Inhaltsverzeichnis

I. Abriss der Masstheorie

II. Die Fouriertransformation

1. Definition, Eigenschaften, Beispiele
2. Schwartz-Raum
3. Temperierte Distributionen
4. Kugelfunktionen
5. Die Airy-Funktion
6. Mathematische Elemente der Quantenmechanik

III. Eigenwertprobleme

1. Das Wasserstoffatom
2. Bewegung eines Elektrons in einem konstanten Elektrischen Feld (eindimensional)
3. Homogene, sphärische, harmonische und Legendre'sche Polynome.

IV. Differentialoperatoren

1. Der Satz von Malgrange-Ehrenpreis.
2. Exkurs über Distributionen
3. Pseudodifferentialoperatoren und Sobolev-Räume
4. Harmonische Funktionen
5. Probleme der Potentialtheorie

II. Die Fouriertransformation

1. Definition, Eigenschaften, Beispiele

1.1. Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir folgende Transformationen:

$$\hat{\varphi}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx$$

$$\check{\varphi}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{iy\cdot x}\, dx$$

$\wedge$ heisst Fouriertransformation

$\vee$ heisst inverse Fouriertransformation

1.2. Lemma $(x, k \in \mathbb{R}^n)$ $\quad \widehat{e^{-|x|^2/2}}(k) = e^{-|k|^2/2} \qquad \left(|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$

Beweis:

(i) $n = 1$. $\varphi(x) := e^{-x^2/2}$.

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, e^{-ikx}\, dx.$$

$$\frac{d}{dk}\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}(-ix)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) e^{-ikx}\, dx \overset{\text{(part. int.}}{=}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-ik)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= -k\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-ikx}\, dx = -k\,\hat{\varphi}(k)$$

$$\frac{d}{dk}\left(e^{k^2/2}\,\hat{\varphi}(k)\right) = k e^{k^2/2}\,\hat{\varphi}(k) + e^{k^2/2}\,\frac{d}{dk}\hat{\varphi}(k) = e^{k^2/2}\left(k\hat{\varphi}(k) + \frac{d}{dk}\hat{\varphi}(k)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\varphi}(k) = \hat{\varphi}(0)\, e^{-k^2/2}, \quad \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1,$$

also $\underline{\hat{\varphi}(k) = e^{-k^2/2}}$

(ii) n beliebig. $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} e^{-ikx} \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n x_j^2/2} e^{\sum_{j=1}^n -ik_j x_j} \, dx = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2} e^{-ik_j x_j} \, dx_j \right) \overset{\text{(i)}}{=}$$

$$= \prod_{j=1}^n e^{-k_j^2/2} = e^{-\sum k_j^2/2} = e^{|k|^2/2}$$

(Für einen weiteren Beweis cf. Serie 1, Aufg 3)

Im folgenden werden

Eigenschaften der Fouriertransformation

zusammengestellt, die im Laufe der Vorlesung in Form von statements oder als Sätze präsentiert wurden. Dabei werden die einfacheren Beweise dem Leser überlassen.

1.3. $|\hat{\varphi}(k)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx =: \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\varphi\|_1$

1.4. $\hat{\varphi}$ ist stetig (ebenso $\check{\varphi}$).

Bew. ⌜ Sei $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{j\to\infty} k_j = k$.

$f_j(x) := \varphi(x) e^{-ik_j \cdot x}$. Dann gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \hat{\varphi}(k_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \, dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} f_j(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ikx} \, dx = \hat{\varphi}(k)$$

(*) Anwendung des Konvergenzsatzes von Lebesgue (KSL)
$f_j(x) \to \varphi(x) e^{-ikx}$ punktweise fast überall und
$|f_j(x)| \le |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (nach Voraussetzung) ⌟

1.5. $\hat{\varphi}(k)$ ist gleichmässig stetig (ebenso $\check{\varphi}(k)$)

Bew. ⌈ Wähle M so, dass $\int_{\mathbb{R}^n \setminus (M,M)^n} |\varphi(x)|\,dx < \frac{(2\pi)^{n/2}}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$\text{sei } |k-e| < \frac{\varepsilon}{4M(\|\varphi\|_1+1)} \cdot (2\pi)^{n/2}$$

dann gilt:

$$|\hat{\varphi}(k)-\hat{\varphi}(e)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \cdot |e^{-ikx} - e^{-iex}|\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus (M,M)^n} |\varphi(x)| \cdot \underbrace{|e^{-ikx} - e^{-iex}|}_{\le 2}\,dx + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(M,M)^n} |\varphi(x)| \cdot |e^{i\frac{e-k}{2}x} - e^{-i\frac{e-k}{2}x}|\,dx$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(M,M)^n} |\varphi(x)| \cdot 2\underbrace{\left|\sin \frac{e-k}{2}\cdot x\right|}_{\le |e-k|\cdot\frac{2M}{2}}\,dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |e-k| \cdot 2M(\|\varphi\|_1+1) \le \varepsilon$$

1.6. Die Fouriertransformation ist linear, dh.

$$\widehat{\alpha\varphi+\beta\psi}(k) = \alpha\hat{\varphi}(k) + \beta\hat{\psi}(k) \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{C})$$

1.7. $\hat{\bar{f}}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$

1.8. $\widehat{f(\lambda\cdot)}(k) = \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}\left(\frac{k}{\lambda}\right) \quad (0 \ne \lambda \in \mathbb{R})$

1.9. $\hat{f_y}(k) = e^{-iky}\hat{f}(k)$, wo $f_y(x) := f(x-y)$

1.10. Es seien $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt: $\int \hat{\varphi}(y)\psi(y)\,dy = \int \varphi(y)\hat{\psi}(y)\,dy$

Bew. ⌈ $\int \hat{\varphi}(y)\psi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-iyx}\,dx\ \psi(y)\,dy \overset{(*)}{=}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-ixy}\,dy\ \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx$$

(*) : $F(x,y) := \varphi(x) e^{-iyx} \psi(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, denn

$$\iint |F(x,y)|\,dx\,dy = \iint |\varphi(x)| \cdot |\psi(y)|\,dx\,dy =$$

$= \int |\varphi(x)|\,dx \int |\psi(y)|\,dy < \infty$, da $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Also Vertauschung der Integration mit Fubini.

1.11. <u>Satz</u> $\varphi, \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi = (\hat{\varphi})^\vee$

$\varphi, \check{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi = (\check{\varphi})^\wedge$

Bew. ⌜ Wir definieren $f_\varepsilon(k) := \hat{\varphi}(k) e^{ikx} e^{-|\varepsilon k|^2/2}$

Es gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(k) = \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$; $|f_\varepsilon(k)| \le |\hat{\varphi}(k)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$(\hat{\varphi}(k))^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}\,dk = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(k)\,dk =$$

$$\overset{(KSL)}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{ikx} e^{-|\varepsilon k|^2/2}\,dk \overset{1.10.}{=}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \widehat{e^{ikx} e^{-|\varepsilon k|^2/2}}(y)\,dy$$

Nun ist $\widehat{e^{ikx} e^{-|\varepsilon k|^2/2}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} e^{-|\varepsilon k|^2/2} e^{-iyk}\,dk =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\varepsilon k|^2/2} e^{-ik(y-x)}\,dk = \widehat{\phi(\varepsilon\cdot)}(y-x) \qquad (\phi(k) = e^{-|k|^2/2})$$

$$\overset{1.8.}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \hat{\phi}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \overset{1.2.}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\left|\frac{y-x}{\varepsilon}\right|^2/2}$$

Also folgt : $(\hat{\varphi})^\vee(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\left|\frac{y-x}{\varepsilon}\right|^2/2}\,dy =$

$\left(\frac{y-x}{\varepsilon} = t \right.$
$\quad dy = \varepsilon^n \cdot dt$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon t + x)\, e^{-|t|^2/2}\, dt \overset{KSL}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-|t|^2/2}\, dt = \varphi(x) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/2}\, dt = \varphi(x)$$ ⌟

Es lohnt sich, die im letzten Beweis verwendete Idee klar herauszustellen, weil sie später wieder verwendet wird. Man konstruiert eine sog. <u>approximierende Identität</u> (N. Wiener)
Dazu folgendes:

(1) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir <u>die Faltung</u> von f und g:

$$f * g\,(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Es gilt: $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f*g|(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\, dy\, dx \overset{\text{(Fubini)}}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx \right) dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \|f\|\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|\, \|g\| < \infty$$

(2) Sei $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $c := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, dx$

$$\Phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \left(\text{Bem.} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon(x)\, dx = c \right)$$

(3) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt: $f * \frac{1}{c}\Phi_\varepsilon \xrightarrow{\text{in } L^1} f \quad (\varepsilon \searrow 0)$, d.h.

$$\| f * \Phi_\varepsilon - cf \| \to 0 \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

Bew. ⌜ $f * \Phi_\varepsilon(x) - cf(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \Phi_\varepsilon(y)\, dy - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \Phi_\varepsilon(y)\, dy$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x-y) - f(x) \right) \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x-\varepsilon y) - f(x) \right) \Phi(y)\, dy$$

(Fubini)

Also: $\|f * \Phi_\varepsilon - cf\| \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)| \cdot |\Phi(y)|\, dy\, dx \overset{!}{=}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\, dx \right) \cdot |\Phi(y)|\, dy \xrightarrow{KSL} 0 \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

(Beachte, dass $\|f_{\varepsilon y} - f\| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\, dx \le 2\|f\|$) ┘

Nun beweisen wir noch einmal 1.11. :

Wir wählen dabei für Φ gerade eine Eigenfkt. von $\wedge$:

$$\Phi(x) := e^{-|x|^2/2}\ ; \quad \widehat{\Phi}(x) = \Phi(x) \text{ nach } 1.2.\ ; \quad \Phi(-x) = \Phi(x)\ ;$$

$$(\hat{\varphi}(k))^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\, dk \overset{KSL}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\, \Phi(\varepsilon k)\, dk$$

$$\overset{1.9.}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_{-x}(k)\, \Phi(\varepsilon k)\, dk \overset{1.10.}{=}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{-x}(y)\, \widehat{\Phi(\varepsilon \cdot)}(y)\, dy \overset{1.8.}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{-x}(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy =$$

Subst $y \to -y$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y+x)\, \Phi_\varepsilon(y)\, dy \overset{!}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\, \Phi_\varepsilon(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi * \Phi_\varepsilon(x) \overset{\text{in } L^1(\mathbb{R}^n)!}{=} c\varphi(x) = \varphi(x)\ , \text{ denn}$$

$$c := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, dx = 1$$

1.12. <u>Korollar</u>: $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi}(k) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ (bzgl $L^1(\mathbb{R}^n)$!),
d.h. $\wedge$ ist injektiv
Ebenso: $\vee$ ist inj.

1.13. <u>Korollar</u> $\varphi, \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt: $\hat{\hat{\varphi}}(y) = \varphi(-y)$

Bew: $\hat{\hat{\varphi}}(-y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\, e^{-ik(-y)}\, dk = (\hat{\varphi})^\vee(y) = \varphi(y)$ ┘

1.14. <u>Korollar</u> $\varphi, \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\Rightarrow \check{\varphi} = \varphi^{3\wedge} := \hat{\hat{\hat{\varphi}}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

1.15. <u>Lemma</u> $\varphi, \hat\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi, \hat\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (sogar $\varphi, \hat\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$)

und es gilt: $\|\varphi\|_2 = \|\hat\varphi\|_2$ (Plancherel)

Bew.: ⌈ (1) $\|\hat\varphi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat\varphi(k)|^2 dk \overset{1.3.}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\varphi\|_1 \cdot |\hat\varphi(k)| dk =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\varphi\|_1 \cdot \|\hat\varphi\|_1 < \infty$$

(2) $\|\varphi\|_2^2 = \|(\check\varphi)^\wedge\|_2^2 \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\check\varphi\|_1 \cdot \|\varphi\|_1 \overset{1.14.}{<} \infty$

(3) $\|\varphi\|_2^2 = \int |\varphi(x)|^2 dx = \int \varphi(x)\, \bar\varphi(x)\, dx \overset{1.13.}{=} \int \hat{\hat\varphi}(-x)\, \bar\varphi(x)\, dx \overset{1.10.}{=}$

$$= \int \hat\varphi(-x)\, \hat{\bar\varphi}(x) dx \overset{1.7.}{=} \int \hat\varphi(-x)\, \overline{\hat\varphi}(-x)\, dx = \int |\hat\varphi(-x)|^2 dx$$

$$= \|\hat\varphi\|_2^2$$ ⌋

1.16. <u>Lemma</u> $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ (i) $\widehat{f * g} = \hat f \cdot \hat g$

(ii) $(f*g)^\vee = \check f \cdot \check g$

Falls auch $\hat f, \hat g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

(iii) $\hat f * \hat g = \widehat{fg}$

(iv) $\check f * \check g = (fg)^\vee$

Bew.: ⌈ (i) $\widehat{f*g(x)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f_x(-y) g(y)\, dy \cdot e^{-ikx} dx \overset{!\,(\text{Fubini})}{=}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f_y(x)\, e^{-ikx} dx\, g(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{f_y}(k)\, g(y)\, dy \overset{1.9.}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-iky} \hat f(k)\, g(y)\, dy = \hat f(k) \cdot \hat g(k)$$

(iii) $(\hat f * \hat g)^\vee \overset{(ii)}{=} \check{\hat f} \cdot \check{\hat g} = f \cdot g \Rightarrow \hat f * \hat g = \widehat{f \cdot g}$ ⌋

1.17. <u>Beispiel</u>.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\underline{\underline{\hat\varphi(k)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{|x| \leq a\}}\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{ik} e^{-ikx} \Big|_{-a}^{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{iak} - e^{-iak} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ak}{k}$$

1.18. Beispiel

$$\varphi(x) = \begin{cases} a-|x| & |x|\le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}(a-|x|)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0}(a+x)\,e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}(a-x)\,e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,a\int_{-a}^{a}e^{-ikx}\,dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^a x e^{ikx}\,dx + \int_0^a x e^{-ikx}\,dx\right) =$$

$$\overset{(1.17.)}{=} a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ak}{k} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a x\cos kx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos ak}{k^2}$$

1.19. Beispiel

$$\varphi(x) = e^{-\alpha|x|} \qquad (\alpha > 0)$$

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos kx\,dx = \ldots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

Die Anwendung der Identität von Plancherel (1.15.) liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2+k^2)^2}\,dk = \frac{\pi}{2\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\alpha|x|}\,dx = \ldots = \frac{\pi}{2\alpha^3}$$

(Analog für Bsp 1.17 und 1.18:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ak}{k^2}\,dk = a\pi \;; \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{ak}{2}}{k^4}\,dk = \frac{\pi}{4}a^3 \qquad)$$

Diese drei Beispiele zeigen eine bemerkenswerte Dualität zwischen einer Funktion und ihrer Fouriertransformierten:

$\varphi, \hat{\varphi}$ schnell abfallend $\longleftrightarrow$ $\hat{\varphi}, \varphi$ glatt

(Wende 1.13. auf die Beispiele an!)

1.20. Beispiel

Sei $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ pos. symm Matrix, dh. $A^T = A$; $(Ax,x) > 0$ für $x \neq 0$
dann gilt :
$$\left(e^{-(Ax,x)/2}\right)^\wedge(k) = \frac{e^{-(A^{-1}k,k)/2}}{(\det A)^{1/2}}$$

Bew. ⌈ Zu A existiert eine orthogonale Matrix R (dh. $R^T = R^{-1}$, $|\det R| = 1$) mit $R^T A R = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, $\lambda_j > 0$ (n. Vor.)

$$\left(e^{-(Ax,x)/2}\right)^\wedge(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Ax,x)/2} e^{-ikx}\, dx \underset{\text{Subst}: \ x = Ry}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(ARy,Ry)/2} e^{-ik\cdot Ry} |\det R|\, dy \underset{(\text{Es gilt}: \ (u,Bv) = (B^T u, v))}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(R^T A R y, y)/2} e^{-iR^T k\cdot y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2/2} e^{-i\sum (R^T k)_j y_j}\, dy =$$

$$= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_j y_j^2/2} e^{-i(R^T k)_j y_j}\, dy_j = \qquad \left(\varphi_j := e^{-y_j^2/2}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^n \widehat{\varphi_j(\sqrt{\lambda_j}\,\cdot)}\,((R^T k)_j) \overset{1.2.}{\underset{1.8.}{=}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \varphi_j\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(R^T k)_j\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}(R^T k)_j^2/2} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-((R^T A R)^{-1} R^T k, R^T k)/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-(R R^T A^{-1} R R^T k, k)/2} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-(A^{-1}k,k)/2}$$ ⌋

Beachte : Setzt man $k = 0$, so erhält man :
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Ax,x)/2}\, dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$$

Wir können also für symmetrische Matrizen die Determinante definieren als:
$$\det A = \frac{(2\pi)^n}{\left(\int e^{-(Ax,x)/2}\, dx\right)^2}$$

2. Schwartz - Raum

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Fouriertransformation einen geeigneten Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^n)$, den Schwartz-Raum, in sich abbildet und zwar linear, bijektiv und stetig.
Im Anschluss an Bsp 1.19. haben wir die Dualität zwischen einer Funktion und ihrer Fouriertransformierten festgestellt; aufgrund dieser Dualität wissen wir also bereits, dass eine Funktion aus dem Schwartz-Raum sicher schnell abfallend und glatt ist.
Vor der Definition dieses Raumes einige nützliche Notationen:

2.1. Definition. Für einen <u>Multiindex</u> $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definiert man:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j} \; ; \quad \partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$D_j := -i \partial_j$$

Für ein Polynom in x: $P(x) := \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha x^\alpha$ definiert man

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha D^\alpha$$

2.2. Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. K ein Körper, zB $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$C^0(\Omega, K) := C(\Omega, K) := \{ \varphi : \Omega \to K, \ \varphi \text{ stetig} \}$$

$$C^k(\Omega, K) := \{ \varphi \in C(\Omega, K) \mid \partial^\alpha \varphi \in C(\Omega, K) \ \ \forall \ |\alpha| \le k \}$$

$$C^\infty(\Omega, K) := \bigcap_{j \ge 0} C^j(\Omega, K)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \}$$

heisst <u>Schwartz-Raum</u>

2.3. <u>Lemma</u> Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ex $c_{\alpha,k}(\varphi)$ mit

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \le c_{\alpha,k} \frac{1}{(1+|x|)^k}$$

⌜ Bew.

(1) Für $t = 1$ ist $(1+t)^k \le 2^k(1+t^k)$ und $\forall t \geq 1$ gilt:

$$\frac{d}{dt}(1+t)^k = k(1+t)^{k-1} \le k(2t)^{k-1} < k 2^k t^{k-1} = \frac{d}{dt}\left(2^k(1+t^k)\right)$$

$$\Rightarrow (1+t)^k < 2^k(1+t^k) \quad \forall t > 1$$

(2) Sei $x \neq 0$. $\dfrac{\sum |x_j|^k}{|x|^k} = \sum \left|\dfrac{x_j}{|x|}\right|^k \geq \min\limits_{x \neq 0} \sum \left|\dfrac{x_j}{|x|}\right|^k =$

$$= \min_{|x|=1} \left(\sum |x_j|^k\right) =: \delta$$

(3) $\forall |x| > 1$ gilt:

$$(1+|x|)^k |\partial^\alpha \varphi| < 2^k(1+|x|^k)|\partial^\alpha \varphi(x)| \le 2^k\left(1+\frac{1}{\delta}\sum |x_j|^k\right)|\partial^\alpha \varphi|$$

$$\le \frac{1}{\delta} 2^k \left(\delta \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| + \sum \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x_j{}^k \partial^\alpha \varphi(x)|\right)$$

$$=: c_{\alpha,k} < \infty$$

(4) $\forall |x| \le 1$ gilt: $(1+|x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| \le 2^k \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| < c_{\alpha,k}$ ⌟

2.4. Bemerkungen: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(1) $\partial^\alpha \varphi,\ x^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

(2) $p(x)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\forall p$ Polynom

(3) $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, dh. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$

(1) & (2) folgen aus der Def von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, (3) folgt mit 2.3.

2.5. **Satz** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig bezüglich der Normen $\|\varphi\|_{k,l} := \max_{|\alpha| \le l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^k \, |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

Für den Beweis cf. Serie 2 Aufg 1a.
Zur Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{k,l}$:

Sei φ_j eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
φ_j heisst konvergent gegen φ in $\mathcal{S}$,

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \,, \quad \text{falls} \quad \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{k,l} = 0 \quad \underline{\forall\, k,l \in \mathbb{N}}$$

2.6. Bem. (i) Falls $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, dann gilt:

$$\varphi_j(x) \xrightarrow{\text{glm}} \varphi(x) \;; \quad x^\beta \partial^\alpha \varphi_j(x) \xrightarrow{\text{glm}} x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)$$

(ii) Man verifiziert leicht, dass

$$\|\varphi_j\|_{k,l} \to 0 \;\; \forall k,l \quad \text{gdw} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi_j(x)| \to 0 \;\; \forall \alpha,\beta \quad (j\to\infty)$$

2.7. **Lemma** Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(i) $\widehat{D_j\varphi}(k) = k_j \hat{\varphi}(k)$ (iii) $\widecheck{D_j\varphi}(x) = -x_j \check{\varphi}(x)$

(ii) $D_j \hat{\varphi}(k) = -\widehat{x_j\varphi}(k)$ (iv) $D_j \check{\varphi}(x) = \widecheck{k_j\varphi}(x)$

Bew. (i) $$\widehat{D_j\varphi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_j\varphi(x)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-i\partial_j \varphi(x)}_{\uparrow} \underbrace{e^{-ikx}}_{\downarrow} dx_j \Big)\, dx_1 \dots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\underbrace{-i\varphi(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0,\text{ da } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} + \int_{-\infty}^{\infty} i\varphi(x)(-ik_j) e^{-ikx} dx_j \Big)\, dx_j' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} k_j \varphi(x) e^{-ikx} dx = k_j \hat{\varphi}(k)$$

(ii) $$D_j \hat{\varphi}(k) = D_j \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ikx} dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_j \left(\varphi(x) e^{-ikx}\right) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} -x_j \varphi(x)\, e^{-ikx} dx =$$
$$= - \widehat{x_j\varphi}\,(k)$$

(✱) : Vertauschung von Integration und Differentiation erlaubt, da $\varphi(x) e^{-ikx}$ stetig differenzierbar in k_j und $\frac{\partial}{\partial k_j} \varphi(x) e^{-ikx} = -ix_j\, \varphi(x)\, e^{-ikx} \in L^1(\mathbb{R}^n_x)$. ┘

2.8. Für ein Polynom P gilt das folgende

<u>Korollar</u>

(i) $\widehat{P(D)\varphi}\,(k) = P(k)\,\hat{\varphi}(k)$ (iii) $\widecheck{P(D)\varphi}\,(x) = P(-x)\,\check{\varphi}(x)$

(ii) $P(D)\,\hat{\varphi}\,(k) = \widehat{P(-x)\varphi}\,(k)$ (iv) $P(D)\,\check{\varphi}\,(x) = \widecheck{P(k)\varphi}\,(x)$

2.9. <u>Korollar</u> $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

┌ Bew. Es fehlt noch $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |k^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(k)| < \infty$, bzw

$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \check{\varphi}(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta$:

$$|k^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(k)| = |\widehat{D^\beta (-x)^\alpha \varphi}\,(k)| = |\widehat{\partial^\beta x^\alpha \varphi}\,(k)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |\partial^\beta x^\alpha \varphi(x)|\, dx$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1} |\partial^\beta x^\alpha \varphi(x)| \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx < \infty,$$

da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ┘

2.10. <u>Satz</u> Die Abbildung $\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(bzw $\vee : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) ist

(i) linear
(ii) bijektiv
(iii) stetig bzgl. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

┌ zu (iii) : mit Bem 2.6.(ii) und dem Beweis von 2.9. folgt sofort, dass $\wedge$ in $0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, dh. :

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\varphi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \qquad (*)$$

Dies genügt für die Stetigkeit in ganz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denn:
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Raum

$$\Rightarrow \quad \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \text{ gdw } \psi_j := \varphi_j - \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}_j - \hat{\varphi} \overset{(i)}{=} \widehat{\varphi_j - \varphi} = \hat{\psi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \text{ gdw } \hat{\varphi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$$

(vgl auch Serie 2, Aufgabe 16)

2.11. <u>Beispiel</u>

Sei $A^t = A$, $\det A \neq 0$; $g, \check{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$.
Dann gilt:

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\, dx \underset{(t\to\infty)}{\sim} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} g(0),$$

wobei $\operatorname{sgn} A := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn} \lambda_j$ (λ_j Eigenwert von A)

Falls $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:

$$(**) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\, dx \sim \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!\,t^j} (R(\partial)^j g)(0)$$

wobei $R(x) := i(A^{-1}x, x)/2$

<u>Präzisierung</u>:

$$(*): \lim_{t\to\infty} t^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\, dx = (2\pi)^{n/2} g(0) \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A}$$

$$(**): \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\, dx - \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!\,t^j} (R(\partial)^j g)(0) \right|$$

$$\leq \left| \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \frac{1}{k!\,t^k} (R(\partial)^k g)(0) \right| \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Für die Herleitung dieser Resultate benötigen wir folgende Hilfsmittel :

2.12. <u>Lemma</u> Sei $z := re^{i\vartheta}$ mit $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$ (dh. $z = a+ib$, $a > 0$).

Dann gilt : $$\widehat{e^{-\frac{z}{2}x^2}}(k) = \frac{1}{\sqrt{z}}\, e^{-\frac{k^2}{2z}} \, ,$$

wobei $$\sqrt{z} := \sqrt{r}\, e^{i\frac{\vartheta}{2}}$$

Bemerkung : Die Fouriertransformation kann auch für komplexe Werte definiert werden, falls das Integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx$ für $k \in \mathbb{C}$ existiert.

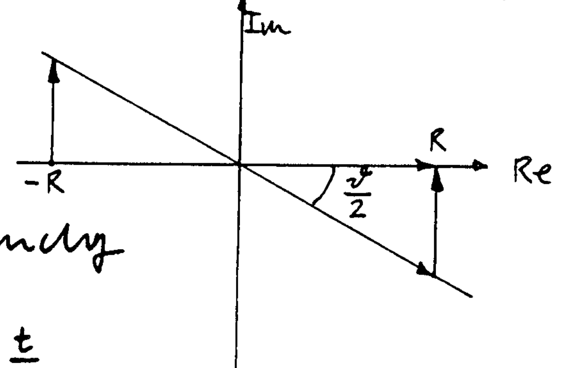
Für $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist dies der Fall :

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{\wedge}(k) \underset{k = a'+ib'}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i(a'+ib')x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+b'x}\, e^{-ia'x}\, dx < \infty$$

⌜ Für den Beweis betrachten wir $f(w) := e^{-\frac{z}{2}w^2} e^{-ikw}$.
$f(w)$ ist analytisch in ganz $\mathbb{C}$.

Annahme : $b := \operatorname{Im} z > 0$ (die entsprechende Rechnung für $b < 0$ führt auf das gleiche Resultat; für $b = 0$ ist nichts mehr zu beweisen, vgl 1.8.)



