

Bemerkung: $B_n = C_n^T$ (C_n ist zu B_n dual)

(d) Typ D_n, $n \geq 4$

$$D_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 2\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{klar.}}}{=} \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Satz 9. (D_n, $n \geq 4$)

$D_n = \{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n \} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Wurzelsystem vom Rang n mit $2n(n-1)$ Wurzeln.

Seine Cartanmatrix hat die Form

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\Delta_n = \{ \alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = e_{n-1} + e_n \}$

$\underline{\operatorname{Det} D_n = 4}$.

Beweis: Übung Serie 3.

(e) Typ E_6

Sei $V = \{ x = (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid x_6 = x_7 = -x_8 \} \subset \mathbb{R}^8$

$\dim_{\mathbb{R}} V = 6$.

$$E_6 = \{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 5 \} \cup \left\{ \pm \tfrac{1}{2} \left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{t_i} e_i \right) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} t_i \text{ gerade},\ t_i \in \{0,1\} \right\}$$

$E_6 \subset V$: $\{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 5 \} \subset V$ klar.

$$\left\{ \pm \tfrac{1}{2} \left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{t_i} e_i \right) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} t_i \text{ gerade},\ t_i \in \{0,1\} \right\} \ni \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = (*, *, *, *, *, \underbrace{-1/2}_{x_6}, \underbrace{-1/2}_{x_7}, \underbrace{1/2}_{x_8})$$

$$\Rightarrow x_6 = x_7 = -x_8 \Rightarrow \alpha \in V.$$

Satz 10. (E_6)

$$E_6 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \cup \left\{\pm \tfrac{1}{2}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{t_i} e_i\right) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} t_i \text{ gerade}, \; t_i \in \{0,1\}\right\} \subset V$$

ist ein Wurzelsystem vom Rang 6 mit 72 Wurzeln.
Seine Cartanmatrix bezüglich der Basis

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_8) - \tfrac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7), \quad \alpha_2 = e_1 + e_2$$

$$\alpha_3 = e_2 - e_4, \quad \alpha_4 = e_3 - e_2, \quad \alpha_5 = e_4 - e_3, \quad \alpha_6 = e_5 - e_4$$

($\alpha_1, \dots, \alpha_6$ ist eine Basis von V)

ist die Matrix

$$E_6 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit $\det E_6 = 3$.

Beweis: Übung Serie 4. $\square$

(f) **Typ E_7**

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^8$ die Hyperebene orthogonal zu $(0, \dots, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^8$.
Also

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid \langle x, (0, \dots, 1, 1)\rangle = 0\}$$
$$= \{x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid x_7 + x_8 = 0\}$$

$\dim_{\mathbb{R}} V = 7$.

Sei $E_7 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \cup \left\{\pm \tfrac{1}{2}\left(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{t_i} e_i\right) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{6} t_i \text{ ungerade}, \; t_i \in \{0,1\}\right\}$

Es gilt: $E_7 \subset V$.

<u>Satz 11.</u> (E_7)

$E_7 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \cup \left\{\pm \frac{1}{2}\left(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{t_i} e_i\right) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{6} t_i \text{ ungerade}\right\} \subset V$

ist ein Wurzelsystem vom Rang 7 mit 126 Wurzeln.

Seine Cartanmatrix bezüglich der Basis

$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7)$, $\alpha_2 = e_1 + e_2$

$\alpha_3 = e_2 - e_1$, $\alpha_4 = e_3 - e_2$, $\alpha_5 = e_4 - e_3$, $\alpha_6 = e_5 - e_4$

$\alpha_7 = e_6 - e_5$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_7$ ist eine Basis von V)

ist die Matrix

$$E_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit $\det E_7 = 2$.

<u>Beweis:</u> Übung Serie 4. $\square$

(g) <u>Typ E_8</u>

<u>Satz 12.</u> (E_8)

$E_8 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{t_i} e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{8} t_i \text{ gerade}, t_i \in \{0,1\}\right\} \subseteq \mathbb{R}^8$

ist ein Wurzelsystem vom Rang 8 mit 240 Wurzeln.

Seine Cartanmatrix bezüglich der Basis

$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7)$, $\alpha_2 = e_1 + e_2$,

$\alpha_3 = e_2 - e_1$, $\alpha_4 = e_3 - e_2$, $\alpha_5 = e_4 - e_3$, $\alpha_6 = e_5 - e_4$,

$\alpha_7 = e_6 - e_5$, $\alpha_8 = e_7 - e_6$ (Basis des $\mathbb{R}^8$)

ist die Matrix

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit $\det E_8 = 1$.

Beweis. Übung Serie 4.

$\square$

(h) Typ F_4

Satz 13. (F_4)

$F_4 = \{\pm e_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\tfrac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$

ist ein Wurzelsystem vom Rang 4 mit 48 Wurzeln.
Seine Cartanmatrix hat die Form

$$F_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis

$$\alpha_1 = e_2 - e_3 \;,\; \alpha_2 = e_3 - e_4 \;,\; \alpha_3 = e_4 \;,\; \alpha_4 = \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

$\det F_4 = 1$

Beweis. Übung Serie 4 □

(i) Typ G_2

Dieses Wurzelsystem haben wir schon auf p. 15 untersucht. Wir geben hier noch einmal eine andere Beschreibung.
Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ die Hyperebene gegeben durch

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}.$$

Satz 14. (G_2)

$$G_2 = \{ \pm(e_1 - e_2), \pm(e_1 - e_3), \pm(e_2 - e_3), \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2) \} \subset V$$

ist ein Wurzelsystem vom Rang 2 mit 12 Wurzeln.
Die Cartanmatrix von G_2 bezüglich der Basis

$$\alpha_1 = e_1 - e_2 \;,\; \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3$$

ist die Matrix
$$G_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

mit $\det G_2 = 1$.

Beweis.

$$\varphi : V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^2 \;,\; \alpha_1 \longmapsto (1,0) \;,\; \alpha_2 \longmapsto \left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ist ein Isomorphismus, der G_2 von Satz 14 in G_2 von p 15 überführt.
und $v(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = v(\alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in G_2$ von Satz 14. □

<u>Definition</u>. Zwei Wurzelsysteme (V_1, R_1) und (V_2, R_2) heissen <u>isomorph</u>, falls es einen Isomorphismus

$$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$$

gibt, der R_1 in R_2 überführt, dh. $\varphi(R_1) = R_2$ und so dass $v(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = v(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in R_1$ ist.

(vgl. Beweis Satz 14!)

<u>Lemma 15.</u>

Sei $V = V_1 \oplus V_2$ und $R = R_1 \cup R_2$ mit $R_i \subset V_i$ $i = 1, 2$. Dann sind die R_i Wurzelsysteme von V_i und <u>R ist die Summe von R_1 und R_2</u>. Insbesondere ist V_1 orthogonal zu V_2.

<u>Beweis</u>.

Da $V = V_1 \oplus V_2$ folgt, dass $R_1 = R \cap V_1$ und $R_2 = R \cap V_2$.

(a) V_1 ist orthogonal zu V_2

Sei $\alpha \in R_1$ und $\beta \in R_2$ $\underset{\text{direkte Summe!}}{\Longrightarrow}$ $\alpha - \beta \notin V_1 \cup V_2$ $\Longrightarrow \alpha - \beta \notin R$

Nach Lemma 3 (i) folgt: $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$

Analog folgt, dass $\alpha + \beta \notin V_1 \cup V_2$ und wiederum mit Lemma 3 (ii) $\langle \alpha, \beta \rangle \geq 0$

Also: $\underline{\langle \alpha, \beta \rangle = 0}$

Da R_1 den Vektorraum V_1 und R_2 den Vektorraum V_2 erzeugen (R erzeugt $V = V_1 \oplus V_2$!) folgt, dass V_1 orthogonal zu V_2 ist.

(b) R_i ist ein Wurzelsystem von V_i.

(i) $0 \notin R_i$, R_i endlich, R_i erzeugt V_i (klar)

(ii) klar.

(iii) Sei $\alpha \in R_i$. $\sigma_\alpha(R_i) \subset R_i$

Sei etwa $\alpha \in R_1$. Es genügt zu zeigen, dass $\sigma_\alpha(V_2) = V_2$ ist denn dann folgt, dass $\sigma_\alpha(V_1) = V_1$ $(V = V_1 \oplus V_2)$

und insbesondere auch, dass $\sigma_\alpha(R_1) \subset R_1$.

Sei $x \in V_2$.

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\cdot\alpha \quad = x, \text{ da } \langle x,\alpha\rangle = 0 \text{ nach (a)}$$

(iv) klar, da R ein Wurzelsystem.

□

<u>Definition.</u> Ein Wurzelsystem (V,R) heisst *reduzibel*, falls es sich in eine Summe von zwei nichtleeren Wurzelsystemen zerlegen lässt. (vgl. Lemma 15). Sonst heisst es *irreduzibel*.

<u>Beispiele.</u>
- $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ sind irreduzibel
- $A_1 \times A_1$ ist reduzibel.

<u>Satz 16</u> (Klassifikation)
Jedes irreduzible Wurzelsystem ist <u>isomorph</u> zu genau einem der folgenden:

A_n $(n \geq 1)$
B_n $(n \geq 2)$
C_n $(n \geq 3)$
D_n $(n \geq 4)$

$$\left.\begin{array}{l} E_6 \\ E_7 \\ E_8 \\ F_4 \\ G_2 \end{array}\right\} \text{Ausnahmewurzelsysteme.}$$

Um diesen Satz in den "Griff" zu bekommen, benötigen wir noch einiges an Arbeit.

§7. Die Weylgruppe

Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Wurzelsystem.

Definition. Die Weylgruppe W von R ist die kleinste Untergruppe von $O(n)$, welche die $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in R\}$ enthält.

Man sagt auch, W wird erzeugt von $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in R\}$ und schreibt dafür

$$W = \langle \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in R\} \rangle < O(n)$$

Also jedes Element $w \in W$ lässt sich als ein Produkt der σ_α schreiben, dh.

$$w = \sigma_{\alpha_1} \cdot \sigma_{\alpha_2} \cdot \ldots \sigma_{\alpha_k} .$$

Wir möchten nun wissen ob die Weylgruppe W endlich ist, oder nicht.

Dazu beachte man, dass aus "kleinste Untergruppe" nicht "endlich" folgt, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $S^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (Gruppe bzgl. Multiplikation)

Nun $e^{i\sqrt{2}} \in S^1$.

Frage: Ist die kleinste Untergruppe von S^1 erzeugt von $e^{i\sqrt{2}}$ endlich?

Antwort:

Annahme $W = \langle e^{i\sqrt{2}} \rangle$ endlich

$\Rightarrow e^{i\sqrt{2}} = e^{in\sqrt{2}}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ (da W endlich!!)

$\Rightarrow e^{(n-1)i\sqrt{2}} = 1 \quad \Rightarrow (n-1)\, i\sqrt{2} = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (n-1)\sqrt{2} = 2k\pi$

$\Rightarrow \dfrac{(n-1)\sqrt{2}}{2k} = \pi \quad \Rightarrow \dfrac{(n-1)^2}{2k^2} = \pi^2$

dh. π^2 ist eine rationale Zahl, dies ist aber ein Widerspruch, da π^2 irrational ist.

$\rightarrow W = \langle e^{i\sqrt{2}} \rangle$ unendlich.

Trotzdem gilt folgender Satz:

Satz 17. Die Weylgruppe W von $R \subset \mathbb{R}^n$ ist endlich.

Beweis.

Nach Definition (i) eines Wurzelsystems ist R endlich, also

$$R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$$

Sei $S(R) = \{\varphi : R \to R \mid \varphi \text{ bijektiv}\}$. Definiere auf $S(R)$ folgende Operation:

$$\begin{aligned} \circ : S(R) \times S(R) &\longrightarrow S(R) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \circ \psi \quad \text{(Verknüpfung)}. \end{aligned}$$

Nun $(S(R), \circ)$ ist eine Gruppe und da $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ gibt es einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : S(R) &\xrightarrow{\cong} S_k \\ \varphi &\longmapsto \pi \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$\pi(i) = j \iff \varphi(\alpha_i) = \alpha_k.$$

(vgl. Lineare Algebra I, p. 100)

Damit ist $\operatorname{ord}(S(R)) = \operatorname{ord} S_k = k!$

Nach Def (iii) eines Wurzelsystems gilt: $\sigma_\alpha(R) \subset R \quad \forall \alpha \in R$.
Nach Def (i) erzeugt R den $\mathbb{R}^n$ und $\sigma_\alpha \in O(n)$.

Also: $\sigma_\alpha : R \to R$ bijektiv, $\alpha \in R$

$\Rightarrow \sigma_\alpha \in S(R)$.

Damit ist die Weylgruppe W eine Untergruppe von $S(R)$ und somit gilt:

$$\operatorname{ord} W = \underline{|W| \leq k!} = \operatorname{ord} S(R).$$

$\square$

Lemma 18. Seien (R_1, V_1) und (R_2, V_2) isomorphe Wurzelsysteme. Dann sind die Weylgruppen W_1 von R_1 und W_2 von R_2 isomorph (als Gruppen).

Beweis.

Sei $\phi : V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$ der Isomorphismus der Wurzelsysteme,

d.h. $\phi(R_1) = R_2$ und $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \ \forall \alpha, \beta \in R_1$.

Sei $\varphi \in W_1 < O(V_1) < \mathrm{Aut}(V_1)$

Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & V_2 \arrow[d, dashed, "\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1}"] \\ V_1 \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Beh.: $\phi \varphi \phi^{-1} \in W_2$

Da W_1 von $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in R_1\}$ erzeugt wird, genügt es die Behauptung für $\varphi = \sigma_\alpha$, $\alpha \in R_1$ zu zeigen.

Sei $\gamma \in R_2$. Dann gibt es ein $\beta \in R_1$ mit $\phi(\beta) = \gamma$.

$$\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\gamma) = \phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\phi(\beta)) = \phi \circ \sigma_\alpha(\beta)$$

$$= \phi\left(\beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \phi \text{ linear.}}}{=} \phi(\beta) - 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}\phi(\alpha)$$

$$= \phi(\beta) - 2\frac{\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle}{\|\phi(\alpha)\|^2} \cdot \phi(\alpha) \quad = \sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))$$

Also: $\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\phi(\beta)) = \sigma_{\phi(\alpha)} \phi(\beta)$.

Da R_2 den Vektorraum V_2 erzeugt, folgt

$$\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1} = \sigma_{\phi(\alpha)} \in W_2. \qquad \forall \alpha \in R_1$$

$$\Rightarrow \phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} \in W_2 \quad \forall \varphi \in W_1.$$

Somit haben wir folgenden Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\Phi} : W_1 \longrightarrow W_2, \quad \varphi \longmapsto \phi \circ \varphi \circ \phi^{-1}.$$

$$\tilde{\Phi}(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \phi \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \phi^{-1} = (\phi \varphi_1 \phi^{-1})(\phi \varphi_2 \phi^{-1})$$
$$= \tilde{\Phi}(\varphi_1) \cdot \tilde{\Phi}(\varphi_2).$$

Analog bekommen wir einen Gruppenhomo.

$$\tilde{\Psi} : W_2 \longrightarrow W_1, \quad \psi \longmapsto \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi$$

Nun $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi}(\psi) = \tilde{\Phi}(\phi^{-1} \psi \phi) = \phi(\phi^{-1} \psi \phi)\phi^{-1} = \psi$

$\Rightarrow \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi} = id_{W_2}$

$$\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi}(\varphi) = \tilde{\Psi}(\phi \varphi \phi^{-1}) = \phi^{-1}(\phi \varphi \phi^{-1})\phi = \varphi$$

$\Rightarrow \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} = id_{W_1}$

Also $\tilde{\Phi} : W_1 \longrightarrow W_2$ ist ein Gruppeniso. $\square$

Als nächstes möchten wir zeigen, dass die Weylgruppe W des Wurzelsystems R von den σ_α, $\alpha \in \Delta$, wobei Δ eine Basis von R ist, erzeugt wird. (Dies wurde in der Vorlesung bei der Berechnung der Weylgruppe für A_n ohne Warnung benutzt, jedoch nicht bei unserem Beweis p. 43)

Dazu benötigen wir folgendes einfache Lemma:

Lemma 19. Sei R ein Wurzelsystem mit Basis Δ. Weiter bezeichne $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \cdot \beta \text{ mit } k_\beta \geq 0, k_\beta \in \mathbb{Z}\}$ die positiven Wurzeln (vgl. p. 20).

Sei $\alpha \in \Delta$. Dann permutiert σ_α die positiven Wurzeln $R^+ - \{\alpha\}$.

Beweis. Sei $\beta \in R^+ - \{\alpha\}, \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \cdot \gamma \quad , k_\gamma \geq 0$.

Da β nicht proportional zu α $(\beta \neq \pm\alpha)$ folgt, dass es ein $\gamma_0 \neq \alpha$ mit $k_{\gamma_0} > 0$ gibt (in der Zerlegung von β).

Nun der Koeffizient von γ_0 in $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \cdot \alpha$

ist immer noch k_{γ_0}.

Da $\sigma_\alpha(\beta) \in R$ und $k_{\gamma_0} \geq 0 \implies \sigma_\alpha(\beta) \in R^+$.

Weiter ist $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$, da $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$.

Also: σ_α permutiert $R^+ - \{\alpha\}$. $\square$

Korollar 20. Sei $\delta = \frac{1}{2} \sum'_{\beta \in R^+} \beta$. Dann gilt:

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha \qquad \forall \alpha \in \Delta.$$

Beweis.

Nach Lemma 19 permutiert σ_α die Wurzeln $R^+ - \{\alpha\}$.
Weiter ist $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Also:
$$\sigma_\alpha(\delta) = \sigma_\alpha\Big(\frac{1}{2}\sum'_{\beta \in R^+} \beta\Big) = \sigma_\alpha\Big(\frac{1}{2}\sum_{\beta \in R^+ - \{\alpha\}} \beta\Big) + \sigma_\alpha\Big(\frac{1}{2}\alpha\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\sum'_{\beta \in R^+ - \{\alpha\}} \beta - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sum'_{\beta \in R^+ - \{\alpha\}} \beta + \frac{1}{2}\alpha - \alpha$$

$$= \delta - \alpha.$$

$\square$

Satz 21. Sei Δ eine Basis von $R \subseteq \mathbb{R}^n$, W die Weylgruppe von R.

(a) Sei $\gamma \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha$. Dann gibt es ein $\sigma \in W$ mit

$$\langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

(b) Falls Δ' eine andere Basis von R ist, so gibt es ein $\sigma \in W$ mit
$$\sigma(\Delta') = \Delta.$$

(c) Sei $\alpha \in R$. Dann gibt es $\sigma \in W$ mit $\sigma(\alpha) \in \Delta$.

(d) $W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.

__Beweis.__ Sei $\tilde{W} = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$. Es ist klar, dass $\tilde{W} \leq W$ ist.
Wir zeigen (a) - (c) für $\tilde{W}$, und schliessen dann, dass $\tilde{W} = W$ ist.

(a) Sei $\delta = \frac{1}{2} \sum'_{\beta \in R^+} \beta$. Wähle ein $\sigma \in \tilde{W}$ mit $\langle \sigma(\gamma), \delta \rangle$ __maximal__.

Sei $\alpha \in \Delta \Rightarrow \sigma_\alpha \cdot \sigma \in \tilde{W}$

__Also:__ $\langle \sigma(\gamma), \delta \rangle \underset{\text{maximal}}{\geq} \langle \sigma_\alpha \cdot \sigma(\gamma), \delta \rangle \underset{\substack{\sigma_\alpha \in O(n) \\ \sigma_\alpha^2 = \mathrm{id}}}{=} \langle \sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta) \rangle$

$$\underset{\text{Korollar 19}}{=} \langle \sigma(\gamma), \delta - \alpha \rangle$$

$$= \langle \sigma(\gamma), \delta \rangle - \langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle$$

$\Rightarrow \quad \langle \sigma(\gamma), \delta \rangle \geq \langle \sigma(\gamma), \delta \rangle - \langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle$

$\Rightarrow \quad 0 \geq - \langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle$

$\Rightarrow \quad \underline{0 \leq \langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle}. \quad \forall \alpha \in \Delta.$

Da $\gamma \in \mathbb{R}^n - \bigcup_{\alpha \in R} E_\alpha \quad \Rightarrow \langle \gamma, \alpha \rangle \neq 0 \quad \forall \alpha \in R$

$\sigma \in \tilde{W} < W \quad : \quad \langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle \underset{\sigma \in O(n)}{=} \langle \gamma, \underbrace{\sigma^{-1}(\alpha)}_{\in R, \text{ da } \sigma \in W} \rangle \neq 0$

$\Rightarrow \quad \underline{\langle \sigma(\gamma), \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta}.$

(b) Sei $\gamma' \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \gamma', \alpha' \rangle > 0 \quad \forall \alpha' \in \Delta'$.

Nach p. 20 (Satz 4 bis) $\Rightarrow \quad \Delta' = \Delta(\gamma')$

Nach (a) gibt es ein $\sigma \in \tilde{W}$ mit

$$\langle \underbrace{\sigma(\gamma')}_{\gamma}, \alpha \rangle > 0 \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

Wiederum nach p. 20 folgt: $\Delta = \Delta(\gamma)$

Nun $\sigma(\gamma') = \gamma \quad \Rightarrow \sigma(\Delta') = \Delta$:

$\Delta' = \Delta(\gamma') = \{ \alpha' \in R^+(\gamma') \mid \alpha' \text{ unzerlegbar} \}$

$\Delta = \Delta(\gamma) = \{ \alpha \in R^+(\gamma) \mid \alpha \text{ unzerlegbar.} \}$

Sei $\alpha' \in \Delta(\gamma') \quad \Rightarrow \langle \alpha', \gamma' \rangle > 0$

$\Rightarrow \langle \underbrace{\sigma(\alpha')}_{\in R}, \underbrace{\sigma(\gamma')}_{=\gamma} \rangle > 0$

$\Rightarrow \sigma(\alpha') \in \Delta(\gamma) \qquad$ (unzerlegbar klar).

$\Rightarrow \sigma(\Delta') \subset \Delta$

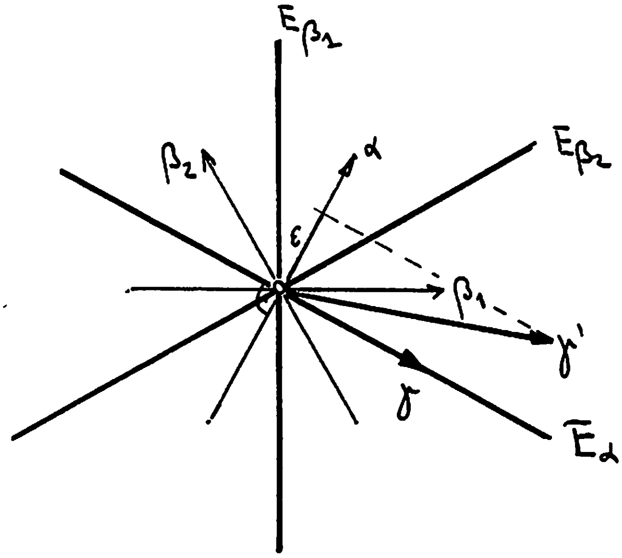
Umgekehrt analog mit σ^{-1}.

(c) Nach (b) genügt es zu zeigen, dass jede Wurzel in einer Basis von R liegt, denn dann gibt es ein $\sigma \in \tilde{W}$, das die Basen ineinander überführt.
Sei $\alpha \in R$. Die Hyperebenen E_β, $\beta \neq \pm\alpha$ sind verschieden von E_α (da die einzigen zu α proportionalen Wurzeln $\pm\alpha$ sind, vgl. Def. (ii) von Wurzelsystem).
Also gibt es ein $\gamma \in E_\alpha$ mit $\gamma \notin E_\beta \; \forall \beta \neq \pm\alpha$
(Warum? Hinweis: R <u>endlich</u>).

Wähle γ' genügend nahe bei γ mit

$$\langle \gamma', \alpha\rangle = \varepsilon > 0 \quad \text{und } |\langle \gamma', \beta\rangle| > \varepsilon\ ,\ \beta \neq \pm\alpha .$$

Bsp.



$$\Rightarrow \alpha \in \Delta(\gamma') = \{\beta \in R^+(\gamma') \mid \beta \text{ unzerlegbar}\}:$$

$$R^+(\gamma') = \{\beta \in R \mid \langle \beta, \gamma'\rangle > 0\}$$

Also: da $\langle \gamma', \alpha\rangle > 0 \Rightarrow \alpha \in R^+(\gamma')$

Annahme $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ mit $\beta_i \in R^+(\gamma')$ $i = 1,2$

$$\Rightarrow \varepsilon = \langle \gamma', \alpha\rangle = \underbrace{\langle \gamma', \beta_1\rangle}_{>\varepsilon} + \underbrace{\langle \gamma', \beta_2\rangle}_{>\varepsilon} > 2\varepsilon \quad \text{↯}.$$

$\Rightarrow$ $\alpha \in \Delta(\gamma')$.

(d) zu zeigen: $W \leq \tilde{W}$

Es genügt zu zeigen, dass alle σ_α, $\alpha \in R$ in $\tilde{W}$ liegen.

Sei $\alpha \in R$. Nach (c) gibt es ein $\sigma \in \tilde{W}$ mit $\underset{\beta}{\underset{\|}{\sigma(\alpha)}} \in \Delta$.

$\Rightarrow \sigma_\beta = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ (Prüfe!)

$\Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \tilde{W}$. Also $W = \tilde{W}$. $\square$

Satz 22. Die Weylgruppe von A_n ist S_{n+1}. Sie hat somit die Ordnung $(n+1)!$

Beweis. W bezeichne die Weylgruppe von A_n.

1. Schritt:

Für alle $w \in W$ gilt: $w\{e_1, \dots, e_{n+1}\} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$

Beweis: Für jedes $\alpha = e_i - e_j \in A_n$ gilt

$\sigma_\alpha\{e_1, \dots, e_{n+1}\} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$

(einfache Rechnung)

Nun $W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in R \rangle \Rightarrow$ Beh. ⌟

2. Schritt: Wir definieren einen Gruppenhomo

$$\varphi : W \longrightarrow S_{n+1}$$
$$w \longmapsto \varphi(w) \quad \text{mit} \quad w \cdot e_i = e_{\varphi(w)(i)}$$

- φ ist ein Gruppenhomo. (Übung)
- $\varphi(\sigma_{e_i - e_j}) = (i,j)$ Transposition.

$\overset{}{\underset{\text{Kap. 9}}{\Longrightarrow}}$ φ surjektiv.

- $\varphi(w) = 1 \Rightarrow w \cdot e_i = e_i \Rightarrow w = 1$, da $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

$\Rightarrow$ φ injektiv.

$\square$

Um die Weylgruppen für die Wurzelsysteme B_n, C_n, D_n beschreiben zu können, benötigen wir Semidirekte Produkte von Gruppen.

1. Direktes Produkt von Gruppen

Seien H_1, H_2 beliebige Gruppen (multiplikativ geschrieben)

Definition. $G = H_1 \times H_2 = \{ (h_1, h_2) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 \}$ mit der Gruppenmultiplikation

$$(h_1, h_2) \cdot (g_1, g_2) := (h_1 \cdot g_1, h_2 \cdot g_2)$$

heisst das (äussere) direkte Produkt von H_1 und H_2.

Übung: $G = H_1 \times H_2$ ist eine Gruppe mit der oben definierten Gruppenmultiplikation.

Universelle Eigenschaft des direkten Produktes:

Seien H_1, H_2, K Gruppen, $f_i : K \longrightarrow H_i$ Gruppenhomo.

$\Rightarrow \exists!$ Gruppenhomo. $\varphi : K \longrightarrow H_1 \times H_2$ mit

$$pr_i \circ \varphi = f_i \quad (i = 1, 2)$$

wobei
$$pr_i : \begin{array}{ccc} H_1 \times H_2 & \longrightarrow & H_i \\ (h_1, h_2) & \longmapsto & h_i \end{array}$$ die Projektionshomo. $(i = 1, 2)$

$$\begin{tikzcd}
 & & H_1 \\
K \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\varphi"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & & H_1 \times H_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
 & & H_2
\end{tikzcd}$$

Beweis: $\exists$ eine Mengenabbildung $\varphi : K \longrightarrow H_1 \times H_2$, nämlich $\varphi(k) = (f_1(k), f_2(k))$. Da f_1, f_2 Gruppenhomo $\Rightarrow \varphi$ Gruppenhomo. Eindeutigkeit ist klar. $\square$

2. Semidirekte Produkte.

Seien H_1, H_2 Gruppen, $\phi : H_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1)$ ein Gruppenhomo. (eine Operation von H_2 auf H_1).

Wir definieren nun auf $H_1 \times H_2$ (als Menge) eine neue innere Verknüpfung :

$$(h_1, h_2) \cdot (g_1, g_2) := (h_1 \phi(h_2)(g_1) \; , \; h_2 \cdot g_2)$$

Man rechnet ohne Schwierigkeiten nach, dass $H_1 \times H_2$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist. Diese heisst semidirektes Produkt von H_1 und H_2 bzgl. ϕ und wird mit $H_1 \rtimes_\phi H_2$ oder einfach $H_1 \rtimes H_2$ bezeichnet.

Beachte: Es ist wichtig, dass der senkrechte Strich in $\rtimes$ immer auf der Seite der Gruppe steht, die operiert!

Übung: Gib den Homo. $\phi : H_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1)$, so dass

$$H_1 \rtimes_\phi H_2 = H_1 \times H_2 \text{ ist.}$$

Definition. Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe in G ($H \leq G$). H heisst ein Normalteiler von G ($H \trianglelefteq G$), falls

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G.$$

Lemma 23. Seien H_1, H_2 Gruppen, $\phi : H_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1)$ ein Gruppenhomo., $G = H_1 \rtimes H_2$. Wenn wir $h_1 \in H_1$ mit $(h_1, 1)$ und $h_2 \in H_2$ mit $(1, h_2)$ identifizieren, so bekommen wir

(i) $G = H_2 \cdot H_1$

(ii) $H_1 \trianglelefteq G$

(iii) $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

Übung.

Satz 24.

(1) Die Weylgruppen von B_n und C_n sind isomorph zu

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$$

wobei S_n auf $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ durch Permutation der Komponenten operiert. Sie hat die Ordnung $2^n \cdot n!$

(2) Die Weylgruppe von D_n ist isomorph zu

$$\mathcal{U} \rtimes S_n$$

wobei $\mathcal{U} = \{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \mid \prod_{i=1}^n x_i = 1\}$
$(x_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\})$

und S_n operiert auf $\mathcal{U}$ durch Permutation der Komponenten. Sie hat die Ordnung $2^{n-1} \cdot n!$

Beweis.

(1) Sei W die Weylgruppe von B_n.

Schritt 1: $\forall w \in W$ gilt: $w \cdot \{e_1,\dots,e_n\} = \{\pm e_1,\dots,\pm e_n\}$

⌜ Für jedes $\alpha \in B_n$ zeigt man durch eine einfache Rechnung, dass $\sigma_\alpha \cdot \{e_1,\dots,e_n\} = \{\pm e_1,\dots,\pm e_n\}$ ist. ⌟

Schritt 2: Wir definieren einen Gruppenhomo.

$$\varphi: \quad W \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_\phi S_n \qquad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\})$$

$$w \longmapsto \varphi(w) = ((x_1,\dots,x_n),\sigma) \quad \text{durch}$$

$$w \cdot e_i = x_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$$

wobei $\phi: S_n \longrightarrow \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)$

$$\tau \longmapsto ((x_1,\dots,x_n) \longmapsto (x_{\tau^{-1}(1)},\dots,x_{\tau^{-1}(n)})).$$

• φ Gruppenhomo.

$w_1, w_2 \in W$.

$\varphi(w_1) = ((x_1, \dots, x_n), \sigma) \quad ; \quad \varphi(w_2) = ((y_1, \dots, y_n), \tau)$

$\varphi(w_1 \cdot w_2) = ((z_1, \dots, z_n), \alpha)$

$$(w_1 \cdot w_2) \cdot e_i = z_{\alpha(i)} \cdot e_{\alpha(i)}$$
$$\parallel$$
$$w_1 \cdot (w_2 \cdot e_i) = w_1 (y_{\tau(i)} \cdot e_{\tau(i)}) = x_{\sigma\circ\tau(i)} \cdot y_{\tau(i)} \cdot e_{\sigma\circ\tau(i)}$$

$$\Rightarrow \varphi(w_1 \cdot w_2) = ((x_1 \cdot y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_n \cdot y_{\sigma^{-1}(n)}), \sigma\circ\tau)$$

(Beachte $(w_1 \cdot w_2) \cdot e_i = x_{\alpha(i)} \cdot y_{\sigma^{-1}\alpha(i)} \cdot e_{\alpha(i)} \qquad \alpha = \sigma\circ\tau$
$\qquad = x_{\sigma\circ\tau(i)} \cdot y_{\tau(i)} \cdot e_{\sigma\circ\tau(i)}$)

Andererseits:

$$\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = ((x_1, \dots, x_n), \sigma) \cdot ((y_1, \dots, y_n), \tau)$$
$$\overset{\text{semidirekt!}}{=} ((x_1 y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_n \cdot y_{\sigma^{-1}(n)}), \sigma\tau)$$
$$= \varphi(w_1 \cdot w_2).$$

• φ injektiv: $\quad \varphi(w) = 1 \Rightarrow w \cdot e_i = 1 \cdot e_i \longrightarrow w = \mathbb{1}$,

da $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis des $\mathbb{R}^n$.

• φ surjektiv: $\quad \varphi(\sigma_{e_i - e_j}) = ((1, \dots, 1), \underbrace{(i,j)}_{\text{Transp.}})$

(2) Übung.

$\square$

§ 8. Cartan Matrix

Satz 25. Ein Wurzelsystem ist bis auf Isomorphie eindeutig durch seine Cartan-Matrix bestimmt.

Beweis Seien (R,V) und (R',V') Wurzelsysteme mit Basen Δ und Δ'.
Weiter sei $f: \Delta \longrightarrow \Delta'$ eine Bijektion mit

$$v(f(\alpha), f(\beta)) = v(\alpha,\beta) \quad \forall \alpha,\beta\in\Delta,$$

dh. (R,V) und (R',V') haben dieselbe Cartanmatrix.

zu zeigen: f lässt sich zu einem Vektorraumisomorphismus

$$F: V \longrightarrow V'$$

erweitern mit $F(R) = R'$ und $v(F(\alpha),F(\beta)) = v(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in R$.