Anwendung des Satzes von Cauchy ergibt :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}x^2} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{z}}\right)^2} e^{-ik\frac{t}{\sqrt{z}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\, dt \; +$$

$$+ \lim_{R\to\infty} \int_0^{R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}} f(-R+it)\, i\,dt \; +$$

$$+ \lim_{R\to\infty} \int_{-R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}^{0} f(R+it)\, i\,dt$$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^{R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}} f(-R+it)\,i\,dt\right| + \lim_{R\to\infty}\left|\int_{-R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}^{0} f(R+it)\,i\,dt\right| \leq$$

$$\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}} \left| e^{-\frac{(a+ib)}{2}(R^2-2iRt-t^2)}\, e^{-ik(-R+it)}\right| dt$$

$$+ \lim_{R\to\infty}\int_0^{R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}} \left| e^{-\frac{(a+ib)}{2}(R^2-2iRt-t^2)}\, e^{-ik(R-it)}\right| dt$$

$$\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-\frac{1}{2}(aR^2-at^2+2bRt)}\, e^{kt}\, dt$$

$$+ \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-\frac{1}{2}(aR^2-at^2+2bRt)}\, e^{-kt}\, dt$$

$$\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-bRt+kt}\, dt + \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-bRt-kt}\, dt = 0$$

Also:

$$\widehat{e^{-\frac{a}{2}x^2}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-i\frac{k}{\sqrt{a}}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\, dt \overset{\frac{k}{\sqrt{a}} =: a+ib}{\overset{!}{=}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-i(a+ib)t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+bt}\, e^{-iat}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{b^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-b)^2}\, e^{-ia(t-b)}\cdot e^{-iab}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{b^2/2-iab}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-iat}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{b^2}{2}-iab-\frac{a^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{(a+ib)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

┘

2.13. Satz (Taylor) Sei $f\in C^\infty([a,x])$.
Setze $T_{n,a}f(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^n$

Es gilt:

$$f(x) = T_{n,a}f(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x\left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}f(t)\right)(x-t)^n\,dt \qquad (*)$$

bzw

$$f(x) = T_{n,a}f(x) + \frac{1}{n!}\int_0^1\left(\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}f(a+s(x-a))\right)(1-s)^n\,ds \qquad (**)$$

⌈Bew. mit Induktion. Behauptung klar für $n=0$.

$$n-1 \to n: \quad f(x) = T_{n-1,a} f(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) (x-t)^{n-1} \, dt$$

$$= T_{n-1,a} f(x) - \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \frac{1}{n} (x-t)^n \Big|_a^x$$

$$+ \int_a^x \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(t) \right) \frac{1}{n!} (x-t)^n \, dt$$

$$= T_{n,a} f(x) + \frac{1}{n!} \int_a^x \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(t) \right) (x-t)^n \, dt$$

(**) erhält man aus (*) durch Substitution ⌋

2.14. <u>Lemma</u> Sei $w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} w \le 0$. $\Rightarrow$

$$\left| e^w - \sum_{j=0}^n \frac{w^j}{j!} \right| \le \frac{|w|^{n+1}}{(n+1)!}$$

⌈Bew. $e^w = \sum_{j=0}^n \frac{w^j}{j!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (e^{tw}) \right) (1-t)^n \, dt$

$$\Rightarrow \left| e^w - \sum_{j=0}^n \frac{w^j}{j!} \right| \le \frac{1}{n!} \int_0^1 |w^{n+1}| \cdot |e^{tw}| \, (1-t)^n \, dt$$

$(|e^{tw}| \le 1)$ $\qquad \le \frac{|w|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{|w|^{n+1}}{(n+1)!}$ ⌋

<u>Herleitung von 2.11.</u> :

(1) $$\left(e^{it(Ax,x)/2} e^{-\varepsilon |x|^2/2} \right)^\wedge (k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} e^{-\varepsilon|x|^2/2} e^{-ixk} \, dx =$$

vgl. 1.20.

$x = Ry$, R so, dass $D := R^t A R$ Diagonalmatrix (R orthogonal)

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(ARy,Ry)/2} e^{-\varepsilon|y|^2/2} e^{-ik Ry} \, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Dy,y)/2} e^{-\varepsilon|y|^2/2} e^{-iy R^t k} \, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum(-it\lambda_j + \varepsilon) y_j^2/2} e^{-\sum i y_j (R^t k)_j} \, dy$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(-it\lambda_j+\varepsilon)y_j^2/2} \, e^{-iy_j(R^t k)_j} \, dy_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - it\lambda_j}} \, e^{-\frac{1}{2}(R^t k)_j^2/\varepsilon - it\lambda_j}$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{-it\lambda_j}} \overset{\lambda_j \in \mathbb{R}!!}{\overset{!}{=}} \frac{1}{\sqrt{t|\lambda_j|}} \, e^{-\frac{i}{2}\arg(-it\lambda_j)} = \frac{1}{\sqrt{t|\lambda_j|}} \, e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\lambda_j}$$

(3) $$\underline{\underline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\,dx}} \overset{\text{Lebesgue}}{\overset{!}{=}} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} e^{-\varepsilon|x|^2/2} g(x)\,dx \overset{g,\check{g} \in L^1}{\overset{!}{=}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{it(Ax,x)/2} e^{-\varepsilon|x|^2/2}\right)^{\wedge}(k)\, \check{g}(k)\,dk \overset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - it\lambda_j}} \, e^{-\frac{1}{2}(R^t k)_j^2/\varepsilon - it\lambda_j} \, \check{g}(k)\,dk \overset{(2),\ \text{Lebesgue}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t|\lambda_j|}} \, e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\lambda_j} \, e^{-\frac{1}{2}(R^t k)_j^2/-it\lambda_j} \, \check{g}(k)\,dk =$$

$$= \underline{\underline{t^{-\frac{n}{2}} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(A^{-1}k,k)/2t} \, \check{g}(k)\,dk}}$$

(4) $$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\,dx \cdot |\det A|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(A^{-1}k,k)/2t} \, \check{g}(k)\,dk \overset{\text{Lebesgue}}{\overset{!}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} \check{g}(k)\,dk = (2\pi)^{n/2} g(0)$$

und daraus folgt unmittelbar 2.11. (*)

(5) $(R(x) := i(A^{-1}x,x)/2)$. $R(x) = R(-x)$.

$$(-R(-k))^j \check{g}(k) \overset{2.8.(iii)}{=} \left((-R(D))^j g\right)^{\vee}(k) = \left(R(\partial)^j g\right)^{\vee}(k),$$

da $R(D) = -R(\partial)$.

Diese Operationen sind erlaubt, da $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und

R ein Polynom ist.

(6) $$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{j!t^j}\left(-R(-k)\right)^j \check{g}(k)\,dk \overset{(5)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{j!t^j}\left(R(\partial)^j g\right)^{\vee}(k)\,dk$$

$$= \frac{1}{j!t^j}\left(R(\partial)^j g\right)(0)\cdot(2\pi)^{n/2}$$

(7) $\mathrm{Re}\,(-i(A^{-1}y,y)/2t) = 0$, also folgt mit Lemma 2.14. :

$$\left| e^{-i(A^{-1}y,y)/2t} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!t^j}\left(-i(A^{-1}y,y)/_2\right)^j \right|$$

$$\leq \frac{1}{k!t^k}\left|\left(-i(A^{-1}y,y)/_2\right)^k\right|$$

$$\Rightarrow \Bigg| \left(\frac{1}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(A^{-1}y,y)/2t}\,\check{g}(y)\,dy \; -$$

$$- \left(\frac{1}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!t^j}\int_{\mathbb{R}^n} \left(-R(y)\right)^j \check{g}(y)\,dy \Bigg| \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} \left|e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A}\right| \cdot \left| e^{-R(y)/t}\,\check{g}(y) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!t^j}(-R^j\check{g})\right| dy$$

$$\leq \left(\frac{1}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} \left|e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A}\right| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{k!t^k}\left| -R^k(y)\check{g}(y)\right| dy$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(Ax,x)/2} g(x)\,dx - \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!t^j}\left(R(\partial)^j g\right)(0) \right|$$

$$\leq \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det A|^{-\frac{1}{2}} \left|e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A}\right| \frac{1}{k!t^k}\cdot\left|R(\partial)^k g(0)\right|$$

$\lrcorner$

3. Temperierte Distributionen

3.1. Definition

Eine Linearform u auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Abbildung

$u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha u(\varphi) + \beta u(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Die Linearform u heisst <u>temperierte Distribution</u> falls u stetig ist, d.h.
für jede bezüglich $\mathcal{S}$ konvergente Folge φ_j, $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ gilt:

$$u(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} u(\varphi)$$

Den Raum der temperierten Distributionen bezeichnet man mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Bemerkung: Eine analoge Konstruktion lässt sich allgemein für jeden normierten linearen Raum X über einem Körper K durchführen:

$u \in X'$ gdw $u : X \to K$ linear und stetig
(allgemein:) u heisst <u>lineares Funktional</u>,

X' heisst <u>Dualraum</u>

3.2. Beispiele

(1) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $u_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx =: (u_f, \varphi) =: u_f(\varphi)$$

jede Distribution, die sich auf diese Weise schreiben lässt heisst <u>regulär</u>

u_f ist linear (klar)
u_f ist stetig: $\lim\limits_{j\to\infty} (u_f, \varphi_j) = \lim\limits_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_j(x)\,dx \overset{\text{Lebesgue}}{=}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lim_{j\to\infty} \varphi_j(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = (u_f, \varphi)$$

(2) Zu f existiere $N > 0$ mit $(1+|x|)^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Dann ist f eine reguläre temperierte Distribution.
($u_f(\varphi)$ ist wohldefiniert!)

(3) $(\delta, \varphi) := \varphi(0)$, δ heisst δ-Funktion.

(4) Verallgemeinerung der δ-Fkt.:
Sei $1 \le k \le n$; $\quad u_{\mathbb{R}^k}(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi(x_1, x_2, \dots x_k, 0 \dots 0)\, dx_1 \dots dx_k$

(5) Für einen k-dimensionalen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^n$ definiert man: $\quad u_V(\varphi) := \int\limits_V \varphi(x_V)\, dx_V$

(6) Sei $S_1(0)$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre (in $\mathbb{R}^n$).

$$u_{S_1(0)}(\varphi) := \int\limits_{S_1(0)} \varphi(x')\, d\sigma(x')$$

1.3. <u>Lemma</u> $\quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$; $f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$

Dann gilt: $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_{f_\varepsilon}(\varphi) = \delta(\varphi)$

bzw.

$f(x_2 \dots x_n) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x')\, dx_2 \dots dx_n = 1$;
$f_\varepsilon(x') := \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} f\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0,$

Dann gilt: $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_{f_\varepsilon}(\varphi) = u_{\mathbb{R}^1}(\varphi)$

⌈Bew. (1) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_{f_\varepsilon}(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi(\varepsilon y)\,dy \underset{(\text{Lebesgue})}{=}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(\varepsilon y)\,dy = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

(2) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u_{f_\varepsilon}(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} f\left(\frac{x_2}{\varepsilon} \dots \frac{x_n}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx_2 \dots dx_n$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_2 \dots x_n)\varphi(x_1, \varepsilon x_2 \dots \varepsilon x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

Lebesgue

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_2 \dots x_n)\varphi(x_1, 0 \dots 0)\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, 0 \dots 0)\, dx_1 = u_{\mathbb{R}^1}(\varphi)$$

Bemerkung: Jede temperierte Distribution ist Limes von regulären Distributionen (ohne Beweis)

3.4. Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\widehat{u_f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\, dx = u_f(\hat{\varphi})$$

Dies motiviert folgende Definition:

$$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi})$$

3.5. Beispiele

(1) $$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} u_1(\varphi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} u_{\mathbb{R}^n}(\varphi)$$

(2) $$\widehat{u_{\mathbb{R}^k}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^k} \hat{\varphi}(x_1 \dots x_k, 0 \dots 0)\, dx_1 \dots dx_k =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\sum_{j=1}^{k} x_j y_j} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \varphi(y)\, dy_{k+1} \dots dy_n \right) dy_1 \dots dy_k \right) dx_1 \dots dx_k$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2-k}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(y_1 \dots y_k, \underbrace{y_{k+1} \dots y_n}_{z})\, e^{-i\sum_1 y_j x_j}\, dy_1 \dots dy_k \right) dx_1 \dots dx_k \right) dy_{k+1} \dots dy_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}-k}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{\varphi}(y_1 \dots y_k, z)\, dx_1 \dots dx_k \right) dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}-k}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \varphi(0\ldots 0, y_{k+1}\ldots y_n)\, dy_{k+1}\ldots dy_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}-k}} u_{\mathbb{R}^{n-k}}(\varphi)$$

4. Kugelfunktionen

4.1. Definition

$S_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$, die $(n-1)$-dimensionale Sphäre

$B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le r\}$, die n-dimensionale Kugel

$|S_r(0)|$ das Oberflächenmass der Sphäre

$|B_r(0)|$ das Volumen der Kugel.

Kugelkoordinaten: $r, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-2}, \vartheta$

$(0 \le \varphi_j \le \pi,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi)$

$x' \in S_1(0)$: $x' = (x_1' \ldots x_n')$; $|x'|^2 = \sum x_j'^2 = 1$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \cos\varphi_1 \\
x_2' &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{n-2}' &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2} \\
x_{n-1}' &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \cos\vartheta \\
x_n' &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \sin\vartheta
\end{aligned}$$

$$x_i = |x| x_i' = r x_i'$$

Jacobi-Determinante:

$$\left| \frac{\partial x(r,\varphi,\vartheta)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} \right| = r^{n-1} (\sin\varphi_1)^{n-2} (\sin\varphi_2)^{n-3} \cdot \ldots \cdot (\sin\varphi_{n-2})$$

Bsp: $\int_{S_1(0)} f(x')\, d\sigma(x')$ "f gemittelt über die Einheitssphäre"

"das Oberflächenmass der Einheitssphäre bezüglich der Dichte f"

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} f(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-2}, \vartheta) (\sin\varphi_1)^{n-2} \ldots (\sin\varphi_{n-2})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\vartheta$$

4.2. Satz $|S_1(0)| = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

wobei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ die Gammafkt bezeichnet

Bemerkung : · Funktionalgleichung für die Gammafunktion : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s>0)$

· $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

4.3. Lemma $(a>0)$ $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}$

Beweis von 4.2. :

$$1 = \int_0^\infty \int_{S_1(0)} e^{-\pi r^2} r^{n-1} d\sigma(x')\, dr = \int_{S_1(0)} d\sigma(x') \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr$$

$$\int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr \overset{\pi r^2 = s}{=} \int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{ds}{2\pi\sqrt{\frac{s}{\pi}}} = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds$$

$$\Rightarrow |S_1(0)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$\lrcorner$

4.4. Korollar (1) $|S_r(0)| = r^{n-1}|S_1(0)| = r^{n-1} \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

(2) $|B_1(0)| = \int_0^1 \int_{S_1(0)} d\sigma(x') r^{n-1} dr = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$

(3) $|B_r(0)| = r^n |B_1(0)| = \dfrac{r^n}{n} \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

4.5. Bemerkung $f(x_1', \dots, -x_j', \dots x_n) = -f(x_1' \dots x_n')$ für ein j

$$\Rightarrow \int_{S_1(0)} f(x') d\sigma(x') = 0$$

Insbesondere : $\int_{S_1(0)} (x')^\alpha d\sigma(x) = 0$ falls

α_j ungerade für ein j $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$

4.6. Satz Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $\frac{\alpha}{2} \in \mathbb{N}^n$. Dann

$$\int_{S_1(0)} (x')^\alpha d\sigma(x') = \frac{2\prod \Gamma(\beta_j)}{\Gamma(\beta_1 + \dots + \beta_n)}, \quad \beta_j := \frac{\alpha_j + 1}{2} \quad (j = 1 \dots n)$$

⌜Bew.

(1) $$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-|x|^2/2}\,dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (x_j)^{\alpha_j} e^{-x_j^2/2}\,dx_j =$$

$$= \prod_{j=1}^n (2\pi)^{1/2} \frac{(\alpha_j)!}{2^{\alpha_j/2}\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)!} =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \frac{\prod(\alpha_j)!}{2^{|\alpha|/2}\prod\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)!}$$

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-|x|^2/2}\,dx = \int_0^\infty \int_{S_1(0)} (x')^\alpha r^{|\alpha|} e^{-r^2/2} r^{n-1}\,d\sigma(x')\,dr =$$

$$= \int_{S_1(0)} (x')^\alpha\,d\sigma(x') \int_0^\infty r^{|\alpha|+n-2}\, r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr =$$

$$= \int_{S_1(0)} (x')^\alpha\,d\sigma(x') \left(|\alpha|+n-2\right) \int_0^\infty r^{|\alpha|+n-4} \cdot r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr =$$

$$= \ldots$$

(3) <u>n gerade</u>: $$\int_{S_1(0)} (x')^\alpha\,d\sigma(x') = \frac{(2\pi)^{n/2}\prod(\alpha_j)!}{2^{|\alpha|/2}\prod\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)!} \cdot \frac{1}{\left(\frac{|\alpha|+n-2}{2}\right)!\, 2^{\frac{|\alpha|+n-2}{2}}}$$

$$= \frac{\pi^{n/2}\prod(\alpha_j)!}{2^{|\alpha|}\prod\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)!} \cdot \frac{2}{\left(\frac{|\alpha|+n-2}{2}\right)!} = \frac{2\prod\Gamma\left(\frac{\alpha_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|\alpha|+n}{2}\right)}$$

(4) <u>n ungerade</u>: $$\int_{S_1(0)} (x')^\alpha\,d\sigma(x') =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}\prod(\alpha_j)!}{2^{|\alpha|/2}\prod\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)!} \cdot \frac{2\left(\frac{|\alpha|+n-1}{2}\right)!\, 2^{\frac{|\alpha|+n-1}{2}}}{2^{1/2}\sqrt{\pi}\,(|\alpha|+n-1)!} =$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}\prod(\alpha_j)!}{2^{|\alpha|}\prod\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)!} \cdot \frac{2^{|\alpha|+n-1}\left(\frac{|\alpha|+n-1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\,(|\alpha|+n-1)!} = \frac{2\prod\Gamma\left(\frac{\alpha_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|\alpha|+n}{2}\right)}$$

⌟

4.7. <u>Satz</u> $\widehat{u_{S_1(0)}} = |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|)$,

wobei $J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell}}{2^{2\ell}\,\ell!\,\Gamma(\ell+\alpha+1)}$

Bew. (1) $\widehat{u_{S_1(0)}}(\varphi) = u_{S_1(0)}(\hat{\varphi}) = \int_{S_1(0)} \hat{\varphi}(k')\,d\sigma(k') =$

$$= \int_{S_1(0)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ik'x}\,dx\,d\sigma(k') =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-ik'x}\,d\sigma(k') \right) dx$$

$$\Rightarrow \widehat{u_{S_1(0)}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{ik'rx'}\,d\sigma(k') =: G(r,x')$$

(2) $G(r,Rx') \overset{(R\text{ orth.})}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-irk'Rx'}\,d\sigma(k') =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-ir(R^t k')x'}\,d\sigma(k') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-iry'x'}\,d\sigma(y') = G(r,x')$$

$\Rightarrow G(r,x') = G(r)$ dh. G ist unabhängig von x'.

(3) $G(r) = G\left((\sum x_j^2)^{1/2} \right)$. $\Delta := \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, der <u>Laplace-Operator</u>

$$\Delta G(r) = \Delta \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-ik'x}\,d\sigma(k') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} -\underbrace{|k'|^2}_{=1} e^{-ik'x}\,d\sigma(k') = -G(r)$$

$$\Delta G(r) = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} G\left((\sum x_j^2)^{1/2} \right) =$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} G(r) \right) \frac{x_j}{r}$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} G(r) \right) \frac{\partial r}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{r} + \frac{\partial}{\partial r} G(r) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r} =$$

$$= \sum \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r) \cdot \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r} G(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} G(r)$$

Also $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$

$$\Rightarrow G''(r) + \frac{n-1}{r} G'(r) + G(r) = 0$$

(4) $h(r) := r^{\frac{n}{2}-1} G(r)$ erfüllt die <u>Besselgleichung</u>

$$h'' + \frac{1}{r} h' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) h = 0 \quad \text{mit } \alpha = \frac{n}{2} - 1$$

$$\Rightarrow h(r) = c\, J_{\frac{n}{2}-1}(r) \quad \Rightarrow G(r) = c\, r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r)$$

(vgl dazu Serie 3)

(5) Bestimmung von c:

$$G(r)\big|_{r=0} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} d\sigma(k') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{1}{2^{n/2-1}\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r)\Big|_{r=0} = r^{1-\frac{n}{2}} \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j\geq 0} (-1)^j \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \frac{1}{\Gamma(j+\frac{n}{2})\, j!}\Big|_{r=0} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\Rightarrow c = 1 \quad \lrcorner$$

4.8. <u>Korollar</u> $\widehat{u_{S_\rho(0)}} = \rho^{\frac{n}{2}} r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) \qquad (r := |x|)$

⌜Bew. $u_\rho := u_{S_\rho(0)}$

$$\widehat{u_\rho}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_\rho(0)} e^{-i(\rho k')x} d\sigma(\rho k')\, dx$$

$$\widehat{u_\rho} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-ik'x'\rho r} \rho^{n-1} d\sigma(k') = \rho^{\frac{n}{2}} r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)$$

$\lrcorner$

4.9. <u>Lemma</u> Für rotationsinvariantes φ ist

$$\hat{\varphi}(k) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\, \varphi(r)\, dr \qquad (\rho := |k|)$$

Insbesondere ist auch $\hat{\varphi}$ rotationsinvariant.

⌜Bew.
$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ikx}\, dx =$$
$$= \int_0^\infty \varphi(r) r^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_1(0)} e^{-ik'x'\cdot\rho r}\, d\sigma(x')\, dr$$
$$= \int_0^\infty \varphi(r) r^{n-1}\, G(\rho r)\, dr \qquad (\text{vgl } 4.7.)$$
⌟

5. <u>Die Airy-Funktion</u>

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Lösungen der Differentialgleichung
$$u'' - xu = 0$$
und untersuchen das asymptotische Verhalten einer Lösung u

Dazu benötigen wir:

5.1. <u>Definition</u> Eine Folge von temperierten Distributionen $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $u_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heisst konvergent gegen $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $u_j \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} u$,

falls $u_j(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5.2. <u>Lemma</u> $u_j \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} u \Rightarrow \hat{u}_j \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \hat{u}$, bzw.
$$\check{u}_j \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \check{u}$$

⌜Bew. $\hat{u}_j(\varphi) = u_j(\hat{\varphi}) \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi)$ ⌟

5.3. Aus $u'' - xu = 0$ erhalten wir:

$$\widehat{u''} - \widehat{xu} = 0 \Rightarrow -k^2\hat{u} - i\hat{u}' = 0 \Rightarrow \hat{u} = e^{i\frac{k^3}{3}}$$

Nun möchte man gerne $\vee$ anwenden, dies ist aber nicht erlaubt, da die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R})$ (bzw einem Teilraum von L^1) definiert ist ($\hat{u} \notin L^1(\mathbb{R})$)

$\hat{u}$ kann aber als reguläre temperierte Distribution aufgefasst werden und nun kann die inverse Fouriertrafo im Sinne der Distributionen angewendet werden und man erhält eine Distribution (!) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Im folgenden zeige ich, dass u regulär und sogar in C^∞ ist.

5.4. Sei $Ai(x,\eta) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{Im} z = \eta > 0} e^{i\frac{z^3}{3}} e^{izx}\, dz$ $\qquad (z = k + i\eta)$

Bch: Das Integral existiert $\forall x$ und ist unabhängig von η.

Bew. (i) $\operatorname{Re}\left(i\frac{z^3}{3} + izx\right) = -k^2\eta + \frac{\eta^3}{3} - \eta x$

$$|Ai(x,\eta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\eta}\, dk \cdot e^{\eta^3/3 - \eta x} < \infty$$

(ii) $f(z) := e^{i\frac{z^3}{3} + izx}$ ist analytisch in ganz $\mathbb{C}$.

Anwendung des Satzes von Cauchy ergibt:

$(\eta < \eta')$

$$\int\limits_{\operatorname{Im} z = \eta} f(z)\, dz = \int\limits_{\operatorname{Im} z = \eta'} f(z)\, dz + \lim_{k\to\infty} \int_{\eta}^{\eta'} f(-k+it)\, i\,dt$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \int_{\eta'}^{\eta} f(k+it)\, i\,dt$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(-k+it)\, i\,dt\right| + \left|\int_{\eta'}^{\eta} f(k+it)\, i\,dt\right| \right) \leq$$

$$\leq 2 \lim_{k\to\infty} \int_\eta^{\eta'} e^{-k^2 t + \frac{t^3}{3} - tx}\, dt$$

$$\leq 2 \lim_{k\to\infty} e^{-k^2\eta + |\eta'|^3/3 - \eta x} (\eta' - \eta) = 0$$

$$\Rightarrow Ai(x) = Ai(x; \eta > 0)$$

<u>Ai heisst Airy-Funktion</u>

5.5. <u>Lemma</u> $Ai(x)$ ist überall analytisch als Funktion von x.
Insbesondere ist $Ai(x) \in C^\infty$.

⌐ Bew. $Ai(w) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{Im}\, z = \eta > 0} f(z,w)\, dz \qquad (z = k + i\eta,\ w = x + iy)$

mit $f(z,w) := e^{i\frac{z^3}{3} + izw}$

Wie in 5.4. zeigt man, dass $Ai(w)$ existiert ($\mathrm{Re}\,(i\frac{z^3}{3} + izw) = -k^2\eta + \frac{\eta^3}{3} - \eta x - ky$) und unabhängig ist von $\mathrm{Im}\, z = \eta > 0$.

$$\frac{\partial}{\partial \bar w} Ai(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{Im}\, z = \eta > 0} \frac{\partial}{\partial \bar w} f(z,w)\, dz = 0,$$ da $f(z,w)$ analytisch ist als Funktion von w.

$\frac{\partial}{\partial \bar w} f(z,w) \equiv 0 \in L^1$ rechtfertigt die Vertauschung von Integration und Differentiation. ┘

5.6. <u>Lemma</u> $\left(e^{i(k+i\eta)^3/3}\right) \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} e^{ik^3/3} \quad (\eta \searrow 0)$ und daraus schliessen wir mit 5.2., dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\frac{k^3}{3}}\right)^\vee = Ai(x) \quad \text{(als Distribution)}$$

⌐ Bew. $\int_{\mathbb{R}} |e^{i(k+i\eta)^3/3} \varphi(k)|\, dk = \int e^{-k^2\eta + \eta^3/3} |\varphi(k)|\, dk \leq$

$$\leq e^{\eta^3/3} \int |\varphi(k)|\, dk \leq c \|\varphi\|_1 \quad (\eta < 1)$$

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+i\eta)^3/3} \varphi(k)\, dk \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik^3/3} \varphi(k)\, dk$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\frac{k^3}{3}} \right)^{\vee} = \lim_{\eta \downarrow 0} e^{\eta x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+i\eta)^3/3} e^{i(k+i\eta)x}\, dk$$

$$= \lim_{\eta \downarrow 0} e^{\eta x} Ai(x) = Ai(x)$$

┘

5.7. <u>Lemma</u> (i) Sei $\omega^3 = 1$; dann ist $Ai(\omega x)$ eine Lösung von $u'' - xu = 0$

(ii) $\sum_{\omega^3=1} \omega Ai(\omega x) = 0$

┌ Bew. (i) $Ai''(x) - x Ai(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{Im z = \eta} (z^2 + x) e^{i\frac{z^3}{3} + izx} dz$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{Im z=\eta} i \frac{d}{dz} \left(e^{i\frac{z^3}{3} + izx} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{d}{dk} e^{i(k+i\eta)^3/3 + i(k+i\eta)x} dk =$$

$$= \lim_{R \to \infty} i e^{i(k+i\eta)^3/3 + i(k+i\eta)x} \Big|_{-R}^{R} = 0 \quad (\text{vgl } 5.4.)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} Ai(\omega x) = \omega^2 Ai''(\omega x) = \omega^2 (\omega x\, Ai(\omega x)) = x\, Ai(\omega x)$$

(ii) $f(x) := \sum_{\omega^3=1} \omega\, Ai(\omega x)$

(1) $f''(x) - x f(x) = 0$

(2) $f(0) = \sum_{\omega^3=1} \omega\, Ai(0) = Ai(0) \sum_{\omega^3=1} \omega = 0$

(3) $f'(0) = \sum_{\omega^3=1} \omega^2 Ai'(0) = Ai'(0) \sum_{\omega^3=1} \omega^2 = 0$

$$\underset{(1,2,3)}{\Longrightarrow} f(x) \equiv 0$$

┘

5.8. Lemma

$$Ai(0) = 3^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi}$$

$$Ai'(0) = -3^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2\pi}$$

$$Ai''(0) = 0$$

Für den Beweis cf. Serie 4 Aufgabe 1

Für die Lösungen $Ai(\omega_i x)$ $(\omega_i^3 = 1)$ gilt:

$Ai(\omega_i x)|_{x=0}$ stimmen überein und

$Ai'(\omega_i x)|_{x=0} = \omega Ai'(0)$ sind verschieden;

daraus folgern wir:

je zwei dieser Lösungen bilden eine Basis für die Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' - xu = 0.$$

5.9. Asymptotische Entwicklung für $0 < x \to \infty$

Wir werden $f(z) := i\frac{z^3}{3} + izx$ in eine Potenzreihe entwickeln und suchen zur Vereinfachung der Entwicklung eine Stelle z in der oberen Halbebene mit $f'(z) = 0$:

$$f'(z) = i(z^2+x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow z = i\sqrt{x}.$$

$$\frac{z^3}{3} + zx = \left(\frac{z^3}{3} + zx\right)\Big|_{z=i\sqrt{x}} + \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3}{3}+zx\right)\Big|_{z=i\sqrt{x}} (z - i\sqrt{x}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3}{3}+zx\right)\Big|_{z=i\sqrt{x}} (z-i\sqrt{x})^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{z^3}{3}+zx\right)\Big|_{z=i\sqrt{x}} (z-i\sqrt{x})^3 =$$

$$= -\frac{i}{3}x^{3/2} + ix^{3/2} + \frac{1}{2}\cdot 2i\sqrt{x}(z-i\sqrt{x})^2 + \frac{1}{6}\cdot 2(z-i\sqrt{x})^3 =$$

$$= \frac{2}{3}ix^{3/2} + i\sqrt{x}(z-i\sqrt{x})^2 + \frac{1}{3}(z-i\sqrt{x})^3$$

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\operatorname{Im} z = \sqrt{x}} e^{i\frac{z^3}{3}+izx}\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} e^{-\sqrt{x}k^2 + ik^3/3}\, dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2 + i\frac{k^3}{3}} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(i\frac{k^3}{3}\right)^n dk \overset{\text{FORMAL}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} \left(\frac{ik^3}{3}\right)^n dk \overset{\nabla}{=}$$

<u>Zwischenbemerkung</u>:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} \left(\frac{ik^3}{3}\right)^n dk$ existiert $\forall n$ $\left(e^{-\sqrt{x}k^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})!\right)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} \left(\frac{ik^3}{3}\right)^{2m+1} dk = 0$, da

$$e^{-\sqrt{x}(-k)^2} \left(\frac{i(-k)^3}{3}\right)^{2m+1} = -e^{-\sqrt{x}k^2} \left(\frac{ik^3}{3}\right)^{2m+1}$$

$$\overset{\nabla}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} \left(\frac{ik^3}{3}\right)^{2n} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} (-9)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} k^{6n} dk$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} k^{6n} dk = 2\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}k^2} k^{6n} dk \overset{t=\sqrt{x}k^2}{=}$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{3n-\frac{1}{2}} dt \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{3n+1-\frac{1}{2}} = \Gamma\left(3n+\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{6n+1}{4}}$$

Insgesamt:

$$Ai(x) \overset{\text{FORMAL}}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{-\frac{1}{4}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-9)^{-n}}{(2n)!} x^{-\frac{3}{2}n} \Gamma\left(3n+\frac{1}{2}\right)$$

Da für $w := i\frac{k^3}{3}$, $\mathrm{Re}(w) = 0$ ist, gilt (2.14.):

$$\left|e^w - \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{w^m}{m!}\right| \leq \frac{|w|^{2n}}{(2n)!}$$ und wir erhalten:

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{-\frac{1}{4}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-9)^{-n}}{(2n)!} x^{-\frac{3}{2}n} \Gamma(3n+\tfrac{1}{2})$$

d.h. $$\left| Ai(x) - \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-9)^{-m}}{(2m)!} x^{-\frac{3}{2}m} \Gamma(3m+\tfrac{1}{2}) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{-\frac{1}{4}} \frac{9^{-n}}{(2n)!} x^{-\frac{3}{2}n} \Gamma(3n+\tfrac{1}{2})$$

5.10. Analog zu 5.9. kann eine asymptotische Entwicklung für $Ai(w)$, $|\arg w| < \pi - \varepsilon$, gegeben werden;
man beachte folgende Punkte:

$(w := re^{i\vartheta},\ \sqrt{w} := \sqrt{r}\, e^{i\frac{\vartheta}{2}} =: a+ib;\ w^{3/2} := (\sqrt{w})^3)$

(1) $z = i\sqrt{w}$ liegt in der oberen Halbebene.

(2) $$Ai(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(k)} e^{i\frac{z^3}{3} + izw} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}w^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{w}k^2 + i\frac{k^3}{3}} dk, \text{ wobei}$$

$\gamma(k): k \mapsto k + i\sqrt{w},\ k \gtrless 0$.

(3) Zur Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{w}k^2} k^{6n} dk$:

$g(z) := e^{-\sqrt{w}z^2} z^{6n}$ ist analytisch in ganz $\mathbb{C}$.
Anwendung des Satzes von Cauchy ergibt:

$(\tilde{\gamma}(k): k \mapsto w^{-\frac{1}{4}}k,\ k \gtrless 0)$ $\bar{\gamma}: k \mapsto k,\ k \in \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma(k)} g(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}(k)} g(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int_0^{Rs} g(R+it)\,i\,dt ,$$

wobei $s = \operatorname{tg}(\arg w^{-\frac{1}{4}}) = \dfrac{\operatorname{Im}(w^{-\frac{1}{4}})}{\operatorname{Re}(w^{-\frac{1}{4}})}$, $|s| < 1$.

Sei $b = \operatorname{Im}\sqrt{w} > 0$ (die analoge Rechnung für $\operatorname{Im}\sqrt{w} < 0$ führt auf das gleiche Resultat; für $\operatorname{Im}\sqrt{w} = 0$ cf 5.9.)

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{R\varepsilon} g(R+it)\,i\,dt\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_0^{R-\varepsilon}|g(R-it)|\,dt =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^{R-\varepsilon}\left|e^{-(a+ib)(R^2-2iRt-t^2)}\right|\cdot|R-it|^{6n}\,dt \le$$

$$\le \lim_{R\to\infty}(2R)^{6n}\int_0^{R-\varepsilon} e^{-aR^2+at^2-2bRt}\,dt \overset{at^2\le a(R-\varepsilon)^2}{\le}$$

$$\le \lim_{R\to\infty}(2R)^{6n} e^{-2aR\varepsilon+a\varepsilon^2}(R-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma(K)} g(z)\,dz = \int_{\tilde\gamma(k)} g(z)\,dz = \int_0^\infty e^{-k^2}\left(w^{-\frac14}k\right)^{6n} w^{-\frac14}\,dk =$$

$$= w^{-\frac32 n-\frac14}\int_0^\infty e^{-k^2}k^{6n}\,dk = w^{-\frac32 n-\frac14}\,\Gamma\!\left(3n+\tfrac12\right)$$

$$(4)\quad \left|Ai(w)-\frac{1}{2\pi}e^{-\frac23 w^{3/2}}\, w^{-\frac14}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-9)^{-m}}{(2m)!}\,w^{-\frac32 m}\,\Gamma\!\left(3m+\tfrac12\right)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}e^{-\frac23 w^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{w}k^2}\left(e^{i\frac{k^3}{3}}-\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(2m)!}\left(i\frac{k^3}{3}\right)^{2m}\right)dk\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left|e^{-\frac23 w^{3/2}}\right|\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-\sqrt{w}k^2}\right|\frac{9^{-n}}{(2n)!}k^{6n}\,dk\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac23 \mathrm{Re}(w^{3/2})}\,\frac{9^{-n}}{(2n)!}\left(\mathrm{Re}\sqrt{w}\right)^{-\frac{6n+1}{2}}\Gamma\!\left(3n+\tfrac12\right)$$

(An welchen Stellen wurde verwendet, dass $|\arg w| < \pi-\varepsilon$?)

5.11. <u>Lemma</u> Für $0<r\to\infty$ ist

$Ai(re^{i\vartheta})$ (i) exponentiell abfallend für $|\vartheta| < \frac{\pi-\varepsilon}{3}$

(ii) ostillierend mit abnehmender Amplitude für $|\vartheta| = \frac{\pi}{3}$

(iii) exponentiell wachsend für $\frac{\pi+\varepsilon}{3} < |\vartheta| < \pi-\varepsilon$

⌜Bew. (i) 5.10.(4) entnehmen wir, dass sowohl jede Partialsumme, wie auch der zugehörige Fehler exponentiell schnell abklingen ($Re(w^{3/2}) > 0$)

(ii) $Re(w^{3/2}) = 0$

$$\left| Ai(re^{\pm i\frac{\pi}{3}}) - \frac{1}{2\pi} \underbrace{e^{\mp i\frac{2}{3}r^{3/2}}}_{\text{oszillierend}} \underbrace{r^{-\frac{1}{4}}}_{\searrow 0} e^{\mp i\frac{\pi}{12}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-9)^{-m}}{(2m)!} \underbrace{r^{-\frac{3}{2}m}}_{\searrow 0} (\mp i)^m \Gamma(3m+\tfrac{1}{2}) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{9^{-n}}{(2n)!} \left(r^{1/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\frac{6n+1}{2}} \Gamma(3n+\tfrac{1}{2}) \searrow 0 \quad (r\to\infty)$$

(iii) $Re(w^{3/2}) < 0$. ($||A|-|B|| \leq |A-B| \leq |C| \Rightarrow |B|-|C| \leq |A|$)

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}Re(w^{3/2})} |w|^{-\frac{1}{4}} \Gamma(\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}Re(w^{3/2})} \frac{1}{18} (Re\sqrt{w})^{-\frac{7}{2}} \Gamma(3+\tfrac{1}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{e^{-\frac{2}{3}Re(w^{3/2})}}_{\nearrow\infty} \Gamma(\tfrac{1}{2}) \underbrace{\left(r^{-\frac{1}{4}} - \frac{5}{48} r^{-\frac{7}{2}} \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} \right)}_{>0 \text{ für hinreichend grosses } r} \leq |Ai(re^{i\vartheta})|$$ ⌟

5.12. <u>Lemma</u> $\quad Ai(-r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} r^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}r^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O(r^{-\frac{3}{2}})\right).$

$(r>0)$ Daraus schliessen wir, dass $Ai(-r) = 0$ für $\frac{2}{3}r^{3/2} + \frac{\pi}{4}$ nahe bei $n\pi$ für grosses n.

⌜Bew. 5.7. liefert:

$$Ai(-r) = -\omega Ai(-\omega r) - \omega^2 Ai(-\omega^2 r) =$$

$$= -\omega Ai(-\omega r) - \bar{\omega} Ai(-\bar{\omega} r) \underset{5.11.(ii)}{=} \qquad (\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{2}{3}r^{3/2}} r^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{12}} \Gamma(\tfrac{1}{2}) \left(1 + O(r^{-\frac{3}{2}})\right) +$$

$$+ e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{2}{3}r^{3/2}} r^{-\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{12}} \Gamma(\tfrac{1}{2}) \left(1 + O(r^{-\frac{3}{2}})\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{2}{3}r^{3/2}} r^{-\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O(r^{-\frac{3}{2}})\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{2}{3}r^{3/2}} r^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O(r^{-\frac{3}{2}})\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} r^{-\frac{1}{4}} \left(-i e^{i\frac{2}{3}r^{3/2}+i\frac{\pi}{4}} + i e^{-i\frac{2}{3}r^{3/2}-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(1+O(r^{-\frac{3}{2}})\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} r^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}r^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O(r^{-\frac{3}{2}})\right)$$

6. Mathematische Elemente der Quantenmechanik

Im folgenden beschäftigen wir uns mit mathematischen Konzepten der Quantenmechanik. Dabei kann auf den physikalischen Inhalt nur ansatzweise eingegangen werden. Es sei an dieser Stelle auf die Literatur –

zB "Quantenmechanik", Feynman Bd 3
dito , Landau, Lifschitz Bd 3
dito , Messiah Bd 1+2

– und auf die späteren Vorlesungen in theoretischer Physik verwiesen.

6.1. Hauptannahmen der klassischen Mechanik:

ein klassisches System wird beschrieben durch den Zustand $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$

$q \in \mathbb{R}^n$ der (verallg.) Ort
$p \in \mathbb{R}^n$ der (verallg.) Impuls

die Menge der möglichen Zustände des Systems heisst Phasenraum

Klassische Observable sind die stetigen Funktionen auf dem Phasenraum

zB. $q_i, p_i, \frac{1}{2}\sum_1^n q_i^2 \in C(\mathbb{R}^{2n})$

Für jedes System gibt es eine Funktion $H(q,p)$, die Hamilton-Funktion, die bis auf eine Konstante bestimmt ist, und es gilt:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H \qquad \text{(Hamilton'sche Bewegungsgleichungen)}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H \qquad \text{(BG)}$$

Bsp: der harmonische Oszillator

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_1^n \left(\frac{p_i^2}{m_i} + m_i \omega_i^2 q_i^2 \right) \; ; \quad \dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}, \; \dot{p}_i = -m_i \omega_i^2 q_i$$

und diese BG sind aequivalent zu $\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$

6.2. Hauptannahmen der Quantenmechanik :

Der Zustand eines Systems wird beschrieben durch eine Fkt. $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Für die messbaren Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist mit

$$P[\Omega] := \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_\Omega |\psi(q)|^2 \, dq$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert
($P[\mathbb{R}^n] = 1$!)
$P[\Omega]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das durch ψ beschriebene System eine Konfiguration in Ω hat.

Sei für das folgende $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ (Normierung)
Mit $|(\varphi, \psi)| := |\int \varphi \bar{\psi} \, dq|$ bezeichnen wir die W'keit des Uebergangs vom Zustand φ in den Zustand ψ.

Bem. $|(\varphi, \varphi)| = \|\varphi\|^2 = 1$

$|(\varphi, \psi)| = 0$ heisst, dass der Uebergang von φ in ψ fast sicher (!) unmöglich ist.

Postulat :

Physikalische Observable sind hermite'sche Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$
d.h. $A^* = A$ für eine phys. Observable.

Mit $(\psi, A\psi)$ bezeichnen wir den erwarteten Wert (≡ Erwartungswert) oder den theoretischen Mittelwert des Operators A für den Zustand ψ und wir schreiben :

$$(\psi, A\psi) =: E[A](\psi)$$

Mit $E[(A - E[A](\psi))^2](\psi) = (\psi, (A - (\psi, A\psi))^2 \psi)$ bezeichnen wir die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert (≡ Varianz) und wir schreiben : ... $=: \sigma^2(A)(\psi)$

Wir machen folgende Annahme:

zu L^2 existiert eine orthonormierte Basis aus Eigenfunktionen zum Operator A, dh.

- $A\psi_n = a_n \psi_n$, wobei $a_n \in \mathbb{R}$ (da $A = A^*$)
- $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$
- für $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\psi = \Sigma (\psi, \psi_n) \psi_n$, wobei die Reihe in $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Damit gilt:

$(\psi_n, A\psi_n) = a_n$, dh der Erwartungswert von A für den Zustand ψ_n ist a_n,

oder aequivalent dazu, mit W'keit 1 nimmt A für den Zustand ψ_n den Wert a_n an.

$$(\psi, A\psi) = (\psi, \Sigma (\psi, \psi_n) A\psi_n) = \Sigma a_n |(\psi, \psi_n)|^2 ,$$

dh. der Erwartungswert von A für den Zustand ψ setzt sich zusammen aus den Erwartungswerten von A für die Eigenfunktionen ψ_n gewichtet mit der quadrierten (!) W'keit des Uebergangs von ψ nach ψ_n:

$$\left(\text{Motivation:} \quad 1 = \|\psi\|^2 = \Sigma |(\psi, \psi_n)|^2 \right)$$

6.3. Formale Quantisierung eines klassischen Systems

Vorschrift: Ersetze in einer klassischen Observablen die Ortskoordinaten q_j durch Ortsoperatoren $q_j \cdot$

$$q_j \cdot \; : \; \psi \longmapsto q_j \psi$$

und die Impulskoord. p_j durch Impulsoperatoren $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} : \; \psi \longmapsto \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 1{,}0546 \cdot 10^{-34}\, Js \right)$$

Bem. Es wird noch zu präzisieren sein, wie man einen Differentialoperator und - was aequivalent dazu ist - die Fouriertransformation auf L^2 definiert.

6.4. Zusammenhang zwischen Ort und Impuls

Wir benötigen folgende Tatsache:

$$(\varphi, \psi) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \qquad \forall \varphi, \psi \in L^2(\Omega)$$

Dies ist eine direkte Konsequenz der Beziehung von Plancherel: $\|\varphi\|_2 = \|\hat{\varphi}\|_2$ und der Polarisierungsidentität (vgl Serie 5 Aufgabe 4)

Für den Erwartungswert von $p := \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ im Zustand ψ gilt:

$$E[p](\psi) = \left(\psi, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\psi\right) = \left(\hat{\psi}, \widehat{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\psi}\right) =$$

$$= \hbar\,(\hat{\psi}, k\hat{\psi})$$

Dies macht plausibel, dass der Impulsoperator ein Ortsoperator im Impulsraum ist, wobei die Fouriertransformation den Uebergang vom Orts- in den Impulsraum liefert.

Nun können wir auch die Heisenberg'sche Unschärfenrelation besser verstehen (Serie 2, Aufgabe 2b):

Wir hatten $\|x\varphi\|_2^2 \cdot \|k\hat{\varphi}\|_2^2 \geq \frac{1}{4}\|\varphi\|_2^2$.

Im physikalischen Kontext ist $\|\varphi\|_2^2 = 1$ (Normierung)

Wenn wir annehmen, dass $E[x](\varphi) = E[p](\varphi) = 0$ (x der Ortsoperator), so erhalten wir

$$E[x^2](\varphi) \cdot E[p^2](\varphi) = (\varphi, x^2\varphi)\cdot(\hat{\varphi}, (\hbar k)^2\hat{\varphi}) =$$

$$= \|x\varphi\|_2^2 \cdot \hbar^2\|k\hat{\varphi}\|_2^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \text{(vgl Def der Varianz, 6.2.)}$$

dh. Ort und Impuls eines Zustandes können nicht gleichzeitig beliebig genau gemessen werden.

6.5. Ueber den harmonischen Oszillator

Die Hamiltonfunktion des klassischen harmonischen Oszillators (1-dim) lautet

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2\right)$$

Mit der formalen Quantisierungsregel 6.3. erhalten wir den Energieoperator $\mathcal{H}$ für den harmonischen Oszillator :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq}\right)^2 + m\omega^2 q^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{m}\hbar^2\frac{d^2}{dq^2} + m\omega^2 q^2\right)$$

Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem :

$$\mathcal{H}\psi = E\psi \qquad (*)$$

Falls ein Paar (E,ψ) ; $E \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ diese Gleichung löst, so sagen wir :
E ist Eigenwert (Spektralwert) von $\mathcal{H}$, ψ ist Eigenfunktion (Eigenzustand) von $\mathcal{H}$.

Mit der Substitution $x := \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} q$, $\frac{d}{dx} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\frac{d}{dq}$

geht (*) über in :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi = \frac{E}{\hbar\omega}\psi$$ und diese Glchg ist aequivalent mit

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1\right)\psi = \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\psi \qquad (**)$$

6.6. Definition Wir führen folgende Operatoren auf $\mathcal{S}$ ein:

$A := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right)$, der <u>Vernichtungsoperator</u> (auch <u>Absteigeoperator</u>)

$A^* := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right)$, der <u>Erzeugungsoperator</u> (auch <u>Aufsteigeoperator</u>)

$H := A^*A = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \mathbb{1}\right)$, der <u>Hamiltonoperator</u>

6.7. Definition

$$h_0(x) := \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$h_n(x) := \frac{(A^*)^n}{\sqrt{n!}} h_0(x) = \frac{A^*}{\sqrt{n}} h_{n-1}(x),$$

die <u>hermite'schen Funktionen</u>

Bem (1) $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(2) die <u>Hermite-Polynome</u> H_n sind definiert durch $H_n(x) := 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}\, \pi^{\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{2}} h_n(x)$

6.8. Satz

(1) Der <u>Kommutator</u> von A und A^*:

$$[A, A^*] := AA^* - A^*A = \mathbb{1}$$

(2) $[A, (A^*)^n] = n(A^*)^{n-1}$

(3) $A^* h_n = \sqrt{n+1}\, h_{n+1}$; $A h_n = \sqrt{n}\, h_{n-1}$ $(n \geq 1)$; $A h_0 = 0$

(4) $H h_n = n h_n$

(5) $(h_m, h_n) = \delta_{mn}$

Ausführungen !

zu (1) : $[A,B]$ ist ein Maß für die Vertauschbarkeit von zwei Operatoren :

$$[A,B] = 0 \quad \text{gdw} \quad A(B\varphi) = B(A\varphi) \quad \forall\varphi$$

zu (3) : dies motiviert im Nachhinein die Benennung von A, A^* in Def 6.6.

zu (4) : Damit haben wir Lösungen des Eigenwertproblems gefunden !

Bew $\ulcorner$ (1) $\quad AA^* - A^*A = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(-\frac{d}{dx}+x\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d}{dx}+x\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + \mathbb{1} - x\frac{d}{dx} + x^2\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - \mathbb{1} + x\frac{d}{dx} + x^2\right) = \mathbb{1}$$

(2) mit Induktion ; $n=1$ siehe (1) .

$$[A, (A^*)^n] = A(A^*)^n - (A^*)^n A =$$
$$= A^*\left(A(A^*)^{n-1} - (A^*)^{n-1}A\right) + \left(AA^* - A^*A\right)(A^*)^{n-1} =$$
$$= A^*[A,(A^*)^{n-1}] + [A,A^*](A^*)^{n-1} \underset{(\text{Ind.vor.})}{=}$$
$$= (n-1)(A^*)^{n-1} + (A^*)^{n-1} =$$
$$= n(A^*)^{n-1}$$

(3) $\quad A^*h_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^*)^{n+1}h_0 = \sqrt{n+1}\,h_{n+1}$; $\quad Ah_0 = 0$: klar!

$$Ah_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}A(A^*)^n h_0 \overset{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(n(A^*)^{n-1} + (A^*)^n A\right)h_0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \cdot \sqrt{n}\,(A^*)^{n-1}h_0 = \sqrt{n}\,h_{n-1}$$

(4) $\quad Hh_n = A^*Ah_n = A^*\sqrt{n}\,h_{n-1} = n h_n$

(5) · $n \neq m$: $n(h_n, h_m) = (n h_n, h_m) = (H h_n, h_m) =$

$= (h_n, H h_m) = m(h_n, h_m)$

$\Rightarrow (n-m)(h_n, h_m) = 0 \Rightarrow (h_n, h_m) = 0$

· $(h_n, h_n) = 1$ mit Induktion. $(h_0, h_0) = 1$: klar.

$$(h_n, h_n) = \frac{1}{n!}\left((A^*)^n h_0, (A^*)^n h_0\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left([A, (A^*)^n] h_0, (A^*)^{n-1} h_0\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} n \left((A^*)^{n-1} h_0, (A^*)^{n-1} h_0\right) =$$

$$= (h_{n-1}, h_{n-1})$$ ⌟

6.9. Satz Die hermite'schen Fktn h_n bilden eine orthonormale Basis für $L^2(\mathbb{R})$, dh $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ ist

$\varphi = \sum_{n \geq 0} (\varphi, h_n) h_n$, wobei die Reihe in $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ konvergiert.

Bew. ⌜ Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $(\varphi, h_n) = 0$ $\forall n \geq 0$.

$0 = (\varphi, (A + A^*)^n h_0) = (\varphi, x^n h_0)$, denn $(A + A^*)^n h_0$ ist eine (endl) Linearkombination von h_n's.

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n \geq 0} \frac{(ik)^n}{n!} (\varphi, x^n h_0)$$

Es gilt: $\left|\sum \frac{(ikx)^n}{n!}\right| \leq \sum \frac{(|k||x|)^n}{n!} \leq e^{|k| \cdot |x|}$

$e^{|k| \cdot |x|} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in L^1$, also sind die Bedingungen für Lebesgue's Konvergenzsatz erfüllt :

$$0 = \sum_{n\geq 0} \left(\varphi, \frac{(ikx)^n}{n!} h_0\right) = \left(\varphi, \sum_{n\geq 0} \frac{(ikx)^n}{n!} h_0\right) =$$

$$= \left(\varphi, e^{ikx} h_0\right) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{\varphi h_0} \Rightarrow \varphi h_0 = 0 \Rightarrow$$

$\varphi = 0$ L^2-fü, da h_0 keine Nullstellen besitzt.

($\widehat{\varphi h_0}$ ist wohldefiniert, denn

$\int_{\mathbb{R}} |\varphi|\, h_0 \leq \|\varphi\|_2 \cdot \|h_0\|_2 < \infty$ nach Voraussetzung, also ist $\varphi h_0 \in L^1$)

Für die L^2-Konvergenz der Reihe beachte Serie 5 Aufgaben 1–3. ┘

6.10. <u>Korollar</u> Die hermite'schen Fktn h_n sind alle Eigenzustände von H.

6.11. <u>Korollar</u> Die Energieniveaus des Operators

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \text{ sind } E_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

und die Eigenzustände sind

$$\varphi_n(q) = h_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, q\right) \qquad (\text{vgl } 6.5.)$$

6.12. <u>Satz</u> Die hermite'schen Fktn bilden ein vollständiges orthonormiertes System in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} (\varphi, h_n) h_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi \quad (N\to\infty) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Bew. ┌ Für den ersten Teil lässt sich der Beweis von 6.9. fast unverändert übernehmen:

wähle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ statt $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Es folgt statt $\varphi = 0$ L^2-fü : $\varphi \equiv 0$

Für den zweiten Teil vgl Serie 6 Aufgaben 2–4. ┘

6.13. Lemma Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

(i) $\widehat{A\varphi} = iA\hat{\varphi}$

(ii) $\widehat{A^*\varphi} = -iA^*\hat{\varphi}$

(iii) $\widehat{H\varphi} = H\hat{\varphi}$, dh $[H, \hat{\ }] = 0$

Bew ⌈ (i) $\widehat{A\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\left(\frac{d}{dx}+x\right)\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ik-D)\hat{\varphi} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(ik + i\frac{d}{dk}\right)\hat{\varphi} = iA\hat{\varphi}$$

(ii) $\widehat{A^*\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ik-D)\hat{\varphi} = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(k-\frac{d}{dk}\right)\varphi = -iA^*\hat{\varphi}$

(iii) $\widehat{H\varphi} = \widehat{A^*A\varphi} = -iA^*\widehat{A\varphi} = A^*A\hat{\varphi} = H\hat{\varphi}$ ⌋

6.14. Satz

(1) $\widehat{h_n} = (-i)^n h_n$, dh die Eigenwerte von $\hat{\ }$ sind $\pm 1, \pm i$

(2) $\hat{\varphi} = \sum_{n\geq 0}(-i)^n(\varphi, h_n)h_n$

Bew ⌈ (1) $\widehat{h_n} = \frac{\widehat{(A^*)^n h_0}}{\sqrt{n!}} = \frac{(-i)^n (A^*)^n h_0}{\sqrt{n!}} = (-i)^n h_n$

(2) sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;

da $\sum_{n\geq 0}(\varphi, h_n)h_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi$ und da $\hat{\ }$ stetig ist (Serie 2, Aufgabe 1b), folgt:

$$\sum_{n\geq 0}(\varphi, h_n)\widehat{h_n} = \sum_{n\geq 0}(-i)^n(\varphi, h_n)h_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \hat{\varphi}$$ ⌋

Da $\overline{(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)} = (L^2, \|\cdot\|_2)$ gilt, können wir die Fouriertransformation auch auf $L^2(\mathbb{R})$ definieren:

Wir zerlegen $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ in die Basis aus Eigenfktn bezüglich $\hat{\ }$: $\{h_n\}_{n\geq 0}$, und transformieren jeden Summanden der Reihe einzeln

6.15. Damit haben wir die <u>Spektralzerlegung</u> für die Fouriertrafo und für den Hamiltonoperator berechnet.
Diese Konstruktion lässt sich für jeden hermite'schen Operator A durchführen: Man bestimme alle Eigenwerte λ_n (das <u>Spektrum</u>) und die entsprechenden Eigenfktn g_n

Dann gilt: Für <u>diskretes</u> Spektrum, dh. falls das Spektrum keinen endlichen Häufungspt hat, ist

$$A\varphi = \sum_{n\geq 0} \lambda_n (\varphi, g_n)\, g_n$$

6.16. Für den mehrdimensionalen Fall machen wir folgende
<u>Definition</u>

$$A_j := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_j + x_j)$$

$$A_j^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial_j + x_j)$$

$$H := \sum_{j=1}^{n} A_j^* A_j = \frac{1}{2}\sum(-\partial_j^2 + x^2 - \mathbb{1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(-\Delta + |x|^2 - n)$$

6.17. <u>Definition</u>

$$h_0(x) := \pi^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

$$h_\alpha(x) := \frac{(A^*)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} h_0(x) := \frac{(A_1^*)^{\alpha_1}\cdot(A_2^*)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(A_n^*)^{\alpha_n}}{\sqrt{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!}} h_0(x)$$

$$(\alpha \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n)$$

6.18. <u>Satz</u>

(1) $[A_i, A_j] = 0$; $[A_i^*, A_j^*] = 0$; $[A_i, A_j^*] = \delta_{ij}$

(2) $[A_i, (A_j^*)^m] = m (A_j^*)^{m-1} \delta_{ij}$

(3) $A_j^* h_\alpha = \sqrt{\alpha_j + 1}\, h_{\alpha + e_j} \quad (e_{jk} = \delta_{jk})$

$$A_j h_\alpha = \begin{cases} \sqrt{\alpha_j}\, h_{\alpha - e_j} & \text{falls } \alpha_j \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha_j = 0 \end{cases}$$

(4) $H h_\alpha = |\alpha| h_\alpha$

(5) $(h_\alpha, h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$

(Beweis als Uebung)

6.19. <u>Satz</u> Die hermite'schen Funktionen h_α bilden eine orthonormale Basis für $L^2(\mathbb{R}^n)$

(Für den Bew cf. Serie 6 Aufgabe 1)

6.20. <u>Satz</u> Die hermite'schen Funktionen h_α bilden ein vollständiges orthonormiertes System in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{N} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi \quad (N \to \infty)$$

Bew $\ulcorner$ Für den ersten Teil der Behauptung verwende 6.12. und 6.20.