Definiere F als lineare Erweiterung von f. Dann ist $F: V \xrightarrow{\sim} V'$ ein VR Isomorphismus.
Seien nun $\alpha,\beta\in\Delta$. Da $v(\alpha,\beta) = v(F(\alpha),F(\beta))$ folgt

$$\sigma_{F(\alpha)}F(\beta) = F(\beta) - \underbrace{v(F(\alpha)\cdot F(\beta))}_{v(\alpha,\beta)}\cdot F(\alpha) = F\big(\beta - v(\alpha,\beta)\cdot\alpha\big)$$
$$= F(\sigma_\alpha(\beta)).$$

dh. das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V' \\ {\scriptstyle\sigma_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma_{F(\alpha)}} \\ V & \xrightarrow{F} & V' \end{array}$$

Damit bekommen wir einen Isomorphismus der Weylgruppen

$$\begin{aligned} W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha\in\Delta\rangle &\longrightarrow W' = \langle \sigma_{\alpha'} \mid \alpha'\in\Delta'\rangle \\ \sigma &\longmapsto F\circ\sigma\circ F^{-1} \\ \sigma_\alpha &\longmapsto \sigma_{F(\alpha)} \end{aligned}$$

Sei nun $\beta\in R$. Nach Satz 21(c) gibt es ein $\sigma\in W$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$, $\alpha\in\Delta$.

$$\Rightarrow F(\beta) = F\circ\sigma(\alpha) = \underbrace{F\circ\sigma\circ F^{-1}}_{\in W'}\underbrace{F(\alpha)}_{\in\Delta',\text{ da }\alpha\in\Delta} \in R' \implies F(R) = R'.$$

Dass $\upsilon(F(\alpha), F(\beta)) = \upsilon(\alpha,\beta) \quad \forall \alpha,\beta \in R$ überlassen wir dem Leser. $\square$

§9. Coxetergraph und Dynkindiagramm

Sei R ein Wurzelsystem vom Rang n, Δ eine Basis von R. Wir wissen bereits von p. 16, dass für $\alpha,\beta \in R$, $\alpha \neq \pm\beta$ gilt

$$\upsilon(\alpha,\beta)\cdot \upsilon(\beta,\alpha) \in \{0,1,2,3\}.$$

Definition. Der *Coxetergraph* von R ist ein Graph mit n-Ecken. Die i-te Ecke wird mit der j-ten Ecke durch $\upsilon(\alpha_i,\alpha_j)\cdot\upsilon(\alpha_j,\alpha_i)$ Kanten verbunden, wobei $\Delta = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.

Beispiele:

(1) $A_1 \times A_1$, $\Delta = \{\alpha,\beta\}$, $\upsilon(\alpha,\beta)\cdot\upsilon(\beta,\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ Coxetergraph 

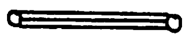
(2) A_2, $\Delta = \{\alpha,\beta\}$, $\upsilon(\alpha,\beta)\cdot\upsilon(\beta,\alpha) = 1$

$\Rightarrow$ Coxetergraph 

(3) B_2, $\Delta = \{\alpha,\beta\}$, $\upsilon(\alpha,\beta)\cdot\upsilon(\beta,\alpha) = 2$

$\Rightarrow$ Coxetergraph 

(4) G_2, $\Delta = \{\alpha,\beta\}$, $\upsilon(\alpha,\beta)\cdot\upsilon(\beta,\alpha) = 3$

$\Rightarrow$ Coxetergraph. 

(5) F_4, $\Delta = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$

Coxetergraph 

Durch den Coxetergraph sind die Zahlen $v(\alpha,\beta)$ nur dann bestimmt, wenn alle Wurzeln dieselbe Länge haben, d.h. $v(\alpha,\beta) = v(\beta,\alpha)$. Wenn die Wurzeln verschiedene Längen haben (z.B. B_2 oder G_2) gibt uns der Graph keine Auskunft darüber, welches Paar von zwei Ecken zu einer längeren bzw kürzeren Wurzel gehört (falls die Ecken durch zwei oder drei Kanten verbunden sind.).

Man kann jedoch zeigen, dass die Coxetergraphen die Weylgruppen vollständig bestimmen.

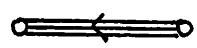
Um diesem Problem abzuhelfen, können wir bei doppel oder dreifach Kanten kleine Pfeile hinzufügen, die in die Richtung der kürzeren Wurzel zeigen. Diese zusätzliche Information erlaubt es nun die Cartan Zahlen $v(\alpha,\beta)$ von diesem Graph abzulesen.

Man nennt diese Graphen <u>Dynkin-Diagramme</u>.

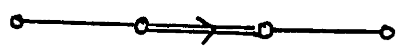
<u>Beispiele:</u>

(1) B_2

(2) G_2



(3) F_4



Man kann aus dem Dynkin Diagramm von F_4 leicht die Cartan Matrix ablesen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

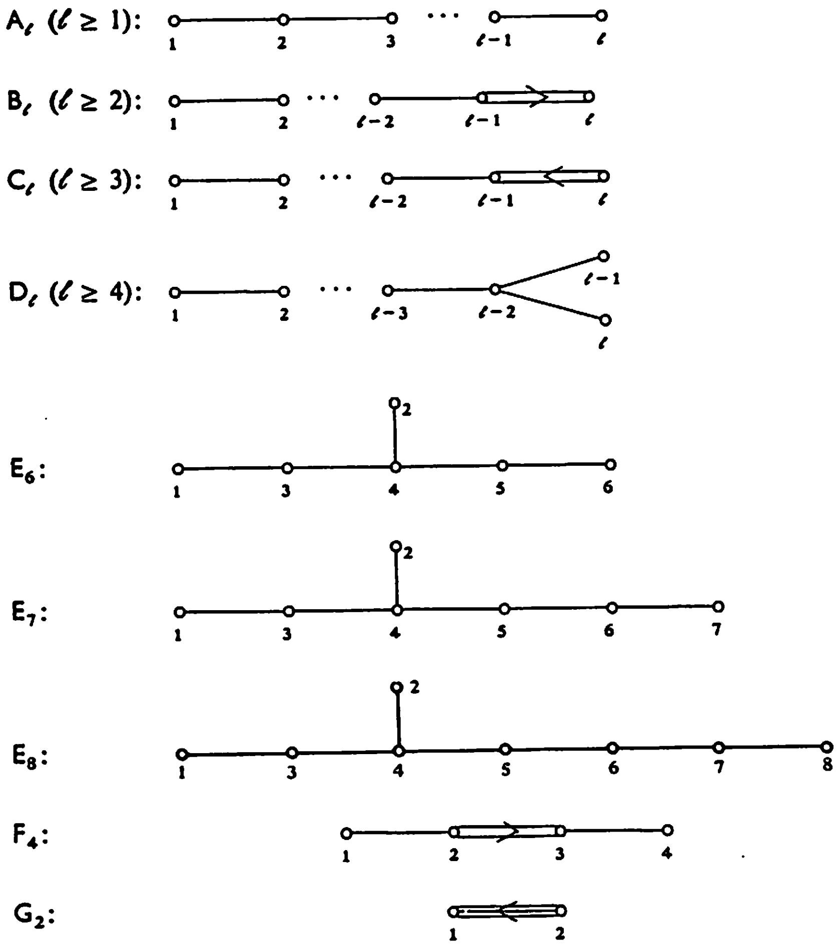
<u>Beachte</u>: $v(\alpha,\beta) < 0$ für $\alpha,\beta \in \Delta$ (vgl. p. 19 oben)

Lemma 26. Ein Wurzelsystem R ist irreduzibel, genau dann wenn zugehörige Coxetergraph zusammenhängend ist.

Beweis. klar. $\square$

Satz 27. (Klassifikation)

Jedes irreduzible Wurzelsystem hat eines der folgenden Dynkin-Diagramme:



Die Idee des Beweises ist es zuerst alle Coxetergraphen zu klassifizieren und dann zu schauen welche Dynkin Diagramme man haben kann (vgl. J. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, GTM 9 Springer).

§10. Wurzelsysteme und kompakte Lie Gruppen

In diesem Paragraphen wird ein Versuch unternommen zu zeigen, wozu man Wurzelsysteme braucht.

Definition.

$$C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \begin{array}{l} \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \psi(x_1,\dots,x_n) \end{array} \;\middle|\; \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_n}}{\partial x_n^{m_n}} \psi \text{ existiert } \forall m_1,\dots,m_n \geq 0 \right\}$$

die ∞-oft differenzierbaren Abbildungen $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad \text{heisst Laplace-Operator}$$

(part. Differentialoperator)

Lemma 28.
(1) $C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (∞-dimensional).

(2) $\Delta : C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ ist eine lineare Abbildung.

Beweis.
(1) $C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi, \psi \quad , \quad \mathbb{R} \ni \lambda, \mu$

$$(\varphi+\psi)(x_1,\dots x_n) := \varphi(x_1,\dots,x_n) + \psi(x_1,\dots,x_n)$$

$$(\lambda\cdot\varphi)(x_1,\dots,x_n) := \lambda\cdot\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

$$\Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$$

(2) $\Delta(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\cdot\Delta\varphi + \mu\cdot\Delta\psi$ klar. $\square$

Satz 29: (Symmetrien des Laplace-Operators)

Sei $B \in GL(n,\mathbb{R})$, $\psi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\Delta(\psi \circ B(x)) = (\Delta\psi)(Bx) \iff B \in O(n)$$

Also: der Laplace-Operator ist nur Drehinvariant.

Beweis.

Übung Serie 5

□

Sei $P(k_1, \dots, k_n) = \sum\limits_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}' c_{\alpha_1\dots\alpha_n} k_1^{\alpha_1} \dots k_n^{\alpha_n}$ ein Polynom

$c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Setze anstelle von $k_1, \dots, k_n$ die Operatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$

Dann bekommen wir einen Operator mit konstanten Koeffizienten:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}' c_{\alpha_1\dots\alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Wir haben so eine neue lineare Transformation gefunden:

$$\begin{aligned} C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ \psi &\longmapsto P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\psi) \end{aligned}$$

Zum Beispiel bekommen wir den Laplace Operator Δ aus dem Polynom

$$P(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n k_i^2$$

Wir wollen nun untersuchen, für welche $P(k_1, \dots, k_n)$ der Operator $P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ Drehinvariant ist, dh. für welche P gilt, dass

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\psi \circ R(x)) = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\psi)\right)(R(x)) \\ \forall \psi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), \quad R \in O(n) \quad \text{gültig ist.} \end{array}\right\} (*)$$

Es gilt folgender Satz.

Satz 30. Sei P ein Polynom mit $(*)$. Dann gibt es ein Polynom $Q(\ell) = \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot \ell^j$ in einer Variablen, mit

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = Q(\Delta)$$

(ohne Beweis)

Bemerkung. Dies ist ein Beispiel eines Symmetrieargumentes:
Man hat gewisse Symmetrien (z.B. Drehungen). Dann sucht man Operatoren, welche unter diesen Symmetrien invariant sind. Wenn man genügend Symmetrien hat, so gibt es nicht so viele Möglichkeiten für diese Operatoren (vgl. Satz 30)
z.B. in der Teilchenphysik untersucht man Teilchen, welche untereinander Wechselwirkungen haben. Diese Wechselwirkungen haben gewisse Symmetrien. Da man diese Symmetrien hat, hat man für die Energiefunktion dieser Teilchen nicht so viele Möglichkeiten.
(Dies war jetzt etwas Theologie!)

Bemerkung. Ein weiterer in der Physik interessanter Operator ist der d'Alembert-Operator (z.B. Elektrodynamik: Wellengleichung)

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta .$$

Man kann sich nun wieder fragen, für welche $B \in GL(n+1,\mathbb{R})$ gilt

$$\Box(\Psi(Bx)) = (\Box\Psi)(B(x)) \qquad \forall \Psi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n).$$

Es gilt dann, $B \in \mathcal{L} = \{B \in GL(n+1,\mathbb{R}) \mid BgB^T = g\}$,

$$g = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(vgl. Kapitel 7, p. 73 ff.)

<u>Definition.</u> (differenzierbare Mannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammen mit

- offenen Teilmengen $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$
- Homöomorphismen $\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^d \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$

so dass

- $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi_\beta"] & \\ \mathbb{R}^d \underset{\text{offen}}{\supseteq} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] & & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^d \end{tikzcd}$$

$$\uparrow$$
$$C^\infty$$

heisst eine d-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ nennt man Karten und $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ einen Atlas.

<u>Bemerkung</u>. Man schreibt oft einfach nur M ohne Angabe der Daten $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

<u>Beispiele</u>.

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow$ $\mathrm{id}: U \longrightarrow U$ ist $\forall x \in U$ eine Karte.
$\Rightarrow$ Kartenwechsel $= \mathrm{id}$ ist C^∞.

(2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow$ jeder Homöomorphismus $h: U \longrightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Karte $\forall x \in U$.

(3) Die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist eine n-dim. differenzierbare Mannigfaltigkeit (Übung Serie 5).

<u>Definition</u>:

Seien M und M' differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

$$f: M \longrightarrow M' \in C^\infty(M, M') \iff \varphi_{\alpha'} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty(V_\alpha, V_{\alpha'}), \forall \alpha \in \mathfrak{A}, \alpha' \in \mathfrak{A}'.$$

$$\begin{tikzcd}
M \supseteq U_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & U_{\alpha'} \subseteq M' \arrow[d, "\varphi_{\alpha'}"] \\
\mathbb{R}^d \supseteq V_\alpha \arrow[r, dashed, "\varphi_{\alpha'} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}", "C^\infty"'] & V_{\alpha'} \subseteq \mathbb{R}^e
\end{tikzcd}$$

Insbesondere:

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n) \iff f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty(V_\alpha, \mathbb{R}^n)\ \forall \alpha \in \mathfrak{A}.$$

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \arrow[rd, "f"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & \\
\mathbb{R}^d \supseteq V_\alpha \arrow[r, dashed, "f \circ \varphi_\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Definition. $G \subset \mathbb{R}^N$ heisst eine Lie Gruppe, falls

(1) G ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit
(2) G ist eine abstrakte Gruppe
(3) $m: G \times G \longrightarrow G$, $(x,y) \longmapsto x \cdot y$ ist C^∞
$i: G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x^{-1}$ ist C^∞.

Beispiele.
(1) $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$
(2) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
(3) $SO(n)$, $O(n)$, $U(n)$, $SU(n)$

Definition. $\mathbb{R}^N \supset G$ ist eine kompakte, zusammenhängende Lie Gruppe, falls

(1) G ist eine Lie Gruppe
(2) G ist kompakt und zusammenhängend (als Teilmengen im $\mathbb{R}^N$).

Beispiele.

(1) $SO(2) \subset \mathbb{R}^4$ ist eine kompakte, zusammenhängende Lie Gruppe, denn wir haben einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow SO(2) \\ e^{i\varphi} &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun S^1 ist eine kompakte zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit $\Rightarrow SO(2)$ auch.

(2) $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$

$SU(2) \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar b, & \bar a \end{pmatrix} \longmapsto (\underset{\substack{\shortparallel \\ a}}{x_1 + i x_2},\ \underset{\substack{\shortparallel \\ b}}{x_3 + i x_4}) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$\Rightarrow SU(2) \xrightarrow{\sim} \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\} \simeq S^3$

Nun S^3 ist kompakt und zusammenhängende differenzierbare Mgf.

(3) Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$

Nun $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} S^1$
$$[t] \longmapsto e^{2\pi i t}$$

- φ ist wohldefiniert: $\varphi(t+\mathbb{Z}) = e^{2\pi i(t+\mathbb{Z})} = e^{2\pi i t} = \varphi(t)$.
- φ ist ein Gruppenhomo.
$$\varphi(t_1+t_2) = e^{2\pi i(t_1+t_2)} = e^{2\pi i t_1}\cdot e^{2\pi i t_2} = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2).$$
- φ ist injektiv.
$$\varphi(t) = 1 \Rightarrow e^{2\pi i t} = 1 \Rightarrow t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \underbrace{1}_{\text{Neutralelement von } \mathbb{R}/\mathbb{Z}.}$$
- φ surjektiv ✓

φ ist ein Diffeo. zwischen kompakten zusammenhängenden Lie Gruppen.

$\Rightarrow T^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 = \underbrace{S^1 \times S^1}_{\text{direktes Produkt}}$ ist kompakte zusammenhängende Lie Gruppe.

Klassifikation der kompakten, zusammenhängenden Lie Gruppen

Definition. Sei G eine Gruppe.

$$Z(G) := \{ g \in G \mid ag = ga \quad \forall a \in G \}$$

heisst das *Zentrum von G*.

Übung: $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G (vgl. p. 45)
$Z(G)$ ist abelsch.

Beispiel: $Z(SU(2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$Z(SU(2)) = \{\pm \mathbb{1}\}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Ein *Weg σ in M* ist eine stetige Abbildung

$$\sigma : I \longrightarrow M \quad , I = [0,1].$$

$\sigma(0)$, $\sigma(1)$ heissen die *Endpunkte* von σ.

Falls $\sigma(0) = \sigma(1)$ so heisst der Weg *geschlossen*.

(2) M heisst *einfachzusammenhängend*, falls

(a) M ist *wegzusammenhängend* (vgl. p. 159 Lineare Algebra I)

(b) Es gibt einen Punkt $x_0 \in M$, so dass es für jeden geschlossenen Weg σ mit Endpunkt x_0 in M eine stetige Abbildung (Homotopie)

$$h : I \times I \longrightarrow M \quad \text{mit}$$

(i) $h(s,0) = \sigma(s)$, $h(s,1) = x_0 \quad \forall s \in I$

(ii) $h(0,t) = x_0 = h(1,t) \quad \forall t \in I$.

Bemerkung.

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist einfachzusammenhängend, genau dann wenn
(a) M ist wegzusammenhängend
(b) $\underbrace{\pi_1(M, x)}_{\text{Fundamentalgruppe (vgl. Analysis II - Vorlesung)}} = 0$ für $x \in M$ (und somit für jedes x).

Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^n$ ist einfachzusammenhängend $\quad (\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0)$

(2) $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ist einfachzusammenhängend

(3) S^1 ist nicht einfachzusammenhängend (nur wegzusammenhängend)

$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

(4) $SO(3)$ ist nicht einfachzusammenhängend

$\pi_1(SO(3)) = \pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(5) $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

Wir geben nun folgenden tiefliegenden Satz über Untergruppen von Lie Gruppen:

Satz 31. Sei G eine Lie Gruppe, U eine abstrakte Untergruppe und U sei abgeschlossen in G (als metr. Raum). Dann ist U eine Lie Gruppe.

Mit Satz 31 ist jetzt natürlich klar, dass $SO(n)$, $O(n)$ Lie Gruppen sind ($GL(n,\mathbb{R})$ ist Lie Gruppe, da $GL(n,\mathbb{R}) = M(n,\mathbb{R}) - \det^{-1}(0)$ also offen in $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, det ist stetig!)
Ebenfalls ist klar, dass $U(n)$, $SU(n)$ Lie Gruppen sind ($GL(n,\mathbb{C})$ ist eine Lie Gruppe).

Lemma 32. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lie Gruppe. Dann ist das Zentrum $Z(G)$ eine Lie Untergruppe von G.

Beweis

- $Z(G)$ ist abstrakte Untergruppe (Übung!)
- $Z(G)$ ist abgeschlossen:

Sei $g \in G$, $\varphi_g : G \longrightarrow G$, $h \longmapsto ghg^{-1}h^{-1}$

φ_g ist stetig

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} \varphi_g^{-1}(\{e\})$$, e Neutralelement von G

Da $\{e\}$ abgeschlossen $\underset{\text{stetig}}{\Longrightarrow}$ $\varphi_g^{-1}(\{e\})$ abgeschlossen

$\Longrightarrow \bigcap_{g \in G} \varphi_g^{-1}(\{e\})$ abgeschlossen $\Longrightarrow Z(G)$ abg. $\square$

Faktorgruppen

Sei G eine Gruppe, H ein Normalteiler von G $(H \trianglelefteq G)$.

Def. $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ Faktorgruppe von G modulo H.

Lemma 33. G/H ist eine Gruppe.

Wir definieren eine Operation auf G/H: $gH, kH \in G/H$

$$gH \cdot kH := gk \cdot H \in G/H$$

Multiplikation ist unabhängig vom Repräsentant: $\tilde{g}H = gH$, $\tilde{k}H = kH$

$\Longrightarrow \tilde{g} = g \cdot h$, $\tilde{k} = k \cdot h'$

$$g'H \cdot k'H \underset{\text{Def.}}{=} g' \cdot k' H = gh \cdot k h' H = ghkH$$

aber $h \cdot k = k \cdot \underset{\overset{\uparrow}{H}}{\tilde{h}}$, da $H \triangleleft G$!

Also: $g'H \cdot k'H = gk\tilde{h}h H = gk \cdot H = gH \cdot kH$

Also: Multiplikation unabhängig vom Repräsentanten der Nebenklassen.

Assoziativität : klar

Neutralelement: $e.H = H$

Inverses , $gH \cdot g^{-1}H = eH = H$

$\Rightarrow (gH)^{-1} = g^{-1}H.$

$\square$

Satz 34. Sei G eine Lie Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G (nach Satz 31 ist H als eine Lie Gruppe!)
Dann ist G/H eine Lie Gruppe mit Multiplikation

$$gH \cdot kH = gk.H.$$

(G/H hat auf natürliche Art eine Mannigfaltigkeitsstruktur)

$\square$

Nun können wir den ersten Teil des Klassifikationssatzes für kompakte zusammenhängende Lie Gruppen formulieren:

Satz 35. (Klassifikationssatz Teil 1)
Jede kompakte zusammenhängende Lie Gruppe ist isomorph zu

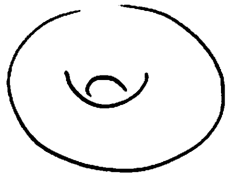
$$(T \times H)/A$$

wobei $T = S^1 \times \dots \times S^1$
H eine einfach-zusammenhängende kompakte Lie Gruppe
$A < T \times \underbrace{Z(H)}_{\text{Zentrum von } H}$ eine endliche Untergruppe.

Bemerkungen:

(1) T ist eine kompakte zusammenhängende abelsche Lie Gruppe

Bsp. $T = S^1 \times S^1$ Torus



(2) $A < T \times Z(H)$ ist ein abgeschlossener Normalteiler von $T \times H$. Also mit Satz 31 ist A eine Lie Gruppe.

(3) In Satz 36 geben wir eine Liste der zusammenhängenden kompakten Lie Gruppen. Um diese Liste zu bekommen benötigt man die Klassifikation der Wurzelsysteme (Satz 15.31)

Korollar. Eine kompakte abelsche Lie Gruppe ist isomorph zu einem Torus $T = S^1 \times \ldots \times S^1$.

Definition. $Sp(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in U(2n) \right\}$ heisst symplektische Gruppe. Es ist eine $(2n^2+n)$ dimensionale kompakte Lie Gruppe.

Definition. Zwei Lie Gruppen G_1 und G_2 heissen lokal isomorph, falls es Umgebungen $U_i \subset G_i$ der Neutralelemente $e_i \in G_i$, $i = 1, 2$ und Diffeomorphismen $\varphi: U_1 \to U_2$ und $\psi: U_2 \to U_1$ gibt, so dass $\varphi \circ \psi = id_{U_2}$, $\psi \circ \varphi = id_{U_1}$ und falls $x, y, xy \in U_1$ gilt

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy).$$

Satz 36. (Klassifikationssatz Teil 2)

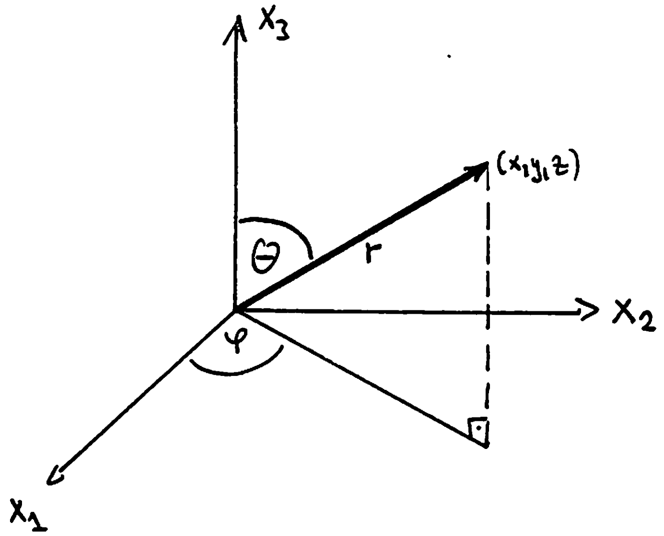
Jede kompakte einfachzusammenhängende Lie Gruppe ist lokal isomorph zu einem Produkt von Gruppen der folgenden Art.

Typ	Gruppe	Dimension $/\mathbb{R}$
A_k $(k \geq 1)$	$SU(k+1)$	$k \cdot (k+2)$
B_k $(k \geq 2)$	$SO(2k+1)$	$k(2k+1)$
C_k $(k \geq 3)$	$Sp(k)$	$k(2k+1)$
D_k $(k \geq 4)$	$SO(2k)$	$k(2k-1)$
E_6	Ausnahmeliegruppen	78
E_7		133
E_8		248
F_4		52
G_2		14

16. Der sphärische Laplaceoperator

Erinnere $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ Laplace Operator.

Wir führen nun im $\mathbb{R}^3$ neue Koordinaten ein, nämlich Kugelkoordinaten



$$x_1 = r \cdot \cos\varphi \ \sin\Theta$$
$$x_2 = r \cdot \sin\varphi \ \sin\Theta$$
$$x_3 = r \cdot \cos\Theta .$$

Wir wollen nun den Laplace Operator in Kugelkoordinaten umrechnen. Es gilt:

Satz 1. (Δ in Kugelkoordinaten)

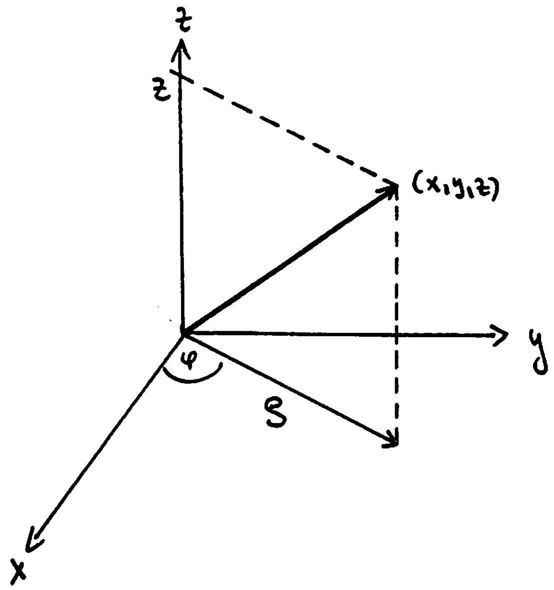
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S \quad , \text{wobei}$$

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Δ_S heisst *sphärische Laplace Operator*.

<u>Beweis.</u> $x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$

(1.) Wir rechnen Δ zuerst in Zylinderkoordinaten um:



$$(1) \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} y/x \\ z = z \\ \\ \rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ $\qquad u(x,y,z) = \tilde{u}(\rho,\varphi,z)$

Wir bezeichnen $\quad u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \ldots.$

$$\tilde{u}_\rho = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}, \ldots, \quad \tilde{u}_{\rho\varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho\, \partial \varphi}$$

Mit dieser Bezeichnung schreiben wir also

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad .$$

Nun

$$u_x = \tilde{u}_\rho \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\frac{x}{\rho}} + \tilde{u}_\varphi \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{-\frac{y}{\rho^2}} + \tilde{u}_z \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{0} = \tilde{u}_\rho \cdot \frac{x}{\rho} - \tilde{u}_\varphi \frac{y}{\rho^2}$$

$$\boxed{u_x = \frac{x}{\rho} \tilde{u}_\rho - \frac{y}{\rho^2} \tilde{u}_\varphi} \qquad (2)$$

$$u_y = \tilde{u}_\rho \cdot \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial y}}_{\frac{y}{\rho}} + \tilde{u}_\varphi \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{\frac{x}{\rho^2}} + \tilde{u}_z \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=0} =$$

$$\boxed{u_y = \frac{y}{\rho} \tilde{u}_\rho + \frac{x}{\rho^2} \tilde{u}_\varphi} \qquad (3)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) \tilde{u}_\rho + \frac{x}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}_\rho - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\rho^2}\right) \tilde{u}_\varphi - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}_\varphi)$$

$$= \frac{y^2}{\rho^3} \tilde{u}_\rho + \frac{x}{\rho}\left(\tilde{u}_{\rho\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tilde{u}_{\rho\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$- \tilde{u}_\varphi \cdot \frac{2xy}{\rho^4} - \frac{y}{\rho^2}\left(\tilde{u}_{\rho\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tilde{u}_{\varphi\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{xx} = \frac{y^2}{\rho^3} \tilde{u}_\rho + \frac{2xy}{\rho^4} \tilde{u}_\varphi + \frac{x^2}{\rho^2} \tilde{u}_{\rho\rho} - \frac{2xy}{\rho^3} \tilde{u}_{\rho\varphi} + \frac{y^2}{\rho^4} \tilde{u}_{\varphi\varphi}} \qquad (4)$$

Analog bekommen wir

$$\boxed{u_{yy} = \frac{x^2}{\rho^3} \tilde{u}_\rho - \frac{2xy}{\rho^4} \tilde{u}_\varphi + \frac{y^2}{\rho^2} \tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{2xy}{\rho^3} \tilde{u}_{\rho\varphi} + \frac{x^2}{\rho^4} \tilde{u}_{\varphi\varphi}} \qquad (5)$$

$$\boxed{u_{zz} = \tilde{u}_{zz}} \qquad (6)$$

Also:

$$\boxed{\Delta \tilde{u} = (4) + (5) + (6) = \frac{1}{\varrho} \tilde{u}_\varrho + \tilde{u}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \tilde{u}_{\varphi\varphi} + \tilde{u}_{zz}} \qquad (7)$$

② Δ in Kugelkoordinaten

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cdot \sin\Theta \cos\varphi \\ y = r \sin\Theta \sin\varphi \\ z = r \cos\Theta \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \Theta < \pi$

Zwischen Zylinder- und Kugelkoordinaten hat man folgende Beziehung:

$$\left.\begin{array}{l} z = r \cdot \cos\Theta \\ \varrho = r \cdot \sin\Theta \\ \varphi = \varphi \end{array}\right\} \qquad (9)$$

$u(x,y,z) = \tilde{u}(\varrho,\varphi,z) = \hat{u}(r,\varphi,\Theta)$

(1) und (9) haben bis auf Variablenbezeichnung dieselbe Form.

Man findet also wie in (4) und (5)

$$\boxed{\tilde{u}_{zz} + \tilde{u}_{\varrho\varrho} = \hat{u}_{rr} + \frac{1}{r}\hat{u}_r + \frac{1}{r^2}\hat{u}_{\theta\theta}} \qquad (10)$$

$$\boxed{\hat{u}_{\varphi\varphi} = \tilde{u}_{\varphi\varphi}} \qquad (11)$$

Wie in (3) hat man

$$\boxed{\tilde{u}_\varrho = \frac{\varrho}{r}\hat{u}_r + \frac{z}{r^2}\hat{u}_\theta} \qquad (12)$$

Wenn man (9), (11) und (12) benützt erhält man

$$\frac{1}{\varrho}\tilde{u}_\varrho + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\hat{u}_r + \frac{z}{r^2}\hat{u}_\theta\right) + \frac{1}{\varrho^2}\hat{u}_{\varphi\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\hat{u}_r + \frac{r\cdot\cos\theta}{r^3\sin\theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\hat{u}_{\varphi\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\hat{u}_r + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\hat{u}_{\varphi\varphi}. \qquad (13)$$

Nun mit (10) (vgl. (7)):

$$\Delta\hat{u} = (10) + (13) = \hat{u}_{rr} + \frac{2}{r}\hat{u}_r + \frac{1}{r^2}\hat{u}_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\hat{u}_{\varphi\varphi}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S \quad \text{, wobei}$$

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}}_{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

$\square$

<u>Bemerkung.</u> (zu Kugelkoordinaten)

Jedes $x \in \mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als $x = r \cdot x'$ mit $x' \in S^2$:

$$x' = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \in S^2$$

Beachte, dass $f: S^2 \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $f(x') = f(\varphi, \theta)$ nur von φ und θ abhängt.

Betrachten wir nun die <u>Schrödingergleichung</u>:

Gesucht sind $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ mit

$$\left(-\Delta + V(x)\right)\psi = E\psi \qquad (S)$$

und $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|\, dx < \infty$.

$V(x) = V(x_1, x_2, x_3)$ nennt man das Potential,

$E \in \mathbb{C}$ die Energie

ψ die Wellenfunktion.

Es handelt sich hier um ein Eigenwertproblem:

Gesucht sind die Eigenvektoren $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ des Differentialoperators $(-\Delta + V(x))$ zum Eigenwert E.

Im allgemeinen ist die Gleichung (S) sehr schwer zu lösen. Aber im wichtigen Spezialfall, wo

$$V(x) = V(\|x\|) = V(r)$$

gilt, d.h. V nur abhängig vom Betrag ist (also Drehinvariant!), können wir sie lösen.

Beachte: im Allgemeinen ist für $g \in SO(3)$

$$V(gx) \neq V(x)$$

Aber wenn $V(x) = V(\|x\|)$

$$\Rightarrow V(gx) = V(\|gx\|) \underset{g \in SO(3)}{=} V(\|x\|) = V(x).$$

Bsp. Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom:

Hier ist $V(x) = -\frac{1}{r}$

$$\underset{(S)}{\Rightarrow} \left(-\Delta - \frac{1}{r}\right)\psi = E\psi$$

$V(x)$ ist hier die Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Proton.