Zum zweiten Teil :

(1) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $(\varphi, h_\alpha) = O(|\alpha|^{-p})$ $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha|^p \, |(\varphi, h_\alpha)| \overset{6.18.}{=} |(\varphi, H^p h_\alpha)| = |(H^p \varphi, h_\alpha)|$$

$$\underset{\text{Bessel}}{\leq} \|H^p \varphi\|_2 < \infty \text{, da } H^p \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

(2) $\sup |h_\alpha(x)| \leq \varepsilon |\alpha|$:

$$|h_\alpha(x)| = |\widehat{h_\alpha}(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |h_\alpha(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left\| \frac{1}{1+|x|^2} \right\|_2 \cdot \| (1+|x|^2) h_\alpha \|_2 \leq$$

$$\leq \gamma \left(1 + \delta \sum_{j=1}^{n} \| (A_j + A_j^*)^2 h_\alpha \| \right) \leq$$

$$\leq \gamma \left(1 + \delta \sum_{j=1}^{n} \left(\|A_j^2 h_\alpha\| + \|A_j A_j^* h_\alpha\| + \|A_j^* A_j h_\alpha\| + \|(A_j^*)^2 h_\alpha\| \right)\right),$$

$$= \gamma \left(1 + \delta \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{\alpha_j(\alpha_j - 1)} + \alpha_j + 1 + \alpha_j + \sqrt{(\alpha_j+1)(\alpha_j+2)} \right)\right),$$

$$\leq \ldots \leq \varepsilon |\alpha|$$

(3) $$\sum_{|\alpha| = m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \leq c\,(2m)^n$$

(4) $$\left| \sum_{|\alpha| \geq m} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \geq m} |(\varphi, h_\alpha)| \cdot \sup |h_\alpha(x)| \leq$$

$$\leq c \sum_{|\alpha| \geq m} |\alpha|^{1-p} \overset{(3)}{\leq} d \sum_{k=m}^{\infty} k^{1-p} \cdot (2k)^n =$$

$$= e \sum_{k=m}^{\infty} k^{n+1-p} \longrightarrow 0 \ (m \to \infty) \qquad (p \overset{!}{>} n+2)$$

Zusammen mit der Vollständigkeit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzgl $\| \ \|_{0,0}$ folgt: $\sum_{|\alpha|=0}^{N} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha \xrightarrow{\text{glm}} \varphi \ (N \to \infty)$

(5) Für den Nachweis der $\mathcal{S}$-Konvergenz verwende:

$$\partial_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_j - A_j^*)$$

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_j + A_j^*)$$

Aufgrund der glm Konvergenz gilt:

$$(A_j \pm A_j^*) \sum_{|\alpha| \geq 0} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 0} (\varphi, h_\alpha)(A_j \pm A_j^*) h_\alpha =$$

$$= \sum_{|\alpha| \geq 0} (\varphi, (A_j^* \pm A_j) h_\alpha) h_\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 0} ((A_j \pm A_j^*) \varphi, h_\alpha) h_\alpha$$

Also ist $x^\gamma \partial^\beta \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} (x^\gamma \partial^\beta \varphi, h_\alpha) h_\alpha$

Aus $x^\gamma \partial^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\sum\limits_{|\alpha|=0}^{N} (x^\gamma \partial^\beta \varphi, h_\alpha) h_\alpha \xrightarrow[(N \to \infty)]{\text{glm}} x^\gamma \partial^\beta \varphi$

folgt $x^\gamma \partial^\beta \sum\limits_{|\alpha|=0}^{N} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|_{0,0}} x^\gamma \partial^\beta \varphi \quad (N \to \infty)$

und dies gilt $\forall \gamma, \beta$.

Das bedeutet aber die $\mathcal{S}$-Konvergenz (vgl Serie 2, Aufgabe 1)

6.21. <u>Lemma</u> Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(i) $\widehat{A_j \varphi} = i A_j \hat{\varphi}$

(ii) $\widehat{A_j^* \varphi} = -i A_j^* \hat{\varphi}$

(iii) $\widehat{H\varphi} = H \hat{\varphi}$

6.22. <u>Satz</u>

(1) $\widehat{h_\alpha} = (-i)^{|\alpha|} h_\alpha$

(2) $\hat{\varphi} = \sum (-i)^{|\alpha|} (\varphi, h_\alpha) h_\alpha$

(vgl dazu 6.13. und 6.14.)

III. Eigenwertprobleme

1. Das Wasserstoffatom

1.1. Sei Ze die Ladung des Atomkernes und M seine Masse; e die Ladung des Elektrons, m die Masse des Elektrons; r der Abstand zwischen Atomkern und Elektron.
Dann wird dieses System klassisch beschrieben durch die Hamiltonfkt $H = \frac{1}{2\mu} p^2 - \frac{Ze^2}{r}$ $\quad \left(\mu = \frac{mM}{m+M}\right)$

Mit der Quantisierungsregel II.6.3. erhalten wir den Energieoperator : $\mathcal{H} := -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_q - \frac{Ze^2}{r(q)}$

und das Eigenwertproblem:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_q + \frac{Ze^2}{r(q)} + E\right)\varphi = 0 \qquad (\divideontimes)$$

Mit $\varepsilon := \frac{\hbar^2}{e^4\mu} E$; $x_j := \frac{e^2\mu}{\hbar^2} q_j$, $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\hbar^2}{e^2\mu}$

geht $(\divideontimes)$ über in

$$(*) \qquad \left(\frac{1}{2}\Delta_x + \frac{Z}{r(x)} + \varepsilon\right)\varphi = 0$$

Um dieses Eigenwertproblem zu lösen, gehen wir folgendermassen vor:

Zuerst definieren und studieren wir eine Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$. Mithilfe von Φ gelingt es uns, die Differentialgleichung $(*)$ nach $\mathbb{C}^2$ "hinaufzuheben". Wir erhalten die Gleichung von zwei ungekoppelten harmonischen Oszillatoren und lösen diese mit den Methoden aus Abschnitt II.6.

Aufgrund der Eigenschaften der Abbildung Φ können wir aus den Lösungen diejenigen aussondern, denen Lösungen des Eigenwertproblems in $\mathbb{R}^3$ entsprechen.

1.2. <u>Definition</u>

<u>Pauli-Matrizen</u> :

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bem. (1) $\sigma_j^* = \sigma_j$

(2) $\{\sigma_j\ ,\ j = 0,1,2,3\}$ ist eine Basis für den Raum der komplexen 2×2-Matrizen $M(2,\mathbb{C})$.

1.3. <u>Definition</u>

$$\Phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x_j := (z, \sigma_j z)\ , \quad \text{wobei } (z,w) := z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2$$
$$(j = 1,2,3)$$

Bem. (1) $x_j \in \mathbb{R}$: $\bar{x}_j = \overline{(z, \sigma_j z)} = (\sigma_j z, z) = (z, \sigma_j z) = x_j$

(2) Mit $z = (z_1, z_2) = (r_1 e^{i\vartheta_1}, r_2 e^{i\vartheta_2})$ können wir auch schreiben :

$$\Phi(z) = (2r_1r_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\ ,\ 2r_1r_2\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\ ,\ r_1^2 - r_2^2)$$

(3) $r^2 = \sum x_i^2 = (r_1^2 + r_2^2)^2 = (z,z)^2 = |z|^4$

$r = |z|^2$.

Betrachte $\{z \in \mathbb{C}^2 \mid (z,z) \equiv |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \equiv S^3$

Obige Bemerkung liefert :

$\Phi : S^3 \to S^2$, die sogenannte <u>Hopf-Abbildung</u>

1.4. Lemma

(1) Φ ist surjektiv

(2) $\Phi(z) = \Phi(z')$ gdw $z' = \vartheta z$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$,

wobei $\vartheta \cdot z := (e^{i\vartheta} z_1, e^{i\vartheta} z_2)$

(3) Folgerung:

Für $x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0$ ist $\Phi^{-1}(x) := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \Phi(z) = x\}$ ein Kreis.

Bew $\ulcorner$ (1), sowie (2) $\Leftarrow$: klar.

(2) $\Rightarrow$: sei $x = \Phi(z) = \Phi(z')$

$$\Rightarrow (z, \sigma_j z) = (z', \sigma_j z')$$

$$\left((z, \sigma_0 z) = (z, z) = \sum x_j^2 = (z', z') = (z', \sigma_0 z') \right)$$

$$\Rightarrow \left(z, \sum_{j=0}^{3} \bar{c}_j \sigma_j z\right) = \sum_{j=0}^{3} c_j (z, \sigma_j z) = \sum_{j=0}^{3} c_j (z', \sigma_j z') = \left(z', \sum_{j=0}^{3} \bar{c}_j \sigma_j z'\right)$$

Mit Bem 7.2. (2) gilt also für eine beliebige Matrix A:

$$(z, Az) = (z', Az').$$

Wir wählen $A := P_z$, die Matrix der orth. Projektion auf $L := \{\alpha z \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ und erhalten

$$(z', Pz') = (z, Pz) = (z, z) = (z', z')$$

da für Projektion $P^* = P$ und $P^2 = P$ gilt, folgt:

$$0 = (z', (P_z - \mathbb{1})z') = (z', (P_z - \mathbb{1})^2 z') = ((P_z - \mathbb{1})z', (P_z - \mathbb{1})z')$$

$$\Rightarrow (P_z - \mathbb{1})z' = 0 \Rightarrow P_z z' = z' \Rightarrow z' = \alpha z$$

schliesslich:

$$(z, z) = (z', z') = (\alpha z, \alpha z) = |\alpha|^2 (z, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha| = 1, \text{ also } \alpha = e^{i\vartheta}.$$

1.5. <u>Definition</u> Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$.

(1) $\Phi_* f(z_1, z_2) := f \circ \Phi(z_1, z_2)$

(2) $\partial_i := \frac{\partial}{\partial z_i}$; $\bar\partial_i := \frac{\partial}{\partial \bar z_i}$ $(i = 1, 2)$

Die Beweise der folgenden Aussagen waren Inhalt der Serie 7 und werden deshalb nicht ausgeführt.

1.6. <u>Satz</u>

(1) $\frac{1}{(z, z)} (\partial_1 \bar\partial_1 + \partial_2 \bar\partial_2) \Phi_* f = \Phi_* \Delta f$

(falls die Ableitgen existieren)

(2) f ist Lösung von

$(*)$ $\left(\frac{1}{2}\Delta + \frac{z}{r} + \varepsilon\right) f = 0$

oder $\psi = \Phi_* f$ Lösung von

$(**)$ $\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}} \left(\sum_{j=1,2} (A_j^* A_j + B_j^* B_j) + 2 \right) \psi = z\psi$ ist,

wobei $A_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda^{-1} \bar\partial_j + \lambda z_j)$

$A_j^* := \frac{1}{\sqrt{2}} (-\lambda^{-1} \partial_j + \lambda \bar z_j)$

$B_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda^{-1} \partial_j + \lambda \bar z_j)$

$B_j^* := \frac{1}{\sqrt{2}} (-\lambda^{-1} \bar\partial_j + \lambda z_j)$,

und $\lambda^2 := \sqrt{-2\varepsilon}$

(3) $[A_\alpha, A_\beta] = [B_\alpha, B_\beta] = [A_\alpha^*, A_\beta^*] = [B_\alpha^*, B_\beta^*] = 0$

$[A_\alpha, B_\beta] = [A_\alpha, B_\beta^*] = [A_\alpha^*, B_\beta] = [A_\alpha^*, B_\beta^*] = 0$

$[A_\alpha, A_\beta^*] = [B_\alpha, B_\beta^*] = \delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$

(4) Setze:

$$\psi_0(z) := \frac{2\sqrt{-2\varepsilon}}{\pi} e^{-\sqrt{-2\varepsilon}\,(z,z)}$$

$$\psi_{k,\ell}(z) := \frac{1}{\sqrt{k!\ell!}} (A^*)^k (B^*)^\ell \psi_0 \qquad (k,\ell \in (\mathbb{Z}^+)^2)$$

Es gilt:

(i) $A_j \psi_0 = B_j \psi_0 = 0$

(ii) $\left(\Sigma (A_j^* A_j + B_j^* B_j) + 2\right) \psi_{k,\ell} = (|k| + |\ell| + 2)\psi_{k,\ell}$

$$= \sqrt{\frac{-2Z^2}{\varepsilon_{k,\ell}}}\,\psi_{k,\ell}$$

d.h. $\psi_{k,\ell}$ löst $(**)$

(5) $\vartheta_* \psi_{k,\ell} = e^{i\vartheta(|\ell| - |k|)} \psi_{k,\ell}$, wobei

$$\vartheta_* \psi(z) := \psi(\vartheta \cdot z) = \psi(e^{i\vartheta} z_1, e^{i\vartheta} z_2)$$

(6) $\psi = \Phi_* f$ gdw $\vartheta_* \psi = \psi \;\; \forall \vartheta \in \mathbb{R}$, d.h.

genau zu den Fktn ψ, die auf Kreisen konstant sind, ex $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ mit $\psi = \Phi_* f$.

(7) Aus (5) und (6) folgt:
zu $\psi_{k,\ell}$ existiert eine Lösung $f_{k,\ell}$ des Eigenwertproblems $(*)$, $f_{k,\ell} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ gdw $|k| = |\ell|$

(8) Aus (4) und (7) folgt:

$$\varepsilon_{n,n} =: \varepsilon_n = -\frac{Z^2}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{und daraus}$$

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \, ;$$

dem Eigenwert E_n entsprechen $(n+1)^2$ Eigenfunktionen $f_{k,\ell}$ mit $\Phi_* f_{k,\ell} = \psi_{k,\ell}$ wobei $|k| = |\ell| = n$

2. Bewegung eines Elektrons in einem konstanten Elektrischen Feld (eindimensional)

2.1. $F = e \cdot E$ (konst)

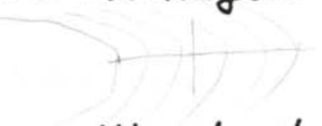
$V(q) = -eEq$ wobei $q \in (-\infty, \infty)$

$\frac{m}{2}\dot{q}^2 = E - V(q)$

$\dot{q} = \sqrt{(E - V(q))\frac{2}{m}}$ $\sim \sqrt{c-q}$

$p = \sqrt{E - V(q) \cdot 2m}$

(Ueberlege, wie die klassischen Lösungen aussehen; Phasenportrait!)



Dann lautet die klassische Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

Mit der Quantisierungsregel II.6.3. erhalten wir den Energieoperator:

$$\mathcal{H} := -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} - Fq$$

und das Eigenwertproblem

$$(*) \quad \mathcal{H}\psi = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + Fq\right)\psi = E\psi$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2mF}\frac{d^2}{dq^2} + \left(q + \frac{E}{F}\right)\right)\psi = 0$$

Mit der Substitution

$$x := \left(q + \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}, \quad \frac{d}{dq} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}$$

geht (*) über in die Differentialgleichung

$$(**) \quad \psi'' + x\psi = 0$$

2.2. Dem Abschnitt II.5 entnehmen wir die allg. Lösung:

$$\psi(x) = c_1 Ai(-x) + c_2 Ai(-\omega x) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{3}\right)$$

$\Big($ $\psi(x) = c_1 Ai(x) + c_2 Ai(\omega x)$ ist die allg. Lösung von

$\varphi'' - x\varphi = 0$ $\Big)$

Um zu zeigen, dass im physikalischen Zusammenhang $c_2 = 0$ gilt, beachte folgendes:

$$Ai(-x) \sim \begin{cases} \pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \to \infty), \text{ also} \\ \qquad \text{oszillierend mit abnehmender Amplitude} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}\, x^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad (x \to -\infty), \text{ also exponentiell} \\ \qquad \text{schnell gegen Null} \end{cases}$$

$$Ai(-wx) \begin{cases} \text{oszillierend mit abnehmender Amplitude} \\ \qquad (x \to \infty) \\ \text{exponentiell wachsend} \quad (x \to -\infty) \end{cases}$$

Das Verhalten von $Ai(-wx)$ für $x \to -\infty$ schliesst $Ai(-wx)$ als physikalische Lösung aus:

Mit zunehmender Wahrscheinlichkeit wäre das Elektron beliebig "weit draussen" $(x \to -\infty)$ anzutreffen, hätte also beliebig grosse Energie $(V(x) \to \infty,\ x \to -\infty)$; dies ist aber nicht möglich.

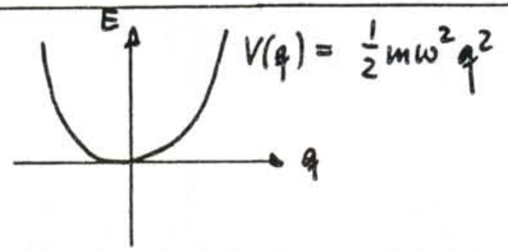
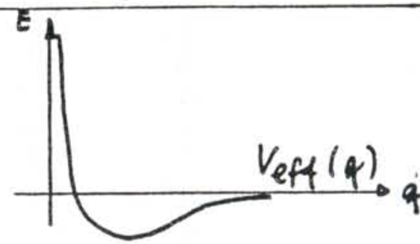
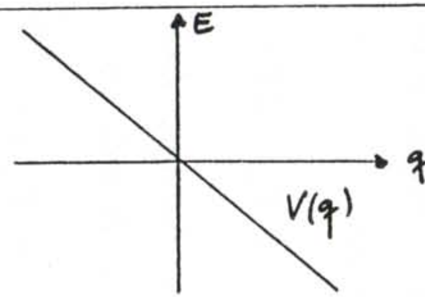
2.3. Bemerkung

Das Eigenwertproblem $(*)$ hat also (nach 2.2.) für beliebige Energie E die Lösung

$$\psi(q, E) = c\, Ai\left(-\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(q + \frac{E}{F}\right)\right)$$

Insbesondere ist das Spektrum (= die Menge der Eigenwerte) kontinuierlich (stetig), dh. ohne isolierte Punkte, nämlich $= \mathbb{R}$!

2.7. Zusammenstellung der bisher gelösten Eigenwertprobleme :

	Potential :	klassisch :	quantenmechanisch :
harmonischer Oszillator		alle Bahnen sind beschränkt	diskretes Spektrum bestehend aus $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \quad (n \geq 0)$
Wasserstoffatom (Zweikörperproblem)		für negative Energie beschränkte Bahnen	diskretes Spektrum bestehend aus $E_n = \frac{-Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \quad (n \geq 0)$
		für positive Energie halbbeschränkte Bahnen	kontinuierliches Spektrum (ohne Bew)
eindim. konstantes Elektr. Feld		alle Bahnen sind halbbeschränkt	kontinuierliches Spektrum $(= \mathbb{R}\,!)$

Beachte die Analogie zwischen Bahntypen und Spektren !

3. Homogene, sphärische, harmonische und Legendre'sche Polynome

3.1. Lemma $\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S$,

wobei Δ_S der sphärische Laplace-Operator auf $C^2(S_1(0))$ ist

(Für den Bew vgl Serie 8 Aufgabe 4)

3.2. Wir untersuchen im folgenden das Eigenwertproblem: $\Delta_S \varphi = a\varphi$, wo $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{C}$.

Dabei beschränken wir uns zuerst auf $n=3$, später wird der allgemeine Fall (weniger ausführlich) behandelt (→ Serie 8!)

3.3. Definition

$\mathcal{P}_k := \{ \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \mid c_\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \}$,

die Menge der homogenen Polynome vom Grade k.

$\mathcal{H}_k := \{ Y \in \mathcal{P}_k \mid \Delta Y = 0 \}$,

die Menge der harmonischen homogenen Polynome vom Grade k

Bem.: $Y \in \mathcal{P}_k \Rightarrow Y(rx) = r^k Y(x),\ \forall r \in \mathbb{R}$

$\tilde{\mathcal{P}}_k := \{ \tilde{Y} \mid \text{ex } Y \in \mathcal{P}_k \text{ mit } Y|_{S^{n-1}} = \tilde{Y} \}$,

die Einschränkung von $\mathcal{P}_k$ auf S^{n-1}, die Menge der sphärischen Polynome

$\tilde{\mathcal{H}}_k := \{ \tilde{Y} \mid \text{ex } Y \in \mathcal{H}_k \text{ mit } Y|_{S^{n-1}} = \tilde{Y} \}$,

die Menge der harmonischen sphärischen Pol.

3.4. <u>Lemma</u>

Sei $R \in O(n,\mathbb{R}) := \{ R = (R_{ij}) \mid R_{ij} \in \mathbb{R},\ R^T = R^{-1} \}$,

$$R\varphi(x) := \varphi(Rx)$$

Dann ist $[\Delta, R] = 0$

Bew $\ulcorner$ $\widehat{\Delta R\varphi}(k) = -|k|^2 \widehat{R\varphi}(k) = -|k|^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(Rx) e^{-ikx} dx =$

$$= -|k|^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(Rk)x} dx =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (Rk, Rk) e^{-i(Rk)x} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \Delta e^{-i(Rk)x} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\varphi)(x)\, e^{-i(Rk)x} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\varphi)(Rx)\, e^{-ikx} dx = \widehat{R\Delta\varphi}(k)$$

und dies gilt $\forall \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ Beh. $\lrcorner$

Sei im folgenden $n = 3$.

3.5. Für $n = 3$ ist $\Delta_s = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

Für die Def. der Kugelkoordinaten vgl II.4.1.

3.6. <u>Beispiel</u> $h_k(x) := (ix_1 + x_3)^k \in \mathcal{H}_k$.

$h_k(r,\varphi,\vartheta) = r^k (i\cos\varphi \sin\vartheta + \cos\vartheta)^k =: r^k \tilde{h}_k$

Es ist

$$0 = \Delta h_k = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_s \right) r^k \tilde{h}_k =$$

$$= k(k-1) r^{k-2} \tilde{h}_k + 2k r^{k-2} \tilde{h}_k + r^{k-2} \Delta_s \tilde{h}_k$$

$\Rightarrow \quad \Delta_s \tilde{h}_k = -k(k+1)\,\tilde{h}_k$, wir haben mit $\tilde{h}_k$ also eine Eigenfunktion zum Eigenwert $-k(k+1)$ gefunden; dies gilt natürlich $\forall \tilde{h}_k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$.

3.7. <u>Definition</u>

$$K(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3,\mathbb{R}) \qquad (0 \le \alpha \le 2\pi)$$

$$K_\alpha \varphi(x) := \varphi(K(\alpha)x)$$

$$z^k(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\alpha h_k(x)\,d\alpha$$

3.8. (1) aus 3.4. und 3.6. folgt : $\Delta K_\alpha h_k = 0$

(2) $\Delta z^k = 0$, und $\Delta_s z^k = -k(k+1)z^k$

(3) $z^k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\alpha h_k(x)\,d\alpha =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(i(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha) + x_3\right)^k d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(i(r\cos\varphi\sin\vartheta\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\vartheta\sin\alpha) + r\cos\vartheta\right)^k d\alpha$$

$$= r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(i\sin\vartheta\,(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) + \cos\vartheta\right)^k d\alpha$$

$$= r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(i\sin\vartheta\cos(\varphi+\alpha) + \cos\vartheta\right)^k d\alpha =$$

$$= r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(i\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta\right)^k d\alpha ,$$

also ist z^k unabhängig von φ und somit konstant auf jedem Breitenkreis.

(4) $z^k(x) = r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}(i\sin\vartheta\cos\alpha)^\ell(\cos\vartheta)^{k-\ell}\,d\alpha$

$$= r^k \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}(i\sin\vartheta)^\ell(\cos\vartheta)^{k-\ell}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\alpha)^\ell\,d\alpha \stackrel{\nabla}{=}$$

$$\left(\int_0^{2\pi} (\cos\alpha)^{2m+1} d\alpha = 0 \; ; \; \int_0^{2\pi} (\cos\alpha)^{2m} d\alpha = 2\pi \cdot \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right)$$

$$\overset{\nabla}{=} r^k \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k}{2m} (-1)^{2m} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} (1-\cos^2\vartheta)^m (\cos\vartheta)^{k-2m}$$

$$=: r^k P_k(\cos\vartheta)$$

P_k heisst <u>k-tes Legendre-Polynom</u>

Bem. $P_k(\cos\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i \sin\vartheta \cos\alpha + \cos\vartheta)^k d\alpha$

3.9. <u>Satz</u> $\sum_{k\geq 0} P_k(\cos\vartheta) z^k = (1 - 2z\cos\vartheta + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ $(|z|<1)$

Bew. (1) Für $\cos\vartheta = 1$ folgt die Behauptung unmittelbar mithilfe der letzten Bemerkung.

(2) $(1 - 2z\cos\vartheta + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist analytisch in $|z|<1$ $\forall \vartheta$!

$1 - 2z\cos\vartheta + z^2 = 0$ gdw $z = \frac{2\cos\vartheta \pm \sqrt{4\cos^2\vartheta - 4}}{2} =$

$$= \cos\vartheta \pm i \sin\vartheta = e^{\pm i\vartheta}$$

Also kann die Wurzel für $|z|<1$ definiert werden, ebenso die Inversion.

$$\Rightarrow (1 - 2z\cos\vartheta + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0} c_k(\vartheta) z^k \quad \forall |z|<1.$$

(3) $\sum_{k\geq 0} P_k(\cos\vartheta) z^k = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta)^k d\alpha \, z^k =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k\geq 0} (i\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta)^k z^k \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - (i\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta) z} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{a - ib\cos\alpha} ,$$

wobei $a := 1 - z\cos\vartheta$
$b := z \sin\vartheta$ gesetzt wurde.

Bem. Wir können $\sin\vartheta = 0$ aufgrund von (1) ausschliessen, dh $b(z) = 0$, falls $z \neq 0$. Für $z = 0$ ist die Beh 3.9. trivial.

(4) Substitution:

$$w := e^{i\alpha}, \; dw = ie^{i\alpha} d\alpha = iw\,d\alpha \; ; \; \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0} P_k(\cos\vartheta)\, z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{dw}{\left(a - \frac{ib}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right) \cdot w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{dw}{-\frac{ib}{2}\left(w^2 - \frac{2a}{ib} w + 1\right)}$$

Berechnung der Singularitäten:

$$w_{1,2} = \frac{\frac{2a}{ib} \mp \sqrt{\frac{4a^2}{-b^2} - 4}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{-ib} =$$

$$= \frac{-(1 - z\cos\vartheta) \pm (1 - 2z\cos\vartheta + z^2\cos^2\vartheta + z^2\sin^2\vartheta)^{1/2}}{-iz\sin\vartheta} =$$

$$= \frac{-(1 - z\cos\vartheta) \pm (1 - 2z\cos\vartheta + z^2)^{1/2}}{-iz\sin\vartheta}$$

Da nach dem Satz von Vietà $w_1 w_2 = 1$, und $\overline{w_1} \neq w_2$, folgt: $|w_1| = \frac{1}{|w_2|} \neq 1$

Wir wollen annehmen, dass $|w_+| < 1$ und müssen w_+ bzw w_- identifizieren.
Da $|w_+| < 1 \;\; \forall (\vartheta, z)$, falls $|w_+| < 1$ für ein beliebiges (ϑ, z), genügt die Identifikation für ein festes (ϑ, z):

Für ϑ mit $0 < 1 - \cos\vartheta < \varepsilon$ ist

$$w_1 = \frac{-(1 - \cos\vartheta \cdot z) + (1 - 2z\cos\vartheta + z^2)^{1/2}}{-i\sin\vartheta \cdot z} \approx 0 \, ,$$

also $w_+ \overset{!}{=} w_1$, $w_- \overset{!}{=} w_2$.

(5) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{dw}{-\frac{i\vartheta}{2}\left(w^2-\frac{2a}{i\vartheta}+1\right)} \overset{\substack{\text{Res. satz}\\ !}}{=} \lim_{w\to w_+} \frac{w-w_+}{-\frac{i\vartheta}{2}\left(w^2-\frac{2a}{i\vartheta}+1\right)} =$$

$$= \lim_{w\to w_+} \frac{2i}{b(w-w_-)} = \frac{2i}{b(w_+-w_-)}$$

$$w_+ - w_- = \frac{2(1-2z\cos\vartheta+z^2)^{1/2}}{-iz\sin\vartheta}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0} P_k(\cos\vartheta)\, z^k = (1-2z\cos\vartheta+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$ ⌟

Bemerkung: Die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der in der offenen Einheitskreisscheibe analytischen Fkt.

$$\varphi_t(z) := (1-2zt+z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{für festes } |t|\leq 1)$$

stimmen also mit den Legendre-Polynomen P_k an der Stelle t : $P_k(t)$ überein.

Die erzeugende Funktion $\varphi_t(z)$ wird zur Herleitung von weiteren Eigenschaften der Legendre-Polynome verwendet:

3.10. Satz

(1) $P_k(1) = 1$

(2) $P_k(-t) = (-1)^k P_k(t)$

(3) P_k ist ein reelles Polynom vom Grade k

(4) $$(P_k, P_\ell)_{L^2(S^2)} := \int_{S^2} P_k(\cos\vartheta)\,\overline{P_\ell(\cos\vartheta)}\, d\sigma = \frac{4\pi}{2k+1}\,\delta_{k\ell}$$

(5) $(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)\,t\,P_k(t) - k P_{k-1}(t)$

(6) $P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2-1)^k$ (Formel von Rodrigue)

(7) Die Legendre-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt} y + k(k+1) y = 0$$

hat $P_k(t)$ als Lösung.

Bew. (1) vgl 3.9. (1)

(2) $P_k(t) = \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^m \binom{k}{2m} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} (1-t^2)^m t^{k-2m}$

$$=: \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} \gamma_m (1-t^2)^m t^{k-2m} \qquad (*)$$

Es ist $(-t)^{k-2m} = \begin{cases} -t^{k-2m} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ t^{k-2m} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \left.\begin{matrix} = \\ = \end{matrix}\right\}$

$$= (-1)^k t^{k-2m}$$

$$\Rightarrow P_k(-t) = \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} \gamma_m (1-(-t)^2)^m (-t)^{k-2m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} \gamma_m (1-t^2)^m (-1)^k t^{k-2m} = (-1)^k P_k(t)$$

(3) Klar mit (*)

(4) Unter Verwendung von 3.5. rechnet man leicht nach, dass

$$\int_{S^2} (\Delta_s f)\bar{g}\, d\sigma = \int_{S^2} f(\Delta_s \bar{g})\, d\sigma \qquad \text{(part. Integration)},$$

dh. der sphärische Laplace-Operator ist selbstadjungiert.

Sei $\underline{k \neq \ell}$; dann ist

$$-k(k+1)\int_{S^2} P_k(\cos\vartheta) P_\ell(\cos\vartheta)\, d\sigma = \int_{S^2} -k(k+1) P_k \cdot P_\ell\, d\sigma =$$

$$= \int_{S^2} \Delta_S P_k \cdot P_\ell \, d\sigma = \int_{S^2} P_k \cdot \Delta_S P_\ell \, d\sigma = -\ell(\ell+1) \int_{S^2} P_k P_\ell \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} P_k P_\ell \, d\sigma = 0$$

Sei $\underline{k = \ell}$; mithilfe der erzeugenden Fkt erhalten wir

$$\int_{S^2} \frac{1}{1-2z\cos\vartheta+z^2} \, d\sigma = \sum_k \sum_\ell \int_{S^2} P_k(\cos\vartheta) P_\ell(\cos\vartheta) \, d\sigma \cdot z^{k+\ell}$$

$$= \sum_k \int_{S^2} P_k^2(\cos\vartheta) \, d\sigma \cdot z^{2k}$$

$$\int_{S^2} \frac{1}{1-2z\cos\vartheta+z^2} \, d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta}{1-2z\cos\vartheta+z^2} \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta}{1-2z\cos\vartheta+z^2} \, d\vartheta \overset{t=\cos\vartheta}{\overset{!}{=}} 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dt}{1-2zt+z^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{z} \log(1-2zt+z^2)\Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{z} \log \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow \log \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\geq 0} \int_{S^2} P_k^2(\cos\vartheta) \, d\sigma \cdot z^{2k+1}$$

(beidseitig ableiten:)

$$\frac{2}{1-z^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\geq 0} \int_{S^2} P_k^2(\cos\vartheta) \, d\sigma \cdot (2k+1) z^{2k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0} z^{2k} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k\geq 0} \int_{S^2} P_k^2(\cos\vartheta) \, d\sigma \cdot (2k+1) \, z^{2k}$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} P_k^2(\cos\vartheta) \, d\sigma = \frac{4\pi}{2k+1}$$

Für den Bew. von (5), (6), (7) vgl. Serie 8 Aufg 1.

<u>Bemerkung</u>: in (4) wurde sogar gezeigt, dass

$$(f, g)_{L^2(S^2)} = \int_{S^2} f \bar{g} \, d\sigma = 0$$

$$\forall f \in \tilde{\mathcal{H}}_k, \, g \in \tilde{\mathcal{H}}_\ell \text{ und } k \neq \ell.$$

3.11. <u>Definition</u> Seien $p, q \in \mathcal{L}_k$; für festes $x \in \mathbb{R}^3$ ist durch

$$\langle p, q \rangle(x) := p(\partial_x)\, \overline{q}(x)$$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}_k$ definiert,

wobei $p(\partial_x) := p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

Verifiziere, dass durch $\langle \cdot, \cdot \rangle(x)$ tatsächlich ein Skalarprodukt definiert ist!

Beachte dabei folgendes:

(i) Für $|\alpha| = |\beta| = k$ ist $\langle x^\alpha, x^\beta \rangle(x) = \partial^\alpha x^\beta = \alpha!\,\delta_{\alpha\beta}$

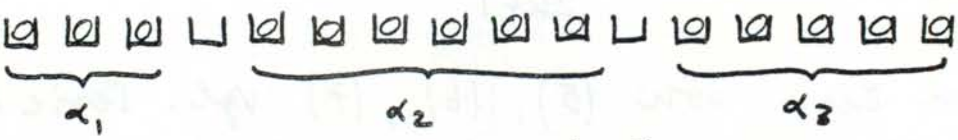
(ii) Sei $p = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$, $q = \sum_{|\beta|=k} d_\beta x^\beta$;

dann ist $$\langle p, q \rangle(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \overline{d_\alpha}\, \alpha!$$

3.12. <u>Lemma</u> $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_k = \binom{k+2}{2}$

Bew. $\ulcorner$ $\{x^\alpha\}_{|\alpha|=k}$ ist eine Basis von $\mathcal{L}_k$ bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle(x)$ (erzeugend & unabhängig)

Zur Bestimmung der Anzahl Monome x^α betrachte $k+2$ Schachteln und k Kugeln und zähle die Möglichkeiten, die Kugeln in die Schachteln (höchstens eine Kugel pro Schachtel) zu legen:



Jedem Monom $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ entspricht (bij.!) ein solches Bild

Der Kombinatorik entnehmen wir: es gibt $\binom{k+2}{2}$ Möglichkeiten, die Kugeln zu verteilen und damit folgt: $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_k = \binom{k+2}{2}$ ┘

3.13. <u>Satz</u> $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k = 2k+1$

Bew ┌ (1) $\Delta = r^2(\partial)$

(2) $\Delta : \mathcal{P}_k \longrightarrow \mathcal{P}_{k-2}$

$p \longmapsto \Delta p$

(der Grad der Homogenität wird um 2 reduziert)

(3) $\Delta : \mathcal{H}_k \longrightarrow \{0\}$; $\mathcal{H}_k$ ist Kern von Δ

(4) $\operatorname{Im} \Delta = \mathcal{P}_{k-2}$, dh Δ ist surj :

(indirekter Bew.)

Sei $q \in \mathcal{P}_{k-2}$ mit $0 = \langle q, \Delta p \rangle(x)$ $\forall p \in \mathcal{P}_k$

Setze $p := r^2 q$

$$\Rightarrow 0 = \langle q, \Delta(r^2 q)\rangle(x) = q(\partial)\Delta r^2 q(x) =$$

$$= \Delta q(\partial)\, r^2 q(x) = \langle r^2 q, r^2 q\rangle(x)$$

$$\Rightarrow r^2 q(x) = 0 \Rightarrow q = 0$$

(5) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_k = \dim_{\mathbb{C}}(\ker \Delta \mathcal{P}_k) + \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{im} \Delta \mathcal{P}_k)$

$= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{k-2}$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k = \binom{k+2}{2} - \binom{k}{2} = 2k+1$ ┘

3.14. <u>Satz</u> $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{P}_{k-2}$

dh. $\forall p \in \mathcal{P}_k$ ex. eine eindeutige Zerlegung in

$p = p_1 + p_2$; $p_1 \in \mathcal{H}_k$, $p_2 \in r^2 \mathcal{P}_{k-2}$

Bew. ┌ Es genügt zu zeigen, dass

$\mathcal{H}_k \cap r^2 \mathcal{P}_{k-2} = \{0\}$.

Sei also $p \in \mathcal{H}_k \cap r^2 \mathcal{P}_{k-2}$, dh $\Delta p = 0, p = r^2 q$, wobei $q \in \mathcal{P}_{k-2}$.
Dann gilt:

$$\langle p, p \rangle = p(\partial) p = (r^2 q)(\partial) p = \Delta q(\partial) p =$$
$$= q(\partial) \Delta p = 0 \Rightarrow p = 0 \quad \lrcorner$$

3.15. <u>Korollar</u>

(1) $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{H}_{k-2} \oplus r^4 \mathcal{H}_{k-4} \oplus \ldots$

(2) $\tilde{\mathcal{P}}_k = \tilde{\mathcal{H}}_k \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{k-2} \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{k-4} \oplus \ldots \qquad (r = 1\,!)$

3.16. <u>Satz</u> Die Funktionen

$$Y_{k,l}(r, \varphi, \vartheta) := \frac{1}{2\pi} r^k e^{il\varphi} \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} (i \sin\vartheta \cos\alpha + \cos\vartheta)^k \, d\alpha \quad , |l| \le k$$

bilden eine orthogonale Basis von $\mathcal{H}_k$ in folgendem Sinne:

$$(Y_{k,l}, Y_{k,m}) := (\tilde{Y}_{k,l}, \tilde{Y}_{k,m})_{L^2(S^2)}.$$

Diese Definition ist sinnvoll, da jede Fkt $p \in \mathcal{P}_k$, also auch jede Fkt $p \in \mathcal{H}_k$ bereits durch die Werte auf der Einheitssphäre S^2 vollständig definiert ist:

$$p(x) = r^k p(x') \qquad (x = rx').$$

Für $|l| > k$ gilt: $Y_{k,l} \equiv 0$

Insbesondere ist $\Delta_S Y_{k,l} = -k(k+1) Y_{k,l}$

<u>Bemerkung</u>: $Y_{k,0} = Z^k$

Bew. $\ulcorner$ (1) $e^{-il\alpha} k_\alpha (ix_1 + x_3)^k \in \mathcal{H}_k \;\; \forall \alpha$

(vgl. Def. 3.7.)

(2) $Y_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} k_\alpha (ix_1 + x_3)^k \, d\alpha$:

(vgl dazu die Def. von Z^k !!)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}\, k_\alpha\, (ix_1+x_3)^k\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}\,\big(i(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha)+x_3\big)^k\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^k \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}\,\big(i(\cos\varphi\sin\vartheta\cos\alpha - \sin\varphi\sin\vartheta\sin\alpha)+\cos\vartheta\big)^k\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^k \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}\,\big(i\sin\vartheta\cos(\varphi+\alpha)+\cos\vartheta\big)^k\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^k \int_0^{2\pi} e^{-il(\alpha-\varphi)}\,\big(i\sin\vartheta\cos\alpha+\cos\vartheta\big)^k\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^k e^{il\varphi} \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}\,\big(i\sin\vartheta\cos\alpha+\cos\vartheta\big)^k\, d\alpha = Y_{k,l}$$

(3) $$\left(\tilde{Y}_{k,l}, \tilde{Y}_{k,m}\right)_{L^2(S^2)} = \int_{S^2} \tilde{Y}_{k,l}\cdot\overline{\tilde{Y}_{k,m}}\, d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi} e^{il\varphi}\int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}(i\sin\vartheta\cos\alpha+\cos\vartheta)^k d\alpha\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2\pi} e^{-im\varphi}\int_0^{2\pi} e^{im\alpha}(i\sin\vartheta\cos\alpha+\cos\vartheta)^k d\alpha\right)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(l-m)\varphi} d\varphi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}(\ldots)^k d\alpha\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\alpha}(\ldots)^k d\alpha\right)\sin\vartheta\, d\vartheta}_{=:\,\gamma(l,m;\vartheta)}$$

$$= 2\pi\,\delta_{lm}\,\gamma(l;\vartheta)$$

(4) Zur Vereinfachung schreiben wir

$$\chi(\vartheta) := \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha}(i\sin\vartheta\cos\alpha+\cos\vartheta)^k d\alpha$$

Wir formen diesen Ausdruck wie folgt um:

$$\chi(\vartheta) = \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (i\sin\vartheta)^j (\cos\vartheta)^{k-j} (\cos\alpha)^j \, d\alpha$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (i\sin\vartheta)^j (\cos\vartheta)^{k-j} \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} (\cos\alpha)^j \, d\alpha$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} (\cos\alpha)^j \, d\alpha = \frac{1}{2^j} \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} e^{i\alpha s} e^{-i\alpha(j-s)} \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2^j} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha(l-s+j-s)} \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2^j} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha(l+j-2s)} \, d\alpha = \frac{2\pi}{2^j} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \delta_{l+j,2s}$$

$$\Rightarrow \chi(\vartheta) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=0}^{j} \binom{k}{j} \binom{j}{s} (i\sin\vartheta)^j (\cos\vartheta)^{k-j} \frac{2\pi}{2^j} \delta_{l+j,2s}$$

(5) $Y_{k,l} \equiv 0$ für $|l| > k$, denn $\chi(\vartheta) \equiv 0$ für $|l| > k$:

Mit $|l| > k$, $0 \le j \le k$, $0 \le s \le j$ gilt:

$l + j - 2s \geq l + j - 2j \geq l - k > 0$, also $\delta_{l+j,2s} = 0 \ \forall j, s$.

3.17. <u>Definition</u> Die Funktionen

$$P_{k,l}(\cos\vartheta) := \frac{1}{2\pi} \frac{(k+|l|)!}{k!} (-i)^l \int_0^{2\pi} e^{-il\alpha} (i\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta)^k \, d\alpha ,$$

$(k \in \mathbb{Z}^+, \ |l| = 0, 1, \dots k)$

heißen <u>Legendre-Polynome</u> $(l = 0)$ bzw

<u>zugeordnete Legendre-Polynome</u> $(l \neq 0)$

3.18. <u>Bemerkung</u> (1) $P_{k,-l}(t) = P_{k,l}(t)$

Wir können also für das folgende oEdA annehmen, dass $l \geq 0$.

(2) $$Y_{k,l}(r,\varphi,\vartheta) = \frac{i^l k!}{(k+|l|)!} r^k e^{il\varphi} P_{k,l}(\cos\vartheta)$$

3.19. <u>Satz</u> $\quad P_{k,\ell}(t) = (1-t^2)^{\ell/2} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell} P_k(t)$

Bew. (1) Aus $P_k(z) = \frac{1}{2^k k!}\left(\frac{d}{dz}\right)^k (z^2-1)^k$ (Satz 3.10. (6)) ($t \mapsto z \in \mathbb{C}$)

schliessen wir:

$$P_k(z) = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)} \frac{(w^2-1)^k}{(w-z)^{k+1}}\,dw$$

(Cauchy'sche Integralformeln!)

$\Gamma(z)$ sei folgende Kurve: $\alpha \mapsto z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}$ ($\alpha \in [0,2\pi]$) (spezielle Wahl!), und damit folgt:

$$P_k(z) = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}\right)^2-1\right]^k}{\left[z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}-z\right]^{k+1}}\, i\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2^k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}e^{-i\alpha} + 2z + \frac{\sqrt{z^2-1}^{\,2}}{\sqrt{z^2-1}}e^{i\alpha}\right]^k d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cdot\cos\alpha\right)^k d\alpha \quad \text{, und wenn wir}$$

$t = \cos\vartheta$ setzen, erhalten wir:

$$P_k(\cos\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(i\sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta\right)^k d\alpha$$

— wie gehabt!

(2) Nun berechnen wir $(1-t^2)^{\ell/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell} P_k(t)$ analog zu (1):

$$\sqrt{1-z^2}^{\,\ell}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell} P_k(z) = \sqrt{1-z^2}^{\,\ell}\,\frac{1}{2^k k!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k+\ell}(z^2-1)^k =$$

$$= \sqrt{1-z^2}^{\,\ell}\,\frac{1}{2^k}\frac{(k+\ell)!}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)}\frac{(w^2-1)^k}{(w-z)^{k+\ell+1}}\,dw =$$

($\Gamma(z)$ wie in (1))

$$= \sqrt{1-z^2}^{\,\ell} \frac{1}{2^k} \frac{(k+\ell)!}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{[(z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha})^2-1]^k}{[z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}-z]^{k+\ell+1}} \cdot i\sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2^k} \frac{(k+\ell)!}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{z^2-1}\,e^{-i\alpha} + 2z + \sqrt{z^2-1}\,e^{i\alpha}\right)^k \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}}\,e^{-i\alpha}\right)^\ell d\alpha =$$

$$= (-i)^\ell \frac{(k+\ell)!}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\alpha\right)^k e^{-i\ell\alpha}\,d\alpha\,,$$

und für $z = t \in (-1,1)$ stimmt dies mit unserer Definition von $P_{k,\ell}(t)$ überein.

$\lrcorner$

3.20. Bemerkungen

(1) Aus 3.10.(3) und dem eben bewiesenen Satz 3.19 folgt: $P_{k,\ell}(t)$ ist ein reelles Polynom vom Grade k.

(2) $P_k(t) \equiv P_{k,0}(t)$ erfüllt die Legendre-Diff.glchg

$$((1-t^2)y')' + k(k+1)y = 0 \qquad (*)$$

Daraus schließen wir, dass $\frac{d}{dt}P_k(t)$ die Ableitung der Legendre-Dgl.

$$((1-t^2)y')'' + k(k+1)y' = 0 \quad \text{erfüllt.}$$

Eine Transformation liefert die Gleichung

$$((1-t^2)y')' + k(k+1)y - \frac{1}{1-t^2}y = 0 \qquad (**),$$

wobei y' durch y ersetzt wurde, und es ist leicht zu verifizieren, dass die Funktion

$$\sqrt{1-t^2}\,\frac{d}{dt}P_k(t) \text{ die Glchg } (**) \text{ erfüllt.}$$

Durch wiederholte Anwendung erhalten wir:

$P_{k,\ell}(t) = (1-t^2)^{\ell/2} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell} P_k(t)$ erfüllt die Diff.glchg.

$$\left((1-t^2)y'\right)' + k(k+1)y - \frac{\ell^2}{1-t^2}y = 0,$$ die

sogenannte <u>zugeordnete Legendre-Dgl.</u>

(vgl. auch (4))

(Ich will an dieser Stelle nicht auf die Transformation eingehen, die eine Dgl. auf <u>selbstadjungierte Form</u> bringt und die ursprünglichen Lösungen entsprechend modifiziert.)

(3) Satz 3.19. ist Bindeglied zwischen der "klassischen" Art, die Legendre-Polynome darzustellen, und den sogenannten <u>Integralformeln</u> 3.17.:
Wir hätten also ebensogut von den Polynomen $1, x, x^2, \ldots$ über dem Intervall $[-1,+1]$ ausgehen können; das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren bzgl. dem Skalarprodukt

$$(f|g)_{L^2([-1,+1])} := \int_{-1}^{+1} f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$$

hätte die klassischen Legendre-Polynome geliefert und mit 3.19. wäre der Uebergang zu den Integralformeln gemacht worden.

(4) Die (zugeordnete) Legendre-Dgl erhält man auch durch <u>Separationsansatz</u> für u in $\Delta_{(r,\vartheta,\varphi)}u = 0$:

$u(r,\varphi,\vartheta) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot\Theta(\vartheta)$ wie folgt:

$$\Delta u = \Phi\Theta \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R + \frac{R}{r^2}\left(\Phi \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta + \frac{\Theta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi\right) = 0$$

Separierung nach R und $\Phi\Theta$ liefert

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R = -\frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta - \frac{1}{\Phi\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\Phi \overset{!}{=} -\lambda^2 ,$$

denn die rechte Seite ist unabhängig von r und die linke unabhängig von φ und ϑ, also müssen sie konstant sein.

$\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}R + \lambda^2 R = 0$ wird gelöst durch

$R = ar^n + \frac{b}{r^{n+1}}$; $a, b \in \mathbb{C}$ beliebig, mit $\lambda^2 = -n(n+1)$

Es folgt also:

$$-\frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta - \frac{1}{\Phi\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\Phi \overset{!}{=} n(n+1)$$

Erneute Separierung liefert:

$$-\frac{1}{\Theta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta - n(n+1)\sin\vartheta = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi \overset{!}{=} -\mu^2$$

$\frac{d^2}{d\varphi^2}\Phi + \mu^2\Phi = 0$ hat eine (2π-periodische!) Lösung gdw $\mu \in \mathbb{Z}^+$;

daraus folgt:

$$\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\Theta + n(n+1)\sin^2\vartheta\,\Theta - m^2\Theta \overset{!}{=} 0$$

und mit der Substitution $x = \cos\vartheta$ $\left(\frac{d}{d\vartheta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial x}\right)$:

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta + n(n+1)(1-x^2)\Theta - m^2\Theta = 0 ,$$

also: $\left((1-x^2)\Theta'\right)' + n(n+1)\Theta - \frac{m^2}{1-x^2}\Theta = 0$

3.21. <u>Satz</u> $L^2(S^2) = \bigoplus_{k\geq 0}\tilde{\mathcal{H}}_k$

damit haben wir als Resultat:
jede Funktion $f \in L^2(S^2)$ lässt sich durch sphärische harmonische Polynome im Quadratmittel beliebig genau approximieren.

Für den Beweis brauchen wir

3.22. <u>Satz</u> (von Weierstrass)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f \in C(K)$. Dann ex $\forall \varepsilon > 0$ ein Polynom p_ε so, dass $\sup_{x \in K} |f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$

Bew von 3.21.

⌜ (indirekt) Sei $f \in C(S^2)$ mit

$$(f, \tilde{Y})_{L^2(S^2)} = 0 \quad \forall \tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{H}}_K, \forall K \geq 0.$$

Nach Satz 3.22. ex p_ε mit $\sup_{x \in S^2} |f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

p_ε ist als Polynom eine Summe von homogenen Gliedern:

$$p_\varepsilon = \sum_{j \leq K} \Big(\sum_{|\alpha| = j} a_\alpha x^\alpha \Big)$$

Nach Annahme ist damit $(f, p_\varepsilon)_{L^2(S^2)} = 0$

$$\|f\|^2_{L^2(S^2)} = |(f, f)_{L^2(S^2)}| = |(f, f) - (f, p_\varepsilon)| = |(f, f - p_\varepsilon)|$$

$$\text{(Schwarz:)} \leq \|f\|_{L^2(S^2)} \cdot \|f - p_\varepsilon\|_{L^2(S^2)}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2(S^2)} \leq \|f - p_\varepsilon\|_{L^2(S^2)} \leq \Big(\int_{S^2} \varepsilon^2 \, d\sigma \Big)^{1/2}$$

$$\Rightarrow f = 0 \quad (L^2(S^2)\text{- fastsicher})$$

Und daraus folgt die Behauptung, denn $C(S^2)$ ist dicht in $L^2(S^2)$ bezgl $\|\cdot\|_{L^2(S^2)}$ ⌟

3.23 <u>Bemerkung</u>

Das eingangs gestellte Eigenwertproblem

$\Delta_s \varphi = \alpha \varphi$ für $n = 3$ ist vollständig gelöst:

Die Funktionen $\tilde{Y}_{k,l}$, $k \neq 0$, $|l| \leq k$ sind alle Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $-k(k+1)$.

Bew von 3.22. für $K = S_r^{n-1}(0)$

⌈ Wir verwenden einmal mehr die Idee der approximierenden Identität: Wir definieren eine Folge Q_n von Funktionen, die gleichmässig gegen die δ-Distribution konvergiert. Mithilfe der Faltung definieren wir dann eine Folge $f_m := Q_m * f$ und zeigen, dass die Folge f_m gleichmässig (glm) gegen f konvergiert.

I Beh.: zu $f \in C_0(B_1(0))$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $p_\varepsilon(x)$ mit

$$\sup_{x \in B_1(0)} |f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

($f \in C_0$ ist eine stetige Funktion auf $B_1(0)$, die am Rande verschwindet)

(1) $B_r(0) := \{ |x| \leq r \}$; $B_r^\circ(0) := \{ |x| < r \}$

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(2) Wir setzen f auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort zu $f \mathbb{1}_{B_1(0)}$ und schreiben ebenfalls f für die Fortsetzung; es gilt dann natürlich: $f \in C(\mathbb{R}^n)$

Betrachte $Q_m(x) := c_m \left(1 - |x|^2\right)^m \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}$, wobei c_m so gewählt sei, dass $\int_{B_1(0)} Q_m \, dx = 1$

Setze $f_m(x) := f * Q_m(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, Q_m(x-y) \, dy$

Es ist $f_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, c_m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j |x-y|^{2j} \, dy =$

$$= c_m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, |x-y|^{2j}\, dy =$$

$$= c_m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Big(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \Big)^j dy \quad ,$$

und dies zeigt, dass $f_m(x)$ ein Polynom ist.

(3) Abschätzung von c_m:

$$\frac{1}{c_m} = \int_{B_1(0)} (1-|x|^2)^m dx = \omega_n \int_0^1 (1-r^2)^m r^{n-1} dr \geq$$

$$\geq \int_0^1 (1-r^2)^m r^{n-1} dr \overset{(*)}{\geq} \int_0^1 (1-mr^2) r^{n-1} dr \overset{a_m \in [0,1]}{\geq}$$

$$\geq \int_0^{a_m} (1-mr^2) r^{n-1} dr = \left(\frac{r^n}{n} - \frac{r^{n+2}}{n+2} m \right)\Big|_0^{a_m} =$$

$$= a_m^n \left(\frac{1}{n} - \frac{m a_m^2}{n+2} \right) \underset{\left(a_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\right)}{=} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) m^{-\frac{n}{2}} =: \frac{1}{\gamma(n)} m^{-\frac{n}{2}}$$

$$\longrightarrow c_m \leq \gamma(n)\, m^{\frac{n}{2}}$$

$(*)$: $(1-r^2)^m \geq 1 - mr^2$, denn für die Ableitungen nach r gilt:

$m(1-r^2)^{m-1}(-2r) \geq -2mr$ und für $r=0$ gilt Gleichheit.

(4) $Q_m(x) \leq \gamma(n)\, m^{\frac{n}{2}} (1-\delta^2)^m$, wenn $\delta < |x| < 1$,

und dies zeigt die glm Konvergenz der Q_m auf $B_1(0) \setminus B_\delta(0)$

(5) da $f \in C_0(B_1(0))$, ist f glm stetig, also ex zu $\varepsilon > 0$ ein δ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x-y| < \delta$

(6) $f_m(x) \xrightarrow{\text{glm}} f(x)$:

$$|f_m(x) - f(x)| = |f * Q_m(x) - f(x)| \overset{(2)}{=}$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, Q_m(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, Q_m(y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, Q_m(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, Q_m(y)\, dy \right| \overset{(2)}{=}$$

$$= \left| \int_{B_1(0)} f(x+y)\, Q_m(y)\, dy - \int_{B_1(0)} f(x)\, Q_m(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{B_1(0)} |f(x+y) - f(x)| \cdot Q_m(y)\, dy =$$

$$= \int_{B_1(0) \setminus B_\delta(0)} |f(x+y) - f(x)| \cdot Q_m(y)\, dy + \int_{B_\delta(0)} |f(x+y) - f(x)|\, Q_m(y)\, dy$$

$$\leq 2 \sup_{x \in B_1(0)} |f(x)| \int_{B_1(0) \setminus B_\delta(0)} Q_m(y)\, dy + \varepsilon \int_{B_1(0)} Q_m(y)\, dy \overset{(5)}{\leq}$$

$$\leq 2 \sup_{x \in B_1(0)} |f(x)| \cdot \gamma(n)\, m^{\frac{n}{2}} (1-\delta^2)^m \cdot \frac{\omega_n}{n} + \varepsilon$$

Also ist $|f_m(x) - f(x)|$ für beliebiges $x \in B_1(0)$ und hinreichend grosses m beliebig klein, und dies zeigt die glm Konvergenz.

(7) Die Verallgemeinerung der Behauptung I für $B_r(0)$ (statt $B_1(0)$) ist trivial.

II Zu $f \in C(S_r^{n-1}(0))$ und zu $\varepsilon > 0$ ex ein Polynom $p_\varepsilon(x)$ mit

$$\sup_{x \in S_r^{n-1}(0)} |f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

(8) Zu $0 < \delta < r$ konstruieren wir eine Funktion $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B_r(0) \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r+\delta}(0) \end{cases}$$

(vgl dazu $\underline{\text{IV}}$ 1.2.(i))

Wir setzen $F(x) := \frac{|x|}{r} f\left(r \frac{x}{|x|}\right)$ und

$$\varphi(x) := F(x) \cdot \chi(x)$$

$\left(\varphi\restriction_{S_r(0)} = F\restriction_{S_r(0)} = f \right)$

$\varphi(x)$ erfüllt die Bedingungen von I für $B_{r+2\delta}(0)$;
also lässt sich φ durch Polynome p_ε glm approximieren; f wird dann durch die Polynome

$p_\varepsilon\restriction_{S_r^{n-1}(0)}$ glm approximiert. ┘

3.24. **Definition**

Setze $\delta_{x'}(\tilde{Y}) := \tilde{Y}(x') \quad \forall \tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{H}}_K$

Man verifiziert ohne weiteres, dass die Abbildung

$\delta_{x'} : \tilde{\mathcal{H}}_K \to \mathbb{C}$ linear ist, also ein lineares Funktional auf dem

(2k+1)-dimensionalen Vektorraum $\tilde{\mathcal{H}}_K$.