Wir studieren also die partielle Differentialgleichung

$$\left(-\Delta + V(r)\right)\psi = E\psi \quad , \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$$

Wir machen folgenden Separationsansatz

$$\psi(x) := f(\varphi, \theta) \cdot g(r)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_S\right)}_{-\Delta}(f \cdot g) + V(r) \cdot f \cdot g = E \cdot f \cdot g$$

Benützen wir nun dass f nur von φ und θ und g nur von r abhängt, so bekommen wir:

$$-f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - f\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r^2}\,\Delta_S f + f\cdot(V(r)\cdot g) = E\cdot f\cdot g$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}}{g(r)} - \frac{1}{r^2}\frac{\Delta_S f}{f} + V(r) = E$$

$$\Rightarrow \underbrace{r^2 V(r) - \frac{r^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right)}{g(r)} - r^2 E}_{\text{nur von } r \text{ abhängig}} - \underbrace{\frac{\Delta_S f}{f}}_{\text{nur von } (\varphi,\Theta) \text{ abhängig}} = 0$$

$\Rightarrow$ beide Terme müssen konstant sein

Also:

$$r^2 V(r) - \frac{r^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right)}{g(r)} - r^2 E = \lambda \qquad (*)$$

$$\frac{\Delta_S f}{f} = \lambda \qquad (**)$$

$(**) \Rightarrow \boxed{\Delta_S f = \lambda f} \qquad (***)$

Da wir nur Lineare Algebra studieren, untersuchen wir nur noch die Gleichung (***).

Nun (***) ist ein Eigenwertproblem:

λ ist Eigenwert zu der Eigenfunktion f (Eigenvektor).

Wo liegt f ?

Nun $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{C}) =: C^\infty(S^2) = \left\{ f(\vec{x}) = f(\varphi, \theta) \,\middle|\, \frac{\partial^{n_1}}{\partial \varphi^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial \theta^{n_2}} f \text{ existiert } \forall n_1, n_2 \right\}$

f ist eine komplexwertige Funktion

$$\Rightarrow f(\vec{x}) = u(\vec{x}) + i \cdot v(\vec{x}), \text{ wobei}$$

$$u(\vec{x}) = \text{Realteil von } f(\vec{x})$$
$$v(\vec{x}) = \text{Imaginärteil von } f(\vec{x}).$$

Wie ist nun $\Delta_S \psi$ definiert?

$$\Delta_S \psi = \Delta_S u + i \cdot \Delta_S v.$$

Als nächstes wollen wir nun $\Delta_S \psi = \lambda \psi$ lösen.

Um dies zu tun, studieren wir zuerst homogene Polynome.

Dazu machen wir folgende Definition eines Multiindex:

Definition.

Ein Multiindex α ist ein Element $\alpha \in \mathbb{N}^n$, d.h.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Weiter setzen wir:

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

$\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_n!$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$

Definition.

$$P_{n,k} := \left\{ \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha x^\alpha \;\middle|\; c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

homogenen Polynome in n Veränderlichen vom Grad k.

Ein Element $p \in P_{n,k}$ hat also die Form

$$p = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k}' c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Beispiel. $p \in P_{2,k}$

$$p = (x_1+ix_2)^k = \sum_{j=0}^{k}{}' \binom{k}{j} \cdot x_1^{k-j} (ix_2)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k}{}' \binom{k}{j} (i)^j \, x_1^{k-j} x_2^j$$

Lemma 2. (1) $P_{n,k}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(2) $P_{n,k} \ni p \Rightarrow p(\lambda x) = \lambda^k x$

Beweis.

(1) $p, q \in P_{n,k}$, $p = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \cdot x^\alpha$, $q = \sum_{|\alpha|=k}' d_\alpha \cdot x^\alpha$

$$p+q = \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=k}' d_\alpha x^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=k}' (c_\alpha + d_\alpha) x^\alpha \in P_{n,k}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in P_{n,k}$ $\quad p = \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha x^\alpha$

$$\lambda p = \lambda \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|=k}' (\lambda c_\alpha) \cdot x^\alpha \in P_{n,k}.$$

(2) $$p = \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|=k}' c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$p(\lambda x) = \sum_{|\alpha|=k}' c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\lambda x_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda x_n)^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha \lambda^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha \cdot \lambda^{|\alpha|} \cdot x^\alpha$$

$$= \lambda^k p(x).$$

$\square$

<u>Satz 3.</u>

$$\dim_{\mathbb{C}} P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>Beweis.</u>

(i) Wir zeigen, dass die Monome x^α $|\alpha| = k$ eine Basis von $P_{n,k}$ bilden:

$\{x^\alpha \mid |\alpha| = k\}$ ist sicher Erzeugendensystem von $P_{n,k}$.

$\{x^\alpha \mid |\alpha| = k\}$ ist linear unabhängig (Übung)

(ii) Wir berechnen die Anzahl der Monome.

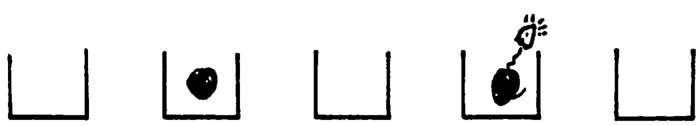
Beachte: die Anzahl Monome ist gleich der Anzahl n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$.

Zur Bestimmung dieser Anzahl n-Tupel nehmen wir nun $(n+k-1)$ Schachteln und $(n-1)$ Kugeln (besser Kanonenkugeln). Wir verteilen die $(n-1)$ Kanonenkugeln auf die $(n+k-1)$ Schachteln wobei wir in jede Schachtel höchstens eine Kugel legen.

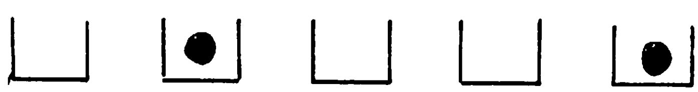
Definiere dann

α_1 = Anzahl leere Schachteln vor der ersten Kugel
α_2 = Anzahl leere Schachteln zwischen der ersten und zweiten Kugel.
$\vdots$
α_j = Anzahl leere Schachteln zwischen der $(j-1)$-ten und j-ten Kugel
$\vdots$
α_n = Anzahl leere Schachteln nach der letzten Kugel.

Bsp. $n = k = 3$
Wir haben also 5 Schachteln und 2 Kugeln

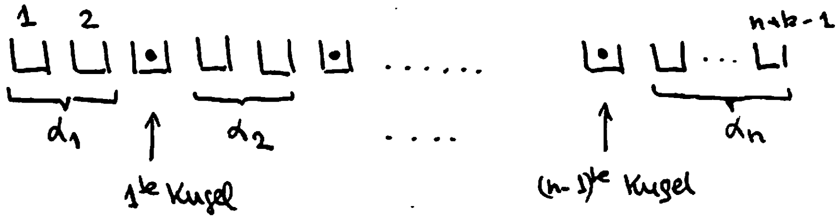


$\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = 1$
$\alpha_3 = 1$



$\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = 2$
$\alpha_3 = 0$

Nun $\sum_{i=1}^{n}{}' \alpha_i = k$. Wir können also jeder dieser Konfigurationen



ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$ zuordnen.

Aber auch Umgekehrt: Jedem n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$ können wir eine solche Verteilung zuordnen.

Also haben wir eine Bijektion zwischen

$$\left\{\begin{array}{l}(n-1)\text{-Kugeln} \\ \text{"richtig" verteilt auf} \\ (n+k-1) \text{ Schachteln}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{\text{bij}} \left\{ n\text{-Tupel } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k \right\}$$

Also gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} P_{n,k} = \#\text{ Möglichkeiten } (n-1) \text{ Kugeln "richtig" auf } (n+k-1) \text{ Schachteln zu verteilen}$$

$$\underset{\text{Kombinatorik}}{=} \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

$\square$

Als nächstes definieren wir in $P_{n,k}$ ein Skalarprodukt (vgl. Kapitel 17)

<u>Definition.</u> Seien $p, q \in P_{n,k}$ mit

$$p = \sum_{|\alpha|=k}{}' p_\alpha x^\alpha \qquad q = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha x^\alpha$$

$$\langle p, q \rangle := \sum_{|\alpha|=k}{}' \alpha! \, p_\alpha \overline{q_\alpha} .$$

<u>Lemma 4.</u> V ist ein hermitesches Skalarprodukt (vgl. Kapitel 17)

<u>Beweis.</u>

(i) $\langle p,q\rangle = \sum_{|\alpha|=k}' \alpha!\, p_\alpha \cdot \overline{q_\alpha} = \overline{\sum_{|\alpha|=k}' \alpha!\, q_\alpha \cdot \overline{p_\alpha}} = \overline{\langle q,p\rangle}.$

(ii) $\langle \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2, q\rangle = \sum_{|\alpha|=k}' \alpha!\, (\mu_1 \cdot p_1 + \mu_2 \cdot p_2)_\alpha \cdot \overline{q_\alpha}$

$= \sum_{|\alpha|=k}' \alpha!\, (\mu_1 \cdot (p_1)_\alpha + \mu_2 \cdot (p_2)_\alpha) \cdot \overline{q_\alpha}$

$= \mu_1 \cdot \sum_{|\alpha|=k}' \alpha!\, (p_1)_\alpha\, \overline{q_\alpha} + \mu_2 \sum' \alpha!\, (p_2)_\alpha\, \overline{q_\alpha}$

$= \mu_1 \langle p_1, q\rangle + \mu_2 \langle p_2, q\rangle.$

(iii) $\langle p,p\rangle = \sum_{|\alpha|=k}' \alpha!\, p_\alpha \cdot \overline{p_\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} \alpha!\, |p_\alpha|^2 \geq 0.$

$\Rightarrow \langle p,p\rangle = 0 \iff |p_\alpha|^2 = 0 \quad \forall |\alpha| = k$

$\iff p_\alpha = 0 \quad \forall |\alpha| = k$

$\iff p = 0.$

$\square$

Als nächstes betrachten wir den Unterraum der harmonischen Polynome in $P_{n,k}$.

<u>Definition.</u>

$$H_{n,k} = \{ p \in P_{n,k} \mid \Delta p = 0 \}$$

<u>harmonische homogene Polynome in n Veränderlichen vom Grad k.</u>

Lemma 5. $H_{n,k}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$-VR $P_{n,k}$.

Beweis.
Dies folgt direkt aus Lemma 15.28. $\square$

Um die Dimension $\dim_{\mathbb{C}} H_{n,k}$ zu berechnen benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 6. Seien $p, q \in P_{n,k}$, $p = \sum'_{|\alpha|=k} p_\alpha x^\alpha$.
Dann gilt:

$$\langle p, q\rangle = p(D)(\bar{q}(x))$$

wobei
$$p(D) = \sum'_{|\alpha|=k} p_\alpha \cdot \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

ein Differentialoperator ist.

Beweis.
Da nach Lemma 4 $\langle .,.\rangle$ ein Skalarprodukt ist, genügt es Lemma 6 für Monome x^α, $|\alpha| = k$ zu zeigen
(Diese Monome x^α bilden eine Basis und $\langle .,.\rangle$ ist linear im ersten Argument)

Seien also $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = |\beta| = k$.

$$x^\alpha = \sum'_{|\gamma|=k} p_\gamma \cdot x^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_\gamma = \begin{cases} 0 & \gamma \neq \alpha \\ 1 & \gamma = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \langle x^\alpha, x^\beta\rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ \alpha! & \text{falls } \alpha = \beta \end{cases}$$

Also: $\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \alpha! \cdot \delta_{\alpha\beta}$

Anderseits

$$x^\alpha(D)\, x^\beta = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \left(x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\right) = \ldots =$$

$$= \frac{\partial^{\alpha_1} x_1^{\beta_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots\cdots \frac{\partial^{\alpha_n} x_n^{\beta_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Nun $\dfrac{d^\ell x^k}{dx} = k \cdot (k-1) \cdots (k-\ell+1)\, x^{k-\ell}$

Also: $x^\alpha(D)\, x^\beta = \beta_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdots\cdots (\beta_1 - \alpha_1 + 1)\, x^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot \ldots\ldots$

$$\cdots \beta_n (\beta_n - 1) \cdots\cdots (\beta_n - \alpha_n + 1)\, x^{\beta_n - \alpha_n}$$

Fall 1: $\alpha \neq \beta$

Da $\sum \alpha_i = k = \sum \beta_i$ folgt dann, dass es ein α_i gibt mit $\alpha_i > \beta_i$

$\Rightarrow x^\alpha(D) \cdot x^\beta = 0 \qquad \left(\dfrac{\partial x_i^{\beta_i}}{\partial^{\alpha_i} x_i} = 0 \right)$

Fall 2: $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow x^\alpha(D) \cdot x^\beta = \beta_1 \cdot (\beta_1 - 1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \beta_2 (\beta_2 - 1) \cdots\cdots 2 \cdot 1 \cdot \ldots\ldots$$

$$\cdot \beta_n (\beta_n - 1) \cdots 2 \cdot 1$$

$$= \beta_1!\, \beta_2! \cdots \beta_n! = \beta! = \alpha!$$

Zusammen haben wir also

$$x^\alpha(D)\,x^\beta = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ \alpha! & \text{falls } \alpha = \beta \end{array}\right\} = \langle x^\alpha, x^\beta\rangle$$

□

<u>Bemerkung.</u> Aus dem Beweis von Lemma 6 können wir eine orthonormale Basis von $\mathcal{P}_{n,k}$ ablesen; nämlich

$$\left\{ \frac{x^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} \;\middle|\; |\alpha| = k \right\}$$

<u>Satz 7.</u>

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{n,k} = \frac{(n+k-3)!}{(n-2)!\cdot k!}\,(n+2k-2)$$

Insbesondere:

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{3,k} = 2k+1.$$

<u>Bemerkung:</u> Für den Beweis benützen wir folgende Tatsache, die wir im Kapitel 17 beweisen werden:

Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\,,\rangle$. Weiter sei <u>$\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$</u>.

Dann gilt: $W \subset V$ ein Unterraum so ist

$$V = W \oplus W^\perp$$

wobei $W^\perp = \{x \in V \mid \langle x, w\rangle = 0 \;\; \forall w \in W\}$.

⚠ Es ist wichtig, dass $\dim_{\mathbb{C}} V$ <u>endlich</u> ist. Allgemein ist dieser Satz falsch!

<u>Beweis</u> (Satz 7):

Betrachten wir den Raum

$$W = |x|^2 \cdot P_{n,k-2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p \;\middle|\; p \in P_{n,k-2} \right\}$$

Nun W ist ein Unterraum von $P_{n,k}$ (Übung)

der Dimension $\dim_{\mathbb{C}} W = \binom{n+k-3}{k-2} = \dim_{\mathbb{C}} P_{n,k-2}$.

Nach obiger Bemerkung gilt also ($P_{n,k}$ ist <u>endlich</u> dimensional)

$$P_{n,k} = W \oplus W^{\perp}$$

Wir zeigen nun, dass $W^{\perp} = H_{n,k}$ ist.

Sei $q \in P_{n,k}$, mit $\langle p, q \rangle = 0 \quad \forall p \in W$.

$\Rightarrow \; 0 = \langle |x|^2 \Delta q, q \rangle$, denn $\Delta q \in P_{n,k-2}$

$\underset{\text{Lemma 6}}{=} \; (|x|^2 \Delta q)(D)\, \overline{q}(x)$

$(|x|^2 \Delta q)(D) = \Delta \circ \Delta q(D)$

Also: $0 = \Delta \circ \Delta q(D)\, \overline{q} \underset{\uparrow}{=} \Delta q(D) \circ \overset{\overline{\Delta q}}{\widetilde{\Delta \overline{q}}}$

Δ und $\Delta q(D)$ kommutieren (<u>konstante</u> Koeffizienten!)

$\underset{\text{Lemma 6}}{=} \; \langle \Delta q, \Delta q \rangle$

$\underset{\text{Lemma 4}}{\Longrightarrow} \; \underline{\Delta q = 0 \text{, also } q \in H_{n,k}}.$

Damit haben wir also, dass $W^\perp \subseteq H_{n,k}$.

Sei $q \in H_{n,k}$, dh. $\Delta q = 0$, $|x|^2 \cdot p \in |x|^2 \cdot P_{n,k-2}$, dh. $p \in P_{n,k-2}$

$$\Rightarrow \langle |x|^2 p, q \rangle \underset{\text{Lemma 6}}{=} \Delta \circ p(D) \bar{q} = p(D) \circ \Delta \bar{q}$$

$$= p(D) \circ \overline{\Delta q} \underset{\text{Lemma 6}}{=} \langle p, \underset{\overset{\parallel}{0}}{\Delta q} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow |x|^2 P_{n,k-2} = W \supseteq H_{n,k}$$

Also: $\quad H_{n,k} = (|x|^2 P_{n,k-2})^\perp$

Damit haben wir also:

$$P_{n,k} = |x|^2 P_{n,k-2} \oplus H_{n,k}$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H_{n,k} = \dim_{\mathbb{C}} P_{n,k} - \dim_{\mathbb{C}} W$$

$$= \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}$$

$$= \frac{(n+k-3)!}{(n-2)!\ k!} (n+2k-2).$$

$\square$

Im folgenden betrachten wir nur noch den Fall $\underline{n=3.}$

Sei $p \in H_{3,k}$. Nach Bemerkung p.70 gilt $x = r\cdot x'$, $x' \in S^2$.

$$\Rightarrow p(x) = p(rx') \underset{\substack{\uparrow\\ \text{homogen.}}}{=} r^k p(x')$$

$$0 = \Delta p \underset{\text{Satz 1}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S\right)(p)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S\right)(r^k \cdot p(x'))$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) r^k \cdot \underbrace{p(x')}_{\text{unabhängig von } r} + \frac{r^k}{r^2}\Delta_S p(x')$$

$$= \left(k\cdot(k-1)\, r^{k-2} + 2k r^{k-2}\right) p(x') + r^{k-2}\Delta_S p(x')$$

$$\Rightarrow 0 = k(k+1)\, r^{k-2}\cdot p(x') + r^{k-2}\Delta_S p(x')$$

$$\Rightarrow 0 = k(k+1)\, p(x') + \Delta_S p(x')$$

$$\Rightarrow \Delta_S p(x') = -k(k+1)\cdot p(x')$$

$\Rightarrow$ $p(x')$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $-k(k+1)$ von Δ_S.

Zusammenfassend haben wir also festgestellt, dass jedes harmonische $p \in H_{3,k}$ Eigenfunktion zum Eigenwert $-k(k+1)$ ist.

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}\left(\text{Eigenraum zum Eigenwert } -k(k+1)\right) \geq \dim_{\mathbb{C}} H_{3,k} = 2k+1.$$

Wir haben also eine untere Schranke für die Dimension des Eigenraumes (geometrische Vielfachheit) des Eigenwertes $-k(k+1)$ gefunden.

Es gilt sogar folgender Satz:

Satz 8.

(1) Die Eigenwerte von Δ_S sind $\{-k(k+1) \mid k \geq 0\}$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Eigenraum zum EW } -k(k+1)) = 2k+1$.

Beweis. Einen Teil dieses Satzes haben wir bereits eingesehen:

Wir wissen, dass $\{-k(k+1) \mid k \geq 0\}$ Eigenwerte von Δ_S sind und dass $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Eigenraum} \ldots) \geq 2k+1$.

Der Rest des Beweises würde jedoch den Rahmen der Vorlesung Lineare Algebra II sprengen, und wir verzichten deshalb darauf. $\square$

17. Vektorräume mit Skalarprodukt, $\ell^2(\mathbb{N})$

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (endlich oder unendlich dimensional).

Definition. Ein hermitesches Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit (i) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$

(ii) $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w\rangle = \alpha_1 \langle v_1, w\rangle + \alpha_2 \langle v_2, w\rangle$

(iii) $\langle v,v\rangle \geqq 0$,

$\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0.$

wobei $v, v_1, v_2, w \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. (1) $\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \overline{\alpha_1}\langle v, w_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle v, w_2\rangle$.

(2) Sei U ein Unterraum von V, so liefert die Einschränkung von $\langle\ ,\ \rangle$ auf U ein Skalarprodukt auf U.

Beispiele.

(i) $V = \mathbb{C}^n$ $\quad \langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$, $\quad v = (v_1, \dots, v_n)$

$w = (w_1, \dots, w_n)$

$\langle v,w\rangle$ ist das kanonische Skalarprodukt.

(ii) $p, q \in H_{n,k}$ $\quad p = \sum'_{|\alpha|=k} p_\alpha x^\alpha \quad q = \sum'_{|\alpha|=k} q_\alpha x^\alpha$

$$\langle p, q\rangle = \sum_{|\alpha|=k}{}' \alpha!\, p_\alpha \cdot \overline{q_\alpha}$$ (vgl. Kapitel 16)

(iii) Sei $C(I,\mathbb{C}) = \{ f : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \}$

$C(I,\mathbb{C})$ ist ein $\mathbb{C}$-VR (klar)

$$\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \quad , f,g \in C(I,\mathbb{C}) .$$

Satz 1. (Schwarz'sche Ungleichung)
Sei $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ ein $\mathbb{C}$-VR mit einem hermiteschen Skalarprodukt. Dann gilt:

$$|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad , v,w \in V, \quad \|v\| = \langle v,v \rangle^{1/2} .$$

Weiter gilt: $|\langle v,w\rangle| = \|v\|\cdot\|w\| \iff v$ und w sind linear abhängig.

Beweis.
O.E.d.A seien $v \neq 0$ und $w \neq 0$, $v,w \in V$.

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 - \overline{\lambda}\langle v,w\rangle - \lambda\overline{\langle v,w\rangle} + \lambda\cdot\overline{\lambda}\,\|w\|^2$$

Setze $\lambda = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} \in \mathbb{C}$.

Dann bekommen wir

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}\cdot\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} - \frac{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^2} + \frac{\langle v,w\rangle\cdot\overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|v\|^2\cdot\|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2$$

$$\Rightarrow |\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\| .$$

Nun $0 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \iff v = \lambda w \iff v,w$ linear abh. $\square$

<u>Korollar 2.</u> (Dreiecksungleichung)

Sei $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ wie in Satz 1. Dann gilt

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall v,w \in V.$$

<u>Beweis.</u>

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \underbrace{\langle w,v\rangle}_{=\overline{\langle v,w\rangle}} + \|w\|^2$$

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \underbrace{\langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle}}_{2\,\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle)\ \leq\ 2\cdot|\langle v,w\rangle|}$$

$$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\cdot|\langle v,w\rangle|$$

$$\underset{\text{Schwarz'sche Ungl.}}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\|v\|\cdot\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

□

<u>Satz 3.</u> Es sei V ein <u>endlichdimensionaler</u> $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle .\,, \rangle$. Sei U ein Unterraum von V. Dann gilt:

$$V = U \oplus U^\perp$$

wobei $U^\perp = \{v \in V \mid \langle v,u\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ das <u>orthogonale Komplement</u> von U bezeichnet.

<u>Beweis.</u>

Nach Korollar 12.7 (Lineare Algebra I p. 148) gibt es eine orthonormierte Basis $\{u_1, \ldots, u_k\}$ von U $(\dim_{\mathbb{C}} U = k)$.

Sei nun $v \in V$.
$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v,u_i\rangle u_i}_{\in U} + \left(v - \sum_{i=1}^{k} \langle v,u_i\rangle \cdot u_i\right)$$

Behauptung: $\quad v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle \cdot u_i \quad \in U^\perp$

Nun:
$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \cdot u_i \; , \; u_j \right\rangle = \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$
$$= \langle v, u_j \rangle - \langle v, u_j \rangle = 0. \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

Damit haben wir also gezeigt, dass
$$V = U + U^\perp .$$

Wir müssen noch zeigen, dass $U \cap U^\perp = \{0\}$

$u \in U \cap U^\perp \quad \Rightarrow \quad \langle u, u \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$

Also: $\quad V = U \oplus U^\perp$ $\square$

<u>Beispiel zu Satz 3:</u>

$$P_{n,k} = H_{n,k} \oplus |x|^2 \cdot P_{n,k-2} . \quad \text{(Kapitel 1.6)}$$

⚠ <u>Bemerkung:</u> Es ist wesentlich, dass in Satz 3 der $\mathbb{C}$-VR V endlich dimensional ist. Für beliebige Vektorräume gilt Satz 3 nicht (vgl. Beispiel p. 93f).

<u>Schwarz'sche Ungleichung im $\mathbb{C}^n$:</u>

Seien $v, w \in \mathbb{C}^n$, $\langle v, w \rangle = \sum v_i \cdot \overline{w_i}$
$$\left| \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \right)^{1/2}$$

Schwarz'sche Ungleichung in $C(I,\mathbb{C})$:

Seien $f,g \in C(I,\mathbb{C})$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

$$\left| \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt \right| \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

Betrachten wir nun den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$:

Definition.

$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_0,x_1,\dots) \mid \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2, x_i \in \mathbb{C}\}$

Hilbertsche Folgenraum.

In $\ell^2(\mathbb{N})$ definieren wir folgendes Skalarprodukt:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\cdot\overline{y_i}$$

$x=(x_0,x_1,\dots)$, $y=(y_0,y_1,\dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Satz 4.

(1) $\ell^2(\mathbb{N})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (unendlich-dimensional)

(2) $\langle .,.\rangle$ ist ein hermitesches Skalarprodukt.

Beweis.

(1) Addition: $x=(x_0,x_1,\dots)$, $y=(y_0,y_1,\dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$x+y = (x_0+y_0, x_1+y_1, \dots)$$

Skalarmultiplikation: $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots)$$

Zu zeigen: $x+y \in \ell^2$
$\lambda x \in \ell^2$

Nun für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i+y_i|^2 \leq 2\left\{\sum_{i=0}^{N}|x_i|^2 + \sum_{i=0}^{N}|y_i|^2\right\} \leq 2\left\{\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|^2 + \sum_{i=0}^{\infty}|y_i|^2\right\}$$

$$\underset{N\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{\infty} |x_i+y_i|^2 \leq 2\left\{\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|^2 + \sum_{i=0}^{\infty}|y_i|^2\right\} < \infty.$$

Analog $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda x_i|^2 < \infty.$

(2) Übung. $\square$

Lemma 5. Seien $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$, $x = (x_0, x_1, \dots)$, $y = (y_0, y_1, \dots)$.
Dann gilt:

(a) $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i \cdot y_i| < \infty$ (absolut konvergent)

(b) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Beweis.

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{N} |x_i|\cdot|y_i|\right)^2 \underset{\text{Schwarz Satz 1}}{\leq} \sum_{i=0}^{N}|x_i|^2 \cdot \sum_{i=0}^{N}|y_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty}|x_i|^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}|y_i|^2$$

$$\underset{N\to\infty}{\Rightarrow} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i \cdot y_i|\right)^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty}|x_i|^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}|y_i|^2 \underset{x,y\in\ell^2(\mathbb{N})}{<\infty}.$$

$\Rightarrow$ (a) und (b). $\square$

Sei $(V, \langle . \rangle)$ ein hermitescher $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Setze $d(v,w) := \|v-w\| = \langle v-w, v-w\rangle^{1/2}$

Lemma 6. Für $d(.,.)$ gilt:

(i) $d(v,w) = d(w,v)$ $\quad \forall v,w \in V$

(ii) $d(v,w) + d(w,x) \leq d(v,x)$ $\quad \forall v,w,x \in V$

(iii) $d(v,w) \geq 0$

$d(v,w) = 0 \iff v = w.$

Also (V,d) ist ein metrischer Raum.

□

Wir können also jetzt in V Analysis betreiben. Insbesondere machen die Begriffe abgeschlossen, offen, Cauchyfolgen etc. Sinn.

Definition. Ein metrischer Raum (M,d) heisst vollständig, falls jede Cauchyfolge in M konvergiert.

Definition. Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit hermiteschem Skalarprodukt. V heisst ein Hilbertraum, falls V ein vollständiger metr. Raum ist (bzgl. $d(.,.)$ von Lemma 6).

Satz 7. $\ell^2(\mathbb{N})$ ist vollständig, also ein Hilbertraum.

Beweis:

Sei $x^j = (x_0^j, x_1^j, x_2^j, \ldots)$ eine Cauchyfolge in $\ell^2(\mathbb{N})$.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein N_ε, so dass

$$d(x^j, x^k) < \varepsilon \quad \forall j,k \geq N_\varepsilon.$$

Nun $\quad d(x^j, x^k) = \|x^j - x^k\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i^j - x_i^k|^2\right)^{1/2} < \varepsilon \; ; \; j,k \geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $\forall i$ gilt: $|x_i^j - x_i^k| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall i$ ist $\{x_i^j\}_{j\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$.

Nun $\mathbb{C}$ ist vollständig, also $\exists\, x_i \in \mathbb{C}$ mit $x_i = \lim_{j\to\infty} x_i^j$.

Definiere $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$

Wir zeigen: $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ und $x = \lim_{j\to\infty} x^j$.

Nun für alle $\ell > 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\ell} |x_i^j - x_i|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{\ell} |x_i^j - x_i^k|^2$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \|x^j - x^k\|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall j \geq N_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^j - x_i|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall j \geq N_\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $x^j - x \in \ell^2(\mathbb{N})$ und $\|x^j - x\| = d(x^j, x) < \varepsilon \quad \forall j \geq N_\varepsilon$.

Da $x^j \in \ell^2(\mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $x \in \ell^2(\mathbb{N})$.
Weiter folgt auch, dass $\lim_{j\to\infty} x^j = x$.

Also $\ell^2(\mathbb{N})$ ist vollständig. Mit Satz 4 folgt, dass es ein Hilbertraum ist.

$\square$

Bemerkungen.

(i) $\ell^2(\mathbb{N})$ ist unendlich dimensional, denn
$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots)$ ist eine unendliche linear unabh. Familie von $\ell^2(\mathbb{N})$.

(ii) Sei $V \subset \ell^2(\mathbb{N})$ der Unterraum definiert durch
$V = \{ x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x_n = 0$ für alle bis auf endlich viele $n \}$.

Nun V ist ein Unterraum von $\ell^2(\mathbb{N})$ (Übung)

$$V^\perp = \{ (y_n) \mid \sum_{i=0}^{\infty} y_i \overline{x_i} = 0 \quad \forall (x_i) \in V \}$$

$$= 0 \qquad (\text{wähle } (x_i) = e_j \; !)$$

Aber $\ell^2(\mathbb{N}) \neq V$, z.B. $\left(\frac{1}{j+1}\right) \in \ell^2(\mathbb{N}) - V$.

Somit sehen wir, dass V kein orthogonales Komplement in $\ell^2(\mathbb{N})$ hat, also $\quad \ell^2(\mathbb{N}) \neq V \oplus V^\perp$

Bilinearformen.

Definition. Sei V ein $\mathbb{C}$-VR. Eine Bilinearform B auf V, ist eine Abbildung

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w)$$
$$B(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 B(v, w_1) + \alpha_2 B(v, w_2)$$

$\forall\, v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

B heisst nicht ausgeartet, falls es für jedes $0 \neq v \in V$ ein $w \in V$ gibt mit

$$B(v, w) \neq 0.$$

Beispiel. $\quad V = \mathbb{R}^{2n}$

$$S(v, w) = \langle v, Jw \rangle \qquad \text{wobei } J = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_n \\ \hline -\mathbb{1}_n & 0 \end{array}\right)}_{2n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i w_{i+n} - v_{i+n} w_i$$

S ist eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V (Übung)

$S(v, w) = -S(w, v)$

Man nennt S ein symplektisches Skalarprodukt.

18. Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

1. Komplexe Mannigfaltigkeiten.

$z=(z_0,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ bezeichne die Punkte in $\mathbb{C}^n$.

Definition. Sei $U\subset\mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\mathbb{C}^n\supset U\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ heisst holomorph, falls für jedes $z^0\in U$ sich f in einer Umgebung von $z^0=(z_1^0,\dots,z_n^0)$ als Potenzreihe

$$f(z_1,\dots,z_n)=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(z_1-z_1^0)^{\alpha_1}\cdots(z_n-z_n^0)^{\alpha_n}$$

schreiben lässt.

Definition. Sei $U\subset\mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi: U\longrightarrow\mathbb{C}^m$ heisst holomorph, falls die Abbildungen

$$f_i=p_i\circ\varphi : U\longrightarrow\mathbb{C}\qquad i=1,\dots,m$$

holomorph sind $\forall i$, wobei $p_i:\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}$, $(z_1,\dots,z_m)\longmapsto z_i$.

In völliger Analogie zum reellen Fall definieren wir nun komplexe Mannigfaltigkeiten (vgl. Skript p. 56)

Definition (komplexe Mannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge $M\subset\mathbb{C}^m$ zusammen mit

- (offenen) Teilmengen $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$
- Homöomorphismen $\varphi_\alpha: U_\alpha\xrightarrow{\cong}\mathbb{C}^n$ $\forall\alpha\in\mathfrak{A}$

so dass

- $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} U_\alpha$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$ ist die Abbildung

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \underset{\substack{\cap \text{ offen} \\ \mathbb{C}^n}}{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

holomorph.

2. Beispiel : Projektiver Raum

(a) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Definition. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{$ 1-dim Unterräume von $\mathbb{C}^2 \}$

Also $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{ \ell \subset \mathbb{C}^2 \mid \ell$ ist eine komplexe Gerade$\}$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ heisst der 1-dimensionale komplexe projektive Raum.

Jede komplexe Gerade ist durch ein $0 \neq z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ bestimmt.

$0 \neq v = (v_0, v_1) \in \mathbb{C}^2$ erzeugt denselben 1-dim UR von $\mathbb{C}^2$ wie (z_0, z_1), falls es ein $\lambda \in \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{C} - \{0\}}}{\mathbb{C}^*}$ gibt mit $v = \lambda z$.

Wir definieren auf $\mathbb{C}^2$ also folgende Äquivalenzrelation:

$$x, y \in \mathbb{C}^2 \qquad x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } x = \lambda y.$$

Lemma 1. "$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation

Beweis.

(a) $x \sim x$ ✓

(b) $x \sim y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } x = \lambda y$

Da $\lambda \neq 0 \Rightarrow y = \lambda^{-1} x \Rightarrow y \sim x$.

(c) $x \sim y$ und $y \sim z$

$$\begin{array}{ccc} x \sim y & & y \sim z \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x = \lambda y & & y = \mu z \end{array} \Rightarrow x = \lambda y = \underbrace{(\lambda \mu)}_{\in \mathbb{C}^*} z$$

$\Rightarrow x \sim z$.

$\square$

Lemma 2. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^2 - \{0\})/\sim$

Notation: für die von $z = (z_0, z_1)$ erzeugte Äquivalenzklasse in $(\mathbb{C}^2 - \{0\})/\sim$ schreiben wir $[z] = [z_0 : z_1]$

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{bijektiv}} & (\mathbb{C}^2 - \{0\})/\sim \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \\ \ell = \{\lambda \cdot (z_0, z_1) \mid \lambda \in \mathbb{C}\} & \longmapsto & [z_0 : z_1] \end{array}$$

$[z_0 : z_1] \ni (x_0, x_1) \Rightarrow (x_0, x_1) = \lambda \cdot (z_0, z_1),\ \lambda \in \mathbb{C}^*$

$\Rightarrow (x_0, x_1) \in \ell$

$\square$

Satz 3.