Wir wissen – vgl Lineare Algebra – dass es zu $\delta_{x'}$ ein eindeutig definiertes Element in $\tilde{\mathcal{H}}_K$ gibt, das wir mit $z_{x'}^K$ bezeichnen, so, dass gilt:

$$\delta_{x'}(\tilde{Y}) = \left(\tilde{Y}, z_{x'}^K\right)_{L^2(S^2)} \quad \forall \tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{H}}_K.$$

3.25. **Satz**

(1) Für jede orthonormierte Basis $\{\tilde{Y}_j\}_{j=1}^{2K+1}$ von $\tilde{\mathcal{H}}_K$

(zB $\tilde{Y}_{K,e}$ normiert) gilt:

$$z_{x'}^K = \sum_{j=1}^{2K+1} \overline{\tilde{Y}_j}(x') \tilde{Y}_j$$

(2) $z_{x'}^K$ ist ein reelles Polynom

(3) $Z^k_{x'}(y') = Z^k_{y'}(x')$

(4) Sei R orthogonal mit $\det R = 1$ ($R \in SO(3)$).

Dann ist $Z^k_{Rx'}(Ry') = Z^k_{x'}(y')$

(5) $Z^k_{x'}(x') = \dfrac{2k+1}{4\pi}$

(6) $\| Z^k_{x'} \|^2_{L^2(S^2)} = \dfrac{2k+1}{4\pi}$

(7) $| Z^k_{x'}(y') | \leq \dfrac{2k+1}{4\pi}$

(8) Sei $g \in L^2(S^2)$. Wir bezeichnen mit $\pi_k g$ die Projektion von g auf $\mathcal{H}_k$.

Es gilt : $\pi_k g(x') = (g, Z^k_{x'})_{L^2(S^2)}$

Bew Γ (1) $\left(\tilde{Y}, \sum\limits_{j=1}^{2k+1} \overline{\tilde{Y}_j}(x') \tilde{Y}_j \right)_{L^2(S^2)} = \sum\limits_{j=1}^{2k+1} (\tilde{Y}, \tilde{Y}_j) \; \tilde{Y}_j(x') =$

$= \left(\sum\limits_{j=1}^{2k+1} (\tilde{Y}, \tilde{Y}_j) \tilde{Y}_j \right)(x') = \tilde{Y}(x')$, da

$\{\tilde{Y}_j\}$ orthonormierte Bss.

Da $\tilde{Y}$ beliebig war, und da $Z^k_{x'}$ eindeutig ist, folgt die Behauptung, und zwar für <u>jede</u> orthonormierte Bss.

(2) Wir wählen eine <u>reelle</u> orthonormierte Bss:

Sei $\{\tilde{Y}_j\}$ eine beliebige Bss.

Wir setzen $\tilde{P}_j := \mathrm{Re}\, \tilde{Y}_j$; $\tilde{Q}_j := \mathrm{Im}\, \tilde{Y}_j$;

$\tilde{P}_j, \tilde{Q}_j \in \mathcal{H}_k$! Offenbar erzeugen die $(4k+2)$ Funktionen $\tilde{P}_j, \tilde{Q}_j$ den Raum $\mathcal{H}_k$.

Das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren angewandt auf $\{\tilde{P}_j, \tilde{Q}_j\}$ liefert eine orthonormierte Bss $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^{2k+1}$ aus reellen sphärischen Polynomen ($\tilde{\mathcal{H}}_k = \tilde{E}_k$!)

$\Rightarrow$ $z_{x'}^k = \sum_{j=1}^{2k+1} \tilde{R}_j(x')\tilde{R}_j$ ist ein reelles Polynom.

Bemerkung: Wir können auch das früher erarbeitete verwenden, nämlich:

$$\left\{ \sin|\ell|\varphi\, P_{k,\ell}(\cos\vartheta)\Big|_{\ell<0},\ \cos\ell\varphi\, P_{k,\ell}(\cos\vartheta)\Big|_{\ell\geq 0} \right\}_{|\ell|\leq k}$$

ist eine <u>reelle</u> orthogonale Bss. Wir brauchen also nur $c_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass die Funktionen normiert sind ($\|\cdot\|_{L^2(S^2)} \overset{!}{=} 1$)

(3) $z_{x'}^k(y') = \sum_{j=1}^{2k+1} \tilde{R}_j(x')\tilde{R}_j(y') = \sum_{j=1}^{2k+1} \tilde{R}_j(y')\tilde{R}_j(x') = z_{y'}^k(x')$

(4) $\left(\tilde{Y}, z_{Rx'}^k(R\cdot)\right)_{L^2(S^2)} = \int_{S^2} \tilde{Y}(y')\, z_{Rx'}^k(Ry')\, d\sigma(y') =$

$$= \int_{S^2} \tilde{Y}(R^{-1}y')\, z_{Rx'}^k(y')\, d\sigma(y') = \left(\tilde{Y}(R^{-1}\cdot), z_{Rx'}\right)_{L^2(S^2)} =$$

$$= \tilde{Y}(R^{-1}(Rx')) = \tilde{Y}(x') = \left(\tilde{Y}, z_{x'}^k\right)_{L^2(S^2)}$$

Da $\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(5) Wir bemerken zuerst, dass $z_{x'}^k(x') = z_{Rx'}^k(Rx')$ $\forall R \in SO(3)$, also ist $z_{x'}^k(x') = \text{const.}$ und daraus folgt

$$\int_{S^2} z_{x'}^k(x')\, d\sigma(x') = 4\pi\, z_{x'}^k(x')$$

Weiter gilt: $z_{x'}^k(x') = \sum_{j=1}^{2k+1} \tilde{R}_j(x')\tilde{R}_j(x') = \sum_{j=1}^{2k+1} |\tilde{R}_j(x')|^2$

$\Rightarrow \int_{S^2} z_{x'}^k(x')\, d\sigma(x') =$

$$= \sum_{j=1}^{2k+1} \int_{S^2} |\tilde{R}_j(x')|^2\, d\sigma(x') = 2k+1$$

($\tilde{R}_j$ orthonormiert!)

zusammen : $4\pi\, z_{x'}^k(x') = 2k+1 \Rightarrow$ Beh.

(6) $\|z_{x'}^k\|^2_{L^2(S^2)} = (z_{x'}^k, z_{x'}^k)_{L^2(S^2)} \overset{\text{Def.}}{=} z_{x'}^k(x') \overset{(5)}{=} \dfrac{2k+1}{4\pi}$

(7) $|z_{x'}^k(y')| \overset{\text{Def}}{=} |(z_{x'}^k, z_{y'}^k)_{L^2(S^2)}| \overset{\text{Schwarz}}{\leq} \|z_{x'}^k\|_{L^2(S^2)} \cdot \|z_{y'}^k\|_{L^2(S^2)}$
$$\overset{(6)}{=} \frac{2k+1}{4\pi}$$

(8) Sei $g \in L^2(S^2)$. Nach Satz 3.21. ist $g = \pi_k g + h$,
wobei $h \perp \tilde{\mathcal{H}}_k$

$\Rightarrow (g, z_{x'}^k)_{L^2(S^2)} = (\pi_k g + h, z_{x'}^k)_{L^2(S^2)} =$
$$= (\pi_k g, z_{x'}^k)_{L^2(S^2)} + (h, z_{x'}^k)_{L^2(S^2)}$$
Aus $z_{x'}^k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ und $h \perp \tilde{\mathcal{H}}_k$ folgt $(h, z_{x'}^k)_{L^2(S^2)} = 0$,
also auch die Beh. $\lrcorner$

3.26. <u>Lemma</u>

Sei $n = (0,0,1)$ ("Nordpol")

Es gilt : $z_n^k(y') = \frac{2k+1}{4\pi} Y_{k,0}(y') \equiv \frac{2k+1}{4\pi} z^k(y') \equiv \frac{2k+1}{4\pi} P_k(y_3')$
$(y_3 = n \cdot y)$

(vgl 3.7./3.8. ; 3.16.)

Bew $\ulcorner$ Wähle $c_{k,l} \in \mathbb{C}$ so, dass $\|c_{k,l} \tilde{Y}_{k,l}\|_{L^2(S^2)} = 1$.

$\Rightarrow z_n^k(y') = \sum_{l=-k}^{k} |c_{k,l}|^2\, \overline{\tilde{Y}_{k,l}(n)}\, \tilde{Y}_{k,l}(y')$

Aus $\tilde{Y}_{k,l}(n) = 0 \quad \forall l \neq 0$ und $\tilde{Y}_{k,0}(n) = 1$

(vgl Def von $Y_{k,l}$ in 3.16) folgt $z_n^k(y') = |c_{k,0}|^2\, Y_{k,0}(y')$

Wir bestimmen noch $|c_{k,0}|^2$:

$\frac{1}{|c_{k,0}|^2} = \|\tilde{Y}_{k,0}\|^2_{L^2(S^2)} = \frac{4\pi}{2k+1}$ (vgl 3.10. (v)) $\lrcorner$

Wir behandeln nun noch kurz den Fall beliebiger Dimension; man beachte dabei jeweils die Analogie zum Fall $n=3$!

3.27. <u>Definition</u> Seien $p, q \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$, für festes $x \in \mathbb{R}^n$ ist durch

$$\langle p, q\rangle(x) := p(\partial_x)\bar{q}(x)$$ ein Skalarprodukt

auf $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ definiert.

3.28. <u>Lemma</u> $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) = \binom{k+n-1}{n-1}$

3.29. <u>Satz</u> $$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) = \binom{k+n-1}{n-1} - \binom{k-2+n-1}{n-1}$$
$$= \binom{k+n-2}{n-2} \cdot \frac{2k+n-2}{k+n-2}$$

3.30. <u>Satz</u> $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \oplus r^2 \mathcal{H}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$

3.31. <u>Satz</u> $L^2(S_1^{n-1}(0)) = \bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_k(\mathbb{R}^n)$

Für die Beweise übertrage die Ideen in 3.12 bis 3.15 und 3.21. auf $\mathbb{R}^n$. Vgl auch Serie 8 Aufg 2 und 3.

IV. Differentialoperatoren

1. Der Satz von Malgrange - Ehrenpreis

Betrachte ein beliebiges Polynom $P(k)$ in $\mathbb{R}^n$ mit konstanten Koeffizienten :

$$P(k) = P(k_1 \dots k_n) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha k^\alpha \quad \text{wobei } a_\alpha \in \mathbb{C}$$

Diesem Polynom wird durch

$$P(k) \longmapsto P(D) = P(D_1, \dots D_n) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \,, \quad D_j = \frac{1}{i} \partial_j$$

ein partieller Differentialoperator zugeordnet.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Fragen :

- für welche Funktionen φ existiert eine Lösung u von $P(D)u = \varphi$?
- welche Eigenschaften hat eine Lösung u ?

Ich werde zuerst das nötige Werkzeug bereitstellen; dann werden anhand eines Beispiels die Schwierigkeiten offengelegt und es wird gezeigt, wie sie umgangen werden können. Schliesslich führt dieses Beispiel zum Satz von Malgrange-Ehrenpreis; Satz und Beweis sind genau die Uebertragung des Beispiels auf eine allgemeinere Situation.

1.1. Definition Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\}$$

Bem. : Man schreibt häufig $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, bzw $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ statt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ bzw $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, und wo es aus dem Kontext heraus klar ist C_0^∞ bzw C^∞.

1.2. Lemma $C_0^\infty \neq \phi$

⌜ Wir konstruieren zwei $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen :

(i) $$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

(Beachte vor allem $\frac{d^n}{dt^n} f(t)\big|_{t=0}$!)

für $a > 0$:

$$g_a(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(a-t)} \quad \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Für $b > a$:

$$h_{a,b}(t) := g_a(b+t)\, g_a(b-t) \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Skizziere die Funktionen f, g_a, $h_{a,b}$!
schliesslich :

$$\varphi_{a,b}(x) := \prod_{j=1}^n h_{a,b}(x_j) \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(ii) $$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}} & \text{falls } |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$ ⌟

1.3. Für Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kann die Fouriertrafo sogar auf $\mathbb{C}^n$ (statt wie bisher auf $\mathbb{R}^n$) definiert werden :

$\forall \varphi \in C_0^\infty$ ex $r(\varphi)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset B_r(0)$.

$$\hat{\varphi}(z) := \hat{\varphi}(z_1 \dots z_n) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-izx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{B_r(0)} \varphi(x)\, e^{izx}\, dx \text{ , da}$$

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad \forall x \notin B_r(0)$$

Bem. $\hat{\varphi}(z)$ ist überall in $\mathbb{C}^n$ definiert.

1.4. <u>Definition</u> $f(z_1 \dots z_n)$ heisst holomorph (auch analytisch) in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, falls $f \in C^1(\Omega)$ (als Funktion von $2n$ reellen Variabeln) und falls

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f = 0 \text{ auf } \Omega \quad (\forall j = 1 \dots n)$$

1.5. <u>Proposition</u> Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{\varphi}$ überall auf $\mathbb{C}^n$ analytisch und

$$|\hat{\varphi}(z)| \leq A e^{B|z|} \quad \text{wobei } |z| := \left(\sum_1^n |z_j|^2\right)^{1/2}.$$

⌜Bew. Es ist klar, dass $\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-izx} dx \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \hat{\varphi}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{B_r(0)} \varphi(x) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} e^{-i\sum z_j x_j}}_{=0} dx = 0$$

$$|\hat{\varphi}(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \leq r} |\varphi(x)| e^{|z| \cdot |x|} dx \leq$$

$$\leq \frac{e^{r|z|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \leq r} |\varphi(x)| dx =: A e^{B|z|}$$ ⌟

Bem. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, insbesondere gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| dx \leq M(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

1.6. Betrachte $P(k) := -|k|^2$.
Dann ist $P(D) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \Delta$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset B_r(0)$

Gesucht: die Lösung von $P(D) u = \varphi$.

$P(D) u = \varphi$ gdw $\widehat{P(D) u} = P(k) \hat{u} = -|k|^2 \hat{u} = \hat{\varphi}$

Formal gilt dann: $\hat{u}(k) = -\dfrac{\hat{\varphi}(k)}{|k|^2}$,

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\hat{\varphi}(k)}{|k|^2}\, e^{ikx}\, dk \qquad (*)$$

Diese Gleichungen gelten streng, falls

$\chi(k) := -\dfrac{\hat{\varphi}(k)}{|k|^2} e^{ikx} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und dies trifft für $n \geq 3$ zu:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi(k)|\, dk = \int_{S_1(0)} \int_0^r \frac{|\hat{\varphi}(|k|, k')|}{|k|^2} \cdot |k|^{n-1}\, d(|k|)\, d\sigma(k') =$$

$$= \int_{S_1(0)} \int_0^r |\hat{\varphi}(|k|, k')| \cdot |k|^{n-3}\, d(|k|)\, d\sigma(k')$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\chi(k)|\, dk \begin{cases} = \infty & \text{für } n = 1,2 \\ < \infty & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

Für $n \geq 3$ ist also $(*)$ wohldefiniert, $u \in C^\infty$ und es gilt:

$$\Delta u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\varphi}(k)}{-|k|^2}\, \Delta e^{ikx}\, dk = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\, dk = \varphi(x)$$

Wir haben also folgende

1.6.' <u>Proposition</u>

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $n \geq 3$. Dann ist

$u(x) := \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\hat{\varphi}(k)}{|k|^2}\, e^{ikx}\, dk$ Lösung von $\Delta u = \varphi$

und $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Analog erhalten wir für $P(k) := (-|k|^2)^m$ die

1.7. <u>Proposition</u> Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $n \geq 2m+1$. Dann ist

$u(x) := \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (-1)^m \frac{\hat{\varphi}(k)}{|k|^{2m}}\, e^{ikx}\, dk$ Lösung von $\Delta^m u = \varphi$

und $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dieses Resultat ist sehr unbefriedigend, weil wir eine starke Voraussetzung an die Dimension n machen müssen.
Das Problem für dieses spezielle Beispiel liegt darin, dass wir nicht über die Null hinweg integrieren können :

$$\frac{1}{|k|^s} \notin L^1(B_\varepsilon(0)) \quad \forall s \geq 1,\ \forall \varepsilon > 0$$

Wir umgehen diese Schwierigkeit, indem wir in die komplexen Zahlen ausweichen !

1.8. $P(z) := \left(-1(k_1^2 + \dots + k_{n-1}^2 + z^2)\right)^m$ hat die Nullstellen

$$z_0 = \pm i(k_1^2 + \dots + k_{n-1}^2)^{1/2}$$

Setze : $$\Phi(k) := \begin{cases} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} k_j^2\right)^{1/2} & \text{falls } \sum_{j=1}^{n-1} k_j^2 < 4 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $k = (k_1 \dots k_{n-1})$

$\gamma(k)$: $\operatorname{Im} w = \Phi(k)$ dh

$t \mapsto w(t) = t + i\Phi(k) \quad t \in (-\infty, \infty)$

Bem. $|\Phi(k) - \operatorname{Im} z_0| \geq 1$

Wir definieren nun :

$$u(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\gamma(k)} \frac{\hat{\varphi}(k,w)}{P(w)} e^{i\sum_1^{n-1} k_j x_j} e^{iwx_n}\, dw\, dk. \text{ Dann ist}$$

$$\Delta^m u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\gamma(k)} \frac{\hat{\varphi}(k,w)}{P(w)} \Delta^m e^{i\sum_1^{n-1} k_j x_j} e^{iwx_n}\, dw\, dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\gamma(k)} \hat{\varphi}(k,w) e^{i(\sum_1^{n-1} k_j x_j + wx_n)}\, dw\, dk$$

Bem. $u(x)$ ist wohldefiniert (vgl. u. 1.9. (8) ff)

Bew. $^\Gamma P(k) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha k^\alpha$. $P_m(k) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha k^\alpha$

(1) Bem. OBdA können wir annehmen, dass

$P_m(e_n) \neq 0$, dh $a_{e_n} \neq 0$ $(e_n = (0\dots 0,1))$; wähle sonst

η mit $|\eta| = 1$ und $P_m(\eta) \neq 0$ (existiert!)

und bestimme eine orth. Matrix A so, dass

$A\eta = e_n$, setze $y := Ax$; damit wird

$D_x = A^T D_y$ und wir müssen

$P(A^T D_y)\cdot u(y) = \varphi(y)$ lösen.

(2) Sei wieder $k = (k_1 \dots k_{n-1})$. Wir schreiben nun $P(k)$ geordnet nach Potenzen von k_n, wobei wir im gleichen Schritt $k_n \in \mathbb{R}$ durch $z \in \mathbb{C}$ ersetzen:

$$P(k,z) = z^m + c_{m-1}(k) z^{m-1} + \dots + c_0(k)$$

Bem. OBdA können wir annehmen, dass $c_m = 1$;
c_m ist unabhängig von k (weshalb?),
und falls $c_m \neq 1$, betrachte anstelle von
$P(k,z)$ das Polynom $\frac{1}{c_m} P(k,z) =: P'(k,z)$

Für je eine Lösung u' von $P'(D)u' = \varphi$ und
u von $P(D)u = \varphi$
gilt dann natürlich: $u' = c_m u$.

(3) Seien $\lambda_1(k), \dots \lambda_m(k)$ die Nullstellen von $P(k,z)$, dh.

$$P(k,z) = \prod_{j=1}^{m} (z - \lambda_j(k))$$

Wir können annehmen, dass $\lambda_i \preceq \lambda_j$ $(i<j)$, wobei

$z \prec w$ falls $\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} w$ oder
falls $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$

$\hat{\varphi}(z)$ ist analytisch, also gilt mit dem Satz von Cauchy:

$$\int_{\gamma(k)} \hat{\varphi}(k,w)\, e^{iwx_n}\, dw = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k_1 \dots k_n)\, e^{ik_n x_n}\, dk_n +$$

$$+ \lim_{R\to\infty} \Big(\int_0^{\Phi(k)} \hat{\varphi}(k, R+it)\, i e^{i(R+it)x_n}\, dt - \int_0^{\Phi(k)} \hat{\varphi}(k,-R+it)\, i e^{i(-R+it)x_n}\, dt \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k)\, e^{ik_n x_n}\, dk_n \quad , \text{ denn}$$

$|\hat{\varphi}(k, \pm R+it)| \to 0 \quad (R \to \infty)$:

⌈ $$\hat{\varphi}(k, \pm R+it) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, e^{-ikx'}\, e^{-i(\pm R+it)x_n}\, dx_n\, dx'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{tx_n} \varphi(x)\, e^{-i(\pm R)x_n}\, dx_n \Big) e^{-i\sum_1^{n-1} k_j x_j}\, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$= \widehat{e^{tx_n}\varphi}\,(k, \pm R)$$

$e^{tx_n}\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also $\widehat{e^{tx_n}\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$|\widehat{e^{tx_n}\varphi}(k)| \to 0$ für $|k| \to \infty$. ⌋

$$\Rightarrow \Delta^m u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\, dk = \varphi(x)\,;$$

zudem ist offensichtlich, dass $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wir haben also eine Lösung $u \in C^\infty$ von $\Delta^m u = \varphi$ gefunden, ohne eine Bedingung an die Dimension n zu machen!

1.9. <u>Satz</u> (Malgrange-Ehrenpreis)

Sei $P(k)$ ein beliebiges Polynom (mit konst. Koeff.) vom Grade m, und sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Dann existiert eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ von $P(D)u = \varphi$

Bem. $\lambda_j(k)$ ist stetig in k.

(4) Wir konstruieren jetzt eine messbare Funktion Φ

$$\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$$
$$k \mapsto \Phi(k) \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

(i) $\min\limits_{j=1\dots m} \{ |\Phi(k) - \operatorname{Im} \lambda_j(k)| \} \geq 1$

$\forall k \in \mathbb{R}^{n-1}$

(ii) $\Phi(k) \in I := [-m-1, m+1]$

Bezeichne mit $L(M)$ die Länge eines Intervalles M.

(5) Bem.

(i) $L(I) = 2(m+1)$

(ii) $\forall k$ existiert mindestens ein Intervall $J \subset I$ so, dass $L(J) \geq 2$ und $\operatorname{Im} \lambda_j(k) \notin J \quad \forall j \in \{1 \dots m\}$

(6) Setze $\forall j = 1 \dots m$

$$\mu_j(k) := \begin{cases} m+1 & \text{falls } \operatorname{Im} \lambda_j(k) > m+1 \\ \operatorname{Im} \lambda_j(k) & \text{falls } \operatorname{Im} \lambda_j(k) \in I \\ -m-1 & \text{falls } \operatorname{Im} \lambda_j(k) < -m-1 \end{cases}$$

$$\mu_0(k) := -m-1$$
$$\mu_{m+1}(k) := m+1$$

$$V_j := \{ k \mid \mu_{j+1}(k) - \mu_j(k) \geq 2 \} \qquad j = 0 \dots m$$

Nach (5) (ii) gilt: $\forall k$ existiert $j \in \{0 \dots m\}$ mit $k \in V_j$, also $\bigcup\limits_{j=0}^{m} V_j = \mathbb{R}^{n-1}$

Da $\lambda_j(k)$ stetig in k, ist auch $\mu_j(k)$, also auch $\mu_{j+1}(k) - \mu_j(k)$ stetig in k, insbesondere messbar. Daraus folgt, dass V_j eine messbare Menge ist.

(7) Setze nun $W_j := V_j \setminus \bigcup\limits_{\ell<j} (V_j \cap V_\ell)$. Dann gilt:

(i) W_j ist messbar

(ii) $W_i \cap W_j = \emptyset \quad (i \neq j)$; $\bigcup\limits_{j=0}^{m} W_j = \mathbb{R}^{n-1}$

Setze schließlich

$$\Phi(k) := \sum_{j=0}^{m} \tfrac{1}{2}\left(\mu_{j+1}(k) - \mu_j(k)\right) \cdot 1_{W_j} \quad \text{, wobei}$$

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

d.h. $\Phi(k)$ ist Mittelpunkt eines eindeutigen (!) Intervalles $J \subset I$ mit $L(J) \geq 2$ und
$|\operatorname{Im} z_j - \Phi(k)| \geq 1 \quad \forall j = 1 \ldots m$.

$\Phi(k)$ ist messbar, denn:

sei $c \in \mathbb{R}$. $\{k \in W_j \mid \Phi(k) < c\} = \{k \mid \tfrac{1}{2}(\mu_{j+1}(k) - \mu_j(k)) < c\} \cap W_j$
ist messbar (nach (6) und (7)(i)), also
ist auch

$$\bigcup_{j=0}^{m} \{k \in W_j \mid \Phi(k) < c\} = \{k \mid \Phi(k) < c\} \text{ messbar.}$$

(8) Setze nun:

$$u(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\operatorname{Im} w = \Phi(k)} \frac{\hat{\varphi}(k, w)}{P(k, w)} e^{i(k,w)\cdot x} \, dw \, dk$$

Um zu zeigen, dass $u(x)$ wohldefiniert ist, (d.h. $|u(x)| < \infty \ \forall x \in \mathbb{R}^n$) brauchen wir folgende Verfeinerung von 1.5. :

1.10. <u>Proposition</u> Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset B_r(0)$. Dann existieren Konstanten γ_N $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ so, dass

$$|\hat{\varphi}(z)| \leq \frac{\gamma_N}{(1 + |z|)^N} e^{r \cdot |\operatorname{Im} z|},$$

$$\text{wobei } |z| = \left(\sum_1^n |z_i|^2\right)^{1/2},$$

$$|\operatorname{Im} z| = \left(\sum_1^n (\operatorname{Im} z_i)^2\right)^{1/2}$$

Bew. ⌈ Für $x \in B_r(0)$ gilt:

$$|e^{-izx}| \leq e^{|\mathrm{Im}\, z| \cdot |x|} \leq e^{r|\mathrm{Im}\, z|}$$

Wenn wir $\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-izx} dx$

partiell integrieren, erhalten wir

$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) \frac{1}{z^\alpha} e^{-izx} dx$$

$$\Rightarrow \quad |z^\alpha| \cdot |\hat{\varphi}(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi(x)| dx \cdot e^{r \cdot |\mathrm{Im}\, z|}$$

$$\Rightarrow \quad (1+|z|)^N \cdot |\hat{\varphi}(z)| \leq \gamma_N \cdot e^{r \cdot |\mathrm{Im}\, z|}$$

⌋

Nun setzen wir den Beweis von 1.9. fort:

(0) Nach Konstruktion ex. eine Konstante $\varepsilon > 0$ mit $|P(k,w)| > \varepsilon^{-1}$ für $\mathrm{Im}\, w = \Phi(k)$, $\forall k \in \mathbb{R}^{n-1}$.
(ε ist abhängig vom Polynom P).

$$\Rightarrow |u(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathrm{Im}\, w = \Phi(k)} \frac{\hat{\varphi}(k,w)}{P(k,w)} e^{i(k,w)\cdot x} dw\, dk \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathrm{Im}\, w = \Phi(k)} |\hat{\varphi}(k,w)| \cdot |e^{i(k,w)\cdot x}| dw\, dk \leq$$

$$\leq \frac{\gamma_N \cdot \varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathrm{Im}\, w = \Phi(k)} \frac{e^{r \cdot |\mathrm{Im}(k,w)|}}{(1+|(k,w)|)^N} \cdot e^{-\mathrm{Im}\, w \cdot x_n} dw\, dk$$

$$\left(|\mathrm{Im}(k,w)| = |\mathrm{Im}\, w| \leq m+1, \text{ vgl } (4)(ii) \right)$$

$$\leq \frac{\gamma_N \cdot \varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} e^{(m+1)(r+|x_n|)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathrm{Im}\, w = \Phi(k)} \frac{dw\, dk}{(1+|(k,w)|)^N} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon \gamma_N}{(2\pi)^{n/2}} \; e^{(m+1)(r+|\kappa_n|)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|k|)^N} \, dk \; < \infty$$

(10) Es ist klar, dass $u(x) \in C^\infty$.

Anwendung des Satzes von Cauchy (- Abschätzungen mithilfe I. 10. ! -) liefert

$$\int_{\operatorname{Im} w = \Phi(k)} \hat{\varphi}(k, w)\, e^{i(k,w)\cdot x}\, dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k, k_n)\, e^{i(k,k_n)\cdot x}\, dk_n$$

und damit:

$$P(D)\,u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\operatorname{Im} w = \Phi(k)} \hat{\varphi}(k, w)\, e^{i(k,w)\cdot x}\, dw\, dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\, dk = \varphi(x)$$

$\lrcorner$

2. Exkurs über Distributionen

In Abschnitt II.3. haben wir den Raum $\mathcal{S}'$ der temperierten Distributionen als Dualraum vom Schwartz-Raum $\mathcal{S}$ eingeführt; die Absicht war, die Fouriertransformation zu verallgemeinem. Anderes – etwa: Differentiation, Faltung – kam zu kurz; dies will ich in diesem Abschnitt nachholen und zwar für eine Verallgemeinerung von $\mathcal{S}'$: zuerst führen wir den Raum $\mathcal{D}'$ der (allg) Distributionen ein, der $\mathcal{S}'$ umfasst.
Man beachte die Analogien zu $\mathcal{S}'$!

2.1. <u>Definition</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(1) Wir führen auf $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ folgende Normen ein:

$$\|\varphi\|_N := \max_{\substack{|\alpha| \le N \\ x \in \Omega}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

(2) Eine Folge φ_j in $\mathcal{D}(\Omega)$ heisst <u>konvergent gegen φ in $\mathcal{D}(\Omega)$</u>, falls

(i) ex eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \quad \forall j$

(ii) $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_N = 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+$.

Eine Folge φ_j in $\mathcal{D}(\Omega)$ heisst <u>Cauchyfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$</u>, falls Bdg (i) gilt und

(iii) $\lim_{i,j\to\infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|_N = 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+$

2.2. <u>Bemerkungen</u>

(1) Cauchyfolgen in $\mathcal{D}(\Omega)$ sind konvergente Folgen

(2) In $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergente Folgen konvergieren glm in

allen Ableitungen.

2.3. Definition

Ein stetiges lineares Funktional u auf $\mathcal{D}(\Omega)$ heisst Distribution; $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Explizit: u ist eine Distribution gdw

(i) $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$
(ii) $u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha u(\varphi) + \beta u(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$
(iii) $u(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} u(\varphi)$ falls $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$

(vgl I.3.1.)

2.4. Bemerkungen

(1) jede Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{ f \mid \forall$ kompakten Mengen K ist $f \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n) \}$,

definiert eine sog. regulare Distribution auf Ω:

$$u_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$u_f(\cdot) \in \mathcal{D}'$, denn: sei $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, dann ist $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ und $\max_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_j(x)| \to 0$,

also ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ $\quad |u_f(\varphi_j)| \leq \varepsilon \cdot \left| \int_K f\, dx \right| \quad \forall j > j_0$

(2) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ heisst lokal-integrierbar

(3) da $C(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definiert jede stetige Funktion eine reguläre Distribution.

(4) $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$: sei $u \in \mathcal{S}'$ und sei $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.
Es gilt: $(\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi) \Rightarrow (\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi)$. Also folgt

$$u(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} u(\varphi)$$

2.5. <u>Lemma</u> Die Einbettung von $C(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist injektiv, dh.

$$\text{aus } u_f(\varphi) = u_g(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ folgt } f \equiv g$$

Bew $\ulcorner$ (indirekt) Setze $h := f - g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Annahme: $h \not\equiv 0$. Dann ex $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $B_\varepsilon(x_0)$ mit $h(x) > 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ (h ist stetig!)

Setze

$$\varphi_a(x) := \begin{cases} \exp \dfrac{a^2}{a^2 - |x_0 - x|^2} & \text{für } |x_0 - x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl 1.2. (ii))

Wähle $a = \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Rightarrow 0 = u_f(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}) - u_g(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\,dx =$$

$$= \int_{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)} h(x)\,\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\,dx > 0$$ nach Annahme und Konstruktion, also Wi. $\lrcorner$

Bemerkung: Es kann sogar gezeigt werden, dass die Einbettung von $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ injektiv ist.

2.6. <u>Definition</u> Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann wird durch

$$\partial^\alpha u : \varphi \longmapsto (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) \qquad (\varphi \in C_0^\infty)$$

eine Distribution definiert; denn aus $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ folgt $\partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial^\alpha \varphi$.

$\partial^\alpha u$ heisst <u>α-te distributionelle Ableitung von u</u>

Wir halten fest, dass diese Definition verträglich ist mit der klassischen Definition der Ableitung:

Sei $f \in C^m$; dann gilt $\forall |\alpha| \leq m$:

$$\partial^\alpha u_f(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int f(x)\, \partial^\alpha \varphi(x)\, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} \int \partial^\alpha f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= u_{\partial^\alpha f}(\varphi) \qquad (\varphi \in C_0^\infty\ !)$$

2.7. <u>Definition</u> Sei $f \in C^\infty$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann wird durch

$$fu : \varphi \longmapsto u(f\varphi) \qquad (\varphi \in C_0^\infty)$$

eine Distribution definiert; denn aus

$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ folgt $f\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} f\varphi$ $\quad (f\varphi_j \in C_0^\infty\ !)$

fu heisst <u>Multiplikation</u> der Fkt f mit der Distribution u

Diese Definition ist wiederum verträglich mit der üblichen Definition der Multiplikation von zwei Funktionen:

Sei $f \in C^\infty$, $g \in L^1_{loc}$.

$$fu_g(\varphi) \overset{\text{def}}{=} u_g(f\varphi) = \int g\,(f\varphi)\,dx = \int (fg)\varphi\, dx$$

$$= u_{fg}(\varphi) \qquad (\varphi \in C_0^\infty)$$

2.8. <u>Definition</u>

Eine Folge u_j von Distributionen heisst <u>gegen u konvergent in $\mathcal{D}'$</u>, oder auch: <u>distributionell konvergent</u>, falls $u_j(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} u(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$

2.9. <u>Lemma</u> Sei $u_j \in \mathcal{D}'$

(1) Falls $\lim\limits_{j\to\infty} u_j(\varphi)$ $\forall \varphi \in C_0^\infty$ (in $\mathbb{C}$!) existiert, so ist durch $u : \varphi \longmapsto \lim\limits_{j\to\infty} u_j(\varphi)$ eine Distribution definiert.

(2) $\partial^\alpha u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial^\alpha u$ falls $u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$

Bew ⌐ (1) glauben wir.

$$(2)\ \partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) = \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} u_j(\partial^\alpha \varphi)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \partial^\alpha u_j(\varphi) \quad \lrcorner$$

2.10. <u>Definition</u> Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

u <u>verschwindet</u> auf der offenen Menge ω, falls

$u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega)$.

Sei U die Vereinigung aller offenen Mengen, auf denen u verschwindet. Dann heisst

$\operatorname{supp} u := \Omega \setminus U$ der <u>Träger von u</u>.

Bemerkung: u verschwindet auf U (ohne Beweis)

Wir notieren einen Satz - ohne Beweis - der eine Beziehung zwischen den stetigen Funktionen und den Distributionen herstellt:

2.11. <u>Satz</u> (1) Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Dann ex $f \in C(\Omega)$ und ein Multiindex α so, dass

$$u(\varphi) = \partial^\alpha f(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

(∂^α im distributionellen Sinn)

(2) Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann existiert zu jedem Multiindex α eine Funktion $g_\alpha \in C(\Omega)$ (unter Umständen $g_\alpha = 0$) so, dass

(i) $K \cap \operatorname{supp} g_\alpha = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele α und für alle kompakten Mengen K

(ii) $u = \sum \partial^\alpha g_\alpha$.

2.12. Faltung von Funktionen und Distributionen

Wir haben bereits früher die Faltung von zwei Funktionen definiert; mit einer etwas modifizierten Schreibweise wird eine Verallgemeinerung auf die Distributionen ersichtlich; im folgenden bezeichne $\mathcal{D}$ stets $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und $\mathcal{D}'$ stets $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2.13. Definition Für eine Funktion g bezeichne mit

$$\tau_x g(y) := g(y-x) \quad \text{die Translation um } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\sigma g(y) := g(-y)$$

$$\tau_x \sigma g(y) := \sigma(\tau_x g(y)) = \sigma(g(y-x)) = g(x-y)$$

(Beachte die Umkehrung der üblichen Kompositionsregel!)

– Für zwei Funktionen f, g ist dann die Faltung

$$f * g(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \tau_x \sigma g(y)\, dy = u_f(\tau_x \sigma g)$$

(sofern das Integral für fast-alle x ex.)

Dies motiviert folgende Definition der Faltung für $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in C_0^\infty$:

$$u * \varphi(x) := u(\tau_x \sigma \varphi)$$

(Attenzione: Für ein beliebiges, aber festes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Distribution u für die Funktion $\tau_x \sigma \varphi(y)$ in der Variablen y auszuwerten!

Damit erhält man die Funktion:

$$x \longmapsto u * \varphi(x) = u(\tau_x \sigma \varphi) \quad ! \quad)$$

– Die Beziehung $\int (\tau_x f(y)) g(y)\,dy = \int f(y)(\tau_{-x} g(y))\,dy$ legt folgende Verallgemeinerung nahe:

$$\tau_x u(\varphi) := u(\tau_{-x}\varphi) \quad (u \in \mathcal{D}', \varphi \in C_0^\infty)$$

2.14. Satz Sei $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in C_0^\infty$. Dann ist

(i) $\tau_x(u*\varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi)$

(ii) $\partial^\alpha(u*\varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u*(\partial^\alpha \varphi)$ $\forall \alpha$, also

$$u * \varphi \in C^\infty \, !$$

Bew ⌈ (i) Es gilt: $\tau_x \tau_y g = \tau_{x+y} g$ und

$$\tau_x \sigma g = \sigma \tau_{-x} g.$$

Damit folgt:

$(\tau_x(u*\varphi))(y) = (u*\varphi)(y-x) = u(\tau_{y-x}\sigma\varphi)$

$((\tau_x u)*\varphi)(y) = (\tau_x u)(\tau_y \sigma \varphi) = u(\tau_{-x}\tau_y \sigma\varphi) = u(\tau_{y-x}\sigma\varphi)$

$(u*(\tau_x\varphi))(y) = u(\tau_y \sigma \tau_x \varphi) = u(\tau_y \tau_{-x}\sigma\varphi) = u(\tau_{y-x}\sigma\varphi)$

(ii) Es ist $\tau_x \sigma(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\tau_x \sigma \varphi)$. Wenn wir auf beiden Seiten u anwenden, erhalten wir:

$$u*(\partial^\alpha\varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi$$

Sei ν ein Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$.

Setze $\nu_r := \frac{1}{r}(\tau_0 - \tau_{r\nu})$, wobei $r > 0$

Nach (i) ist $\quad \nu_r(u*\varphi) = u*(\nu_r\varphi)$.

Für $r \longrightarrow 0$ gilt: $\nu_r\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial_\nu \varphi$, die

Richtungsableitung von φ in Richtung ν :

Es genügt $\nu_r\varphi \xrightarrow[(r\downarrow 0)]{glm} \partial_\nu\varphi$ zu zeigen, denn

$\partial^\alpha(\nu_r\varphi) \xrightarrow[(r\downarrow 0)]{glm} \partial^\alpha(\partial_\nu\varphi)$ ist nichts anderes, als

$\nu_r\psi \xrightarrow[(r\downarrow 0)]{glm} \partial_\nu\psi$ für $\psi = \partial^\alpha\varphi$, da $\partial^\alpha(\nu_r\varphi) = \nu_r(\partial^\alpha\varphi)$

und $\partial^\alpha(\partial_\nu\varphi) = \partial_\nu(\partial^\alpha\varphi)$.

Dass für hinreichend kleines r $\operatorname{supp}\nu_r\varphi \subset K$ für eine geeignete kompakte Menge K, ist offensichtlich.

Also: $r\,|\nu_r\varphi(x) - \partial_\nu\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x-r\nu) - r\,\partial_\nu\varphi(x)| =$

$$= \left|\int_0^1 r\,\partial_\nu\varphi(x-sr\nu)\,ds - r\,\partial_\nu\varphi(x)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 r\,\partial_\nu\big(\varphi(x-sr\nu) - \varphi(x)\big)\,ds\right| \le r\,\varepsilon(r)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\varepsilon(r) \to 0$ falls $r \to 0$,

und zwar wegen der glm Stetigkeit von $\partial_\nu\varphi$.

$\Rightarrow |\nu_r\varphi(x) - \partial_\nu\varphi(x)| \le \varepsilon(r)$, also $\nu_r\varphi \xrightarrow[(r\downarrow 0)]{glm} \partial_\nu\varphi$

Daraus schliessen wir: $\tau_x\sigma\,\nu_r\varphi \xrightarrow[(r\downarrow 0)]{\mathcal{D}} \tau_x\sigma\,\partial_\nu\varphi$,

also insgesamt:

$$\partial_\nu(u*\varphi) \equiv \lim_{r\downarrow 0}\nu_r(u*\varphi) = \lim_{r\downarrow 0} u*(\nu_r\varphi) = u*\partial_\nu\varphi$$

und Iteration dieses Arguments liefert:

$$\partial^\alpha(u*\varphi) = u*(\partial^\alpha\varphi)$$

$\lrcorner$

Eine ähnliche Aussage kann unter etwas anders gelagerten Bedingungen gemacht werden:

2.15. <u>Satz</u> Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha(f*g) = f*(\partial^\alpha g)$ $\forall |\alpha| \le k$

Bew. ⌜(1) Sei $k=0$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\psi_x : y \mapsto f(y)\, \tau_x \sigma g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

insbesondere ist $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_x\sigma g(y)\,dy$ wohldefiniert $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Für eine beliebige Folge x_n, $x_n \to x$ ist zu zeigen:

$$f*g(x_n) \to f*g(x) \quad (n \to \infty).$$

Wir definieren: $G_n(y) := f(y)\,\tau_{x_n}\sigma g(y)$

$$G(y) := f(y)\,\tau_x\,\sigma g(y)$$

Da $g \in C_0$, folgt unmittelbar, dass $G_n \xrightarrow{L^1} G$

Wir wählen eine kompakte Menge K so, dass $x_n - \operatorname{supp} g \subset K \quad \forall n$

$\Rightarrow \tau_{x_n}\sigma g(y) = 0 \quad \forall y \notin K \Rightarrow |G_n(y)| \leq \max\limits_{x\in K}|g(x)| \cdot 1_K(y)|g(y)|$

und damit haben wir eine integrierbare Majorante gefunden. Anwendung des Konvergenzsatzes von Lebesgue liefert:

$$\lim_{n\to\infty} (f*g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_n(y)\,dy \overset{KSL}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} G_n(y)\,dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(y)\,dy = f*g(x)$$

(2) Sei $k \geq 1$. Wie im Beweis von 2.14. (ii) zeigt man, dass $|\nu_r g(x) - \partial_\nu g(x)| \leq \varepsilon(r) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$, und dies ist aequivalent zu

$$|\tau_x\sigma\nu_r g(y) - \tau_x\sigma\partial_\nu g(y)| \leq \varepsilon(r) \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$$ und für jedes beliebige, aber feste x.

Wir wählen eine kompakte Menge K so, dass

$(x + B_1(0) - \operatorname{supp} g) \subset K$; dann ist

$$|\tau_x \sigma \nu_r g(y) - \tau_x \sigma \partial_\nu g(y)| = 0 \quad \forall y \notin K, \ \forall r \in [0,1]$$

(x beliebig, aber fest!)

$$\Rightarrow \ |\tau_x \sigma \nu_r g(y) - \tau_x \sigma \partial_\nu g(y)| \leq \varepsilon(r) \cdot 1_K(y)$$

$$\Rightarrow \ |\nu_r (f * g)(x) - f * \partial_\nu g(x)| = |f * \nu_r g(x) - f * \partial_\nu g(x)| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) [\tau_x \sigma \nu_r g(y) - \tau_x \sigma \partial_\nu g(y)] \, dy \leq \varepsilon(r) \cdot \int_K |f(y)| \, dy ,$$

und dies zeigt, dass $\lim\limits_{r \searrow 0} \nu_r (f * g)(x)$ existiert

$(=: \partial_\nu (f * g)(x))$ und dass $\partial_\nu (f*g)(x) = f * (\partial_\nu g)(x)$.

Iteration dieses Arguments liefert die Behauptung. ┘

2.16. Satz (Approximierende Identität, Regularisierung)

Sei $h_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$,

wobei $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h \geq 0$, und $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx = 1$

(i) Für $f \in C(\mathbb{R}^n)$ gilt: $f * h_\varepsilon \xrightarrow[(\varepsilon \searrow 0)]{glm} f$ auf jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$

(ii) Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\varphi * h_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$

(iii) Für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt: $u * h_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$

Bew ┌ (i) $|f * h_\varepsilon(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) h_\varepsilon(y)\,dy - f(x)\right| =$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-\varepsilon y) - f(x)) \, h(y)\,dy\right| \leq$$

$$\leq \int_{\operatorname{supp} h} |f(x-\varepsilon y) - f(x)| \, h(y)\,dy$$

Sei jetzt K eine beliebige kompakte Menge $\subset \mathbb{R}^n$

Zu $\gamma > 0$ wähle $0 < \varepsilon(\gamma, K) < 1$ so, dass
$|f(x-\varepsilon y) - f(x)| < \gamma \quad \forall x \in K, \ \forall y \in \operatorname{supp} h$ (ein solches
ε existiert, da $(K - \operatorname{supp} h)$ kompakt ist !)

$\Rightarrow$ $|f * h_\varepsilon(x) - f(x)| < \gamma \quad \forall x \in K$ und da $\gamma > 0$
beliebig war, folgt (i).

(2) Wenn wir (1) auf $f = \partial^\alpha \varphi$ anwenden, folgt:

$$\partial^\alpha(\varphi * h_\varepsilon) = (\partial^\alpha \varphi) * h_\varepsilon \xrightarrow[(\varepsilon \downarrow 0)]{glm} \partial^\alpha \varphi$$

Da zudem $\operatorname{supp}(\varphi * h_\varepsilon) \subset K$ für ein geeignetes
K (kompakt) und für hinreichend kleines ε
$\left(- \operatorname{supp} h_\varepsilon \xrightarrow[(\varepsilon \downarrow 0)]{} \{0\} \ ! -\right)$, folgt (ii)

(3) Wir verwenden (ohne Beweis):
Für $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ gilt: $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$

(4) $$u(\sigma\varphi) = (u * \varphi)(0) \overset{(ii)}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u * (h_\varepsilon * \varphi))(0) \overset{(3)}{=}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((u * h_\varepsilon) * \varphi)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u * h_\varepsilon)(\sigma\varphi),$$

und da $\varphi \in C_0^\infty$ beliebig war, folgt (iii)

$\lrcorner$

3. Pseudodifferentialoperatoren und Sobolev-Räume

Im Abschnitt IV.1. haben wir partielle Differentialoperatoren (PDO) mit konstanten Koeffizienten betrachtet; in diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem viel heikleren Fall von PDO's mit nicht-konstanten Koeffizienten:

$$P(x,D) := \sum a_\alpha(x) D^\alpha .$$

Dieses Kapitel soll eine Einführung in das weite Gebiet der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (PDE's) sein, und zwar von einem ziemlich allgemeinen Standpunkt her – in den folgenden Abschnitten wird dann auf spezielle (klassische) Probleme eingegangen.
In Form von Definitionen, Sätzen und Kommentaren werden die Ideen dieses Kapitels vorgestellt; auf allzu technische Beweise wird verzichtet.

3.1. Definition Eine Funktion

$$p(x,k) : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

heisst Symbol vom Grade $m \in \mathbb{R}$, falls

(i) $p(x,k) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$

(ii) $\forall\, \alpha,\beta$ existiert $c_{\alpha,\beta}$ mit

$$|D_x^\alpha \partial_k^\beta p(x,k)| \le c_{\alpha,\beta}\,(1+|k|)^{m-|\beta|} \quad (x\in\Omega,\ k\in\mathbb{R}^n)$$

Die Menge der Symbole vom Grade m bezeichne mit S^m.

3.2. Definition Sei $a \in S^m$.

$$Au(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\, a(x,k)\, \hat{u}(k)\, dk$$

A heisst <u>Pseudodifferentialoperator</u> (ΨDO) mit Symbol $a(x,k)$;
$$a(x,k) =: \sigma(A)$$
Mit OPS^m bezeichnen wir die Menge der ΨDO's P mit $\sigma(P) \in S^m$.

3.3. <u>Bemerkung</u>

Die Definitionen 3.1. und 3.2. sind Verallgemeinerungen der klassischen Definition:

S^m umfasst natürlich die Polynome
$$p(x,k) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) k^\alpha, \ a_\alpha(x) \in C^\infty,$$
insbesondere gehören zu OPS^m alle (klassischen) ΨDO's von der Form
$$P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha \text{ mit}$$
$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} k^\alpha \hat{u}(k)\, dk$$

<u>Zur Motivation</u> der Verallgemeinerung folgendes:

Betrachte die PDE (partial differential equation):
$$P(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = \varphi(x);$$
zu vorgegebenem φ wollen wir u bestimmen.

Im Abschnitt 1 lautete die PDE: $P(D)u = \varphi$, und formal konnten wir schreiben:
$$P(k)\hat{u} = \hat{\varphi}; \quad \hat{u} = \frac{\hat{\varphi}}{P(k)}; \quad u = \left(\frac{\hat{\varphi}}{P(k)}\right)^\vee$$
und eine Modifikation der Integration lieferte brauchbare Ergebnisse.

Hier gelingt dies nicht mehr : die Multiplikationsoperatoren $a_\alpha(x)$ werden unter der Fouriertransformation zu Differentialoperatoren !

An der Idee aber hält man fest : man sucht einen zu $P(x,D)$ inversen Operator Q, der gewisse Minimalforderungen erfüllen soll : zB soll $QP = PQ = \mathbb{1}$ gelten (- es wird noch zu präzisieren sein, wie die Gleichheit von Operatoren zu verstehen ist).
Sicher fällt man damit aus dem Rahmen der klassischen PDO's. Das Problem besteht darin, einen Raum von Operatoren zu konstruieren, der die klassischen PDO's umfasst, und der die Bestimmung von Inversen zulässt.

3.4. <u>Definition</u> (klassisch)

Der Differentialoperator $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ heisst <u>elliptisch</u>, falls $\forall k \neq 0$:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) k^\alpha \neq 0$$

3.5. <u>Definition</u> (verallg.)

$p(x,k) \in S^m$ definiert einen <u>elliptischen ΨDO</u>, falls $\forall |k| \gg 1$, dh. für alle hinreichend grossen $|k|$, gilt :

(i) $p(x,k)^{-1}$ existiert

(ii) $|p(x,k)|^{-1} \leq c(1+|k|)^{-m}$ für eine Konstante c.

3.6. <u>Bemerkung</u>

In Serie 9 Aufg 1 wurde gezeigt, dass für $p(x,k) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) k^\alpha$ die beiden Definitionen aequivalent sind.

3.7. Beispiele

(1) $\frac{\partial}{\partial t} u = c(x)\Delta u$, die Wärmeleitungsglchg mit Diffusionsfunktion $c(x)$

$p(x,t;k,h) = -c(x)\sum k_j^2 + ih$

(2) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \frac{1}{c^2(x)}\Delta u$, die Wellengleichung mit Fortpflanzungsgeschw. $c(x)$

(3) $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar z} f = 0$, die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

$p(x,y;k_1,k_2) = \frac{1}{2}(ik_1 - k_2)$;
daraus folgt : $P(x,D)$ ist elliptisch
($P(x,D)f = 0$ charakterisiert die analytischen Funktionen)

3.8. Definition Auf der Menge aller Symbole definieren wir folgende Aequivalenzrelation :
Seien a, b Symbole ; $a \sim b$ gdw $a - b \in S^m$ $\forall m$

Für die zugehörigen Operatoren A mit $\sigma(A) = a$ und B mit $\sigma(B) = b$: $A \sim B$ gdw $a \sim b$.

3.9. Definition

Seien a, a_j $(j \geq 0)$ Symbole.
Wir schreiben $a \sim \sum_{j\geq 0} a_j$, falls $\forall m$ gilt :
$a - \sum_{j=0}^{n} a_j \in S^m$ für hinreichend grosses n
und sagen : $\sum a_j$ ist asymptotisch aequivalent zu a

3.10. <u>Satz</u> Sei $p_j \in S^{m_j}$; $m_j > m_{j+1} > \dots$; $m_j \to -\infty$ $(j \to \infty)$
dann existiert ein ΨDO P mit Symbol p so, dass $p \sim \Sigma p_j$.
P ist eindeutig im Sinne der Aequivalenzrelation dh. falls ein $\tilde{P}$ existiert mit $\sigma(\tilde{P}) = \tilde{p}$ und $\tilde{p} \sim \Sigma p_j$, dann gilt

$$p \sim \tilde{p}.$$

(ohne Beweis)

3.11. <u>Satz</u> Seien P, Q ΨDO's. Dann ist auch $P \cdot Q$ ein ΨDO und es gilt

$$\sigma(P \cdot Q) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q$$

(ohne Beweis)

3.12. <u>Satz</u> Sei P ein elliptischer $\Psi DO \in OPS^m$.
Dann existiert ein bis auf Aequivalenz eindeutiger ΨDO $Q \in OPS^{-m}$ so, dass

$$PQ \sim \mathbb{1}, \quad QP \sim \mathbb{1}.$$

Bew. ⌈ Sei $\sigma(P) \in S^m(\Omega)$, $\sigma(P) = p(x,k)$.

Wir führen den Beweis unter der Annahme, dass $\dfrac{1}{p(x,k)}$ $\forall k$ existiert.

Das Symbol von Q hat die Form:

$$\sigma(Q) = q_0 + q_1 + q_2 + \dots$$

mit $q_j \in S^{-m-j}$ (es treten keine Glieder $q_k \in S^{m'}, m' > -m$ auf; sonst wäre

$$\sigma(PQ) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q \notin S^m \ \forall m \quad ! \ )$$

Unter Verwendung von:

$\partial_k^\alpha p \in S^{m-|\alpha|}$, $D_x^\alpha q_j \in S^{-m-j}$ (vgl Def von S^m!)
folgt $\partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j \in S^{-|\alpha|-j}$ und weiter:

$$\sigma(PQ) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q \text{ , also}$$

$$\sigma(PQ) \sim \sum_{\alpha, j} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(\sum_{|\alpha|+j=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j \Big),$$

mit
$$\sum_{|\alpha|+j=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j \in S^{-\ell}.$$

Nun machen wir Termvergleich und bestimmen induktiv die Glieder q_j: $\qquad (PQ \overset{!}{=} \mathbb{1})$

Für $\ell = 0$: $\alpha = 0, j = 0$; also $1 \overset{!}{=} p q_0 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{p}$

Für alle $\ell > 0$ gilt daher: $\displaystyle\sum_{|\alpha|+j=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j \overset{!}{=} 0$

Es seien $q_0, q_1 \dots q_{\ell-1}$ definiert. Dann ist

$$\sum_{|\alpha|+j=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j = p q_\ell + \sum_{\substack{|\alpha|+j=\ell \\ j<\ell}} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad q_\ell \overset{!}{=} -\frac{1}{p} \Big(\sum_{\substack{|\alpha|+j=\ell \\ j<\ell}} \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \, D_x^\alpha q_j \Big),$$ und es gilt $q_j \in S^{-m-j}$.

Mit Satz 3.10. folgern wir: es existiert q,
$$q \sim \sum_{\ell \geq 0} q_\ell, \quad q \in S^{-m}.$$

Damit ist für den Operator Q mit $\sigma(Q) = q$

$$PQ \sim \mathbb{1} \text{ erfüllt.}$$

Auf analoge Weise bestimmt man nun das Symbol $\tilde{q}$ und den Operator $\tilde{Q}$ mit $\tilde{Q}P \sim \mathbb{1}$.

Q und $\tilde{Q}$ sind bis auf Äquivalenz identisch:

$\tilde{Q} \sim \tilde{Q}(PR) \sim (\hat{Q}P)Q \sim Q$
(Ueberlege, dass $P(QR) = (PQ)R$!) $\lrcorner$

Nachdem wir bisher die Operatoren studiert haben, gehen wir jetzt zu den Funktionenräumen und zu den Funktionen über, auf die sie wirken:

3.13. <u>Definition</u> Sei $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\|\varphi\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k)|^2 (1+|k|^2)^s \, dk$$

Mit $H_s(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Vervollständigung von $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_s)$, dh.

$$H_s(\mathbb{R}^n) := \overline{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_s)}$$

Die Räume H_s heissen <u>Sobolev-Räume</u>

3.14. <u>Bemerkungen</u>

(1) $H_0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ (Plancherel!)

(2) $\|\varphi\|_s \leq \|\varphi\|_t$, falls $s \leq t$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
$\left((1+|k|^2)^s \leq (1+|k|^2)^t \right)$; also $H_t \subset H_s$ falls $t \geq s$

(3) H_s ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt:

$$(u,v)_s := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|^2)^s \, u \bar{v} \, dk.$$

(4) Aufgrund der Konstruktion von H_s schliessen wir: $\mathcal{S} \subset H_s = H_s' \subset \mathcal{S}'$

Also gilt:

$$\mathcal{S}' \supset \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H_s =: H^{-\infty} \supset \ldots \supset H_{-1} \supset \ldots \supset H_0 \supset \ldots \supset H_1 \supset \ldots \supset \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H_s =: H^{\infty} \supset \mathcal{S}$$

3.15. <u>Definition</u> Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\tau_\nu \varphi(x) := \varphi(x-\nu)$.

Sei $\mu \in \mathbb{R}^n$, $|\mu| = 1$.