(a) $P^1(\mathbb{C})$ ist eine 1-dim. komplexe Mannigfaltigkeit

(b) $P^1(\mathbb{C})$ ist homöomorph zu S^2.

Beweis.

(a) Seien $U_1 := \{[z_0, z_1] \mid z_0 \neq 0\} \subset (\mathbb{C}^2 - \{0\})/\sim \, = P^1(\mathbb{C})$

$U_2 := \{[z_0, z_1] \mid z_1 \neq 0\} \subset P^1(\mathbb{C})$

Es ist klar, dass $P_1(\mathbb{C}) = U_1 \cup U_2$.

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{ist Homöo.}$$
$$[z_0, z_1] \longmapsto \frac{z_1}{z_0}$$

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{ist Homöo.}$$
$$[z_0, z_1] \longmapsto \frac{z_0}{z_1}$$

Also $\{(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}\}$ ist ein Atlas für $P_1(\mathbb{C})$

zu zeigen: Kartenwechsel sind holomorph:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = \varphi_1([z, 1]) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0, z \in \varphi_2(U_1 \cap U_2))$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_2([1, z]) = \frac{1}{z}$$

sind holomorph.

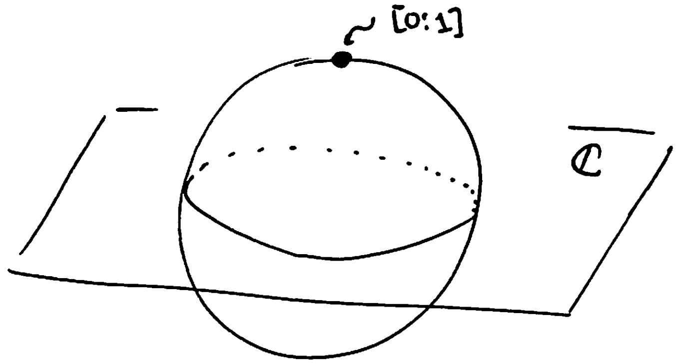
$\Rightarrow$ $P^1(\mathbb{C})$ ist 1-dim. komplexe Mgf.

(b) Betrachte das Komplement von U_1 in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cong}{U_1}} = [0:1]$$

Also ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$$



$\square$

(c) $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{$ eindimensionale UR von $\mathbb{C}^{n+1}\}$

Analog wie in (a) können wir auf $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ eine Äquivalenzrelation definieren:

$$x, y \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad x \sim y :\Longleftrightarrow x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Es gilt wiederum:

Lemma 4. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$.

Satz 5. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ist eine n-dim. komplexe Mannigfaltigkeit.

Notation: $\mathbb{C}^{n+1} \ni x = (x_0, \dots, x_n) \neq 0$

$[x] = [x_0 : \dots : x_n]$ bezeichne die Äquivalenzklasse von x.

Beweis.

Seien $U_i = \{[x_0:\dots:x_n] \mid x_i \neq 0\}$ $\quad i = 1,\dots,n$.
$\cap$
$P^n(\mathbb{C})$.

$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$[x_0:\dots:x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i},\dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$

$i = 0,\dots,n$

- φ_i ist wohldefiniert:

$y = (y_0,\dots,y_n) \in [x_0:\dots:x_n] \in U_i$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $\quad y = \lambda(x_0,\dots,x_n)$

$$\varphi[y_0:\dots:y_n] = \left(\frac{y_0}{y_i},\dots,\frac{y_{i-1}}{y_i},\frac{y_{i+1}}{y_i},\dots,\frac{y_n}{y_i}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i},\dots,\frac{\lambda x_{i-1}}{\lambda x_i},\frac{\lambda x_{i+1}}{\lambda x_i},\dots,\frac{\lambda x_n}{\lambda x_i}\right)$$

$$= \varphi[x_0:\dots:x_n].$$

φ_i ist Homöo:

$\varphi_i^{-1}(x_0,\dots,x_n) = [x_0:\dots:x_{i-1}:1,x_i:\dots:x_n]$

$\rightsquigarrow$ $(n+1)$ Karten.

Es bleibt die Holomorphie der Kartenwechsel zu prüfen. Es gilt:

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\underbrace{(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)}_{\text{wir wählen diese Nummerierung.}} = \varphi_j([x_0:\dots:x_{i-1}:1:x_{i+1}:\dots:x_n]$$

$$= \left(\frac{x_0}{x_j},\dots \frac{x_{j-1}}{x_j},\frac{x_{j+1}}{x_j},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_j},\frac{1}{x_j},\frac{x_{i+1}}{x_j},\dots,\frac{x_n}{x_j}\right)$$

Da aber jede Komponente als rationale Funktion holomorph ist, sind wir fertig.

□

<u>Definition:</u> $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ heisst der n-dim. komplexe projektive Raum.

Wir können $\mathbb{C}^{n-1}$ als Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ auffassen:

$$\mathbb{C}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^n \quad , \quad \underset{\mathbb{C}^{n-1}}{\underset{\Uparrow}{x = (x_1, \ldots, x_{n-1})}} \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Also haben wir:

$$\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

Damit bekommen wir aber auch, dass

$$\underset{\{Pkt\}}{\underset{\|}{\mathbb{P}^0(\mathbb{C})}} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \subset \ldots \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

Das Komplement von U_n in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ist $[(z_0 : \ldots : z_n : 0)] \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup \mathbb{C}^n.$$

Es stellt sich die Frage, wie der $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ mit dem $\mathbb{C}^n$ verklebt wird. Diese wollen wir hier jedoch nicht beantworten (vgl. Literatur in der algebr. Topologie)

3. Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

Definition.

$$G_{m,n} := \{ V \subset \mathbb{C}^{n+m} \mid V \text{ ist Unterraum und } \dim_{\mathbb{C}} V = m \}$$

heisst *m·n-dimensionale komplexe Grassmannmannigfaltigkeit*.

Beispiele.

- $G_{1,1} = \{ V \subset \mathbb{C}^2 \mid V \text{ ist UR und } \dim_{\mathbb{C}} V = 1 \} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
- $G_{1,n} = \{ V \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid V \text{ ist UR und } \dim_{\mathbb{C}} V = 1 \} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Wir wollen uns nun eingehend mit dem

$$G_{2,n} = \{ V \subset \mathbb{C}^{2+n} \mid V \text{ UR}, \dim_{\mathbb{C}} V = 2 \}$$

beschäftigen.

Sei V ein 2-dim. UR von $\mathbb{C}^{2+n} \mid \mathbb{C}$. Wir können V durch zwei Zeilenvektoren repräsentieren, z.B. durch eine $(2 \times 2+n)$ Matrix

$$\begin{bmatrix} x_1, \dots\dots & x_{n+2} \\ y_1 \dots\dots & y_{n+2} \end{bmatrix}$$

vom Rang 2, $(x_1, \dots, x_{n+2})$ und $(y_1, \dots, y_{n+2})$ sind linear unabhängig.

Weiter repräsentiert jede solche Matrix ein Element aus $G_{2,n}$:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \dots & x_{n+2} \\ y_1 \dots & y_{n+2} \end{bmatrix} \longrightarrow V = \{ \alpha \cdot x + \beta \cdot y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \} \in G_{2,n}$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_{n+2})$ und $y = (y_1, \dots, y_{n+2})$.

Wir wollen nun untersuchen, wann zwei solche Matrizen dasselbe Element repräsentieren.

Seien also

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \cdots & x_{2+n} \\ y_1 \cdots & y_{2+n} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A' = \begin{bmatrix} x_1' \cdots & x_{2+n}' \\ y_1' \cdots & y_{2+n}' \end{bmatrix}$$

mit $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$.

$\Rightarrow$ $x = (x_1, \dots, x_{n+2})$ und $y = (y_1, \dots, y_{n+2})$
sind linear unabhängig.
$x' = (x_1', \dots, x_{n+2}')$ und $y' = (y_1', \dots, y_{n+2}')$
sind linear unabhängig.

$\Rightarrow$ $\exists\, \Lambda \in GL(2, \mathbb{C})$, $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\{\alpha x' + \beta y' \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

Es bezeichne $M^{\operatorname{rg} 2}_{2 \times (2+n)}(\mathbb{C})$ die $(2 \times (2+n))$ Matrizen mit Rang 2.

$\Rightarrow$ Wir haben also eine Abbildung

$$\pi : M^{\operatorname{rg} 2}_{2 \times (2+n)}(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{2,n}$$
$$\rotatebox{90}{$\in$}$$
$$A = \begin{bmatrix} x_1 \cdots & x_{2+n} \\ y_1 \cdots & y_{2+n} \end{bmatrix} \longmapsto V = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_{2+n})$, $y = (y_1, \dots, y_{2+n})$
mit $\pi(\Lambda \cdot A) = \pi(A) \quad \forall \Lambda \in GL(2, \mathbb{C})$.

Bemerkung:

Im Falle der projektiven Räume $P^n(\mathbb{C})$ ist die Abbildung π gerade die folgende Projektion:

$$\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{C})$$
$$(x_0, \dots, x_n) \longmapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

Da sich jeder zweidimensionale Unterraum $\mathbb{C}^{2+n}$ durch eine Matrix in $M^{rg\,2}_{2\times(2+n)}(\mathbb{C})$ repräsentieren lässt, ist π surjektiv.

Wir geben nun $G_{2,n}$ die durch π induzierte Metrik, d.h.

$$U \subset G_{2,n} \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subset M^{rg\,2}_{2\times(2+n)}(\mathbb{C}) \text{ offen}.$$

$\Rightarrow \pi$ stetig. Nun ist $G_{2,n}$ Hausdorffsch, $M^{rg\,2}_{2\times(2+n)}(\mathbb{C})/GL(2,\mathbb{C})$ kompakt

$$\Rightarrow \quad \underline{G_{2,n} \underset{\text{homöo.}}{\cong} M^{rg\,2}_{2\times(2+n)}(\mathbb{C}) / GL(2,\mathbb{C})}$$

Wir geben nun $G_{2,n}$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.

Wir repräsentieren die Elemente $V \subset G_{2,n}$ wie oben durch Elemente aus $M^{rg\,2}_{2\times(2+n)}(\mathbb{C})$.

Lemma 6. Seien $x = (x_1, \dots, x_{n+2})$, $y = (y_1, \dots, y_{2+n})$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l}x \text{ und } y \text{ sind} \\ \text{linear unabhängig}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}\exists\ (2\times 2) \text{ Untermatrix in } \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{2+n} \\ y_1 & \dots & y_{2+n}\end{bmatrix} \\ \text{mit } \det \neq 0\end{array}\right.$$

Beweis. Übung $\square$

<u>Bemerkung.</u> In $\begin{bmatrix} x_1 \cdots\cdots x_{2+n} \\ y_1 \cdots\cdots y_{2+n} \end{bmatrix}$ gibt es $\binom{n+2}{2}$ (2×2) Untermatrizen.

Setze

$$\mathcal{U}_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \cdots\cdots x_{2+n} \\ y_1 \cdots\cdots y_{2+n} \end{bmatrix} \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

Nach obigen Bemerkungen können wir $\begin{bmatrix} x_1 \cdots\cdots x_{2+n} \\ y_1 \cdots\cdots y_{2+n} \end{bmatrix}$ mit einem Element $\Lambda \in GL(2,\mathbb{C})$ multiplizieren und wir bekommen einen anderen Repräsentanten von $\begin{bmatrix} x_1 \cdots x_{2+n} \\ y_1 \cdots y_{2+n} \end{bmatrix}$.

Also:

$$\begin{bmatrix} x_1 \cdots\cdots x_{2+n} \\ y_1 \cdots\cdots y_{2+n} \end{bmatrix} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}}_{\in\, GL(2,\mathbb{C})} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{2+n} \\ y_1 & \cdots & y_{2+n} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{12} : \mathcal{U}_{12} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n} \qquad \text{Homöo.}$$

$$\mathcal{U}_{12} \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 \cdots \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 \cdots \eta_n \end{bmatrix} \longmapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

wir haben jetzt also eine Untermenge von $G_{2,n}$ parametrisiert.

Analog definiert man für $i<j$:

$$U_{ij} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{2+n} \\ y_1 & \cdots & y_{2+n} \end{bmatrix} \;\middle|\; \det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[\underset{\substack{\cap \\ GL(2,\mathbb{C})}}{\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{2+n} \\ y_1 & \cdots & y_{2+n} \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{i-1} & 1 & \xi_i & \cdots & \xi_{j-2} & 0 & \xi_{j-1} & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \cdots & \eta_{i-1} & 0 & \eta_i & \cdots & \eta_{j-2} & 1 & \eta_{j-1} & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\text{Homöomorphismus}} \mathbb{C}^{2n}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{i-1} & 1 & \xi_i & \cdots & \xi_{j-2} & 0 & \xi_{j-1} & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \cdots & \eta_{i-1} & 0 & \eta_i & \cdots & \eta_{j-2} & 1 & \eta_{j-1} & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

Somit haben wir einen Atlas $(U_{ij}, \varphi_{ij})_{1 \le i < j \le n+2}$ für $G_{2,n}$ gefunden:

$$\bigcup_{1 \le i < j \le n+2} U_{ij} = G_{2,n}.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Kartenwechsel holomorph sind.

Wir machen dies für den Fall $U_{12} \cap U_{13}$ (anderen Fälle analog).

$$\begin{tikzcd}
 & U_{12} \cap U_{13} \arrow[dl, "\varphi_{12}"'] \arrow[dr, "\varphi_{13}"] & \\
\varphi_{12}(U_1 \cap U_2) \arrow[rr, "\varphi_{13} \circ \varphi_{12}^{-1}"] & & \varphi_{13}(U_{12} \cap U_{13})
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_{12}(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{C}^{2n}, \qquad \varphi_{13}(U_{12} \cap U_{13}) \subset \mathbb{C}^{2n}$$

Sei $(\xi, \eta) \in \varphi_{12}(U_{12} \cap U_{13}) \subseteq \mathbb{C}^{2n}$, wobei

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$

$$\varphi_{12}^{-1}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \in U_{12} \cap U_{13}.$$

Da $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \in U_{12} \cap U_{13}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}$$

$$\| $$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix} \right]$$

$$\| $$

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_1' & 0 & \xi_2' & \cdots & \xi_n' \\ 0 & \eta_1' & 1 & \eta_2' & \cdots & \eta_n' \end{bmatrix}$$

Also:

$$\varphi_{13} \circ \varphi_{12}^{-1}(\xi, \eta) = (\xi', \eta')$$

$$(\xi, \eta) \xrightarrow{\varphi_{12}^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ 0 & 1 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix} \right]}_{\begin{bmatrix} 1 & \xi_1' & 0 & \xi_2' & \cdots & \xi_n' \\ 0 & \eta_1' & 1 & \eta_2' & \cdots & \eta_n' \end{bmatrix}} \xrightarrow{\varphi_{13}} (\xi', \eta')$$

ist holomorph.

In den Übungen (Serie 8) wird alles für den Fall $G_{m,n}$ mit $m \geq 3$ behandelt. Wir bekommen also:

Satz 7.
Sei $G_{m,n} = \{ V \subset \mathbb{C}^{n+m} \mid V \text{ ist Unterraum mit } \dim_{\mathbb{C}} V = m \}$
Es gilt:

(a) $\quad G_{m,n} = M^{\text{rg } m}_{m \times (n+m)}(\mathbb{C}) \,/\, GL(m,\mathbb{C})$

(b) $\quad G_{m,n}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $m \cdot n$.

4. Algebraische Varietäten

Zitat: "Wir haben hier einen Zoo und diskutieren verschiedene Tiere. Hier ein neues Tier." (E. Trubowitz 1988)

Sei $p \in P_{n+1,k}$, also ein homogenes Polynom in $(n+1)$ Veränderlichen vom Grad k:

$$p = \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha z^\alpha \quad , \qquad z^\alpha = z_0^{\alpha_0} \cdots z_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_0 + \ldots + \alpha_n = k.$$

Sei $[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, sei $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ein Repräsentant von $[z_0 : \ldots : z_n]$ (vgl. Lemma 4).

Falls $p \in P_{n+1,k}$, $(z_0, \ldots, z_n)$ als Nullstelle hat, d.h.

$$p(z_0, \ldots, z_n) = 0$$

so folgt für jeden anderen Repräsentanten $(x_0, \ldots, x_n)$ von $[z_0 : \ldots : z_n]$ dass

$$p(x_0, \dots, x_n) = 0 .$$

Denn $(x_0, \dots, x_n) = \lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) \quad \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

$$\Rightarrow p(x_0, \dots, x_n) = p(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Homogen}}}{=} \lambda^n p(z_0, \dots, z_n) = 0$$

Also: Das homogene Polynom $p \in P_{n+1,k}$ mit $p(z_0, \dots, z_n) = 0$ hat jeden Repräsentanten von $[z_0 : \dots : z_n]$ als Nullstelle.

Wir können somit folgende Definition machen:

Definition. Sei $p = \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha \cdot z^\alpha \in P_{n+1,k}$ mit $z^\alpha = z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n}$.

Dann heisst

$$H_p = \{ [z_0 : \dots : z_n] \in P^n(\mathbb{C}) \mid p(z_0, \dots, z_n) = 0 \}$$

eine projektive algebraische Hyperfläche vom Grad k.

Beispiel.

Sei $p(z) = \sum_{i=0}^{n}{}' a_i \cdot z_i \quad \in H_{n+1,1}$

$$H_p = \{ [z_0 : \dots : z_n] \in P^n(\mathbb{C}) \mid p(z_0, \dots, z_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i z_i = 0 \}$$

Man nennt H_p eine projektive Hyperebene (vgl. unten (Projektive algebr. Hyperfläche vom Grad 1)

Lemma: H_p ist eine $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit von $P^n(\mathbb{C})$.

Beweis.

Sei $U_0 = \{[z_0 : \ldots : z_n] \in P^n(\mathbb{C}) \mid z_0 \neq 0\}$

und $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, [z_0 : \ldots : z_n] \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right)$

(vgl. p. 100)

Sei nun $[z_0 : \ldots : z_n] \in H_p \cap U_0$

$$\Rightarrow \quad a_0 \cdot z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = 0$$

$$\underset{z_0 \neq 0}{\Rightarrow} \quad a_1 \cdot \frac{z_1}{z_0} + \ldots + a_n \cdot \frac{z_n}{z_0} = -a_0$$

Falls $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi_0([z_0 : \ldots : z_n])$ ist, folgt

$$a_1 \cdot \xi_1 + \ldots + a_n \xi_n = -a_0 \qquad (*)$$

$(*)$ definiert einen linearen Unterraum von $\mathbb{C}^n$

- Falls $\exists i, 1 \leq i \leq n$ mit $a_i \neq 0$ $\Rightarrow$ dim des Unterraumes ist $n-1$ und wir sind fertig (bis auf andere Karten)
- Falls $a_0 \neq 0$ und $a_1 = \ldots = a_n = 0$ $\Rightarrow U_0 \cap H = \emptyset$

  $\Rightarrow$ H schneidet die anderen Koordinatensysteme und man bekommt eine zu $(*)$ analoge Gleichung.

Damit folgt also, dass H_p eine $(n-1)$-dim Untermgf. von $P^n(\mathbb{C})$ ist. ($\rightsquigarrow$ Hyperebene)

$\square$

<u>Definition.</u> Sei $f \in P_{n,k}$, $k \geq 1$. f heisst <u>irreduzibel</u>, falls sich f <u>nicht</u> als Produkt $f = g \cdot h$ von Polynomen g, h vom Grad ≥ 1 schreiben lässt.

<u>Definition.</u>

$$I_{n+1,k} = \{ p \in P_{n+1,k} \mid p \text{ irreduzibel} \}$$

$$I_k := \bigcup_{\ell \leq k} I_{n+1,\ell}$$ irreduziblen homogenen Polynome vom Grad $\leq k$.

Nun auf I_k und $P_{n+1,k}$ definieren wir folgende Äquivalenzrelationen:

$$p, q \in I_k \quad , p \sim q :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid p = \lambda q$$

$$p, q \in P_{n+1,k} \, , \, p \sim q :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid p = \lambda q.$$

Sei $[p] \in P_{n+1,k}/\sim$ eine Äquivalenzklasse. Wir zerlegen $[p]$ in irreduzible Klassen, d.h.

$$[p] = \prod_{f \in I_k/\sim} f^{Sp(f)}$$

<u>Bsp.</u> $\quad p = x^3 + x^2 y - x y^2 - y^3 \in P_{2,3}$

$$p = (x-y)(x+y)^2 \quad \text{mit } f_1 = (x-y) \in I_3$$
$$f_2 = (x+y) \in I_3$$

$$[p] = [x-y] \cdot [x+y]^2 = [f_1][f_2]^2$$
$$\Rightarrow Sp([f_1]) = 1, \quad Sp([f_2]) = 2.$$

Wir haben also zu jedem $[p] \in P_{n+1,k}/\sim$ eine Abbildung

$$\delta_p : I_k/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f \longmapsto S_p(f)$$

Es gilt: $$\sum_{f \in I_k/\sim}{}' S_p(f) \cdot \deg f = k.$$

<u>Definition.</u>

$$\mathcal{H}_k := \{ (H_p, S_p) \mid p \in P_{n+1,k} \}$$

Wir haben also eine surjektive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi : P_{n+1,k} & \longrightarrow\!\!\!\!\to & \mathcal{H}_k \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ p & \longmapsto & (H_p, S_p) \end{array}$$

Nun $\phi(p) = \phi(q) \iff \underbrace{S_p = S_q \text{ und } H_p = H_q}_{\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } p = \lambda q \;!}$

Also haben wir eine Bijektion

$$\underline{P_{n+1,k}/\sim \;\xrightarrow{\text{bij.}}\; \mathcal{H}_k}$$

Nach Satz 16.3 gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} P_{n+1,k} = \binom{(n+1)+k-1}{k} = \binom{n+k}{k}$$

Wir haben also eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}} & \xrightarrow{\text{bij.}} & P_{n+1,k} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ c & \longmapsto & \sum\limits_{|\alpha|=k}' c_\alpha \cdot z^\alpha \end{array}$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Äquivalenzrelation in $P_{n+1,k}$ auf $\mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}}$ durchdrückt:

$$p = \sum_{|\alpha|=k}' c_\alpha z^\alpha \quad , \quad q = \sum_{|\alpha|=k}' d_\alpha z^\alpha \qquad , p, q \in P_{n+1,k}.$$

$$\begin{aligned} p \sim q \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } p = \lambda q \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} c = (c_\alpha) \in \mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}} \\ d = (d_\alpha) \in \mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}} \end{cases} \text{gilt } c = \lambda d \\ &\Longleftrightarrow \quad c \sim d \quad \text{nach Definition p. 99.} \end{aligned}$$

Also haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}}/\sim & \xrightarrow{\text{bij.}} & P_{n+1,k}/\sim . \\ \| & & \\ \mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}-1}\right) & & \end{array}$$

Somit haben wir:

Satz 8.

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}-1}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_k$$

Also ist $\mathcal{H}_k$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $\binom{n+k}{k} - 1$.

Beispiel. Betrachten wir die Polynome $p_1, p_2 \in P_{2,3}$

$$p_1 = (x-y)^2 \cdot (x+y)$$

$$p_2 = (x-y)\,(x+y)^2$$

Es ist: $S_{p_1}[x-y] = 2$, $S_{p_1}[x+y] = 1$

$S_{p_2}[x-y] = 1$, $S_{p_2}[x+y] = 2$

$$H_{p_1} = H_{p_2}$$

Also sind $(H_{p_1}, S_{p_1}) \neq (H_{p_2}, S_{p_2})$ in $\mathcal{H}_k$!

Bemerkung.

Man beachte den Unterschied zwischen der Definition unseres $\mathcal{H}_k$ und der Definition des $\mathcal{H}_k$ in der Vorlesung, wo wir $\mathcal{H}_k = \{ H_p \mid p \in P_{n+1,k} \}$ setzten.

Für die Polynome p_1 und p_2 aus obigem Bsp. gilt $H_{p_1} = H_{p_2}$. Trotzdem gibt es aber kein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $p_1 = \lambda p_2$!

Insbesondere ist also $\mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}-1}\right)$ nicht isomorph zu diesem $\mathcal{H}_k$.

19. Dualräume

In diesem Abschnitt wollen wir zu jedem Vektorraum V einen dualen Vektorraum V^* konstruieren und die Beziehungen zwischen V und V^* untersuchen.

Sei V ein beliebig dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition. $V^* := \{ \varphi : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ linear} \}$ heisst der zu V duale Vektorraum. Man nennt $\varphi \in V^*$ ein Funktional.

Die Elemente von V^* sind also lineare Abbildungen zwischen den $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}$ ($\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$).

Lemma 1. V^* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis. Wir geben hier nur die Addition in V^* und die Skalarmultiplikation. Der Rest ist als Übung gedacht.

$$\varphi, \psi \in V^* \; : \quad (\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v) \qquad \forall v \in V.$$

$$\lambda \in \mathbb{K} \; : \quad (\lambda \varphi)(v) := \lambda \cdot \varphi(v)$$

□

Beispiele.

(a) Sei $V = \mathbb{K}^n$. Definiere $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ durch

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 ,$$

also die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist $\varphi \in V^*$.

Analog bekommt man für jedes $i = 1, \dots, n$

$$\varphi_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i .$$

Sei V ein <u>endlich</u> dimensionaler $\mathbb{K}$-VR , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Wählen wir 1 als (einziger) Basisvektor von $\mathbb{K}$. Nach Satz 7.3 (Lineare Algebra I) gibt es für jedes $i = 1, \dots, n$ ein Funktional φ_i mit

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

<u>Lemma 2.</u> Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Sei weiter $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann sind die oben konstruierten $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine Basis von V^*. Man nennt sie die <u>duale Basis</u>.

<u>Beweis</u>

(1) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ erzeugen V^*

Sei also $\varphi \in V^*$, $\varphi(v_j) = a_j \cdot 1 \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi(v_j) \cdot \varphi_j$$

$$\left(\varphi(v_l) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(v_j) \cdot \underbrace{\varphi_j(v_l)}_{\delta_{jl}} = \varphi(v_l) \right)$$

(2) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sind linear unabhängig.

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i \quad , \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\varphi_i(v_l)}_{\delta_{il}} = \lambda_l \qquad \forall\, l = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

$\square$

Sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-VR.

Dann können wir eine Abbildung

$$f^*: W^* \longrightarrow V^*$$

wie folgt definieren:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\varphi \circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad f^*(\varphi) := \varphi \circ f$$

<u>Lemma 3.</u> Die Abbildung $f^*: W^* \longrightarrow V^*$ ist linear. Man nennt sie die <u>duale</u> oder <u>transponierte Abbildung von f</u>.

(klar)

Es seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \dots, w_m\}$. Die Abbildung $f: V \longrightarrow W$ werde durch die Matrix $A = (a_{ij})$ bzgl. dieser Basen gegeben.

Wir wollen untersuchen, durch welche Matrix $B = (b_{ij})$ die transponierte Abbildung $f^*: W^* \longrightarrow V^*$ bzgl. den dualen Basen $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ bzw. $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ gegeben wird.

Dazu bestimmen wir $f^*(\psi_j) \in V^*$:

$$(f^*(\psi_j))(v_\ell) = \psi_j \circ f(v_\ell) = \psi_j\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i\ell} w_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_{i\ell} \underbrace{\psi_j(w_i)}_{\delta_{ji}}$$

$$= a_{j\ell} \qquad 1 \leq \ell \leq n, \ 1 \leq j \leq m$$

Andersseits gilt:

$$f^*(\psi_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot \varphi_k \qquad 1 \leq j \leq m$$

Also

$$(f^*(\psi_j))(v_\ell) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \underbrace{\varphi_k(v_\ell)}_{\delta_{k\ell}} = b_{\ell j} \qquad 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq \ell \leq n.$$

Damit folgt, dass $a_{j\ell} = b_{\ell j}$.

Wir haben also gezeigt:

<u>Satz 4.</u> Seien V und W $\mathbb{K}$-VR mit Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \dots, w_m\}$. Die lineare Abbildung $f: V \to W$ werde bzgl. diesen Basen durch die Matrix A beschrieben. Dann wird die duale Abbildung $f^*: W^* \to V^*$ bezüglich den dualen Basen $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ bzw. $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ durch die Matrix A^t beschrieben.

□

<u>Lemma 5.</u> (Riesz)
Sei V ein endlich dim. $\mathbb{K}$-VR. mit einem <u>nicht ausgearteten</u> Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann ist die Abb.

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto (w \longmapsto \langle w, v\rangle) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Man nennt ihn einen <u>kanonischen</u> Isomorphismus.

<u>Beweis.</u> Übung Serie 7

□

(b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt, $v_0 \in V$ fest. Dann ist die Abb.

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad v \longmapsto \langle v, v_0 \rangle$$

ein Funktional, also $\varphi \in V^*$.

Beachte, falls V ein $\mathbb{C}$-VR. mit einem hermiteschen Skalarprodukt ist und $v_0 \in V$, dann ist die Abb.

$$\varphi: v \longmapsto \langle v_0, v \rangle$$

kein Funktional, da für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\lambda v) = \langle v_0, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v_0, v \rangle = \bar{\lambda} \cdot \varphi(v) \quad !$$

(c) Sei $V = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_0^1 f(t)\, dt$$

φ ist ein (lineares) Funktional, also $\varphi \in V^*$.

Sei $f_0 \in V$ fest gewählt. Dann ist die Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_0^1 f_0(t) \cdot f(t)\, dt$$

auch ein Funktional.

Wir geben noch ein weiteres wichtiges Funktional auf V

$$\delta : V \longmapsto \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(0)$$

δ ist ein Funktional, man nennt es das Dirac δ-funktional.

20. Lie Algebren und Wurzelsysteme

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition. Eine $\mathbb{K}$-Lie Algebra $(L, [\,,\,])$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum L mit einer Abbildung $[\,,\,] : L \times L \longrightarrow L$ mit

(1) $[\alpha x+\beta y, z] = \alpha[x,z]+\beta[y,z] \quad \forall x,y,z\in L,\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}$

(2) $[x,y] = -[y,x] \quad \forall x,y\in L$

(3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad \forall x,y,z\in L.$

(3) nennt man die Jacobi-Identität

Lemma 1. Sei $(L,[\,,\,])$ eine $\mathbb{K}$-Lie Algebra. Dann gilt:

(i) $[x,x] = 0 \quad \forall x\in L$

(ii) $[x, \alpha y+\beta z] = \alpha[x,y]+\beta[x,z] \quad \forall x,y,z\in L,\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}.$

Beweis.

(i) Nach (2) gilt $[x,x] = -[x,x]$
$\Rightarrow 2[x,x] = 0 \quad \Rightarrow [x,x] = 0.$

(ii) klar

$\square$

Beispiel.

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) := (M_n(\mathbb{C}), [\,,\,])$ wobei $[A,B] = AB-BA,\ A,B\in M_n(\mathbb{C}).$

- $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ ist eine $\mathbb{C}$-Lie Algebra, denn

$M_n(\mathbb{C})$ ist ein $\mathbb{C}$-VR der Dimension $\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) = n^2$.

(1) $[\alpha A+\beta B, C] = (\alpha A+\beta B)C - C(\alpha A+\beta B)$
$= \alpha AC+\beta BC - C\alpha A - C\beta B$
$= \alpha(AC-CA)+\beta(BC-CB) = \alpha[A,C]+\beta[B,C]$

(2) $[A,B] = AB - BA = -(-AB+BA)$
$$= -[B,A].$$

(3) $[A,[B,C]] = A[B,C] - [B,C]\cdot A$
$$= A(BC-CB) - (BC-CB)A$$
$$= ABC - ACB - BCA + CBA.$$

durch Permutation von A,B,C bekommen wir

$$[B,[C,A]] = BCA - BAC - CAB + ACB$$
$$[C,[A,B]] = CAB - CBA - ABC + BAC$$

$$\Rightarrow [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

teutonisches A!

Definition. Sei $\mathfrak{a} \subset L$

$\mathfrak{a}$ heisst eine Unterliealgebra von L, falls

(i) $\mathfrak{a} \subset L$ ist Untervektorraum
(ii) $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, d.h. $\forall x,y \in \mathfrak{a} \Rightarrow [x,y] \in \mathfrak{a}$.

Beispiel.

$sl(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0\} \subset gl(n,\mathbb{C})$ ist eine (n^2-1)-dim. Unterliealgebra von $gl(n,\mathbb{C})$.

$$\operatorname{tr}[A,B] = \operatorname{tr}(AB-BA) = \operatorname{tr}(AB) - \underbrace{\operatorname{tr}(BA)}_{=\operatorname{tr}(AB)} = 0.$$

<u>Definition.</u> Seien $(L_1, [\ ,\ ]_1)$ und $(L_2, [\ ,\ ]_2)$ zwei Lie Algebren / $\mathbb{K}$.

- Eine Abbildung

$$\phi : (L_1, [\ ,\ ]_1) \longrightarrow (L_2, [\ ,\ ]_2)$$

heisst <u>Lie-Algebren Homomorphismus</u>, falls

(1) $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ ist <u>linear</u>.

(2) ϕ ist verträglich mit den Klammern, d.h.

$$\phi\,([X_1, X_2]_1) = [\phi(X_1), \phi(X_2)]_2 \quad \forall X_1, X_2 \in L_1.$$

- Ein Lie-Algebren Homomorphismus heisst <u>Lie Algebren Isomorphismus</u>, falls zusätzlich

(3) $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ ist Vektorraumiso.

<u>Bemerkung.</u> Sei $\phi : (L_1, [\ ,\ ]_1) \longrightarrow (L_2, [\ ,\ ])$ ein Lie Algebren Isomorphismus. Dann gilt:

$$\phi^{-1}[X, Y]_2 = [\phi^{-1}(X), \phi^{-1}(Y)]_1 \quad \forall X, Y \in L_2.$$

(Übung)

<u>Lemma 2.</u> Sei $\phi : (L_1, [\ ,\ ]_1) \longrightarrow (L_2, [\ ,\ ]_2)$ ein Lie-Algebren Homomorphismus. Dann ist $\operatorname{im}\phi$ eine Unterliealgebra von L_2.

<u>Beweis.</u>

(i) $\operatorname{im}\phi \subset L_2$ Unterraum (klar)

(ii) $X, Y \in \operatorname{im}\phi \implies X = \phi(T) \quad Y = \phi(S)$, $T, S \in L_1$.

$$[X, Y]_2 = [\phi(T), \phi(S)]_2 = \phi[T, S]_1 \in \operatorname{im}\phi$$

$\implies [\operatorname{im}\phi, \operatorname{im}\phi] \subset \operatorname{im}\phi$.

$\square$

<u>Definition.</u> Sei $(L, [\,,\,])$ eine Lie Algebra. Eine Unterliealgebra $\mathfrak{a} \subset L$ heisst Lie-Ideal, falls

$$[\mathfrak{a}, L] \subset \mathfrak{a}.$$

<u>Lemma 3.</u> Sei $\phi : (L_1, [\,,\,]_1) \longrightarrow (L_2, [\,,\,]_2)$ ein Lie-Algebren Homomorphismus. Dann ist

$$\ker \phi = \{ S \in L_1 \mid \phi(S) = 0 \}$$

ein Lie-Ideal von L_1.

<u>Beweis.</u>

Sei $X \in L_1$, $S \in \ker \phi$

$$\phi([S, X]) = [\underbrace{\phi(S)}_{=0}, \phi(X)] = [0, \phi(X)] \underset{\text{Übung}}{=} 0.$$

$\Rightarrow [S, X] \in \ker \phi$

$\square$

<u>Definition.</u>

Eine Unterliealgebra von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heisst Matrixliealgebra,

wobei $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = (M_n(\mathbb{K}), [\,,\,])$ mit

$$A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad [A, B] = AB - BA.$$

<u>Bsp.</u> $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$

$$\mathfrak{o}(n) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A + A^T = 0 \} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^T = 0 \} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

(vgl. Übung Serie 1)

Ohne Beweis zitieren wir folgenden Satz von Ado:

<u>Satz 4</u> (Ado's Theorem)

Sei $(L, [,])$ eine Lie Algebra über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Dann ist $(L, [,])$ isomorph zu einer Matrixliealgebra.

Also genügt es Matrixliealgebren zu untersuchen. Dies wollen wir im folgenden auch tun.

<u>Definition.</u> Eine Lie Algebra $(L, [,])$ heisst <u>abelsche Lie-Algebra</u>, falls $[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in L$.

<u>$sl(n, \mathbb{C})$</u>

Betrachten wir nun folgende Unterliealgebra von $sl(n, \mathbb{C})$:
Sei

$$\mathfrak{h} = \{ D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{C} \ , \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \}$$

wobei $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

<u>Lemma 5.</u>

$\mathfrak{h}$ ist eine <u>abelsche Unterliealgebra</u> von $sl(n, \mathbb{C})$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = n - 1$.

<u>Beweis.</u>

(i) $\mathfrak{h} \subset sl(n, \mathbb{C})$ ein Unterraum. (klar)

(ii) $H_1, H_2 \in \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad [H_1, H_2] = 0$:

$H_1 = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$H_2 = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$

$$[H_1, H_2] = H_1 H_2 - H_2 H_1$$
$$= \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) - \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$= \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n) - \mathrm{Diag}(\underbrace{\mu_1\lambda_1}_{=\lambda_1\mu_1}, \dots, \underbrace{\mu_n\lambda_n}_{=\lambda_n\cdot\mu_n})$$
$$= 0.$$

□

Satz 6. $\mathfrak{h}$ ist eine maximale abelsche Unterliealgebra von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, d.h. es gibt keine abelsche Unterliealgebra $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ mit
$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}).$$

Beweis.

Wir zeigen: Sei $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ mit $[X,H]=0 \ \forall H \in \mathfrak{h} \Rightarrow X \in \mathfrak{h}$.

Dann sind wir natürlich fertig, denn: $X \in \mathfrak{a} \underset{\substack{\mathfrak{h}\subset\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\text{ abelsch}}}{\Rightarrow} [X,H]=0 \ \forall H \in \mathfrak{h}$.

aber somit ist $X \in \mathfrak{h}$. $\Rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{h}$

Sei also $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

$$X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & 0 \\ & & 0 & \\ & 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}}_{\in\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & \\ x_{21} & -x_{22} & \\ \vdots & & 0 \\ x_{n1} & -x_{n2} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & 0 \\ & & 0 & \\ & 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{21} & -x_{22} & \cdots & -x_{2n} \\ & & 0 & \end{pmatrix}$$

Da $[X, H] = 0 \quad \forall H \in \mathfrak{h}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} X_{12} &= -X_{12} \quad \Rightarrow X_{12} = 0 \\ X_{21} &= -X_{21} \quad \Rightarrow X_{21} = 0 \\ X_{13} &= \dots = X_{1n} = 0 \\ X_{23} &= \dots = X_{2n} = 0 \\ X_{31} &= \dots = X_{n1} = 0 \\ X_{32} &= \dots = X_{n2} = 0 \end{aligned}$$

Analog bekommt man mit den Matrizen $\operatorname{Diag}(0, \dots \underset{i}{\pm 1}, \dots \underset{j}{\mp 1}, \dots 0) \in \mathfrak{h}$ dass $X \in \mathfrak{h}$ ist. $\square$

<u>Definition.</u>

$$n_+ := \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \;\; i \geq j\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \right\}$$

$$n_- := \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \;\; i \leq j\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \right\}$$

<u>Lemma 7.</u>

n_+ und n_- sind Lieunteralgebren von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

$$\dim_{\mathbb{C}} n_+ = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} n_- = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Beweis: Übung. $\square$

Lemma 8. "Wurzelzerlegung von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$"

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \qquad \text{(als Liealgebren)}$$

Beweis: Übung. $\square$

Sei $(L,[\,,\,])$ eine Lie-Algebra. Für jedes $x\in L$ haben wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} ad_x : L &\longrightarrow L \\ y &\longmapsto ad_x(y) := [x,y] \end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{gl}(L) = (\{\varphi : L \to L \mid \varphi \text{ linear}\}, [\,,\,])$

wobei $\varphi,\psi \in \{L\to L, \text{ linear}\}$

$$[\varphi,\psi] = \varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi$$

Lemma 9.

(i) $\mathfrak{gl}(L)$ ist eine Lie-Algebra.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} ad : L &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ x &\longmapsto ad_x \end{aligned}$$

ist ein Lie Algebrahomo.

Beweis.

(i) Beachte: $\dim_{\mathbb{K}} L = n$

$\Rightarrow \{\varphi : L \to L \mid \varphi \text{ linear}\} = M_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \mathfrak{gl}(L) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$

(ii) • ad ist linear:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\alpha x+\beta y)(z) &= [\alpha x+\beta y, z] \\ &= \alpha[x,z]+\beta[y,z] \\ &= (\alpha\cdot \mathrm{ad}(x) + \beta\cdot \mathrm{ad}(y))(z) \qquad \forall z\in L. \end{aligned}$$

• $\mathrm{ad}[x,y] = [\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]$

$$\mathrm{ad}[x,y](z) = [[x,y],z] = \underbrace{-[z,[x,y]]}$$

$$\begin{aligned} [\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y](z) &= (\mathrm{ad}x\circ \mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y\circ \mathrm{ad}x)\, z \\ &= \mathrm{ad}x\circ \mathrm{ad}y\,(z) - \mathrm{ad}y\circ\mathrm{ad}x\,(z) \\ &= \mathrm{ad}x([y,z]) - \mathrm{ad}y[x,z] \\ &= [x,[y,z]] - [y,\underbrace{[x,z]}_{-[z,x]}] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &\overset{\text{Jacobi-Identität}}{=} \underbrace{-[z,[x,y]]} \end{aligned}$$

□

<u>Bemerkung:</u> Man nennt $\mathrm{ad}: L \to gl(L)$ adjungierte Darstellung von L.

Betrachten wir wiederum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

<u>Definition.</u> Sei $\mathfrak{h}^*$ der Dualraum von $\mathfrak{h}$.

Ein Element $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ heisst <u>Wurzel</u> von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, genau dann wenn

(a) $\alpha \neq 0$

(b) $\exists\ 0 \neq x \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ mit

$$\begin{array}{c} \mathrm{ad}_H(x) \\ \| \\ [H,x] \end{array} = \alpha(H)\cdot x \qquad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

d.h. also x ist Eigenvektor mit Eigenwerten $\alpha(H)$, $\forall H \in \mathfrak{h}$.

Sei $R := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \text{ ist Wurzel von } \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\}$.

Wir wollen nun im folgenden zeigen, dass R ein Wurzelsystem im Sinne von Kapitel 15 ist. Dazu untersuchen wir spezielle Elemente aus $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ bzw. $\mathfrak{h}^*$.

Sei
$$e_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & 1 & \cdots \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \end{pmatrix} & \cdots i \\ \qquad\quad j & \end{array}$$

$$H = D(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathfrak{h}.$$

Für $i<j$ setze $\alpha_{ij}(H) = \lambda_i - \lambda_j$

Es gilt:

<u>Lemma 10.</u>

(1) $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*$ $\quad i<j$

(2) $\alpha_{ij} \in R$ $\quad i<j$

(3) $R = \{\alpha_{ij}, -\alpha_{ij},\ i<j\}$.

<u>Beweis.</u> $i<j$

(1) $\alpha_{ij} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist linear.

Sei $H_1 = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $H_2 = D(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}(H_1 + H_2) &= \alpha_{ij}(D(\lambda_1+\mu_1, \dots, \lambda_n+\mu_n)) \\
&= \lambda_i + \mu_i - (\lambda_j + \mu_j) \\
&= \underbrace{\lambda_i - \lambda_j}_{} + \underbrace{\mu_i - \mu_j}_{} \\
&= \alpha_{ij}(H_1) + \alpha_{ij}(H_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}(\lambda H_1) &= \alpha_{ij}(\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_n) \\
&= \lambda\lambda_i - \lambda\lambda_j = \lambda(\lambda_i - \lambda_j) \\
&= \lambda \cdot \alpha_{ij}(H_1).
\end{aligned}$$

(2) zu zeigen: $\exists\, \underset{\neq 0}{x} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ mit $ad_H(x) = \alpha_{ij}(H) \cdot x \quad \forall H \in \mathfrak{h}$.

$\alpha_{ij} = 0$ klar.

Setze $\underset{\neq 0}{x} = e_{ij} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ $\quad$ <u>$i<j$</u>

$H = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$ad_H(e_{ij}) = [H, e_{ij}] = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{\lambda_i \cdot e_{ij}} - \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\lambda_j \cdot e_{ij}}$$

$$= \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\alpha_{ij}(H)} \cdot e_{ij}$$

(3) Aus (2) folgt, dass

$$\{\alpha_{ij}, -\alpha_{ij}, i<j\} \subseteq R$$

Sei nun $\underset{0}{\alpha \overset{}{\underset{\neq}{}} \in R}$. Es gibt also $\underset{\substack{\neq\\0}}{x} \in sl(n,\mathbb{C})$ mit

$$[H,x] = \alpha(H)\cdot x \qquad \forall H \in h.$$

Nach Lemma 8 gilt:

$$sl(n,\mathbb{C}) = n_- \oplus h \oplus n_+$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i<j} \lambda_{ij}\cdot e_{ij} + \underset{\substack{\cap\\ h}}{\tilde{H}} + \sum_{i>j}{}' \mu_{ij}\cdot e_{ij}$$

Sei $H = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$$[H,x] = \sum_{i<j} \lambda_{ij}[H,e_{ij}] + \underbrace{[H,\tilde{H}]}_{\substack{=0\\ \tilde{H}\in h}} + \sum_{i>j}{}' \mu_{ij}[H,e_{ij}]$$

$$= \sum_{i<j}{}' \lambda_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)\cdot e_{ij} + \sum_{i>j} \mu_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)e_{ij}$$

$$= \alpha(H)\cdot x$$

$$= \alpha(H)\cdot\sum_{i<j}{}' \lambda_{ij}\cdot e_{ij} + \alpha(H)\cdot\tilde{H} + \alpha(H)\cdot\sum_{i>j}{}' \mu_{ij}\cdot e_{ij}.$$

Wiederum mit Lemma 8 folgt (Summe direkt)

(a) $\alpha(H)\cdot\tilde{H} = 0 \qquad \forall H \in h$

(b) $\sum_{i<j} \lambda_{ij}\cdot[H,e_{ij}] = \alpha(H)\cdot\sum_{i<j}{}' \lambda_{ij}\cdot e_{ij} \qquad \forall H\in h$

(c) $\sum_{i>j}' \mu_{ij} \cdot [H, e_{ij}] = \alpha(H) \cdot \sum_{i>j}' \lambda_{ij} \cdot e_{ij} \qquad \forall H \in \mathfrak{h}.$

Aus (a) folgt: $\tilde{H} = 0$, da $\alpha \neq 0$.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\neq \\ 0}}{x} = \sum_{i<j}' \lambda_{ij} \cdot e_{ij} + \sum_{i>j}' \mu_{ij} \cdot e_{ij}$$

Mit (b) folgt für $H = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$\sum_{i<j} \lambda_{ij} \cdot (\lambda_i - \lambda_j) \cdot e_{ij} = \alpha(H) \cdot \sum_{i<j}' \lambda_{ij} \cdot e_{ij}$$

Da $\{e_{ij} \mid i<j\}$ eine Basis von n_- folgt:

$$\lambda_{ij} (\lambda_i - \lambda_j - \alpha(H)) = 0 \quad \forall i<j.$$

$\Rightarrow \lambda_{ij} = 0$ oder $\alpha(H) = \lambda_i - \lambda_j \quad \forall H = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(i) $\exists i<j$ mit $\lambda_{ij} \neq 0 \Rightarrow \alpha(H) = \lambda_i - \lambda_j \quad \forall H = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Es gibt aber kein λ_{km} mit $(k,m) \neq (i,j)$ für das gilt $\lambda_{km} \neq 0$:

Ann. $\lambda_{km} \neq 0 \Rightarrow \alpha(H) = \lambda_k - \lambda_m \quad \forall H = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Speziell für $H = D(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ mit $\lambda_i = 1, \lambda_j = -1, \lambda_k = 2,$ $\lambda_l = -2$, $\lambda_s = 0$ $s \neq i,j,k,l$

$$\Rightarrow \alpha(H) = \lambda_i - \lambda_j = 2$$
$$= \lambda_k - \lambda_m = 4 \quad \lightning.$$

Analog zeigt man, dass alle $\mu_{ij} = 0$

Somit folgt also: $\underline{\alpha = \alpha_{ij} \quad i<j}$

(ii) $\forall i,j \ \lambda_{ij} = 0$

Da $x \neq 0 \Rightarrow \exists i,j \ i > j$ mit $\mu_{ij} \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha(H) = \lambda_i - \lambda_j \quad i > j$$

Analog wie in (i) zeigt man, dass es kein anderes $\mu_{kl} \neq 0$ gibt. Also

$$\alpha(H) = \lambda_i - \lambda_j = -(\lambda_j - \lambda_i) \quad i > j$$

$$\Rightarrow \alpha = -\alpha_{ji} \quad j < i$$

Somit haben wir gezeigt: $R \subseteq \{\pm \alpha_{ij} \mid i < j\}$. $\square$

Wir benötigen noch einige Definitionen.

Definition.

Seien $X, Y \in gl(n, \mathbb{C})$.

$K(X,Y) := sp(X \cdot Y)$ Killing Form für Physiker

Bemerkung:
- $K(X,Y) = K(Y,X)$
- $K(c_1 X_1 + c_2 X_2, Y) = c_1 K(X_1, Y) + c_2 K(X_2, Y) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Definition. Sei $L \subset gl(n,\mathbb{C})$ eine Matrixliealgebra. Dann heisst L ½-einfach, falls $K|L$ (K eingeschränkt auf L) nicht ausgeartet ist.

<u>Beispiel.</u>

(1) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ ist $1/2$-einfach

$\ulcorner$ Sei $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ mit $K(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

zu zeigen: $X = 0$.

$$K(X,Y) = \operatorname{tr}(X \cdot Y)$$

$$(X \cdot Y)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} Y_{kj} \qquad \text{falls } X = (X_{ij}) \quad Y = (Y_{ij}).$$

$$\Rightarrow K(X,Y) = \sum_{i,k=1}^{n} X_{ik} Y_{ki} \quad = 0 \qquad \forall\, Y = (Y_{ij}) \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}).$$

Speziell: $Y = e_{lm}$, $l < m$

$$\Rightarrow K(X, e_{lm}) = X_{ml} = 0 \quad , \; l < m$$

analog: $Y = e_{lm}$, $l > m \quad \Rightarrow X_{lm} = 0$, $l > m$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} X_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

Basis für $\mathfrak{h}$:
$$\begin{array}{cc} H_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad j = 2, \ldots, n$$

$$K(X, H_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{11} = X_{22} = \ldots = X_{nn} = a$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} X = \sum_{i=1}^{n} X_{ii} = n \cdot a = 0 \quad , \text{da } X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{11} = \ldots = X_{nn} = 0 \text{ ; also } \underline{X = 0}.$$

$\lrcorner$

(2) $\mathfrak{h}$ ist $\frac{1}{2}$-einfach.

$\ulcorner$ $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$, $\quad H_1 = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\quad\quad H_2 = D(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$\Rightarrow K(H_1, H_2) = tr(H_1 \cdot H_2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i$$

mit Basis $\{H_j \mid j = 2, \dots, n\}$ von Prop 1 folgt Bel.

$\lrcorner$

Mit Beispiel 2 folgt, dass $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^*$ kanonisch isomorph sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{h}^* \\ H &\longmapsto \big(\underset{\in \mathfrak{h}}{M} \longmapsto K(M, H)\big) \\ D(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, \underset{j}{-1}, \dots 0) &\longmapsto \alpha_{ij} \quad (i<j) \end{aligned}$$

Im folgenden identifizieren wir $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^*$, insbesondere α_{ij} mit $D(0, \dots, 1, \dots, -1, \dots 0)$.

Satz 10.
$R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha$ ist Wurzel von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})\}$ ist ein Wurzelsystem von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ vom Typ A_{n-1} im Sinne von Kapitel 15 $(n \geq 2)$.

Beweis.
Nach Lemma 9 gilt: $R = \{\alpha_{ij}, -\alpha_{ij} \mid i<j\}$.

(a) $\cdot$ R ist endlich von Kardinalität. $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$

$\cdot$ $0 \notin R$ ✓

$\cdot$ R erzeugt den $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^*$ ✓

(b) $\alpha \in R \Rightarrow -\alpha \in R$ ✓

$\lambda\alpha \in R \Rightarrow \lambda = \pm 1$ ✓

(c) $\sigma_\alpha(R) \subset R \quad \forall \alpha \in R$.

$$\sigma_{\alpha_{ij}}(\alpha_{kl}) = \alpha_{kl} - 2 \cdot \frac{K(\alpha_{kl}, \alpha_{ij})}{K(\alpha_{ij}, \alpha_{ij})} \alpha_{ij} \in R. \qquad i<j,\ k<l$$

$$K(\alpha_{ij}, \alpha_{ij}) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r^2 = 2.$$

$\alpha_{ij} = D(0, \ldots, 1, \ldots, -1, \ldots 0)$

$$\Rightarrow \sigma_{\alpha_{ij}}(\alpha_{kl}) = \alpha_{kl} - K(\alpha_{kl}, \alpha_{ij})\, \alpha_{ij} \in R.$$

- $(i,j) = (k,l): \rightarrow K(\alpha_{ij}, \alpha_{ij}) = 2$

  $\Rightarrow \sigma_{\alpha_{ij}}(\alpha_{ij}) = \alpha_{ij} - 2\alpha_{ij} = -\alpha_{ij} \in R$ ✓

- $(i,j) \neq (k,l): \rightarrow K(\alpha_{kl}, \alpha_{ij}) = 0$

  $\Rightarrow \sigma_{\alpha_{ij}}(\alpha_{kl}) = \alpha_{kl} \in R$ ✓

- z.B. $i = k,\ j \neq l \rightarrow K(\alpha_{jl}, \alpha_{ij}) = 1$

  $$\rightarrow \sigma_{\alpha_{ij}}(\alpha_{il}) = \alpha_{l} - \alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha_{lj} & l<j \\ -\alpha_{jl} & l>j \end{cases} \in R.$$

etc.

(d) $\nu(\beta, \alpha) = 2 \cdot \dfrac{K(\beta, \alpha)}{K(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$. klar. (vgl. oben)

Für die Bestimmung des Typs von R berechnen wir die Cartan-Matrix von R bezüglich der Basis

$$\Delta = \{\alpha_1 = \alpha_{12},\ \alpha_2 = \alpha_{23}, \dots\ \alpha_{n-1} = \alpha_{n-1,n}\}$$

<u>Beh.</u> Δ ist eine Basis im Sinne von Kapitel 15 p. 17:

(a) Δ ist eine Basis von h. (klar)

(b) $\alpha_{ij} \in R \quad i<j$

$j = i+1 \Rightarrow \alpha_{ij} = 1 \cdot \alpha_i$ fertig.

$j = i+l \quad l>1.$

$\Rightarrow \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{i+l}$ $\rightsquigarrow$ fertig.

analog für $-\alpha_{ij}$.

Cartanmatrix:

$$v(\beta,\alpha) = 2 \cdot \frac{K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)} \qquad \alpha,\beta \in \Delta.$$

$$v(\beta,\alpha) = \begin{cases} 2 & \beta = \alpha \\ -1 & \beta \neq \alpha \end{cases} \qquad \alpha,\beta \in \Delta.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{Typ } A_{n-1}.$$

$\square$

Somit haben wir nun den Zusammenhang

Wurzelsysteme $\longleftrightarrow$ Lie Algebren ($\underbrace{\text{½-einfach!}}_{\text{damit Killing Form nicht ausgeartet!}}$)

hergeleitet.

Wie steht es nun mit den Lie Gruppen?

Wurzelsysteme $\longleftrightarrow$ Lie Algebren $\longleftrightarrow$ Lie Gruppen.

Lie Algebren $\longleftrightarrow$ Lie Gruppen

- $\mathbb{R}^1 \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}^{>0}$

  additive Gruppe — multiplikative Gruppe

  $(\mathbb{R}^1, +)$ ist 1-dim. $\mathbb{R}$-VR. — $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ 1-dim reelle Lie Gruppe

  $t \longmapsto \exp(t) = e^t$

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} SL(n, \mathbb{C})$

  (n^2-1)-dim. Lie Algebra/$\mathbb{C}$ — (n^2-1) dim. Lie Gruppe (über $\mathbb{C}$)

  $A \longmapsto e^A$

- $\mathfrak{o}(3) \xrightarrow{\exp} SO(3)$

  $\mathfrak{o}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$

  3-dim $\mathbb{R}$ Lie Algebra bzgl. $[A,B] = AB - BA$ — kompakte Lie Gruppe der Dimension 3.

Allgemein konstruiert man zu jeder Lie Gruppe G eine Lie Algebra LG ($LG = \{$linksinvariantes Vektorfelder$\} \cong TG_e$). Der Zusammenhang zwischen LG und G funktioniert über die Exponentialabbildung

$$\exp : LG \longrightarrow G.$$

($LG \ni X$ linksinv. Vektorfeld, $\exp(X) = \gamma_X(1)$ wobei $\frac{d\gamma}{dt}\Big|_0 = X(e)$,
$\gamma_X : [0,1] \longrightarrow G$ Kurve)

Man kann nun zum Bsp. zeigen, dass exp ein lokaler Diffeomorphismus ist, dh. $\exists$ Umgebung $U(0)$ in LG und eine Umgebung $V(e)$ in G, sodass $\exp : U(0) \longrightarrow V(e)$ ein Diffeo. ist.

Weiter gilt auch, dass lokal isomorphe Lie Gruppen (vgl. früher) isomorphe Lie Algebren haben.
(vgl. Literatur: F. Warner, Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups, GTM 94)

21. Hamiltongleichung: Eine Anwendung der linearen Algebra in der Mechanik

Betrachten wir den $\mathbb{R}^{2n} = \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\substack{\text{Orts-} \\ (x_1,\dots,x_n)}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\substack{\text{Impuls- Vektor.} \\ (y_1,\dots,y_n)}}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ ein offenes zusammenhängendes Gebiet.

Sei $H \in C^\infty(\Omega)$, $H = H(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = H(z)$

Die Gleichungen

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ & & i = 1,\dots,n \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}}$$

heissen Hamiltonsche Bewegungsgleichungen und H die Hamiltonfunktion des Systems (*). Sie ist die Energie dargestellt durch Orts- und Impulskoordinaten. Die Hamiltonschen Gleichungen bilden einen Satz von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Wir geben eine andere Schreibweise für (*):

$$\frac{d}{dt} z = \begin{pmatrix} \nabla_y H \\ -\nabla_x H \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$$

$$\nabla_y H = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right) \quad \text{Gradient von } H \text{ in Richtung } y$$

$\nabla_x H =$ Gradient von H in Richtung x.

Sei $J = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R})$

Dann gilt:

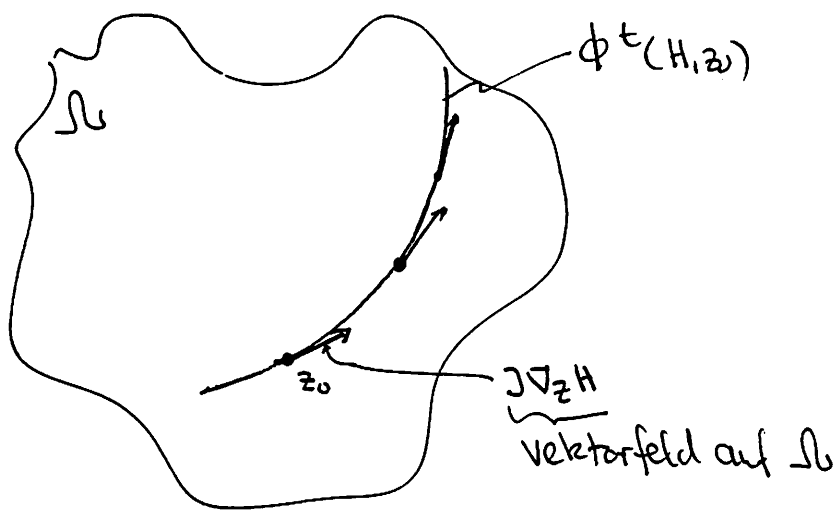
$$\frac{d}{dt} z = J \cdot \nabla_z H \quad , \text{wobei } \nabla_z H = \text{Gradient von } H.$$

Also haben wir:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ & \qquad\qquad i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{ \frac{d}{dt} z = \begin{pmatrix} \nabla_y H \\ -\nabla_x H \end{pmatrix} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \frac{d}{dt} z = J \cdot \nabla_z H \right.}$$

(System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen)

__Definition.__ $\phi^t(H, z_0)$ = Lösung der Hamiltongleichung $(*)$ mit Hamiltonfunktion H und Anfangsbedingung z_0 zur Zeit $t = t_0$.
$\phi^t(H, z_0)$ nennt man den Fluss des Systems $(*)$.



Also, $\phi^t(H, z_0) = (x(t), y(t)) = z(t)$ mit

$$\phi^{t_0}(H, z_0) = z_0, \qquad \frac{d}{dt}\phi^t(H, z_0) = J\,\nabla_z H.$$

<u>Beispiel.</u>

$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + \dots + y_n^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ kinetische Energie.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} = y_i \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \dot{y}_i = \ddot{x}_i$$

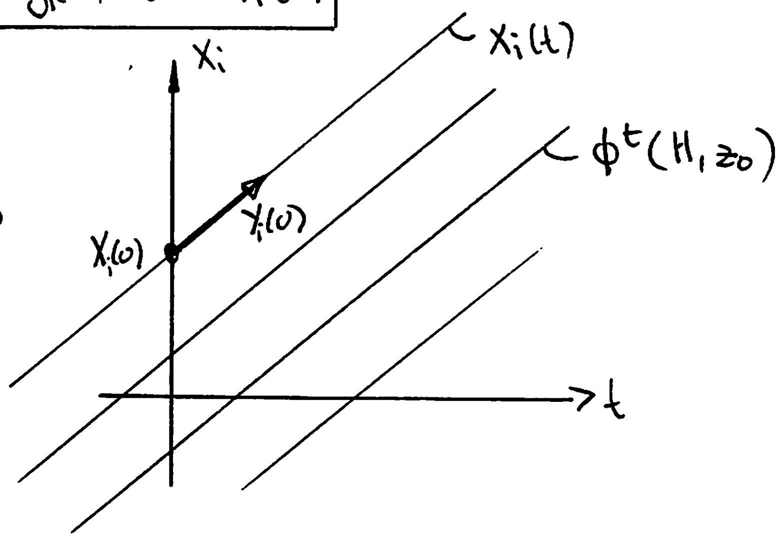
Aus $\ddot{x}_i = 0 \Rightarrow x_i(t) = a_i \cdot t + b_i \qquad i = 1, \dots, n.$

$\dot{y}_i = 0 \Rightarrow y_i(t) = y_i(0)$

Weiter gilt: $\dot{x}_i = y_i \Rightarrow \dot{x}_i = a_i$ und somit $a_i = y(0)$

Also: $\boxed{x_i(t) = y_i(0) \cdot t + x_i(0)}$

(Bewegung geht entlang von Geraden)



$$\phi^t(H, z_0) = (y_1(0) \cdot t + x_1(0) \dots, y_n(0) \cdot t + x_n(0), y_1(0) \dots, y_n(0))$$

$z_0 = (x_1(0) \dots, x_n(0), y_1(0) \dots, y_n(0)) = \phi^0(H, z_0)$
$t_0 = 0.$

Bemerkung (Beispiel)

y_i bezeichnet den Impuls unseres Systems.
Bekanntlich gilt: $F = \dot{y}_i$

In unserem Beispiel wirken also keine äusseren Kräfte auf unser System. Nach dem Trägheitsprinzip von Galilei bewegen sich Massenpunkte auf welche keine äusseren Kräfte wirken auf Geraden (Inertialsysteme).

Beispiel.

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{V(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{potentielle Energie}} \quad \text{unseres Systems}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = y_i$$

$$\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\nabla_x V$$

Dies ist gerade das Gesetz von Newton $(m = 1)$

$$\underbrace{\ddot{x}_i}_{\text{Beschleunigung}} = -\underbrace{\nabla_x V}_{\text{Kraft}}$$

$$m \cdot a = F$$

Koordinatentransformationen.

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^N$ offene Teilmengen.

Definition. Eine bijektive, stetige Abbildung

$$f : U \longrightarrow V$$

heisst Koordinatentransformation, falls f und f^{-1} einmal stetig differenzierbar sind.

Seien nun $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ zwei offene zusammenhängende Gebiete,

$$f : \Omega' \longrightarrow \Omega ,$$

$$w = (u,v) \longmapsto f(w) = f(u,v) = (x,y) = z .$$

eine Koordinatentransformation.

$$z_i = f_i(w) \quad \Rightarrow \quad \dot{z}_i = \frac{d}{dt} f_i(w) = \underbrace{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f_i}{\partial w_j} \cdot \frac{dw_j}{dt}}_{\substack{\langle \nabla_w f_i , \dot{w} \rangle \\ \text{(Standardskalarprodukt)}}} \qquad i = 1, \dots, 2n$$

Also:

$$\dot{z} = \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j} \right)}_{\substack{\text{Jacobi-Matrix} \\ \text{der Koordinaten-} \\ \text{transformation.}}} \cdot \dot{w}$$

Setze $M = \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j} \right)_{1 \le i,j \le 2n}}_{\in \, GL(2n, \mathbb{R})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{z} = M \cdot \dot{w}}$

Wir möchten jetzt untersuchen, unter welchen Koordinatentransformationen die Hamiltongleichung invariant bleibt, d.h. wir möchten sehen für welche $f : \Omega' \to \Omega$, $f(w) = z$ transformiert sich die Hamiltongleichung

$$\dot{z} = J \cdot \nabla_z H$$

in die Gleichung

$$\dot{w} = J \cdot \nabla_w (H \circ f) .$$

Wir untersuchen zuerst wie sich die Gradienten transformieren

Sei $g \in C^\infty(\Omega)$, $g = g(z) = g \circ f(w)$

$$\Rightarrow (\nabla_w \, g \circ f)_k = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial g}{\partial z_i} \cdot \underbrace{\frac{\partial z_i}{\partial w_k}}_{\frac{\partial f_i}{\partial w_k}} = \sum_{i=1}^{2n} \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial w_k}}_{M_{ik}} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_i}$$

$$\Rightarrow \nabla_w = M^T \cdot \nabla_z$$

$$\Rightarrow \nabla_z = (M^T)^{-1} \cdot \nabla_w$$

Also haben wir folgendes Lemma bewiesen:

__Lemma 1.__ Sei $f : \Omega' \to \Omega$, $z = f(w)$ eine Koordinatentransformation. Dann gilt

$$\nabla_z = (M^T)^{-1} \cdot \nabla_w$$

wobei $M = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j} \right)$ die Jacobi-Matrix von f ist.

Betrachten wir nun die Hamiltongleichung

$$\dot{z} = J \cdot \nabla_z H$$

Nun $\dot{z} = M \cdot \dot{w}$

$$\Rightarrow \quad M \cdot \dot{w} = J \cdot \nabla_z H \underset{\text{Lemma 1}}{=} J \cdot (M^T)^{-1} \nabla_w (H \circ f)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{w} = M^{-1} J (M^T)^{-1} \nabla_w (H \circ f)$$

Damit also die Gleichung invariant bleibt, muss gelten:

$$M^{-1} \cdot J \cdot (M^T)^{-1} = J$$

$$\Updownarrow$$

$$J = M J M^T$$

<u>Definition.</u>

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{ A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A \cdot J \cdot A^T = J \}$$

heisst <u>reelle symplektische Gruppe</u>.

<u>Lemma 2.</u>

(1) $Sp(n, \mathbb{R})$ ist eine Gruppe.

(2) $Sp(n, \mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^{4n^2}$

Somit ist also $Sp(n, \mathbb{R})$ eine Lie Gruppe $/\mathbb{R}$ (Satz 15.31)

Beachte: $J^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}} \Rightarrow J^{-1} = -J$

<u>Beweis.</u>

(1) Seien $A, B \in Sp(n, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow (AB) \cdot J \cdot (AB)^T = A \underbrace{B\, J \cdot B^T}_{J,\ \text{da } B \in Sp(n,\mathbb{R})} \cdot A^T = A \cdot J \cdot A^T \underset{\substack{\uparrow \\ A \in Sp(n,\mathbb{R}).}}{=} J$$

$$A J A^T = J \Rightarrow J = A^{-1} J (A^T)^{-1} = A^{-1} J (A^{-1})^T$$
$$\Rightarrow A^{-1} \in Sp(n, \mathbb{R})$$

(2) Betrachte die Abbildung

$$\phi : GL(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$$
$$A \longmapsto A J A^T$$

- ϕ ist stetig.
- $\phi^{-1}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{abg. in } GL(2n,\mathbb{R})}}{J}) = Sp(2n, \mathbb{R})$ also abg.

□

Wir haben also:

!

<u>Satz 3.</u> Sei $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$, $z = f(w)$ eine Koordinatentransformation mit Jacobimatrix

$$M = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(p) \right) \in GL(2n, \mathbb{R}). \quad \forall p \in \Omega'$$

Es gilt:

Die Hamiltongleichungen bleiben invariant unter f, d.h.

$$\dot{z} = J \cdot \nabla_z H$$

transformiert sich in

$$\dot{w} = J \cdot \nabla_w (H \circ f)$$

$\Longleftrightarrow M \in Sp(n, \mathbb{R})$

□

Satz 4. Sei $\phi^t(H, z(0)) = (x(t), y(t)) = z(t)$ eine Lösung der Hamiltongleichung

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad i = 1, \dots, n.$$
$$\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Dann gilt: $H(z(t)) = H(z(0)) \quad \forall t$, d.h.

die totale Energie ist <u>konstant</u> entlang einer Lösung von (*).

<u>Beachte:</u> Mathematik ohne Physik ist wie platonische Liebe!

<u>Beweis.</u>

$$\frac{d}{dt} H(z(t)) = \langle \nabla_z H, \dot{z} \rangle = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial z_i} \cdot \frac{dz_i}{dt} \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{\frac{\partial H}{\partial y_i}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot \underbrace{\frac{dy_i}{dt}}_{-\frac{\partial H}{\partial x_i}}$$

(Hamiltongleichung $\Rightarrow$)

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$= 0.$$

Also Energie konstant entlang von Lösungen.

$\square$

Sei $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$, $z = f(w)$ eine Koordinatentransformation mit

$$M \in Sp(n,\mathbb{R}).$$

Dann gilt: totale Energie bzgl. $w = H \circ f(z(w))$.

Typische Invarianten in der Physik sind Drehungen. Es ist somit interessant zu untersuchen wie $O(n)$ und $Sp(n,\mathbb{R})$ in Beziehung stehen.

Satz 5.

Wir haben einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : O(n) \rightarrowtail Sp(n,\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Also können wir $A \in O(n)$ mit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ in $Sp(n,\mathbb{R})$ identifizieren, und schreiben $O(n) \hookrightarrow Sp(n,\mathbb{R})$.

Beweis.

(i) φ ist wohldefiniert:

$$O(n) \ni A \longrightarrow \varphi(A) \in Sp(n,\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^T \underset{\substack{A^T = A^{-1} \\ \text{da } A \in O(n)}}{=} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = J.$$

(ii) φ Homomorphismus (Übung).

(iii) φ ist injektiv: klar

$\square$

Als nächstes möchten wir nun die Hamiltongleichung lösen.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\underline{H(0)=0}$ (Normierung der Energie):

falls $H(0)=e \Rightarrow \tilde{H} = H-e$, $\tilde{H}(0)=0$

$$\dot{z} = J\nabla_z \tilde{H} = J\nabla_z(H-e) = J\nabla_z H$$

Betrachten wir zuerst folgenden Spezialfall: $z(0)=0$,

$\dot{z} = J\nabla_z H$ und $\nabla_z H\big|_{z=0} = 0$. $\Rightarrow z(t)=0 \quad \forall t$.

denn $z(t)\equiv 0$ ist eine Lösung (!), welche den Anfangsbedingungen genügt (Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung).

Also haben wir:

Lemma 6. Sei $H(0)=0$.

Sei $z(t)$ eine Lösung von $\dot{z} = J\nabla_z H$ mit $z(0)=0$.

Falls $\nabla_z H\big|_{z=0} = 0$, so folgt: $z(t)=0 \quad \forall t$.

Betrachten wir die Taylorreihe von $H: \mathbb{R}^{2n} \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ um 0:

$$H(z) = H(0) + \underbrace{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial z_j}(0) \cdot z_j}_{\langle \nabla_z H(0), z \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(0) \cdot z_i z_j}_{\langle \underbrace{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(0)\right)}_{\in M_{2n}(\mathbb{R})} \cdot z, z \rangle} +$$

$$+ \sum_{\underset{\uparrow \text{ Multiindex.}}{|\alpha| \geq 3}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha H}{\partial z_\alpha}(0) z^\alpha$$

$$= H(0) + \langle \nabla_z H(0), z \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(0) \right) \cdot z, z \right\rangle + \sum_{|\alpha| \geq 3} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha H}{\partial z_\alpha}(0) z^\alpha$$

<u>Definition.</u> $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(0) \right) = \mathrm{Hess}_0(H)$ heisst <u>Hessische Form von H in 0.</u> (Index Theorie)

<u>Beachte:</u> $Q := \mathrm{Hess}_0(H)$ ist eine symmetrische Matrix, d.h. $Q = Q^t$.

Sei wiederum $H(0) = 0$, $\nabla_z H(0) = 0$, $z(0) = z_0$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{2} \langle Q \cdot z, z \rangle + \sum_{|\alpha| \geq 3} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha H}{\partial z_\alpha}(0) z^\alpha$$

In einer Umgebung von 0 ist $\left| \sum_{|\alpha| \geq 3} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha H}{\partial z_\alpha}(0) z^\alpha \right| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Also: $H(z) \sim \frac{1}{2} \langle z, Qz \rangle$

Setze $h(z) = \frac{1}{2} \langle Qz, z \rangle$

Betrachten wir nun die Hamilton-Gleichung

$$\dot{z} = J \nabla_z h = J \nabla_z \frac{1}{2} \langle Qz, z \rangle$$

$$\left(\nabla_z \tfrac{1}{2} \langle Qz, z \rangle\right)_k = \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{r,s}' Q_{rs} z_r z_s \right)$$

$$= (Q \cdot z)_k$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla_z \frac{1}{2} \langle Qz, z \rangle = Q \cdot z}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{z} = J Q z \qquad Q = Q^t} \qquad (**)$$

Dies ist aber ein lineares System von Differentialgleichungen.

Wir haben unser System von partiellen Differentialgleichungen

$$\dot{z} = J \nabla_z h$$

in ein lineares System

$$\dot{z} = J Q z$$

umgewandelt.

Um $(**)$ zu lösen machen wir einen Exponentialansatz

$$z(t) = \phi^t(h, z_0) = e^{tJQ} \cdot z_0$$

Nun $\frac{d}{dt} z(t) = JQ\, e^{tJQ} \cdot z_0$

$= JQ \cdot z(t)$

Also haben wir eine Lösung gefunden:

$$\boxed{\phi^t(h, z_0) = e^{tJQ} \cdot z_0}$$

Als nächstes möchten wir zeigen, dass e^{tJQ} eine symplektische Transformation ist, d.h. $e^{tJQ} \in Sp(n,\mathbb{R})$ ist.

|| <u>Lemma 7:</u> $e^{tJQ} \in Sp(n,\mathbb{R}),\ \forall t$

<u>Beweis.</u>

(1) $t=0$: $\left(e^{tJQ}\right) J \left(e^{tJQ}\right)^T \underset{t=0}{=} J$ ✓

(2) $\frac{d}{dt}\left(e^{tJQ} J \left(e^{tJQ}\right)^T\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tJQ} J e^{-tQJ}\right)$

$= JQ \cdot e^{tJQ} J e^{-tQJ} - e^{tJQ} J\, QJ e^{-tQJ}$

$= e^{tJQ} \cdot JQ \cdot J \cdot e^{-tQJ} - e^{tJQ} JQJ e^{-tQJ}$

$=0$

$\Rightarrow e^{tJQ} J \cdot \left(e^{tJQ}\right)^T = \text{const} \underset{(1)}{=} J.$

□

$sp(n,\mathbb{R}) := \{ A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J + JA = 0 \}$

$JQ \in sp(n,\mathbb{R})$: $(JQ)^T J + J(JQ) \underset{Q=Q^T}{=} -Q \underset{-id}{J^2} + \underset{-id}{J^2} Q = Q - Q = 0.$

Lemma 8. $sp(n,\mathbb{R})$ ist eine $\mathbb{R}$-Lie Algebra, wobei für $A,B \in sp(n,\mathbb{R})$ $[A,B] = AB - BA$ ist. Weiter gilt $\dim_{\mathbb{R}} sp(n,\mathbb{R}) = 2n^2+n$.

Beweis. Wir zeigen nur, dass für $A,B \in sp(n,\mathbb{R})$ die Klammer $[A,B] \in sp(n,\mathbb{R})$ ist. Der Rest ist eine gute Übung.

$$[A,B]^T J + J[A,B] = B^T \underbrace{A^T J}_{-JA} - A^T \underbrace{B^T J}_{-JB} + JAB - JBA$$

$$= \underbrace{-B^T J}_{JB} A + \underbrace{A^T J}_{-JA} B + JAB - JBA$$

$$= JBA - JAB + JAB - JBA = 0.$$

$\square$

Als nächstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen $sp(n,\mathbb{R})$ und $Sp(n,\mathbb{R})$.

Satz 9. Sei $A \in sp(n,\mathbb{R})$. Dann ist $\exp(A) = e^A \in Sp(n,\mathbb{R})$, d.h. wir haben eine Abbildung

$$\exp: sp(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Sp(n,\mathbb{R}).$$

Beweis. Sei $A \in sp(n,\mathbb{R})$, also $A^T J + JA = 0$. $\Rightarrow A^T = -JAJ^{-1} = JAJ$

$$(e^A) J \cdot (e^A)^T = e^A \; J \; e^{A^T} \underset{\text{oben}}{=} e^A J \cdot e^{JAJ}$$

$$= e^A \; J \; e^{-J^{-1}AJ} = e^A \; J \; J^{-1} e^{-A} J$$

$$= e^A \cdot e^{-A} J \underset{[A,-A]=0}{=} J$$

$\Rightarrow e^A \in Sp(n,\mathbb{R})$.

$\square$

Wir wollen nun Lemma 7 und Satz 9 verbinden und bekommen

$$\begin{array}{ccccc} Sym_{2n}(\mathbb{R}) & \xhookrightarrow{\text{Inklusion}} & sp(n,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp} & Sp(n,\mathbb{R}) \\ Q & \longmapsto & JQ & \longmapsto & e^{JQ} \end{array}$$

wobei $Sym_{2n}(\mathbb{R}) = \{Q \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid Q = Q^T\}$.

Das charakteristische Polynom einer symplektischen Transformation.

Satz 10. Sei $A \in Sp(n,\mathbb{R}) \implies \det A = +1$.

Beweis: Kapitel 22 Satz 11. □

Satz 11. Sei $A \in Sp(n,\mathbb{R})$ und $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ das charakteristische Polynom von A. Dann gilt

$$p(\lambda) = \lambda^{2n}\, p(1/\lambda)$$

Korollar 12. Falls λ ein Eigenwert von $A \in Sp(n,\mathbb{R})$ ist, so ist $1/\lambda$ auch ein Eigenwert.

Beweis: (Satz 11)

$$A \in Sp(n,\mathbb{R}) \implies A = -J(A^T)^{-1}J$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det\left(-J(A^T)^{-1}J - \lambda\mathbb{1}\right) \\ &= \det\left(J\left(-(A^T)^{-1} + \lambda\mathbb{1}\right)J\right) = \det J \cdot \det\left(-(A^T)^{-1} + \lambda\mathbb{1}\right)\cdot \det J \\ &= \det\left(-(A^{-1})^T + \lambda\mathbb{1}\right) \underset{\det A = +1}{=} \det A^T \cdot \det\left(-(A^{-1})^T + \lambda\mathbb{1}\right) \\ &= \det\left(-\mathbb{1} + \lambda A^T\right) \underset{\det M = \det M^T}{=} \lambda^{2n}\cdot \det\left(-\frac{1}{\lambda}\mathbb{1} + A\right) \\ &= \lambda^{2n}\cdot p(1/\lambda). \end{aligned}$$

□

Das charakteristische Polynom von $A \in Sp(n,\mathbb{R})$ ist ein reelles Polynom. Also falls λ ein komplexer Eigenwert ist, so ist $\bar{\lambda}$ ein von λ verschiedener Eigenwert.
Es folgt also, dass die Eigenwerte von $A \in Sp(n,\mathbb{R})$ symmetrisch zur reellen Achse und dem Einheitskreis liegen (vgl. Figur).

Also erscheinen die Eigenwerte in 4-Tupeln

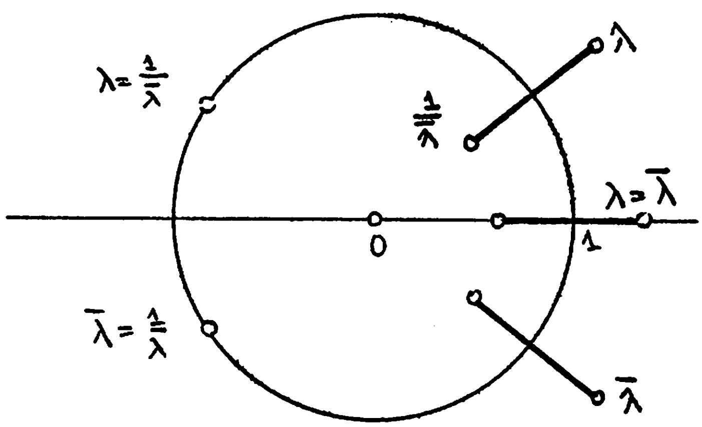
$$\lambda, \; \bar{\lambda}, \; \frac{1}{\lambda}, \; \frac{1}{\bar{\lambda}} \qquad , \; |\lambda| \neq 1, \; \operatorname{Im} \lambda \neq 0$$

und als Paare auf der reellen Achse

$$\lambda = \bar{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\bar{\lambda}} .$$

oder auf dem Einheitskreis

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$



Verteilung der Eigenwerte einer symplektischen Transformation.

Als Übung verifiziere man, dass alle Punkte eines 4-Tupels bzw. eines Paares von Eigenwerten dieselbe algebr. Vielfachheit haben.

Stabilität der linearen Hamiltongleichung.

Definition. Sei $Q \in \mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{R})$. Die lineare Hamiltongleichung $\dot{z} = JQz$ heisst stabil, genau dann wenn

$$|z(t)| < C \cdot \|z_0\| \qquad \forall t, \quad z_0 \in \mathbb{R}^{2n},$$

wobei $C = C(Q)$ eine von Q abhängige Konstante ist.
Man sagt auch Q sei stabil. Sonst nennt man Q nicht stabil.

Sei $v \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $JQv = \lambda v$, d.h. v ist ein Eigenvektor mit Eigenwert λ der symplektischen Transformation JQ.

Aus $\quad JQv = \lambda v \quad \Rightarrow \quad e^{tJQ} \cdot v = e^{t\lambda} v$

Also: für $z_0 = v$ ist $z(t) = e^{tJQ} v$ (Lsg. der Hamiltongleichung) beschränkt, genau dann wenn $e^{t\lambda}$ beschränkt ist.

Also muss $|e^{\lambda}|^t$ beschränkt sein $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow |e^{\lambda}| = 1 \quad \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$. (0 ist kein EW von JQ, da $\det(JQ) = 1$).

Es folgt:

Satz 13. Falls nicht alle Eigenwerte von JQ auf dem Einheitskreis liegen, so ist die Hamiltongleichung $\dot{z} = JQz$ nicht stabil.

$\square$

(Erinnere: Eigenwerte von e^A sind $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$, falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte von A, vgl. Bemerkung 6.4.)

Satz (Zoltan)

Sei $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$ mit $\det A \neq 0$ oder $\det B \neq 0$ oder $\det C \neq 0$ oder $\det D \neq 0$. Dann ist $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1$.

Beweis.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$$

$$M^T J M = J \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1)\ A^T C - C^T A = 0 \\ 2)\ A^T D - C^T B = \mathbb{1} \\ 3)\ B^T D - D^T B = 0 \end{array}$$

Fall 1: $\det A \neq 0$

$$\underset{1)}{\Rightarrow} \quad C^T = A^T C A^{-1}$$

$$\underset{2)}{\Rightarrow} \quad A^T D - C^T B = A^T D - A^T C A^{-1} B = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad A^T (D - CA^{-1}B) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad \det A \cdot \det (D - CA^{-1}B) = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ CA^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1.$$

Fall 2: $\det B \neq 0$: analog

Fall 3: $\det C \neq 0$: analog

Fall 4: $\det D \neq 0$: analog. $\square$

Beachte:
(B. Keller)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \in Sp(n,\mathbb{R}) \text{ mit } \det A = \det B = \det C = \det D = 0.$$

22. Tensoren

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $\dim_{\mathbb{K}} = n$, $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis. Sei weiter V^* der zu V duale $\mathbb{K}$-VR und $\{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ die duale Basis (vgl. Kapitel 15)

Wir wollen nun eine neue Schreibweise für die zu v_i dualen Vektoren v_i^* ($1 \le i \le n$) einführen:

$$\boxed{dw_i := w_i^*} \qquad 1 \le i \le n.$$

Tensorprodukte

Seien $V_1, \dots, V_m$ $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}} V_i = n_i$

Definition. Die Abbildung

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow \mathbb{K}$$

heisst multilinear, falls

$$\tau(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v + \beta w, v_{i+1}, \dots, v_m) =$$

$$\alpha\, \tau(v_1, \dots, v, v_{i+1}, \dots, v_m) + \beta\, \tau(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_m)$$

$\forall\ 1 \le i \le m$

Beispiel.

Sei $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$

$$\tau : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_1, v_2) \longmapsto \tau(v_1, v_2) = \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\text{Standardskalarprodukt im } \mathbb{R}^n.}$$

<u>Definition.</u> $T(V_1, \dots, V_m) := \{\tau : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow \mathbb{K} \text{ , multilinear}\}$

nennt man Tensoren.

Seien $\sigma, \tau \in T(V_1, \dots, V_m)$, $a \in \mathbb{K}$.

Setze $(\sigma + \tau)(v_1, \dots, v_m) := \sigma(v_1, \dots, v_m) + \tau(v_1, \dots, v_m)$

$(a\sigma)(v_1, \dots, v_m) := a \cdot \sigma(v_1, \dots, v_m)$.

<u>Lemma 1.</u> $T(V_1, \dots, V_m)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den oben definierten Verknüpfungen.

<u>Beweis.</u> Übung. $\square$

<u>Definition:</u> (Tensorprodukt)

Seien $\sigma \in T(V_1, \dots, V_l)$, $\tau \in T(V_{l+1}, \dots, V_m)$ Setze.

$$\sigma \otimes \tau (v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_m) := \sigma(v_1, \dots, v_l) \cdot \tau(v_{l+1}, \dots, v_m)$$

Es gilt: $\sigma \otimes \tau \in T(V_1, \dots, V_l, V_{l+1}, \dots, V_m)$.

Sei nun $w_1^{(1)}, \dots, w_{n_1}^{(1)}$ eine Basis von V_1

$w_1^{(2)}, \dots, w_{n_2}^{(2)}$ eine Basis von V_2

$\vdots$

$w_1^{(m)}, \dots, w_{n_m}^{(m)}$ eine Basis von V_m.

Dann gilt:

Satz 2. $\{ dw^{(1)}_{i_1} \otimes \dots \otimes dw^{(m)}_{i_m} \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_m \leq n_m \}$ ist eine Basis von $T(V_1, \dots, V_m)$.
Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{K}} T(V_1, \dots, V_m) = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$.

Beweis.

Sei $\sigma \in T(V_1, \dots, V_m)$.

Setze $a_{i_1 \dots i_m} := \sigma(w^{(1)}_{i_1}, \dots, w^{(m)}_{i_m}) \in \mathbb{K}$.

Dann gilt:

$$\sigma = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1 \dots i_m} dw^{(1)}_{i_1} \otimes \dots \otimes dw^{(m)}_{i_m}$$

denn $dw^{(1)}_{i_1} \otimes \dots \otimes dw^{(m)}_{i_m} (w^{(1)}_{j_1}, \dots, w^{(m)}_{j_m})$

$$= \delta_{i_1, j_1} \cdot \delta_{i_2, j_2} \cdot \dots \delta_{i_m, j_m} . \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ sie erzeugen $T(V_1, \dots, V_m)$.
Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum_{i_1, \dots, i_m} b_{i_1 \dots i_m} dw^{(1)}_{i_1} \otimes \dots \otimes dw^{(m)}_{i_m} = 0$, $b_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{K}$.

Indem man $(*)$ benützt bekommt man

$$b_{i_1 \dots i_m} = 0 \quad \forall i_1, \dots, i_m .$$

und wir sind fertig. $\square$

<u>Definition.</u> Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Dann setze: $V^k := \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\text{-mal}}$

$$T^k(V) := T(\underbrace{V, \ldots, V}_{k\text{-mal}}).$$

Beachte: $T^1(V) = V^*$.

Falls $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von V, dann ist nach Satz 2

$$\{dw_{i_1} \otimes \ldots \otimes dw_{i_k} \mid 1 \le i_1 \le n, \ldots, 1 \le i_k \le n\}$$

eine Basis von $T^k(V)$. Insbesondere also $\dim_{\mathbb{K}} T^k(V) = n^k$.

<u>Lemma 3.</u> Seien $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in T^k(V)$, $\tau, \tau_1, \tau_2 \in T^\ell(V)$, $\upsilon \in T^m(V)$.
Dann gilt:

(1) $(\sigma_1 + \sigma_2) \otimes \tau = \sigma_1 \otimes \tau + \sigma_2 \otimes \tau$

(2) $\sigma \otimes (\tau_1 + \tau_2) = \sigma \otimes \tau_1 + \sigma \otimes \tau_2$

(3) $(\sigma \otimes \tau) \otimes \upsilon = \sigma \otimes (\tau \otimes \upsilon)$.

(4) $a(\sigma \otimes \tau) = (a\sigma) \otimes \tau = \sigma \otimes (a\tau)$. $\forall a \in \mathbb{K}$.

<u>Beweis:</u> einfache Übung. $\square$

Sei $A: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Wir definieren eine lineare Abbildung A^* wie folgt (vgl. p. 117):

$$A^*: T^k(W) \longrightarrow T^k(V)$$
$$\tau \longmapsto A^*\tau$$

$$(A^*\tau)(v_1, \ldots, v_k) := \tau(Av_1, \ldots, Av_k).$$

<u>Definition.</u>

$$\Lambda^k(V) := \{ \omega \in T^k(V) \mid \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \mathrm{sign}(\pi)\, \omega(v_1, \dots, v_k) \ \forall \pi \in S_k \}$$

wobei S_k die Permutationen von $\{1, \dots, k\}$ bezeichnet.

<u>Lemma 4.</u> $\Lambda^k(V)$ ist ein Unterraum von $T^k(V)$.

<u>Beweis</u>: Übung. $\square$

! <u>Beispiel.</u>

Sei $V = \mathbb{R}^{2n}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \}n$

Setze $\omega(v_1, v_2) = \underbrace{\langle v_1, Jv_2 \rangle}_{\text{Standardskalarprodukt}}$ $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$.

Nun $\omega \in T^2(\mathbb{R}^{2n})$.

$$\omega(v_2, v_1) = \langle v_2, Jv_1 \rangle = \langle \underbrace{J^T}_{-J} v_2, v_1 \rangle$$

$$= -\langle Jv_2, v_1 \rangle \underset{\substack{\text{symmetrisch} \\ \text{(Skalarpr.)}}}{=} -\langle v_1, Jv_2 \rangle = -\omega(v_1, v_2)$$

$-\ S_2 = \{ \mathrm{Id}, \underbrace{(1,2)}_{\text{Transp.}} \}$, $\tau = (1,2)$ $\quad \mathrm{sign}\, \tau = -1$.

$$\omega(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}) = \omega(v_2, v_1) \underset{\text{oben}}{=} -\omega(v_1, v_2)$$

$\Rightarrow$ $\underset{\sim\sim\sim}{\omega \in \Lambda^2(V)}$.

Sei $\eta \in T^k(V)$

Definition.

$$\mathrm{Alt}(\eta)(v_1,\dots,v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\, \eta(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})$$

heißt Alternator.

Lemma 5.

(1) $\eta \in T^k(V) \Rightarrow \mathrm{Alt}(\eta) \in \Lambda^k(V)$

(2) $\omega \in \Lambda^k(V) \Rightarrow \mathrm{Alt}(\omega) = \omega$

(3) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\,\eta) = \mathrm{Alt}(\eta) \quad \forall \eta \in T^k(V)$.

(4) $\mathrm{Alt} : T^k(V) \longrightarrow \Lambda^k(V)$ ist linear.

Beweis.

(1) $\mathrm{Alt}(\eta)(v_{\varkappa(1)},\dots,v_{\varkappa(k)}) \qquad (\varkappa \in S_k)$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\, \eta(v_{\pi(\varkappa(1))},\dots,v_{\pi(\varkappa(k))})$$

Setze $\alpha = \pi\circ\varkappa \in S_k \Rightarrow \pi = \alpha\circ\varkappa^{-1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Alt}(\eta)(v_{\varkappa(1)},\dots,v_{\varkappa(k)}) = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in S_k} \underbrace{\operatorname{sign}(\varkappa)\cdot\operatorname{sign}(\alpha)}_{\operatorname{sign}(\pi)} \cdot \eta(v_{\alpha(1)},\dots,v_{\alpha(k)})$$

$$= \operatorname{sign}(\varkappa)\cdot \underbrace{\frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in S_k} \operatorname{sign}(\alpha)\, \eta(v_{\alpha(1)},\dots,v_{\alpha(k)})}_{\mathrm{Alt}(\eta)(v_1,\dots,v_k)}$$

$\Rightarrow \mathrm{Alt}(\eta)(v_{\varkappa(1)},\dots,v_{\varkappa(k)}) = \operatorname{sign}(\varkappa)\cdot \mathrm{Alt}(\eta)(v_1,\dots,v_k) \ \forall \varkappa \in S_k$.

$\Rightarrow \mathrm{Alt}(\eta) \in \Lambda^k(V)$.

(2) $\mathrm{Alt}(\omega)(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi\in S_k}{}' \operatorname{sign}(\pi) \cdot \underbrace{\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})}_{\underset{\omega\in\Lambda^k(V)}{=} \operatorname{sign}(\pi)\cdot\omega(v_1,\dots,v_k)}$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi\in S_k}{}' (\operatorname{sign}(\pi))^2 \cdot \omega(v_1,\dots v_k)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{k!} \sum_{\pi\in S_k}{}' \underbrace{(\operatorname{sign}(\pi))^2}_{=+1}\right)}_{k!} \omega(v_1,\dots,v_k)$$

$$= \omega(v_1,\dots,v_k)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{Alt}(\omega) = \omega.}$

(3). Folgt aus (1) und (2):

$$\eta\in T^k(V) \underset{(1)}{\Rightarrow} \mathrm{Alt}(\eta)\in\Lambda^k(V)$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta)) = \mathrm{Alt}(\eta).$$

$\square$

<u>Definition.</u> Seien $\alpha\in\Lambda^k(V)$, $\beta\in\Lambda^\ell(V)$

$$\alpha\wedge\beta := \frac{(k+\ell)!}{k!\cdot\ell!}\,\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)$$

Wedge-Produkt (Dach-Produkt) von α,β.

<u>Lemma 6.</u> Für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^k(V)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Lambda^l(V)$ gilt:

(1) $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(V)$

(2) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$

(3) $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$.

(4) $(a\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (a\beta) = a(\alpha \wedge \beta)$. $\forall a \in \mathbb{K}$.

<u>Beweis.</u>

(1) Für $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^l(V)$ folgt

$$\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \in \Lambda^{k+l}(V)$$

nach Lemma 5 (1).

(2) - (4) einfache Übungen. $\square$

Sei $A: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sie induziert lineare Abbildungen

$$A^* : \Lambda^k(W) \longrightarrow \Lambda^k(V) \qquad \forall k$$

Wir schreiben dafür : $A^* : \Lambda^*(W) \longrightarrow \Lambda^*(V)$.

<u>Satz 7.</u> Seien $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^l(V), \gamma \in \Lambda^m(V)$. Dann gilt:

(1) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$

(2) $A^*(\alpha \wedge \beta) = A^*\alpha \wedge A^*\beta$

(3) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

Beachte: mit (3) sind Produkte höherer Ordnung definiert:

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r .$$

<u>Beweis.</u>

(1) $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\beta \in \Lambda^\ell(V)$

$$\alpha\wedge\beta(v_1,\dots,v_{k+\ell}) = \frac{(k+\ell)!}{k!\cdot \ell!}\ \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)(v_1,\dots,v_{k+\ell})$$

$$= \frac{(k+\ell)!}{k!\cdot\ell!}\cdot\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\pi\in S_{k+\ell}}{}' \operatorname{sign}(\pi)\cdot\alpha\otimes\beta(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k+\ell)})$$

$$= \frac{(k+\ell)!}{k!\cdot\ell!}\cdot\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\pi\in S_{k+\ell}}{}' \operatorname{sign}(\pi)\,\alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\,\beta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+\ell)})$$

$$= \frac{(k+\ell)!}{k!\cdot\ell!}\,\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\tau\in S_{k+\ell}}{}' \operatorname{sign}(\omega\circ\tau)\cdot\alpha(v_{\omega\circ\underbrace{\tau(1)}_{=\ell+1}},\dots,v_{\omega(\underbrace{\tau(k)}_{\ell+k})})\,\beta(v_{\underbrace{\omega\circ\tau(k+1)}_{\omega(1)}},\dots,v_{\underbrace{\omega\circ\tau(k+\ell)}_{\omega(\ell)}})$$

wobei $\omega = \pi\circ\tau^{-1}$,

$\tau = (1,2,\dots,k+\ell)^\ell$

$$\Rightarrow \operatorname{sign}(\tau) = (-1)^{(k+\ell+1)\cdot\ell} = (-1)^{k\ell+\overbrace{\ell^2+\ell}^{\text{gerade}}} = (-1)^{k\ell}.$$

$$= \frac{(k+\ell)!}{k!\cdot\ell!}\,\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\omega\in S_{k+\ell}}{}' \operatorname{sign}(\omega)\cdot\underbrace{\operatorname{sign}(\tau)}_{(-1)^{k\ell}}\cdot\alpha(v_{\omega(\ell+1)},\dots,v_{\omega(\ell+k)})\,\beta(v_{\omega(1)},\dots,v_{\omega(\ell)})$$

$$= (-1)^{k\cdot\ell}\,\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\,\underbrace{\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\omega\in S_{k+\ell}}{}' \operatorname{sign}(\omega)\cdot\beta(v_{\omega(1)},\dots,v_{\omega(\ell)})\,\alpha(v_{\omega(\ell+1)},\dots,v_{\omega(\ell+k)})}_{\mathrm{Alt}(\beta\otimes\alpha)(v_1,\dots,v_{k+\ell})}$$

$$= (-1)^{k\cdot\ell}\ \beta\wedge\alpha.$$

(2) Übung.

(3) Dieser Beweis erfordert einiges an Arbeit. Wir benötigen folgendes Lemma:

<u>Lemma</u>:

(i) $\alpha \in T^k(V)$, $\beta \in T^\ell(V)$ und $\mathrm{Alt}(\alpha) = 0$
$$\Rightarrow \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \mathrm{Alt}(\beta \otimes \alpha) = 0.$$

(ii)
$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma) = \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma) = \mathrm{Alt}(\alpha\otimes \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma))$$

<u>Beweis von (3) aus Lemma.</u>

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \Big(\frac{(k+\ell)!}{k!\cdot\ell!}\underbrace{\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)}_{\in\Lambda^{k+\ell}(V)}\Big)\wedge\gamma$$

$$= \frac{\cancel{(k+\ell)!}}{k!\cdot\ell!}\,\frac{(k+\ell+m)!}{\cancel{(k+\ell)!}\cdot m!}\,\underbrace{\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma)}_{\overset{\text{Lemma (ii)}}{=}\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\underbrace{\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)}_{\in\Lambda^{\ell+m}(V)})}$$

$$= \frac{(\ell+m)!}{k!\,\ell!}\,\frac{(k+\ell+m)!}{(\ell+m)!\,m!}\,\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma))$$

$$= \frac{(\ell+m)!}{\ell!\cdot m!}\big(\alpha\wedge\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)\big) = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma). \qquad \square$$

Also müssen wir das Lemma noch beweisen.
Wir zeigen zuerst wie (ii) aus (i) folgt:

(ii) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) - \beta\otimes\gamma) = \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) - \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) = 0.$

also mit (i):
$$0 = \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\{\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) - \beta\otimes\gamma\})$$
$$= \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)) - \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$$

analog folgt aus $\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta - \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)) = 0$

$$\underset{(i)}{\Longrightarrow}\ 0 = \mathrm{Alt}\left((\alpha\otimes\beta - \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta))\otimes\gamma\right)$$
$$= \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma) - \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma)$$

<u>Also:</u> $\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)) = \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$
$$= \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma).$$

(i). $(k+l)!\ \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)(v_1,\dots,v_{k+l})$
$$= \sum_{\pi\in S_{k+l}}' \mathrm{sign}(\pi)\ \alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\ \beta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})$$

Sei $G\subset S_{k+l}$ die Menge der $\pi\in S_{k+l}$, die $k+1,\dots,k+l$ fest lassen.

Es gilt dann:
$$\sum_{\pi\in G}' \mathrm{sign}(\pi)\ \alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot\beta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})$$
$$= \Big\{\sum_{\pi'\in S_k}' \mathrm{sign}(\pi')\ \alpha(v_{\pi'(1)},\dots,v_{\pi'(k)})\Big\}\cdot\beta(v_{k+1},\dots,v_{k+l}).$$

$= 0$, da $\mathrm{Alt}(\alpha)=0$ nach Vor.

Sei jetzt $\pi_0\notin G$ und sei $G\cdot\pi_0 = \{\pi\cdot\pi_0 \mid \pi\in G\}$.

Setze $v_{\pi_0(1)} = w_1,\dots,v_{\pi_0(k+l)} = w_{k+l}$. Dann

$$(*) = \sum_{\pi\in G\cdot\pi_0}' \mathrm{sign}\,\pi\cdot\alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\ \beta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})$$
$$= \Big\{\mathrm{sign}\,\pi_0\cdot\sum_{\pi'\in G}' \mathrm{sign}\,\pi'\cdot\alpha(w_{\pi'(1)},\dots,w_{\pi'(k)})\Big\}\beta(w_{\pi'(k+1)},\dots,w_{\pi'(k+l)})$$
$= 0$ oben.

Nun $G \cap G\pi_0 = \emptyset$, denn wäre $\pi \in G \cap G\pi_0 \Rightarrow \pi = \pi' \cdot \pi_0$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \underbrace{(\pi')^{-1}}_{\in G} \cdot \underbrace{\pi}_{\in G \cap G\pi_0} \quad \in G \quad (G \text{ ist eine Untergruppe})$$

Widerspruch, da $\pi_0 \notin G$.

Man kann nun den Prozess (p. 169 unten) für alle verschiedenen $\pi_0 \notin G$ wiederholen.
Damit zerlegt man S_{k+l} in disjunkte Untermengen und die Summe (*) ist auf all diesen Untermengen Null, also auch auf ganz S_{k+l}.

Analog für $\mathrm{Alt}(\beta \otimes \alpha) = 0$.

$\square$

Satz 8. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $dv_1, \dots, dv_n$ die duale Basis von V^*. Dann ist

$$\{ dv_{i_1} \wedge \dots \wedge dv_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \}$$

eine Basis von $\Lambda^k V$.
Insbesondere ist also $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V = \binom{n}{k}$

Beweis.
Sei $\alpha \in \Lambda^k V$. Nach Satz 2 können wir

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k}' a_{i_1 \dots i_k} \, dv_{i_1} \otimes \dots \otimes dv_{i_k}$$

schreiben. Nun.

$$\alpha = \mathrm{Alt}(\alpha) = \sum_{i_1, \dots, i_k}' a_{i_1 \dots i_k} \, \mathrm{Alt}(dv_{i_1} \otimes \dots \otimes dv_{i_k})$$

Nach der Definition des Wedge-Produktes (p. 165) und Satz 7 (3) ist jedes

$\mathrm{Alt}(dv_{i_1} \otimes \ldots \otimes dv_{i_k})$ eine Konstante multipliziert mit

$dv_{i_1} \wedge \ldots \wedge dv_{i_k} \qquad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n.$

Also erzeugen $dv_{i_1} \wedge \ldots \wedge dv_{i_k}$ unser $\Lambda^k(V)$.

Als nächstes kümmern wir uns um die lineare Unabhängigkeit.

Dazu berechnen wir zuerst

$$dv_{i_1} \wedge \ldots \wedge dv_{i_k}(v_{i_1}, \ldots v_{i_k}) =$$
$$= k!\, \mathrm{Alt}(dv_{i_1} \otimes \ldots \otimes dv_{i_k})(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$$
$$= \sum_{\pi \in S_k}{}' \operatorname{sign}(\pi)\, dv_{i_1}(v_{\pi(i_1)}) \cdots dv_{i_k}(v_{\pi(i_k)})$$
$$= \sum_{\pi \in S_k}{}' \operatorname{sign}(\pi)\, \delta_{i_1 \pi(i_1)} \cdots \delta_{i_k \pi(i_k)} \underset{\pi = id}{\overset{\uparrow}{=}} 1.$$

<u>Fall 1: $k = n$</u> : $\Lambda^n(V)$ wird von $dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n$ erzeugt, was nach obiger Rechnung $\neq 0$ ist, also sind wir fertig.

<u>Fall 2: $k < n$:</u>

Sei
$$0 = \sum_{i_1 < \ldots < i_k}{}' a_{i_1 \ldots i_k}\, dv_{i_1} \wedge \ldots \wedge dv_{i_k} \qquad (+)$$

mit $a_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{K}$.

Wähle ein k-Tupel $(j_1, \ldots, j_k)$ aus mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$. Seien $j_{k+1}, \ldots, j_n$ die Werte von $\{1, \ldots, n\}$ die in $(j_1, \ldots, j_k)$ <u>nicht</u> vorkommen.

Nehmen wir nun das Dachprodukt von $dv_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dv_{j_n}$ auf beiden Seiten von $(+)$. Wir bekommen

$$0 = a_{j_1 \dots j_k}\, dv_{j_1} \wedge \dots \wedge dv_{j_k} \wedge \dots \wedge dv_{j_n} \quad (\dagger\dagger),$$

denn in allen anderen Termen kommen mindestens zwei dv_r (mit demgleichen r) vor und sind daher 0 (nach Satz 7).

Nach einer Permutation hat $(\dagger\dagger)$ die Form

$$0 = a_{j_1 \dots j_k}\, dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n$$

Wendet man diese Gleichung auf $(v_1, \dots, v_n)$ an, so bekommen wir $a_{j_1 \dots j_k} = 0$ (vgl. p. 171).

Wir sind fertig.

$\square$

<u>Bemerkung:</u> Als Übung zeige man, dass $\Lambda^r(V) = 0 \;\; \forall r > n$.

<u>Satz 9.</u> Sei $A : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$A^*\alpha = \det A \cdot \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda^n(V)$$

wobei $n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

<u>Beweis.</u>

Nach Satz 8 gilt $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^n(V) = 1$. $\alpha \in \Lambda^n(V)$, $\alpha \neq 0$.

$\Rightarrow A^*\alpha = c \cdot \alpha$, $c \in \mathbb{K}$.

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine $\mathbb{K}$-Basis von V, $\alpha = d \cdot dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n$, $d \in \mathbb{K}$.

$$\underset{\Lambda^n(V)}{\underset{\Uparrow}{A^*\alpha}} = \check{c} \cdot dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n, \quad \check{c} \in \mathbb{K}.$$

$$A^*\alpha(v_1,\dots,v_n) = \tilde{c}\cdot \underbrace{dv_1\wedge\dots\wedge dv_n(v_1,\dots,v_n)}_{=1 \ (\text{p. } 171)} = \tilde{c}$$

$$A^*\alpha(v_1,\dots,v_n) = \alpha(Av_1,\dots,Av_n)$$

$$= d\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n(Av_1,\dots,Av_n)$$

$$= d\cdot \sum_{\pi\in S_k}{}' \operatorname{sign}(\pi)\, \underbrace{dv_1(\underbrace{Av_{\pi(1)}}_{\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(1)j}v_j})}_{a_{\pi(1)1}} \cdots \underbrace{dv_n(\underbrace{Av_{\pi(n)}}_{\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(n)j}v_j})}_{a_{\pi(n)n}}$$

$$= d\cdot \sum_{\pi\in S_k}{}' \operatorname{sign}(\pi)\cdot a_{\pi(1)1}\cdots a_{\pi(n)n} = d\cdot \det(A).$$

Damit folgt: $\tilde{c} = d\cdot \det A$

$$\Rightarrow A^*\alpha = d\cdot \det A\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n$$

$$= \det A\cdot \underbrace{d\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n}_{\text{nach Def } \alpha} = \det A\cdot \alpha.$$

$\square$

Als Anwendung der Theorie zeigen wir, dass $\det A = 1 \quad \forall A \in Sp(n,\mathbb{R})$.

Dazu betrachten wir $V = \mathbb{R}^{2n}$ und die 2-Form von p. 163:

$$\omega(v_1, v_2) = \langle v_1, Jv_2 \rangle \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n}).$$

<u>Satz 10.</u> Sei $A \in GL(2n,\mathbb{R})$

$$A^*\omega = \omega \iff A \in Sp(n,\mathbb{R}).$$

<u>Beweis.</u>

<u>"$\Rightarrow$"</u>: <u>Vor.</u> $A^*\omega = \omega$ für $A \in GL(2n,\mathbb{R})$

$$\underbrace{A^*\omega(v_1,v_2)}_{\overset{\text{Vor.}}{=}\ \omega(v_1,v_2)} = \omega(Av_1, Av_2) = \langle Av_1, JAv_2 \rangle = \langle v_1, A^T J A v_2 \rangle$$

$$\omega(v_1,v_2) = \langle v_1, Jv_2 \rangle$$

Also: $\langle v_1, A^T J A v_2 \rangle = \langle v_1, Jv_2 \rangle$

$$\Rightarrow \quad \langle v_1, (A^T J A - J) v_2 \rangle = 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad A^T J A - J = 0 \quad \Rightarrow A^T J A = J \quad \Rightarrow A \in Sp(n,\mathbb{R}).$$

<u>"$\Leftarrow$"</u>: <u>Vor.</u> $A \in Sp(n,\mathbb{R})$

$$A^*\omega(v_1,v_2) = \omega(Av_1, Av_2) = \langle Av_1, JAv_2 \rangle = \langle v_1, \underbrace{A^T J}_{} A v_2 \rangle$$

$=J$, da $A \in Sp(n,\mathbb{R})$

$$= \langle v_1, Jv_2 \rangle = \omega(v_1,v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Satz 11. Sei $A \in Sp(n, \mathbb{R}) \Rightarrow \det A = 1$.

Beweis.

Setze $\omega^{\wedge n} = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n\text{-mal}} \in \Lambda^{2n}(\mathbb{R}^{2n})$

Sei $e_1, \ldots, e_{2n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{2n}$.
Eine mühselige Rechnung zeigt, dass

$$\omega^{\wedge n}(e_1, \ldots, e_{2n}) \neq 0$$

$\Rightarrow \omega^{\wedge n} \neq 0$

Also sei nun $A \in Sp(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow A^* \omega^{\wedge n} = \det(A) \cdot \omega^{\wedge n}$ nach Satz 9.

Nach Satz 7 gilt aber auch

$$A^* \omega^{\wedge n} = \underbrace{A^*\omega \wedge A^*\omega \wedge \ldots \wedge A^*\omega}_{n\text{-mal}} = (A^*\omega)^{\wedge n}$$

Aber $A^*\omega = \omega$ nach Satz 10, da $A \in Sp(n, \mathbb{R})$

Somit haben wir:

$$A^*\omega^{\wedge n} = (A^*\omega)^{\wedge n} = \omega^{\wedge n} = \det A \cdot \omega^{\wedge n}$$

$\underset{\omega^{\wedge n} \neq 0}{\Longrightarrow} \det A = 1$. $\square$

Lineare Algebra II

Serie 1.

Prof. E. Trubowitz
SS 89

1. Berechne die Dimension folgender $\mathbb{R}$-Vektorräume:

(a) $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ Lie Algebra von $GL(n,\mathbb{K})$

(b) $o(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid -A^T = A\}$ Lie Algebra von $O(n)$

$sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$ Lie Algebra von $SL(n,\mathbb{R})$

(c) $u(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid -A^* = A\}$ Lie Algebra von $U(n)$

$su(n) = \{A \in u(n) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$ Lie Algebra von $SU(n)$

$sl(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$ Lie Algebra von $SL(n,\mathbb{C})$.

2. Sei V ein Vektorraum, seien W_1, W_2 Unterräume von V.

a) Zeige:

$W_1 \cap W_2 := \{\alpha \mid \alpha \in W_1 \text{ und } \alpha \in W_2\}$ ist ein Unterraum von V.

b) Zeige:

$W_1 + W_2 := \{\alpha \mid \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2\}$ ist ein Unterraum von V

c) Ist

$W_1 \cup W_2 := \{\alpha \mid \alpha \in W_1 \text{ oder } \alpha \in W_2\}$ ein Unterraum?

d) Zeige:

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

3. Finde eine Basis, so dass die folgenden Matrizen in Jordan-Normalform sind.

(a) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}$$

4. Gib die Jordan-Normalform folgender Matrix:

$$\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\
 & & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 0 & & & 1 & 2 \\
 & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

(1)

$\dim_K M_n(K) = n^2$ (alle Einträge sind beliebig wählbar)

$\dim_K sl(n,K) = n^2 - 1$ (ein Diagonalelement ist durch die übrigen bestimmt)

$\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$

$\dim_{\mathbb{R}} sl(n,\mathbb{C}) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} sl(n,\mathbb{C}) = 2(n^2-1)$

$\dim_{\mathbb{R}} o(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ (die Einträge oberhalb der Diagonalen sind beliebig wählbar)

$\dim_{\mathbb{R}} u(n) = n^2$ (die Real- und Imaginärteile der Einträge oberhalb der Diagonalen sind beliebig wählbar; die Diagonalelemente sind imaginär, beliebig wählbar)

$\dim_{\mathbb{R}} su(n) = n^2 - 1$ (ein Diagonalelement ist durch die übrigen bestimmt)

(2) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien W_1, W_2 Unterräume von V.

a) $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in W_1 \cap W_2$.

Sei $\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$; $a, b \in \mathbb{K}$.

Es gilt $\alpha, \beta \in W_1$ und $\alpha, \beta \in W_2$, und da W_1, W_2 Unterräume sind, gilt $a\alpha + b\beta \in W_1$ und $a\alpha + b\beta \in W_2$, also $a\alpha + b\beta \in W_1 \cap W_2$.

b) $W_1 + W_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in W_1 + W_2$.

Sei $\alpha, \beta \in W_1 + W_2$; $a, b \in K$.

Es gilt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2$ für gewisse $\alpha_1, \beta_1 \in W_1$, $\alpha_2, \beta_2 \in W_2$. Da W_1, W_2 Unterräume sind, gilt $a\alpha_1 + b\beta_1 \in W_1$, $a\alpha_2 + b\beta_2 \in W_2$, also
$a\alpha + b\beta = a(\alpha_1+\alpha_2) + b(\beta_1+\beta_2) = (a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) \in W_1 + W_2$.

c) $W_1 \cup W_2$ ist i.a. kein Unterraum.

Sei $\alpha_1 \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$, $\alpha_2 \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$. Ist $W_1 \cup W_2$ ein Unterraum, so ist $\alpha_1 + \alpha_2 \in W_1 \cup W_2$, also $\alpha_1 + \alpha_2 =: \beta_1 \in W_1$ oder $\alpha_1 + \alpha_2 =: \beta_2 \in W_2$. Da W_1 bzw. W_2 Unterräume sind, folgt $\alpha_2 = \beta_1 - \alpha_1 \in W_1$ oder $\alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 \in W_2$.
Damit gilt $W_2 \subseteq W_1$ oder $W_1 \subseteq W_2$.
Umgekehrt ist in diesem Fall $W_1 \cup W_2$ ein Unterraum.

d) Sei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$.
Wir ergänzen zu Basen von W_1, W_2:
$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \zeta_1, \dots, \zeta_s$ Basis von W_1,
$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \eta_1, \dots, \eta_t$ Basis von W_2.
Die Behauptung folgt, wenn wir gezeigt haben, dass $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \zeta_1, \dots, \zeta_s, \eta_1, \dots, \eta_t$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist.
Die genannten Vektoren erzeugen natürlich $W_1 + W_2$. Sei weiter

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{r} e_j \varepsilon_j}_{=: \varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} z_j \zeta_j}_{=: \zeta} + \underbrace{\sum_{j=1}^{t} h_j \eta_j}_{=: \eta} = 0 \qquad (e_1, \dots, h_t \in K).$$

Wegen $\underbrace{\varepsilon + \zeta}_{\in W_1} = \underbrace{-\eta}_{\in W_2}$ ist dann $\varepsilon + \zeta \in W_1 \cap W_2$.

Da $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \zeta_1, \dots, \zeta_s$ eine Basis von W_1 ist, folgt dann $\zeta = 0$ und $z_1 = \dots = z_s = 0$. Analog folgt $h_1 = \dots = h_t = 0$. Also ist $\varepsilon = 0$, und da $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$ ist, folgt $e_1 = \dots = e_r = 0$.

(3)

a) Seien $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$ die Standardbasisvektoren. Wir haben
$\underline{2} \mapsto 0 \mid \underline{3} \mapsto \underline{1} \mapsto 0$.
Nimm z.B. $\underline{2}, \underline{1}, \underline{3}$.

b) Seien $\underline{1}, \dots, \underline{14}$ die Standardbasisvektoren. Wir haben
$\underline{1} \mapsto \underline{3} \mapsto \underline{6} \mapsto \underline{9} \mapsto \underline{12} \mapsto 0 \mid \underline{2} \mapsto \underline{5} \mapsto \underline{8} \mapsto \underline{10} \mapsto \underline{11} \mapsto$
$\mapsto \underline{14} \mapsto 0 \mid \underline{4} \mapsto \underline{4} \mid \underline{7} \mapsto \underline{7} \mid \underline{13} \mapsto \underline{13}$.
Nimm z.B. $\underline{4}, \underline{7}, \underline{13}, \underline{12}, \underline{9}, \underline{6}, \underline{3}, \underline{1}, \underline{14}, \underline{11}, \underline{10}, \underline{8}, \underline{5}, \underline{2}$.

(4) Sei L_n die gegebene Matrix. Alle EW sind 1.
Wegen $\dim(\text{ER zum EW } 1) = n - \text{rang}(L_n - 1) = 1$ gibt es nur einen Jordanblock.
$$L_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra II — Prof. E. Trubowitz
Serie 2. — SS 89

(1) Sei

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

$b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$
$a_j \in \mathbb{R} - \{0\}$, $j = 1, \ldots, n-1$.

unsere Jacobi-Matrix, $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$ die Eigenwerte und

$$g_j = \begin{pmatrix} g_j(1) \\ \vdots \\ g_j(n) \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren mit $\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$, $i,j = 1, \ldots, n$.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die $\mu_j = \mu_j(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_n)$ Funktionen von den Matrixgliedern sind.

<u>Zeige:</u> $$\frac{\partial \mu_j}{\partial a_\ell} = 2 \cdot g_j(\ell) \cdot g_j(\ell+1) \quad , \ell = 1, \ldots, n-1.$$

(2) Seien $\ddot{x}_j = e^{(x_{j+1} - x_j)} - e^{(x_j - x_{j-1})}$ $\quad j \in \mathbb{Z} \qquad (*)$

die <u>Toda-Gleichungen</u>.

Setze $a_\ell := \frac{1}{2} e^{(x_{\ell+1} - x_\ell)/2}$, $b_\ell := \frac{1}{2} \dot{x}_\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

<u>Zeige:</u> (*) ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{a}_\ell = a_\ell \cdot (b_{\ell+1} - b_\ell) \qquad \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\dot{b}_\ell = 2(a_\ell^2 - a_{\ell-1}^2) \qquad \ell \in \mathbb{Z}$$

(3)

Sei

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & a_1 & & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & & 0 & \\ a_1 & c_2 & b_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ & 0 & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-2} & c_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

$b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$
$c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n-1$
$a_j \in \mathbb{R} - \{0\}$ $j = 1, \dots, n-2$.

(a) Haben die Eigenwerte μ_j von M algebr. Vielfachheit 1?
Gib eine obere Grenze für die algebr. Vielfachheit der Eigenwerte μ_j.

(b) Berechne

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell} \qquad \ell = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial c_\ell} \qquad \ell = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial a_\ell} \qquad \ell = 1, \dots, n-2.$$

① Wegen $Lg_j = \mu_j g_j$, $\langle g_j, g_j \rangle = 1$, $L = L^T$ ist

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial a_\ell} = \frac{\partial}{\partial a_\ell} \langle g_j, L g_j \rangle = \left\langle \frac{\partial g_j}{\partial a_\ell}, L g_j \right\rangle + \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial a_\ell} g_j \right\rangle + \underbrace{\left\langle g_j, L \frac{\partial g_j}{\partial a_\ell} \right\rangle}_{= \left\langle L g_j, \frac{\partial g_j}{\partial a_\ell} \right\rangle}$$

$$= \mu_j \underbrace{\left\{ \left\langle \frac{\partial g_j}{\partial a_\ell}, g_j \right\rangle + \left\langle g_j, \frac{\partial g_j}{\partial a_\ell} \right\rangle \right\}}_{= \frac{\partial}{\partial a_\ell} \langle g_j, g_j \rangle = 0} + \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial a_\ell} g_j \right\rangle .$$

Aber $\dfrac{\partial L}{\partial a_\ell} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell \\ \ell+1 \end{array} \\ \ell \;\; \ell+1 & \end{array}$; also gilt

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial a_\ell} = \left\langle g_j, \frac{\partial L}{\partial a_\ell} g_j \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} g_j(1) \\ \vdots \\ g_j(\ell) \\ g_j(\ell+1) \\ \vdots \\ g_j(n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_j(\ell+1) \\ g_j(\ell) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot g_j(\ell) \cdot g_j(\ell+1) .$$

② $$\ddot{x}_\ell = e^{(x_{\ell+1} - x_\ell)} - e^{(x_\ell - x_{\ell-1})} \qquad (*)$$

Setze $a_\ell := \frac{1}{2} e^{(x_{\ell+1} - x_\ell)/2}$, $b_\ell := \frac{1}{2} \dot{x}_\ell$.

Daraus erhält man

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_\ell &= a_\ell \cdot (\dot{x}_{\ell+1} - \dot{x}_\ell)/2 = a_\ell (b_{\ell+1} - b_\ell) \\ \dot{b}_\ell &= \tfrac{1}{2} \ddot{x}_\ell = 2(a_\ell^2 - a_{\ell-1}^2) \end{aligned} \right\} \qquad (**)$$

Sei umgekehrt $(**)$ gegeben. Setze $b_\ell =: \frac{1}{2} \dot{x}_\ell$. Aus der ersten Gleichung in $(**)$ folgt dann

$$(\log a_\ell)^{\cdot} = \frac{1}{2} (\dot{x}_{\ell+1} - \dot{x}_\ell) .$$

Die Integrationskonstante können wir so wählen, dass gilt

$$a_\ell = \frac{1}{2} e^{(x_{\ell+1} - x_\ell)/2} .$$

Mit der zweiten Gleichung in $(**)$ folgt dann $(*)$.

③ a) Sei $M \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix}$, oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (b_1 - \mu) g(1) + c_1 g(2) + a_1 g(3) &= 0 \\ c_1 g(1) + (b_2 - \mu) g(2) + c_2 g(3) + a_2 g(4) &= 0 \\ \dots \end{aligned}$$

Wegen $a_1 \dots a_{n-2} \neq 0$ lassen sich bei gegebenen $g(1), g(2)$ die übrigen Komponenten $g(3), \dots, g(n)$ aus obigen Gleichungen berechnen. Ein μ-Eigenraum ist also höchstens 2-dimensional. Wegen $M = M^T$ sind damit auch die algebraischen Vielfachheiten höchstens gleich 2.
Andererseits kommt die Vielfachheit 2 vor, z.B. für
$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (oder noch einfacher $M = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\mu \in R$) .

b) Sei $g_j = \begin{pmatrix} g_j(1) \\ \vdots \\ g_j(n) \end{pmatrix}$ ein EV zum EW μ_j mit $\langle g_j, g_j \rangle = 1$.

Aus der Lösung von Aufgabe 1 erhält man sogleich

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial b_\ell} = g_j(\ell)^2$$

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial c_\ell} = 2 \cdot g_j(\ell) \cdot g_j(\ell+1)$$

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial a_\ell} = 2 \cdot g_j(\ell) \cdot g_j(\ell+2) .$$

Lineare Algebra II — Prof. E. Trubowitz

Serie 3 — SS 89

In der Vorlesung wurden die Systeme

(1) B_n, $n \geq 2$
(2) C_n, $n \geq 3$
(3) D_n $n \geq 4$

definiert.

Zeige: (a) Es sind Wurzelsysteme
(b) Bestimme die Cartanmatrix
(c) Berechne die Determinante der Cartanmatrizen.

Lineare Algebra II **Serie 3** SS 89

Sei im folgenden $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Wir wollen σ_{e_i}, $\sigma_{e_i+e_j}$, $\sigma_{e_i-e_j}$ für $1 \leq i, j \leq n$ $i \neq j$ beschreiben. Da $\sigma_{\lambda\alpha} = \sigma_\alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, haben wir damit alle Spiegelungen, die uns in dieser Serie interessieren betrachtet.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Dann $\sigma_{e_i}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ -x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\sigma_{e_i+e_j}(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ -x_j \\ -x_i \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{— i-te Stelle} \\ \text{— j-te Stelle} \\ \\ \end{matrix}$

$\sigma_{e_i-e_j}(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_j \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{— i-te Stelle} \\ \text{— j-te Stelle} \\ \\ \end{matrix}$

---

1. $B_n = \{ \pm e_i \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n \}$ $n \geq 2$

Basis von B_n: $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$, $\alpha_n = e_n$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sind lin. unabh. und $e_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n$ also lässt sich jedes Element von B_n als Lin. Komb. von den α_i schreiben mit alle koeff. nicht-negative oder nicht-positive ganze Zahlen)

B_n ist ein Wurzelsystem:

1. B_n ist endlich, $0 \notin B_n$, B_n erzeugt $\mathbb{R}^n$: klar
2. falls $\beta \in B_n$ dann $-\beta \in B_n$ und
   falls $\lambda\beta \in B_n$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ dann $\lambda = \pm 1$: klar.
3. für $\beta \in B_n$ ist $\sigma_\beta(B_n) \subset B_n$: folgt aus obiger Beschreibung der Spiegelungen: ein Element aus B_n geht in ein Element aus B_n über, wenn man eine ihrer Koordinaten mit -1 multipliziert, zwei ihrer Koordinaten vertauscht, oder vertauscht und mit -1 multipliziert.
4. für alle β_1, β_2 ist $\nu(\beta_1, \beta_2) = \frac{2\langle \beta_1, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \in \mathbb{Z}$ da $\langle \beta_2, \beta_2 \rangle = 1$ oder 2.

Cartanmatrix : $\nu(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ alle $1 \leq i \leq n$

für $1 \leq i \leq n-2$: $\nu(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\langle \alpha_{i+1}, \alpha_{i+1} \rangle} = 2\frac{\langle e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2} \rangle}{\langle e_{i+1} - e_{i+2}, e_{i+1} - e_{i+2} \rangle} = -1$

$\nu(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = 2\frac{\langle e_{n-1} - e_n, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} = -2$

$\nu(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = 2\frac{\langle e_n, e_{n-1} - e_n \rangle}{\langle e_{n-1} - e_n, e_{n-1} - e_n \rangle} = -1$

für $2 \leq i \leq n-1$: $\nu(\alpha_i, \alpha_{i-1}) = 2\frac{\langle e_i - e_{i+1}, e_{i-1} - e_i \rangle}{\langle e_{i-1} - e_i, e_{i-1} - e_i \rangle} = -1$

Alle übrigen sind 0 und wir bekommen die Cartanmatrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(B) = 2$ denn Addition von den Zeilen 2 bis n zur ersten ergibt $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & \cdots & \end{vmatrix}$ jetzt $(n-1)$-dim Also $= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

2. $C_n = \{ \pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \pm (e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n \} \quad n \geq 3$

Basis von C_n: $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$, $\alpha_n = 2e_n$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sind lin. unabh. und $2e_i = 2\alpha_i + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$

wir haben somit $e_i + e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{n-1} + \frac{1}{2}\alpha_n + \alpha_j + \dots + \alpha_{n-1} + \frac{1}{2}\alpha_n$

und für $i < j$ $e_i - e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}$)

C_n ist ein Wurzelsystem

1. C_n ist endlich, $0 \notin C_n$, C_n erzeugt $\mathbb{R}^n$: klar
2. falls $\gamma \in C_n$ dann $-\gamma \in C_n$: klar
   falls $\lambda\gamma \in C_n$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ dann $\lambda = \pm 1$. klar
3. für $\gamma \in C_n$ ist $\sigma_\gamma(C_n) \subset C_n$: wie oben
4. für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in C_n$ ist $v(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{2\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle}{\langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle} \in \mathbb{Z}$
   denn i. falls $\gamma_2 = \pm(e_i \pm e_j)$ dann $\langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 2$ also $v(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}$
   ii. falls $\gamma_2 = \pm 2e_i$ dann $v(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pm 4 \langle \gamma_1, e_i \rangle}{4 \langle e_i, e_i \rangle} \in \mathbb{Z}$

Cartanmatrix : wir müssen nur noch ausrechnen

$$v(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \frac{2\langle e_{n-1} - e_n, 2e_n \rangle}{\langle 2e_n, 2e_n \rangle} = -1$$

$$v(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = \frac{2\langle 2e_n, e_{n-1} - e_n \rangle}{\langle e_{n-1} - e_n, e_{n-1} - e_n \rangle} = -2$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \det(C) = 2 \\ (\text{da } C^T = B) \end{array}$$

3. $D_n = \{ \pm (e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n \} \quad n \geq 4$

Basis von D_n: $\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$, $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$

($\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind lin. unabh. und für $i < j$ ist $e_i - e_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1}$

und $e_{n-1} + e_n = \alpha_n$, $e_i + e_n = \alpha_n + \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_i \quad i \leq n-2$

Daraus kann man alle $e_i + e_j \quad i < j$ schrittweise bestimmen)

D_n ist auch ein Wurzelsystem!

Cartanmatrix : wir müssen noch ausrechnen

$$v(\alpha_{n-2}, \alpha_n) = \frac{2\langle e_{n-2} - e_{n-1}, e_{n-1} + e_n \rangle}{\langle e_{n-1} + e_n, e_{n-1} + e_n \rangle} = -1$$

$$v(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \frac{2\langle e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n \rangle}{\langle e_{n-1} + e_n, e_{n-1} + e_n \rangle} = 0$$

$$v(\alpha_n, \alpha_{n-2}) = \frac{2\langle e_{n-1} + e_n, e_{n-2} - e_{n-1} \rangle}{\langle e_{n-2} - e_{n-1}, e_{n-2} - e_{n-1} \rangle} = -1$$

$$v(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = \frac{2\langle e_{n-1} + e_n, e_{n-1} - e_n \rangle}{\langle e_{n-1} - e_n, e_{n-1} - e_n \rangle} = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(D) = 4$ (Transformiere durch Zeilenop. in die Gest $\begin{vmatrix} 2 & -1 & & \\ & 3/2 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{*} \end{vmatrix}$ mit $* = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{n-3} & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ & -1 & 2 & \\ & -1 & & 2 \end{bmatrix}$)

Lineare Algebra II — Prof. E. Trubowitz

Serie 4 — SS 89

(1) $E_8 \subset \mathbb{R}^8$

$$E_8 = \{\pm e_i \pm e_j \mid i<j\} \cup \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{t_i}\cdot e_i \;\middle|\; t_i \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{8} t_i \text{ gerade}\right\}$$

Basis: $\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(e_1+e_8-(e_2+e_3+\ldots+e_7)\right)$

$\alpha_2 = e_1+e_2$, $\alpha_3 = e_2-e_1$, $\alpha_4 = e_3-e_2$

$\alpha_5 = e_4-e_3$, $\alpha_6 = e_5-e_4$, $\alpha_7 = e_6-e_5$

$\alpha_8 = e_7-e_6$.

(a) Zeige: E_8 ist ein Wurzelsystem

(b) Bestimme die Cartanmatrix und ihre Determinante.

(2) $E_7 \subset \mathbb{R}^8$

$$E_7 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1\le i<j\le 6\} \cup \{\pm(e_7-e_8)\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_7-e_8+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{t_i}\cdot e_i\right) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{6} t_i \text{ ungerade},\ t_i\in\{0,1\}\right\}$$

Basis: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ von E_8 oben

(a) Zeige E_7 ist Wurzelsystem (7-dimensional!)

(b) Bestimme die Cartanmatrix und ihre Determinante.

(3) $E_6 \subset \mathbb{R}^8$

$$E_6 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1\le i<j\le 5\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_8-e_7-e_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{t_i} e_i\right) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} t_i \text{ gerade}\right\}$$

Basis: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ von E_8.

(a) Zeige: E_6 ist ein Wurzelsystem (6-dimensional!)

(b) Bestimme die Cartanmatrix und ihre Determinante.

(4) $F_4 \subset \mathbb{R}^4$

$$F_4 = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$$
$$\cup \left\{\tfrac{1}{2}(\underbrace{\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4}_{\text{Vorzeichen unabhängig.}})\right\}$$

Basis $\alpha_1 = e_2 - e_3$, $\alpha_2 = e_3 - e_4$, $\alpha_3 = e_4$

$\alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$

Zeige: F_4 ist ein Wurzelsystem.
Bestimme die Cartanmatrix und ihre Determinante.

(5) Bestimme die Weylgruppen von

(a) $A_1 \times A_1$

(b) A_2

(c) B_2

(d) G_2.

1. Wir betrachten $E_8 \subseteq \mathbb{R}^8$. $\{e_1, \dots, e_8\}$ sei die St. basis von $\mathbb{R}^8$.

$$E_8 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{t_i} e_i \;\middle|\; t_i \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{8} t_i \text{ gerade} \right\}$$

Basis: $\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + \dots + e_7)$, $\alpha_5 = e_4 - e_3$

$\alpha_2 = e_1 + e_2$, $\alpha_6 = e_5 - e_4$

$\alpha_3 = e_2 - e_1$, $\alpha_7 = e_6 - e_5$

$\alpha_4 = e_3 - e_2$, $\alpha_8 = e_7 - e_6$

Bem. Wenn man die $e_1, \dots, e_8$ als Lin. Komb. der $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ ausdrückt, sieht man dass diese in der Tat eine Basis von E_8 ist.

Wir verifizieren die Axiome, die eines Wurzelsystems definieren:

1. E_8 ist endlich, $0 \notin E_8$, E_8 erzeugt $\mathbb{R}^8$

<u>Bew.</u> alles ist klar nach Definition von E_8 und von seiner Basis.

2. Falls $\alpha \in E_8$ dann $-\alpha \in E_8$ und falls $\lambda\alpha \in E_8$ dann $\lambda = \pm 1$.

<u>Bew.</u> die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition.

Für die zweite:

$\lambda(e_i \mp e_j) \in E_8$ ist nur möglich falls $= \pm(e_i \mp e_j)$

also $\lambda = \pm 1$

$\lambda \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{t_i} e_i \in E_8$ ist nur möglich falls $= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{s_i} e_i$,

dies bedeutet $\lambda = \frac{(-1)^{s_i}}{(-1)^{t_i}}$ alle $1 \le i \le 8$ also $\lambda = \pm 1$.

4. Für alle $\alpha, \beta \in E_8$ ist $\nu(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}$.

<u>Bew.</u> Für alle $\alpha \in E_8$ ist $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ also genügt es zu zeigen, dass für alle $\alpha, \beta \in E_8$ gilt: $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

<u>Beh.</u> Für alle $\alpha, \beta \in E_8$ ist $\langle \alpha, \beta \rangle \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$.

<u>Bew.</u> Falls $\alpha = \pm e_i \pm e_j$ dann ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$

$\langle \alpha, x \rangle = \pm x_i \pm x_j \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in E_8$.

Es ist $\langle \alpha, x \rangle = 2 \iff \alpha = x$

$\langle \alpha, x \rangle = -2 \iff \alpha = -x$

was man leicht durch Fallunterscheidung verifiziert.

Es bleibt nur der Fall: $\left\langle \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{t_i} e_i, \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8}(-1)^{s_j} e_j \right\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{s_i + t_i}$. Wir müssen $t_i + s_i$ $1 \le i \le 8$ betrachten:

- $t_i + s_i$ ist gerade (0 oder 2) gdw $t_i = s_i$
- es gibt eine gerade Anzahl von i so dass $t_i = s_i$ (wäre diese Anzahl x ungerade und wäre an diesen Stellen o.B.d.A $t_i = s_i = 0$ dann gäbe es noch eine ungerade Anzahl y von 0 unter den übrigen t_j d.h. eine ungerade Anzahl 1 in den s_j was unmöglich ist)

Also gibt es eine gerade Anzahl x von i so dass $t_i + s_i$ gerade ist.

$x = 8$: $\langle \alpha, \beta \rangle = 2$ und $\langle \alpha, \beta \rangle = 2 \iff \alpha = \beta$

$x = 6$: $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$

$x = 4$: $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$

$x = 2$: $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$

$x = 0$: $\langle \alpha, \beta \rangle = -2$ und $\langle \alpha, \beta \rangle = -2 \iff \alpha = -\beta$

3. für alle $\alpha, \beta \in E_8$ ist $\sigma_\alpha(\beta) \in E_8$

<u>Bew.</u> Nach dem oben gesagten genügt es die Paare zu betrachten mit $\langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$.

$\left(\begin{array}{l} \text{für } \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 2 \text{ wissen wir } \sigma_\alpha(\beta) = \mp \beta \\ \text{für } \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \text{ ist } \sigma_\alpha(\beta) = \beta \end{array} \right)$

Aus der Serie 3 kennen wir σ_α für α der Form $\pm e_i \pm e_j$ und es ist klar dass in diesem Fall $\sigma_\alpha(\beta) \in E_8$.

Es bleibt also nur noch: $\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{t_i} e_i$ und β mit $\langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Es ist dann zu zeigen: $\beta \mp \alpha \in E_8$. Fallunterscheidung:

- $\beta = e_i + e_j$ mit $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ dann ist $t_i = t_j = 0$ und $\beta - \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{8} (-1)^{s_\ell} e_\ell$ mit $s_i = s_j = 0$ und $s_\ell \in \{0,1\} \setminus \{t_\ell\}$ sonst. Es ist also immer noch $\sum_{\ell=1}^{8} s_\ell$ gerade $\left(\sum_{\ell=1}^{8} s_\ell = \left(8 - \sum_{\ell=1}^{8} t_\ell\right) - 2 \right)$

- $\beta = e_i - e_j$ mit $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ dann $t_i = 0$ $t_j = 1$ und $\beta - \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{8} (-1)^{s_\ell} e_\ell$ mit $s_i = 0$ $s_j = 1$ und $s_\ell \in \{0,1\} \setminus \{t_\ell\}$ sonst. $\sum_{\ell=1}^{8} s_\ell = 6 - \sum_{\ell=1}^{8} t_\ell$ gerade

Die anderen Fällen untersucht man analog

Wir betrachten wir noch

- $\beta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{8} (-1)^{s_j} e_j$ mit $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$. Dann sind $\{s_j\}$ und $\{t_i\}$ an 6 Stellen gleich. Seien sie verschieden für die Indices k, ℓ dann

$$\beta - \alpha = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left((-1)^{s_k} - (-1)^{t_k}\right)}_{\pm 1} e_k + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left((-1)^{s_\ell} - (-1)^{t_\ell}\right)}_{\pm 1} e_\ell \in E_8$$

- $\beta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{8} (-1)^{s_j} e_j$ mit $\langle \beta, \alpha \rangle = -1$. Dann sind $\{s_j\}$ und $\{t_i\}$ an 2 Stellen gleich. Seien sie gleich für die Indices k, ℓ dann

$$\beta + \alpha = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left((-1)^{s_k} + (-1)^{t_k}\right)}_{\pm 1} e_k + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left((-1)^{s_\ell} + (-1)^{t_\ell}\right)}_{\pm 1} e_\ell \in E_8$$

Cartanmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sie hat Determinante 1 (durch Zeilenoperationen kann man die Determinante in die Form

$$\begin{vmatrix} 2 & & & & & & & * \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3/2 & & & & & \\ & & & 5/6 & & & & \\ & & & & 4/5 & & & \\ & & & & & 3/4 & & \\ & & & & & & 2/3 & \\ 0 & & & & & & & 1/2 \end{vmatrix}$$

bringen).

2. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^8$ der VR aller $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$ mit $x_7 + x_8 = 0$

Sei $e_1, \dots, e_8$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^8$.

Wir betrachten $E_7 \subseteq V$ 7-dim. $\mathbb{R}$-VR

$$E_7 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \cup \{\pm \tfrac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{t_i} e_i) \mid \sum_{i=1}^{6} t_i \text{ ung.}\}$$

Basis: $\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + \dots + e_7)$ $\quad \alpha_5 = e_4 - e_3$

$\alpha_2 = e_1 + e_2$ $\quad \alpha_6 = e_5 - e_4$

$\alpha_3 = e_2 - e_1$ $\quad \alpha_7 = e_6 - e_5$

$\alpha_4 = e_3 - e_2$

Bem. Da $E_7 = E_8 \cap V$ können wir für die Verifikation der Axiome verwenden, was wir für E_8 gemacht haben:

1. E_7 ist endlich, $0 \notin E_7$, E_7 erzeugt V : klar

2. $\alpha \in E_7$ dann $-\alpha \in E_7$: klar.
Falls $\lambda\alpha \in E_7$ dann $\lambda\alpha \in E_8$ also $\lambda = \pm 1$

4. folgt sofort aus 4. für E_8

3. Es genügt wenn wir zeigen, dass V invariant ist unter σ_α für $\alpha \in E_7$. Wir unterscheiden die Fälle:

- $\alpha = \pm e_i \pm e_j$ $1 \le i < j \le 6$: σ_α vertauscht die Koordinaten x_i, x_j oder vertauscht sie und multipliziert sie mit -1. σ_α lässt also V invariant.
- $\alpha = \pm(e_7 - e_8)$: σ_α vertauscht die 7. und die 8. Koordinaten und lässt somit V invariant.
- $\alpha = \pm \frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{t_i} e_i)$. Wir betrachten $\sigma_\alpha(x) = y$ für ein beliebiges $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = x \in V$. Wir müssen zeigen, dass $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} = y \in V$ d.h. $y_7 + y_8 = 0$. Es ist

$$\sigma_\alpha(e_j) = e_j - \frac{1}{4}(-1)^{t_j}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{t_i} e_i) \quad 1 \le j \le 6$$
$$\sigma_\alpha(e_7) = e_7 - \frac{1}{4}(e_7 - e_8 + \sum \dots)$$
$$\sigma_\alpha(e_8) = e_8 + \frac{1}{4}(e_7 - e_8 + \sum \dots)$$

Also
$$y_7 = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{6} x_j (-1)^{t_j} + \frac{3}{4}x_7 + \frac{1}{4}x_8$$
$$y_8 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{6} x_j (-1)^{t_j} + \frac{1}{4}x_7 + \frac{3}{4}x_8$$

und somit $y_7 + y_8 = x_7 + x_8 = 0$

Damit ist für $\alpha, \beta \in E_7$, $\alpha, \beta \in E_8$ also $\sigma_\alpha(\beta) \in E_8$ aber auch $\sigma_\alpha(\beta) \in V$ also $\sigma_\alpha(\beta) \in E_7$.

Wir können die Cartanmatrix von E_7 und ihre Determinante (2) direkt aus denen für E_8 ablesen (vergesse die letzte Zeile und die letzte Kolonne)

3. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^8$ der UR aller $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$ mit $x_6 = x_7 = -x_8$

Sei $e_1, \dots, e_8$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^8$.

Wir betrachten $E_6 \subseteq W$ 6-dim. $\mathbb{R}$-UR

$$E_6 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \left\{ \pm \tfrac{1}{2}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{t_i} e_i\right) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} t_i \text{ ger.} \right\}$$

Basis: $\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + \dots + e_7)$ $\qquad \alpha_4 = e_3 - e_2$

$\alpha_2 = e_1 + e_2$ $\qquad \alpha_5 = e_4 - e_3$

$\alpha_3 = e_2 - e_1$ $\qquad \alpha_6 = e_5 - e_4$

Bem. Da $E_6 = E_7 \cap W$ können wir die Resultate für E_7 anwenden und wie in Aufgabe 2. vorgehen. Es ist klar, dass man nur die Invariant von W unter Spiegelungen σ_α, $\alpha \in E_6$ zu verifizieren hat:

- $\alpha = \pm e_i \pm e_j \quad 1 \leq i < j \leq 5$: klar
- $\alpha = \pm \frac{1}{2}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{t_i} e_i\right)$. Wir betrachten $\sigma_\alpha(x) = y$ für beliebiges $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} \in W$. Wir müssen zeigen, dass $y \in W$ d.h. $y_6 = y_7 = -y_8$. $y_7 = -y_8$ gilt sicher da $\alpha \in E_7$ und $W \subseteq V$.

$\sigma_\alpha(e_j) = e_j - \frac{1}{4}(-1)^{t_j}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{t_i} e_i\right) \quad 1 \leq j \leq 5$

$\sigma_\alpha(e_6) = e_6 + \frac{1}{4}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum \dots\right)$

$\sigma_\alpha(e_7) = e_7 + \frac{1}{4}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum \dots\right)$

$\sigma_\alpha(e_8) = e_8 - \frac{1}{4}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum \dots\right)$

$y_6 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{5} x_j (-1)^{t_j} + \frac{3}{4} x_6 - \frac{1}{4} x_7 + \frac{1}{4} x_8$

$y_7 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{5} x_j (-1)^{t_j} - \frac{1}{4} x_6 + \frac{3}{4} x_7 + \frac{1}{4} x_8$

Es ist $y_6 = y_7 \Leftrightarrow \frac{3}{4} x_6 - \frac{1}{4} x_7 = -\frac{1}{4} x_6 + \frac{3}{4} x_7 \Leftrightarrow x_6 = x_7$

Also ist $y_6 = y_7 = -y_8$

Wir können die Cartanmatrix von E_6 und ihre Determinante (3) direkt aus denen für E_7 ablesen (vergesse die letzte Zeile und die letzte Kolonne)

4. Wir betrachten $F_4 \subseteq \mathbb{R}^4$. $\{e_1, \dots, e_4\}$ sei die St.basis von $\mathbb{R}^4$

$$F_4 = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{\tfrac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}$$

Basis: $\alpha_1 = e_2 - e_3$ $\qquad \alpha_3 = e_4$

$\alpha_2 = e_3 - e_4$ $\qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$

Die Axiomen eines Wurzelsystems verifiziert man analog zur ersten Aufgabe

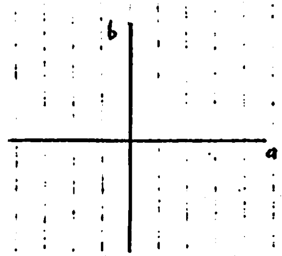
Cartanmatrix
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sie hat Determinante $= \begin{vmatrix} 2 & & & * \\ & 3/2 & & \\ 0 & & 2/3 & \\ & & & 1/2 \end{vmatrix} = 1$

5. Man bezeichnet mit D_{2n} die Diedergruppe der Ordnung $2n$: sie wird erzeugt von zwei Elementen x, y mit $x^2 = y^2 = (xy)^n = 1$

Bch. die Weylgruppen von $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2 sind D_4, D_6, D_8, D_{12}.

Bew. 1. $A_1 \times A_1$: die Weylgruppe wird erzeugt von Spiegelungen an Geraden a, b, die einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ einschliessen.

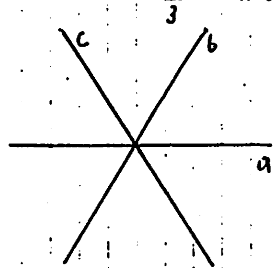


Es ist $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = 1$

$\sigma_a \sigma_b$ ist eine Drehung um π

also $(\sigma_a \sigma_b)^2 = 1$

2. A_2 : die Weylgruppe wird erzeugt von Spiegelungen an Geraden a, b, c, die einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ einschliessen.

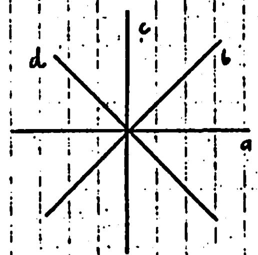


Es ist $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = 1$

Also genügt es Produkte von Spiegelungen anzusehen, wo zwei Faktoren die nebeneinander sind, verschieden sind.

Da $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_c = \sigma_c \sigma_a$ kann man alle solche Produkte in Produkte transformieren, wo nur σ_a, σ_b vorkommen.* Also wird die Weylgruppe von σ_a, σ_b erzeugt und es gilt $(\sigma_a \sigma_b)^3 = 1$.

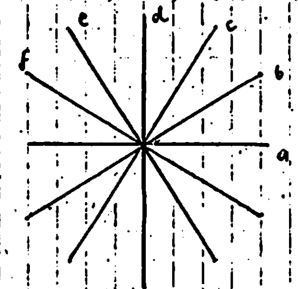
3. B_2 die Weylgruppe wird erzeugt von Spiegelungen an Geraden a, b, c, d, die einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ einschliessen



Mit $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \sigma_d^2 = 1$ und $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_c = \sigma_c \sigma_d = \sigma_d \sigma_a$ folgt wie oben, dass die Weylgruppe von σ_a, σ_b erzeugt wird:

Es ist $(\sigma_a \sigma_b)^4 = 1$

4. G_2 die Weylgruppe wird erzeugt von Spiegelungen an Geraden a, b, c, d, e, f, die einen Winkel von $\frac{\pi}{6}$ einschliessen.



Mit $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \sigma_d^2 = \sigma_e^2 = \sigma_f^2$ und $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_c = \sigma_c \sigma_d = \sigma_d \sigma_e = \sigma_e \sigma_f = \sigma_f \sigma_a$ folgt, dass die Weylgruppe von σ_a, σ_b erzeugt wird. Es ist $(\sigma_a \sigma_b)^6 = 1$

* $\sigma_a \sigma_c = \sigma_a \sigma_b \sigma_b \sigma_c = (\sigma_a \sigma_b)^2$

$\sigma_b \sigma_a = \sigma_b \sigma_c \sigma_c \sigma_a = (\sigma_a \sigma_b)^2$

$\sigma_c \sigma_b = \sigma_c \sigma_a \sigma_a \sigma_b = (\sigma_a \sigma_b)^2$

Lineare Algebra II
Serie 5

Prof. E. Trubowitz.

(1) Zeige, dass $GL(n,\mathbb{R})$ eine Lie Gruppe ist.

(2) Zeige, dass $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

(3) Betrachte $C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ und den Laplace-Operator.

Zeige: (a) $\Delta : C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ ist linear.

(b) Sei $\psi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, $R \in GL(n,\mathbb{R})$

Zeige: $\Delta(\psi(R(x))) = (\Delta\psi)(R(x)) \iff R \in O(n)$

(4) Zeige: $SO(n)$ ist eine $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$-dim. Lie Gruppe.

(5) $Sp(n) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in U(2n) \right\}$ ist eine Lie Gruppe.

Multiplikation und Inversion sind in $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ sicher diff.bar.
det: $M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

1. $Gl(n,\mathbb{R}) = M(n,\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(0)$ ist offen in $\mathbb{R}^{n^2}$ (mit der üblichen Topologie)

2. $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \}$

Kartengebiete: $U_{ij} := \{ x \in S^n \mid (-1)^i x_j > 0 \}$

Karten $h_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} \mathring{D}^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 < 1 \}$

$$x \longmapsto (x_1, .., x_{j-1}, x_{j+1}, .., x_{n+1})$$

(h_{ij} : Einschränkung einer diff.baren Abb. $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$,
$h_{ij}^{-1} : \mathring{D}^n \to U_{ij}$ hat als j-te Komponente $\sqrt{1 - \sum_{i \neq j} x_i^2}$
und stellt damit eine auf $\mathring{D}^n$ diff.bare Abb. dar.)

Diff. Struktur definiert durch $\{ h_{ij} \}$.

3. $$y := Rx, \quad y_i = \sum_j r_{ij} x_j, \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = r_{ij}, \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j^2} = 0$$

$$\Delta(\psi(Rx)) = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\psi(y(x))) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_\ell \frac{\partial \psi}{\partial x_\ell}(y) \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}(x)\Big) =$$

$$= \sum_{k,\ell} \sum_m \Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\ell \partial x_m}(y) \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}(x) \frac{\partial y_m}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi}{\partial x_\ell}(y) \frac{\partial^2 y_\ell}{\partial x_k^2}(x)\Big) =$$

$$= \sum_{k,\ell,m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\ell \partial x_m}(y)\, r_{\ell k} r_{mk} = \Delta \psi(y)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_k r_{\ell k} r_{mk} = \delta_{\ell m}$$

$$\Longleftrightarrow RR^T = I$$

4. $SO(n) \subset O(n)$ ist Zusammenhangskomponente von I (det trennt die beiden Komponenten von $O(n)$)

$\Rightarrow$ $\dim SO(n) = \dim O(n)$

$A \in O(n) \iff A^T A = I \iff \sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$, $i \le j$

$\frac{n(n+1)}{2}$ definierende Gleichungen für $O(n)$ in $\mathbb{R}^{n^2}$

$\Rightarrow$ $\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$;

in dieser Weise definiert ist $O(n)$ bzw. $SO(n)$ sicher eine Mannigfaltigkeit.

5. $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in U(2n)$

$\iff \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = I$

$\parallel$

$$\begin{pmatrix} A^* & -B^T \\ B^* & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A + B^T\bar{B} & A^*B - B^T\bar{A} \\ B^*A - A^T\bar{B} & B^*B + A^T\bar{A} \end{pmatrix}$$

$Sp(n)$ definierende Gleichungen: $A^*A + \overline{B^*B} = I$

$B^*A - \overline{A^*B} = 0$

$$\sum_k (\bar{a}_{ki} a_{kj} + b_{ki} \bar{b}_{kj}) = \delta_{ij}, \quad i \le j$$

$$\sum_k (\bar{a}_{ki} b_{kj} - b_{ki} \bar{a}_{kj}) = 0, \quad i < j$$

$\dim_{\mathbb{C}} Sp(n) = 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + n$

$\dim_{\mathbb{R}} Sp(n) = 4n^2 - 2 \cdot n(n+$

Lineare Algebra II — Prof. E. Trubowitz
Serie 6 — SS 89

(1) Im Skript auf p. 49/50 werden der Coxetergraph und das Dynkindiagramm eines Wurzelsystems definiert.

(a) Bestimme die Coxetergraphen von $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8$, F_4 und G_2

(b) Bestimme die Dynkindiagramme für $A_n, \ldots, F_4$ und G_2.

(2) Sei $P_{n,k} := \left\{ \sum_{|\alpha| = k} c_\alpha x^\alpha \;\middle|\; c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}$ α Multiindex! $\alpha \in \mathbb{N}^n$

der $\mathbb{C}$-VR der homogenen Polynome in n Veränderlichen vom Grad k.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\dim_{\mathbb{C}} P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$ ist.

Sei nun $H_{n,k} = \{ p \in P_{n,k} \mid \Delta p = 0 \}$

Zeige, dass $H_{n,k}$ ein Unterraum von $P_{n,k}$ ist und berechne seine Dimension.

Lösung: Skript

(1) Skript p. 51 Satz 27.

(2) Skript p. 81 Satz 7

Lineare Algebra
Serie 7

Prof. E. Trubowitz
SS 89

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension n.
Definiere $V^* = \{ f: V \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ linear} \}$

$V^{**} = \{ f: V^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ linear} \}$

(1) Zeige: V^* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V. Seien

$$\varphi_i : V \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

(2) Zeige: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ist eine Basis von V^*.

(3) Zeige, dass man V^{**} und V auf "natürliche" Weise identifizieren kann.

(4) Satz von Riesz

(a) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$.

Zeige: $\forall \varphi \in V^* \ \exists v \in V$, so dass

$$\varphi^*(x) = \langle x, v \rangle \qquad \forall x \in V.$$

(b) Sei $V = \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \overline{y_i}$. $\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Zeige explizit, dass es $\forall \varphi \in (\ell^2(\mathbb{N}))^*$ ein $x \in \ell^2(\mathbb{N})$
mit
$$\varphi(y) = \langle y, x \rangle \qquad \forall x \in \ell^2(\mathbb{N})$$
gibt.

Hinweis: Benütze, dass $\{e_i\}$ eine orthon. Basis von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist
$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots \dots)$

① V $\mathbb{C}$-VR

sei $V^* := \{ f : V \to \mathbb{C} \mid f \text{ linear} \}$

Beh: V^* ist $\mathbb{C}$-VR

sei $f_1, f_2 \in V^*$ und $a \in \mathbb{C}$. Durch die Festlegung

$$(f_1 + f_2)(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi) \qquad \xi \in V$$
$$(af_1)(\xi) = a f_1(\xi) \qquad \xi \in V$$

wird V^* zu einem Vektorraum. (Axiome nachprüfen!)

② V $\mathbb{C}$-VR, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von V.

sei $f_j \in V^*$ definiert durch $f_j(e_i) = \delta_{ij}$. $(i,j = 1, \dots, n)$

Beh: $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis von V^*.

① $f_1, \dots, f_n$ sind linear unabhängig

Aus $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$ folgt nach Einsetzen von e_i

$$a_i f_i = 0 \quad \text{und somit} \quad a_i = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

② sei $f \in V^*$.

Beh: $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i$

sei $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\underline{\left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_i) f_i(e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \underline{f(x)}$$

③ Die Abbildung

$$\Phi : V \longrightarrow V^{**}$$
$$\alpha \longmapsto \Phi(\alpha) \quad \text{mit} \quad \Phi(\alpha)(\psi) = \psi(\alpha) \quad \text{für } \psi \in V^*$$

ist linear und injektiv und somit auch surjektiv, da $\dim V = \dim V^{**} < \infty$. Somit ist Φ ein Isomorphismus.

a) Φ linear; sei $\alpha, \beta \in V$, $a \in \mathbb{C}$.

- $\Phi(\alpha+\beta)(\psi) = \psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta) =$
$= \Phi(\alpha)(\psi) + \Phi(\beta)(\psi) = (\Phi(\alpha)+\Phi(\beta))(\psi)$ für alle
$\psi \in V^*$ $\Rightarrow$ $\Phi(\alpha+\beta) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta)$
- $\Phi(a\alpha) = a\Phi(\alpha)$ analog

Φ injektiv

Sei $\Phi(\alpha) = 0$.
$\Rightarrow$ $\Phi(\alpha)\psi = \psi(\alpha) = 0$ für alle $\psi \in V^*$
$\Rightarrow$ $\alpha = 0$ (Ann. $\alpha \neq 0$. Wähle in V Basis $\{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ mit $\alpha_1 = \alpha$. Für f_1 aus der dualen Basis gilt $f_1(\alpha) = 1 \neq 0$ Widerspruch)

④ V $\mathbb{C}$-VR, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, $\langle \,,\rangle$ Skalarprodukt auf V.

a) Für $f \in V^*$ gibt es eindeutiges $v \in V$ mit
$f(w) = \langle w, v\rangle$ für alle $w \in V$

<u>Bew:</u> Sei $v = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)}\, e_i$ $\{e_1, .., e_n\}$ Basis von V.

- <u>Beh:</u> $f(w) = \langle w, v\rangle$ $\forall w \in V$

Sei $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$.

$$\underline{\langle x, v\rangle} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{f(e_j)}} \langle e_i, e_j\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \underline{f(x)}$$

- Sei $v' \in V$ mit $f(w) = \langle w, v'\rangle$ $\forall w \in V$.

$\Rightarrow$ $\langle w, v\rangle = \langle w, v'\rangle$ für alle $w \in W$.
$\Rightarrow$ $\langle w, v - v'\rangle = 0$ $\forall w \in V$ $\Rightarrow$ $v = v'$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit von v ..

b) $V = l_2(\mathbb{N})$; $\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$

sei V_b^* der Vektorraum der stetigen Funktionale auf V.

<u>Beh:</u> Sei $f \in V_b^*$. Dann existiert ein $x \in l_2(\mathbb{N})$ mit

$$f(y) = \langle y, x\rangle \quad \forall y \in l_2(\mathbb{N}).$$

<u>Vorbemerkungen:</u>

- Sei $f \in V^*$.

  f stetig $\iff$ f beschränkt; dh. $\exists k > 0$ mit
  $|f(x)| \leq k|x| \quad \forall x \in l_2(\mathbb{N})$

  "$\Leftarrow$" : Aus $|f(y) - f(x)| = |f(y-x)|$ folgt die Behauptung.
  "$\Rightarrow$" : Sei f nicht beschränkt. Es gibt dann eine Folge $\{x_n\}$ in $l_2(\mathbb{N})$ mit $|f(x_n)| > n|x_n|$.
  Setze $z_n = x_n / |f(x_n)|$. $\{z_n\}$ ist Nullfolge und $|f(z_n)| = 1$. Somit gilt

  $$f(\lim z_n) = f(0) \neq \lim f(z_n)$$

  $\Rightarrow$ nicht stetig

- Sei $x_0 \in l_2(\mathbb{N})$

  $$f_{x_0}: \begin{array}{l} l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C} \\ x \longmapsto (x, x_0) \end{array}$$

  ist ein stetiges Funktional, da
  wegen Cauchy-Schwarz
  $|\langle x, x_0\rangle| \leq |x|\,|x_0|$ gilt und f_{x_0} somit beschränkt ist.

Beweis der Behauptung:

Sei $x = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f(e_i)}\, e_i$, wo $\{e_i\}$ die kanonische Basis von $l_2(\mathbb{N})$ bezeichnet.
$(e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$
$\qquad\qquad\qquad\uparrow$ n-te Stelle$)$

<u>Beh</u> $\sum_{i=1}^{\infty} |f(e_i)|^2 < \infty$ dh. $x \in \ell_2(\mathbb{N})$

<u>Bew</u> Sei $x_N = \sum_{i=0}^{N} \overline{f(e_i)}\, e_i$.

Es gilt $f\left(\frac{x_N}{|x_N|}\right) \leq \|f\|$

mit $\|f\| = \sup_{x \neq 0} |f(x)|/|x| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| < \infty$ da f stetig und somit beschränkt.

$$f\left(\frac{x_N}{|x_N|}\right) = \frac{f(x_N)}{|x_N|} = \frac{\sum |f(e_i)|^2}{|x_N|} = |x_N|$$

also $|x_N| \leq \|f\| < \infty$

$\Rightarrow \lim |x_N| \leq \|f\|$

$\Rightarrow |\lim x_N| \leq \|f\|$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |f(e_i)|^2 < \infty$

<u>Beh</u> $f(y) = \langle y, x \rangle$. $\forall y \in \ell_2(\mathbb{N})$

Sei $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i$

$\underline{\langle y,x\rangle} = \langle \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i , \sum_{j=0}^{\infty} \overline{f(e_j)}\, e_j \rangle \overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ stetig}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \langle e_i , \sum_{j=0}^{\infty} \overline{f(e_j)}\, e_j \rangle =$

$\underset{\text{stetig}}{\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{=}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i \overline{\overline{f(e_j)}} \langle e_i , e_j \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i f(e_i) \overset{f \text{ stetig}}{=} \underline{f(y)}$

Lineare Algebra II
Serie 8

Prof. E. Trubowitz
SS 89

Sei $G_{m,n} = \{V \subset \mathbb{C}^{n+m} \mid V \text{ ist ein Unterraum} / \mathbb{C} \text{ mit } \dim_{\mathbb{C}} V = m\}$.

(a) Zeige, dass $G_{m,n}$ eine Mannigfaltigkeit ist ($m \geq 3$).

- Gibt die Karten (analog wie in der Vorlesung für $G_{2,n}$)
- Berechne die Koordinatentransformation (Kartenwechsel)

(b) Welche Dimension hat $G_{m,n}$ als komplexe Mannigfaltigkeit?

Lineare Algebra II   Serie 8

Die Studenten wissen nicht was eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, insbesondere ist die Definition einer holomorphen Abbildung von $\mathbb{C}^n$ in den $\mathbb{C}^m$ nicht bekannt. All diese Definitionen findet man in Griffiths/Harris; Principles of Algebraic Geometry. Aus diesem Buch stammt auch der folgende Beweis. Man beachte dabei den Unterschied in der Definition von $G_{k,n}$.

! Die Studenten sollen nur verstehen was U_I, f_I und die Kartenwechsel $f_I \circ f_{I'}^{-1}$ bedeuten.

Let V be a complex vector space of dimension n. The *Grassmannian* $G(k,V)$ is defined to be the set of k-dimensional linear subspaces of V; we write $G(k,n)$ for $G(k,\mathbb{C}^n)$. Given a k-plane Λ in $\mathbb{C}^n$, we may represent Λ by a set of k row vectors in $\mathbb{C}^n$ spanning Λ, i.e., by a $k\times n$ matrix

$$\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

of rank k. Clearly any such matrix represents an element of $G(k,n)$ and any two such matrices A, A' represent the same element of $G(k,n)$ if and only if $\Lambda = g\Lambda'$ for some $g \in \mathrm{GL}_k$.

For every multiindex $I=\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,n\}$ of cardinality k, let $V_{I^\circ}\subset \mathbb{C}^n$ be the $(n-k)$-plane in $\mathbb{C}^n$ spanned by the vectors $\{e_j : j\notin I\}$, and let

$$U_I = \{\Lambda\in G(k,n):\ \Lambda\cap V_{I^\circ}=\{0\}\};$$

U_I is just the set of $\Lambda\in G(k,n)$ such that the Ith $k\times k$ minor of one, and hence for any, matrix representation for Λ is nonsingular. Any $\Lambda\in U_I$ has a unique matrix representation Λ^I whose Ith $k\times k$ minor is the identity matrix, e.g., any $\Lambda\in U_{\{1,\ldots,k\}}$ can be represented uniquely by a matrix of the form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & & \vdots & * & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

(Note that the row vectors of such a matrix representative for $\Lambda\in U_I$ are just the points of intersection of Λ with the affine $(n-k)$-planes $\{V_{I^\circ}+e_j : j\in I\}$.) Conversely, any $k\times n$ matrix of the form above represents a k-plane $\Lambda\in U_I$; thus the $k(n-k)$ entries of the I°th $k\times(n-k)$ minor $\Lambda^I_{I^\circ}$ of Λ^I give a bijection of sets

$$\varphi_I:\ U_I\to\mathbb{C}^{k(n-k)}$$

for each I. Note that $\varphi_I(U_I\cap U_{I'})$ is open in $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ for all I,I'; we claim that in fact the map $\varphi_I\circ\varphi_{I'}^{-1}$ is holomorphic on this open set and hence that the maps φ_I give $G(k,n)$ the structure of a complex manifold. But this is clear: if, for $\Lambda\in U_I\cap U_{I'}$, we let $\Lambda^I_{I'}$ be the I'th $k\times k$ minor of Λ^I, then

$$\Lambda^{I'} = (\Lambda^I_{I'})^{-1}\cdot\Lambda^I,$$

and since the entries of $(\Lambda^I_{I'})^{-1}$ vary holomorphically with the entries of Λ^I, $\varphi_I\circ\varphi_{I'}^{-1}$ is holomorphic.

Lineare Algebra
Serie 9

Prof. E. Trubowitz
SS 89

(1) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $z = f(w)$ eine Parametertransformation, mit Jacobimatrix

$$M = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j} \right) \in GL(n,\mathbb{R}).$$

Zeige: $\nabla_z = (M^T)^{-1} \nabla_w$

(2) Seien $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Gib Bedingungen für A, B, C, D, so dass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R}) = \{ A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J \}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gelte $A = A^T$, $B = B^T$, $C = C^T$, $D = D^T$.

Zeige:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R}) \iff \begin{cases} [A,C] = 0 \\ [B,D] = 0 \\ AD - CB = \mathbb{1}. \\ BC - DA = -\mathbb{1} \end{cases}$$

(3) Seien $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$.

Definition. $S(v,w) \underset{Def}{=} \langle v, Jw \rangle$ (vgl. p. 94 Skript)

das symplektische Skalarprodukt.

<u>Definition.</u> Ein Unterraum $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ heisst <u>Lagrange Unterraum</u>, falls

(1) $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

(2) $S(v,w) = 0 \quad \forall v,w \in V.$

<u>Zeige:</u>

(a) $A \in Sp(n,\mathbb{R}) \iff S(Av, Aw) = S(v,w) \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^{2n}$

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A = A^T$.

Dann ist $V = \{ (x, Ax) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in \mathbb{R}^n \}$ ein Lagrange UR von $\mathbb{R}^{2n}$.

1.) $\frac{\partial}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial f_i}{\partial w_j} \iff \nabla_w = M^T \cdot \nabla_z$

2a) Bedingung: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T J \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = J$

$$\iff \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} A^TC - C^TA = 0 & (\text{i.e. } A^TC \text{ symmetrisch}) \\ B^TD - D^TB = 0 & (\text{i.e. } B^TD \text{ symmetrisch}) \\ A^TD - C^TB = 1 \end{cases}$$

2b) Mit A, B, C, D symmetrisch lauten die Bedingungen in a):

$$AC - CA = 0 \iff [A, C] = 0$$
$$BC - DB = 0 \iff [B, D] = 0$$
$$AD - CB = 1 \iff BC - DA = -1 \quad (\text{transponieren!})$$

3a) $S(Av, Aw) = S(v, w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}$

$\iff \langle Av, JAw \rangle = \langle v, Jw \rangle$ "

$\iff (Av)^T JAw = v^T Jw$ "

$\iff v^T A^T J A w = v^T J w$ "

$\iff v^T (A^T J A - J) w = 0$ "

$\iff A^T J A - J = 0$

$\iff A \in Sp(n, \mathbb{R})$

3b) (i) Es ist klar, dass V ein UR von $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ ist.

(ii) $S\left(\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ Ay \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}, J \cdot \begin{pmatrix} y \\ Ay \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ Ay \end{pmatrix}$

$$= (x^T, x^TA^T) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ Ay \end{pmatrix} = (x^T, x^TA^T) \begin{pmatrix} Ay \\ -y \end{pmatrix} = x^TAy - x^TA^Ty \underset{A = A^T}{=} 0$$

$\Rightarrow V$ ist ein Lagrange Unterraum