$\mu_r \varphi(x) := \frac{1}{r}\left(\tau_{-r\mu} - \tau_0\right)\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Falls $\lim\limits_{r \to 0} \mu_r \varphi(x)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (!) existiert,

so schreiben wir: $\lim\limits_{r\to 0} \mu_r \varphi(x) =: \partial_\mu \varphi$,

und sagen: Für φ existiert die <u>L^2-Ableitung in Richtung μ.</u>

Für $\mu = e_j$, $e_{jk} := \delta_{jk}$: $\partial_\mu \varphi := \partial_j \varphi$.

Analog werden die höheren L^2-Ableitungen definiert.

3.16. <u>Lemma</u> Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\varphi \in H_m \text{ gdw die } L^2\text{-Ableitung } D^\alpha \varphi \text{ ex } \forall |\alpha| \le m$$

(zur Erinnerung: $D_j = -i\partial_j$)

Bew (1) Wir setzen $D^\alpha \varphi := (k^\alpha \hat{\varphi})^\vee$ und müssen zeigen, dass $D^\alpha \varphi \in L^2$ und $D^\alpha\varphi$ ist L^2-Abltg.

(2) Sei $\varphi \in H_m$. Verwende: $k_j^2 \le 1 + |k|^2$

$$\|D_j \varphi\|_{m-1}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |k_j \hat{\varphi}|^2 \left(1+|k|^2\right)^{m-1} dk =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}|^2\, k_j^2 \left(1+|k|^2\right)^{m-1} dk \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}|^2 \left(1+|k|^2\right)^{m} dk = \|\varphi\|_m^2 < \infty,$$

also ist $D_j \varphi \in H_{m-1}$

$$\Rightarrow D^\alpha \varphi \in H_{s-|\alpha|} \subset H_0 \equiv L^2 \quad \forall |\alpha| \le m \Rightarrow \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} < \infty$$

(3) Ich zeige: für $\varphi \in H_m$ ist $(k_j\hat{\varphi})^\vee$ die L^2-Ableitung in Richtung e_j:

$$\|\mu_r\varphi - (k_j\hat{\varphi})^\vee\|_{L^2}^2 = \|\mu_r\varphi - (k_j\hat{\varphi})^\vee\|_0^2 \overset{\text{Plancherel}}{=}$$

$$= \|\widehat{\mu_r\varphi} - k_j\hat{\varphi}\|_0^2 = \left\| \frac{e^{ik_jr}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}}{ir} - k_j\hat{\varphi}\right\|_0^2 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{e^{ik_jr}-1}{ir} - k_j\right|^2 \cdot |\hat{\varphi}|^2\, dk$$

da $\left|\frac{e^{ik_jr}-1}{ir} - k_j\right| \le \frac{|e^{ik_jr}-1|}{r} + |k_j| \overset{\text{II 2.14.}}{\le} 2|k_j|$,

also
$$\left|\frac{e^{ik_jr}-1}{ir} - k_j\right|^2 \cdot |\hat{\varphi}|^2 \le 4\,(1+|k|^2)\,|\hat{\varphi}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

folgt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue:

$$\lim_{r\downarrow 0} \|\mu_r\varphi - (k_j\hat{\varphi})^\vee\|_{L^2}^2 = \lim_{r\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{e^{ik_jr}-1}{ir} - k_j\right|^2 |\hat{\varphi}|^2 dk \overset{\text{KSL}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{r\downarrow 0} \left|\frac{e^{ik_jr}-1}{ir} - k_j\right|^2\right) |\hat{\varphi}|^2 dk = 0$$

(4) Wiederholte Anwendung von (3) liefert (1).

(5) Sei $D^\alpha\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\forall |\alpha| \le m$.
Mit dem obigen ist zunächst klar, dass
$$D^\alpha\varphi = (k^\alpha\hat{\varphi})^\vee.$$

Dann ist $\|\varphi\|_m < \infty$:

$$\|\varphi\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k)|^2 (1+|k|^2)^m\, dk =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \binom{m}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k)|^2 k^{2\alpha} dk, \quad \text{wobei } \binom{m}{\alpha} = \frac{m!}{(m-|\alpha|)!\,\alpha!}$$

also: $$\|\varphi\|_m^2 = \sum_{|\alpha|\le m} \binom{m}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |k^\alpha\hat{\varphi}(k)|^2 dk = \underbrace{\sum_{|\alpha|\le m} \binom{m}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha\varphi|^2 dk}_{<\infty}$$

$$\Rightarrow \varphi \in H_m$$

$\lrcorner$

3.17. Lemma $\forall s \in \mathbb{R}$ und $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\| D^\alpha \varphi \|_{s-|\alpha|} \le \|\varphi\|_s$$

Bew $\ulcorner$
$$\| D^\alpha \varphi \|^2_{s-|\alpha|} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha \varphi}|^2 (1+|k|^2)^{s-|\alpha|} dk =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |k^\alpha \hat{\varphi}|^2 (1+|k|^2)^{s-|\alpha|} dk \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}|^2 (1+|k|^2)^s dk = \|\varphi\|_s^2 \text{ , denn}$$

$$\frac{|k^\alpha|^2}{(1+|k|^2)^{|\alpha|}} \le \frac{|k|^{2|\alpha|}}{(1+|k|^2)^{|\alpha|}} \le 1$$

3.18. Erläuterung

In 3.15. und 3.16. haben wir den klassischen Ableitungsbegriff erweitert für spezielle quadratintegrierbare Funktionen, nämlich für solche aus H_s, $s \in \mathbb{N}$. Damit sind natürlich auch Funktionen $\varphi \in H_s$, $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ "differenzierbar" geworden (nämlich $[s]$-fach), da $H_s \subset H_{[s]}$.

Lemma 3.17. liefert eine weitere Verallgemeinerung: Wir haben H_s, $s \in \mathbb{R}$ konstruiert als Vervollständigung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzgl $\|\cdot\|_s$. Zu $\varphi \in H_s$ existiert also eine Cauchy-Folge φ_j, $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi_j - \varphi\|_s \to 0$ $(j \to \infty)$. Für die Funktionen φ_j ist $D^\alpha \varphi_j$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (!) wohldefiniert.
Es folgt, dass $D^\alpha \varphi_j$ eine Cauchyfolge in $H_{s-|\alpha|}$ ist:

$$\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi_k\|_{s-|\alpha|} = \|D^\alpha(\varphi_j - \varphi_k)\|_{s-|\alpha|} \overset{3.17.}{\le} \|\varphi_j - \varphi_k\|_s \to 0 \quad (j,k \to \infty)$$

Also konvergiert $D^\alpha \varphi_j$ gegen eine Funktion $\in H_{s-|\alpha|}$, die wir als D^α-Ableitung von $\varphi \in H_s$ auffassen und mit $D^\alpha \varphi$ bezeichnen.

3.19. __Korollar__ $\|D^\alpha \varphi\|_{s-|\alpha|} \leq \|\varphi\|_s \quad \forall \varphi \in H_s$;

damit gilt: $D^\alpha : H_s \xrightarrow[\text{linear}]{\text{stetig,}} H_{s-|\alpha|}$

3.20. __Korollar__ $p(x,D) : H_s \xrightarrow[\text{linear}]{\text{stetig}} H_{s-m}$, wo

$$p(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

3.21. __Satz__ Sei $p(x,k) \in S^m$, $m \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$P(x,D)\varphi = \left(p(x,k)\hat{\varphi}\right)^\vee : H_s \longrightarrow H_{s-m}$$

mit $\|P(x,D)\varphi\|_{s-m} \leq c\,\|\varphi\|_s$

(ohne Beweis)

3.22. __Satz__ (__Lemma von Sobolev__)

Für $s > j + \frac{n}{2}$ gilt: $H_s \subset C^j(\mathbb{R}^n)$

Bew Γ (1) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\, dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)(1+|k|^2)^{s/2} \cdot (1+|k|^2)^{-s/2} e^{ikx}\, dk$$

$$|\varphi(x)| \overset{\text{Schwarz}}{\leq} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k)|^2 (1+|k|^2)^s\, dk\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|^2)^{-s}\, dk\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|^2)^{-s}\, dk\right)^{1/2} \cdot \|\varphi\|_s$$

$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|^2)^{-s}\, dk = \gamma \cdot \int_0^\infty (1+r^2)^{-s}\, r^{n-1}\, dr$; dieses Integral ist endlich, falls $2s-n+1 > 1$ gilt

$\Rightarrow 2s-n \overset{!}{>} 0 \Rightarrow s \overset{!}{>} \frac{n}{2}$; also

$$|\varphi(x)| \le c\|\varphi\|_s, \text{ falls } s > \tfrac{n}{2}.$$

(2) Sei $\varphi \in H_s$, $s > \frac{n}{2}$. Zu φ existiert eine Cauchyfolge φ_j in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j \xrightarrow{\|\cdot\|_s} \varphi$.

Es gilt: φ_j ist Cauchyfolge bzgl $\|\cdot\|_{0,0}$ (vgl II 2.5 / II 2.6. für die Def von $\|\cdot\|_{k,e}$!),

denn: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| \le c\|\varphi_j - \varphi_k\|_s \to 0 \quad (j,k \to \infty)$$

Wir folgern: $\varphi = \lim \varphi_j$ ist stetig und $|\varphi(x)| \le c\|\varphi\|_s$.

(3) Sei $\varphi \in H_s$, $s > j + \frac{n}{2}$.

Nach 3.19. gilt $D^\alpha \varphi \in H_{s-|\alpha|}$.

Sei $|\alpha| \le j$, dann ist $s - |\alpha| > \frac{n}{2}$ und somit (nach (2))

$$|D^\alpha \varphi(x)| \le c\|\varphi\|_{s-|\alpha|} \le c\|\varphi\|_s$$

$$\Rightarrow \sum_{|\alpha|\le j} |D^\alpha \varphi(x)| \le c'\|\varphi\|_s.$$

(4) Sei $\varphi \in H_s$, $s > j + \frac{n}{2}$, $|\alpha| \le j$. Wähle wieder eine Cauchyfolge φ_j in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_j \xrightarrow{\|\cdot\|_s} \varphi$;

dann ist φ_j Cauchyfolge bzgl $\|\cdot\|_{0,|\alpha|}$:

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi_k(x)| \le c'\|\varphi_j - \varphi_k\|_s \longrightarrow 0 \quad (j,k \to \infty)$$

Wir folgern: $\varphi \in C^j$ und $\sum_{|\alpha|\le j} |D^\alpha \varphi(x)| \le c' \cdot \|\varphi\|_s$.

3.23. <u>Korollar</u> $H^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$

3.24. <u>Korollar</u> Sei $a \sim b$, dh $a - b \in S^m \; \forall m \Rightarrow$

$$A - B : H_s \to H_{s-m} \; \forall m, \text{ also gilt: } A - B : H_s \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

3.25. Satz (Pseudo-Lokalität)

Sei $\varphi \in H_s$, $\varphi|_U \in C^\infty(U)$, P ein beliebiger ΨDO.
Dann gilt: $(P(x,D)\varphi)|_U \in C^\infty(U)$ (U offen)

Man sagt: ΨDO's sind pseudolokal.

Bew. ⌈(1) Für eine beliebige Funktion $a \in C_0^\infty(U)$ definieren wir den Multiplikationsoperator

$$a : \varphi(x) \longmapsto a(x)\varphi(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,\hat{\varphi}(k)\,e^{ikx}\,dk$$

und aus dem Ausdruck ganz rechts entnehmen wir: $\sigma(a) = a(x)$

$$\left(P(x,D)\,\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x,k)\,\hat{\varphi}(k)\,e^{ikx}\,dk\right).$$

(2) Sei $x \in U$.
Wir definieren
$\chi \in C_0^\infty(U)$ so, dass $\chi(y) = 1$ in einer ganzen Umgebung V von x

$\psi \in C_0^\infty(U)$ so, dass $\psi|_{\mathrm{supp}\,\chi} = 1$

(3) Betrachte den Operator $\chi P \psi$,

$$\chi P \psi : \varphi(x) \longmapsto \big(\chi(x)P(x,D)\psi(x)\big)\varphi(x) = \chi(x)P(x,D)\big(\psi\varphi(x)\big)$$

Es ist

$$P\psi\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x,k)\,\widehat{(\psi\varphi)}(k)\,e^{ikx}\,dk \quad \in C^\infty(U) \ (\text{bzgl } x)$$

denn

$$D_x^\alpha P\psi\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha\left(e^{ikx}p(x,k)\right)\,\widehat{\psi\varphi}(k)\,dk$$

ist wohldefiniert, da

(i) $p(x,k) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ $\qquad (U \subset \Omega\,!)$

(ii) $|D_x^\alpha p(x,k)| \leq c_\alpha (1+|k|)^m$

(iii) $\widehat{\psi\varphi}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(für (i), (ii) vgl 3.1. ; (iii) folgt aus der Konstruktion)

(4) $\sigma(\chi P \psi) \overset{(1)}{=} \chi\, \sigma(P\psi) \overset{3.11.}{\sim} \chi \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_k^\alpha p \; D_x^\alpha \psi = \chi p$,

denn $D_x^\alpha \psi(x)\big|_{\operatorname{supp}\chi} = \begin{cases} 1 & \text{falls } |\alpha| = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\overset{3.24.}{\Longrightarrow} \chi P \psi - \chi P : H_s \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Also $(\chi P\psi - \chi P)\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da $\chi P \psi \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (mithilfe (3)), folgt $\chi P \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow P\varphi \in C^\infty(V)$ und da $x \in U$ beliebig war, folgt: $P\varphi \in C^\infty(U)$, die Beh.

3.26. <u>Satz</u> (<u>Regularitätssatz für elliptische PDO</u>)

Sei $u \in H_s$ eine Lösung von $P(x,D)u = \varphi$, wobei P elliptisch, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.
Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bew. (1) Sei zuerst $\varphi = 0$. Nach 3.12. ex Q mit $QP - \mathbb{1} \sim 0$, dh $(QP - \mathbb{1})u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Aus $(QP - \mathbb{1})u = Q(Pu) - u = -u$ folgt die Behauptung.

(2) Für beliebiges $\varphi \in C^\infty$ folgt:

$(QP - \mathbb{1})u = Q\varphi - u \in C^\infty$; nach 3.25. ist $Q\varphi \in C^\infty(\Omega)$, also $u \in C^\infty(\Omega)$.

3.27. <u>Bemerkung</u>

Satz 3.26. vereinfacht den Nachweis der Existenz von regulären Lösungen zu PDE's, wobei P elliptisch, wesentlich: Es genügt, die Existenz einer Lösung in H_s ($s \in \mathbb{R}$ beliebig) zu zeigen; mit 3.26. folgt dann unmittelbar die Regularität der Lösung.

3.28. <u>Korollar</u> Aus der Elliptizität von $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ folgt sofort:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0 \Rightarrow f \in C^\infty$$

("Analytische Funktionen haben ∞-viele Ableitungen")

3.29. <u>Korollar (Lemma von Weyl)</u>

Sei $\varphi \in H_s$, $f \in C^\infty$ mit $\Delta \varphi = f \Rightarrow \varphi \in C^\infty$.

3.30. <u>Lemma</u> Sei $P(D)$ ein elliptischer DO vom Grade m mit konstanten Koeffizienten. Sei φ, $P(D)\varphi \in H_s \Rightarrow \varphi \in H_{s+m}$

(Für den Bew von 3.30. vgl Serie 9 Aufg 3)

3.31. <u>Bemerkungen zur Differentiation</u>

(1) In diesem und im letzten Abschnitt haben wir diverse Ableitungen eingeführt.
Man beachte, dass diese Begriffe konsistent sind, d.h. die "verschiedenen" Ableitungen stimmen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein!
Bsp: die in Abschnitt 2 eingeführte Ableitung auf $\mathcal{D}'$ stimmt auf $\mathcal{D}' \cap C^k$ mit der klassischen Ableitung überein.

(2) Die drei Wege, die wir benutzt haben, um die Ableitung zu verallgemeinern:

(i) Definition der verallgemeinerten Ableitung auf einer Klasse von Funktionen anhand des "Vorbildes" auf einer Unterklasse: Erweiterung der Definition so, dass die neue Definition mit der alten verträglich ist — so haben wir die Ableitung in $\mathcal{D}'$ definiert.

(ii) Fortsetzung der Definition von einer dicht liegenden Menge auf ihren Abschluss, und zwar durch die Festsetzung:
Ableitung des limes := limes der Ableitungen
— so haben wir die Ableitung in H_s definiert.

(iii) Definition durch Uebertragung des eigentlichen Ableitungsbegriffs als Grenzwert von Quotienten mit einer Erweiterung (= Lockerung) des verlangten Konvergenzverhaltens — so kam die L^2-Ableitung zustande.

(3) Zu (2)(iii): Für $\varphi \in C_0^\infty$, $\psi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\nabla_r \varphi \xrightarrow[(r \downarrow 0)]{\mathcal{D}} \partial_\nu \varphi \; ; \; \nabla_r \psi \xrightarrow[(r \downarrow 0)]{\mathcal{S}} \partial_\nu \psi \; , \text{ und}$$

daraus folgt unmittelbar für $u \in \mathcal{D}'$, $v \in \mathcal{S}'$:

$$\nabla_r u \xrightarrow[(r \downarrow 0)]{\mathcal{D}'} \partial_\nu u \; , \quad \nabla_r v \xrightarrow[(r \downarrow 0)]{\mathcal{S}'} \partial_\nu v$$

(für die Definition von ∇_r, ∂_ν und einen Teil des Beweises cf. 2.13 und den Bew. von 2.14 (ii))

4. Harmonische Funktionen

Zu Beginn dieses Kapitels zwei Sätze aus der Differentialrechnung:

4.1. Satz (Gauss)

Für ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Vektorfeld v (zB $\operatorname{grad} f$, wo $f \in C^\infty$) auf $\bar{G}$ gilt:

$$\int_G \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial G} v \cdot \nu \, d\sigma(y)$$

, wobei mit ν die äussere Einheitsnormale auf ∂G bezeichnet ist.

4.2. Satz (Green'sche Formeln)

Seien $u, v \in C^2(\bar{G})$, G wie oben.

(1) $$\int_{\partial G} v \, \partial_\nu u \, d\sigma(y) = \int_G (v \Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u) \, dx$$

(2) $$\int_{G} (v \partial_\nu u - u \partial_\nu v) \, d\sigma(y) = \int_G (v \Delta u - u \Delta v) \, dx ,$$

wobei $\partial_\nu u := \operatorname{grad} u \cdot \nu$

Bew $\ulcorner$ (1) $$\int_{\partial G} v \, \partial_\nu u \, d\sigma(y) = \int_{\partial G} (v \operatorname{grad} u) \cdot \nu \, d\sigma(y) \overset{4.1.}{=}$$

$$= \int_G \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) \, dx = \int_G (v \Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u) \, dx$$

(2) klar mithilfe (1) $\lrcorner$

4.3. Definition Sei Ω offen $\subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ – u heisst <u>harmonisch in Ω</u>, falls $\Delta u = 0$ in Ω.

4.4. Satz (Mittelwerteigenschaft; MWE)

Sei u harmonisch in Ω. Dann gilt $\forall x \in \Omega$:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y) = \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(0)} u(x+ry)\, dy ,$$

wobei $\omega_n = |S_1(0)|$; $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset \Omega$

Bemerkung: $\frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y) = \frac{1}{|S_r(0)|} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y)$,

und $\frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(0)} u(x+ry)\, dy = \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy$

Bew. $\ulcorner$ $\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \frac{\partial}{\partial r} u(x+ry)\, d\sigma(y) =$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \operatorname{grad} u(x+ry) \cdot y \, d\sigma(y) \overset{4.1.}{=}$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x+ry)\, dy = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(x+ry) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y) = \text{const}(x)$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \lim_{r \to 0} u(x+ry)\, d\sigma(y) = u(x)$$

(Der zweite Teil der Behauptung ist trivial) $\lrcorner$

4.5. Korollar Sei u harmonisch in Ω.
Dann ist $\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \, d\sigma(y) = 0$

(Verwende 4.2.(1) mit $v \equiv 1$)

4.6. Satz Sei u eine stetige Funktion auf Ω mit MWE: dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Bew $\ulcorner$ (1) Wähle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ so, dass $\varphi(x) = \varphi(r)$, dh φ sei radialsymmetrisch; $\varphi \geq 0$, $\int\limits_{B_1(0)} \varphi(x)dx = 1$

setze $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $\left(\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))\right)$.

$\Omega_\varepsilon := \{x \mid B_\varepsilon(x) \subset \Omega\}$

Sei $x \in \Omega_\varepsilon$.

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega u(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int\limits_{B_\varepsilon(0)} u(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{B_1(0)} u(x-\varepsilon y)\,\varphi(y)\,dy = \quad (y = ry')$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{S_1(0)} u(x-\varepsilon r y')\,d\sigma(y')\,\varphi(r)\,r^{n-1}dr =$$

$$= \int\limits_0^1 \omega_n \cdot u(x) \cdot \varphi(r)\,r^{n-1}dr =$$

$$= u(x)\int\limits_0^1 \int\limits_{S_1(0)} d\sigma(y')\,\varphi(r)\,r^{n-1}dr = u(x)\int\limits_{B_1(0)} \varphi(y)\,dy =$$

$$= u(x)$$

da $u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, folgt: $u \in C^\infty(\Omega)$.

(2) Zu beliebigem, aber festem $x \in \Omega$ wähle $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $x \in \Omega_\varepsilon \; \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int\limits_{B_\varepsilon(x)} \Delta u\,dy = \int\limits_{B_1(0)} \Delta u(x+\varepsilon y)\,dy = \int\limits_{S_1(0)} \partial_\nu u(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y) =$$

$$= \int\limits_{S_1(0)} \operatorname{grad} u(x+\varepsilon y)\cdot y\,d\sigma(y) = \int\limits_{S_1(0)} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} u(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_{S_1(0)} u(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y) \overset{\text{MWE}}{=} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\omega_n\,u(x) = 0$$

$\Rightarrow \Delta u = 0$ in Ω, also ist u harmonisch. ┘

4.7. <u>Satz</u> (<u>Maximumprinzip</u>)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend; sei u eine reelle harmonische Funktion auf Ω.
Es existiere $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup\limits_{y \in \Omega} u(y)$.

Dann ist $u = \text{const}$.

Bew. ┌ Setze $\tilde{\Omega} := \{x \in \Omega \mid u(x) = \sup\limits_{y \in \Omega} u(y)\}$

(1) $\tilde{\Omega}$ ist abgeschlossen, da u eine stetige Funktion ist

(2) $\tilde{\Omega}$ ist offen: sei $x \in \tilde{\Omega}$. Mithilfe der MWE folgt:

$$0 = \frac{1}{|B_1(0)|} \int\limits_{B_1(0)} \left(u(x+\varepsilon y) - u(x)\right) d\sigma(y)$$

und da $u(x+\varepsilon y) - u(x) \leq 0$ nach Voraussetzg., folgt $u(y) = u(x) \quad \forall y \in B_\varepsilon(x)$, dh zu $x \in \tilde{\Omega}$ existiert eine ganze Umgebung $U(x)$ in $\tilde{\Omega}$, dh. $\tilde{\Omega}$ ist offen.

(3) Die einzigen zusammenhängenden Mengen in Ω, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, sind: $\emptyset, \Omega$. $\Rightarrow \tilde{\Omega} = \Omega$ ┘

4.8. <u>Korollar</u> Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ kompakt. Zudem Ω und u wie in 4.7. und sei u nicht konstant.
Dann nimmt u Maximum und Minimum auf $\partial\Omega$ an.

4.9. <u>Satz</u> Sei u harmonisch in $\mathbb{R}^2$ und $u > 0$. Dann ist u konstant.

Bew. ⌜ Zu u existiert v mit $f := u + iv$ analytisch,

Ah $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$.

f bildet $\mathbb{C}$ ab auf $B := \{ z \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$

Die analytische Funktion

$h(z) := \frac{z-1}{z+1}$ bildet B ab auf die offene Einheitskreisscheibe.

Die Funktion $g(z) := h(f(z))$ ist eine ganze Funktion und beschränkt, also konstant (Liouville); da $h \neq \text{const}$, folgt: $f = \text{const}$, also $u = \text{const}$. ⌟

4.10. <u>Satz</u> Sei u harmonisch in $\mathbb{R}^n$ und beschränkt. Dann ist u konstant.

Bew. ⌜ Sei $c := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |u(y)|$. Wähle $x \in \mathbb{R}^n$ und $R > |x|$.

$$|u(x) - u(0)| = \frac{1}{|B_R(0)|} \left| \int_{B_R(x)} u(y)\,dy - \int_{B_R(0)} u(y)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|B_R(0)|} c \int_{B_R(x) \triangle B_R(0)} dy \qquad (A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A)$$

$$\leq \frac{1}{|B_R(0)|} c \int_{B_{R+|x|}(0) \setminus B_{R-|x|}(0)} dy = \frac{n}{R^n \omega_n} c \int_{R-|x|}^{R+|x|} \omega_n r^{n-1}\,dr =$$

$$= c \cdot \frac{1}{R^n} \left((R+|x|)^n - (R-|x|)^n \right) = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

Also $u(x) = u(0)$ $\quad (R \to \infty\,!)$ ⌟

4.11. Satz (Harnack'sche Ungleichung)

Sei $u \in C^2(B_r^\circ(y)) \cap C(B_r(y))$,
u harmonisch in $B_r^\circ(y)$ und $u \geq 0$.
$(B_r^\circ(y) := \{|x-y| < r\}$

Dann gilt $\forall x \in B_r^\circ(y)$:

$$\frac{r^{n-2}(r-|x-y|)}{(r+|x-y|)^{n-1}}\, u(y) \leq u(x) \leq \frac{r^{n-2}(r+|x-y|)}{(r-|x-y|)^{n-1}}\, u(y)$$

Bew. ⌈ OBdA : $y = 0$.

In Abschnitt 5 werden wir die Poisson-Formel herleiten:

$$u(x) = \frac{r^{n-2}}{|S_r(0)|} \int_{S_r(0)} \frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n}\, u(y)\, d\sigma(y) \qquad \forall |x| < r$$

Es gilt:

$$\frac{(r-|x|)(r+|x|)}{(r+|x|)^n} \leq \frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n} \leq \frac{(r-|x|)(r+|x|)}{(r-|x|)^n} \qquad (|y| = r\,!)$$

also:

$$\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}} \leq \frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^n} \leq \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}$$

$\Rightarrow$

(1) $$u(x) \leq \frac{r^{n-2}}{|S_r(0)|} \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}} \int_{S_r(0)} u(y)\, d\sigma(y) \overset{\text{MWE}}{=}$$

$$= \frac{r^{n-2}}{|S_r(0)|} \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}} |S_r(0)|\, u(0) = r^{n-2} \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}\, u(0)$$

(2) analog:

$$u(x) \geq r^{n-2} \frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}\, u(0)$$

┘

4.12. <u>Korollar</u> Sei u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $u \geq 0$; dann ist u konstant.

Bew ⌈ $r \to \infty$ in 4.11. liefert : $u(0) \leq u(x) \leq u(0)$ ⌋

4.13. <u>Satz</u> (<u>Eindeutigkeitssatz</u>)

Sei $\bar{\Omega}$ kompakt. u_1, u_2 harmonisch in Ω; $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$, und sei $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$.

Dann gilt : $u_1 \equiv u_2$.

Bew. ⌈ $u_1 - u_2$ ist harmonisch und $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$

Mit 4.8. folgt : $u_1 - u_2 = 0$ ⌋

4.14. <u>Satz</u> Sei u_j eine Folge von (in Ω) harmonischen Funktionen, die auf Kompakta glm konvergiert.
Dann ist $u := \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ harmonisch.

Bew. ⌈ $u(x) = \lim\limits_{j\to\infty} u_j(x) \overset{MWE}{=} \lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_1(0)} u_j(x+ry)\, d\sigma(y) =$

$= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_1(0)} \lim\limits_{j\to\infty} u_j(x+ry)\, d\sigma(y)$, da $S_r(x)$ kompakt und $u_j|_{S_r(x)} \xrightarrow{glm} u|_{S_r(x)}$ nach Voraussetzg.

$= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_1(0)} u(x+ry)\, d\sigma(y)$; also erfüllt u die Mittelwerteigenschaft. ⌋

4.15. Definition Sei $P(D)$ ein PDO mit konstanten Koeffizienten.

Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heisst Fundamentallösung des PDO $P(D)$, falls

$$P(D)E = \delta$$

Bemerkung: Betrachte die PDE: $P(D)u = v$,

wobei wir annehmen, dass v kompakten Träger habe.

Setze $u := E * v$. Dann ist u eine Lösung der PDE, denn

$$P(D)(E * v) = P(D)E * v = \delta * v = v.$$

(vgl Abschnitt 2)

4.16. Satz

Setze $$N(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_n} & \text{für } n \geq 3 \\[2ex] \dfrac{\log|x|}{2\pi} & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

$N(x)$ ist eine temperierte Distribution und Fundamentallösung von Δ.

$N(x)$ heisst Newtonpotential

(Für den Bew. vgl Serie 10 Aufg 5)

5. Probleme der Potentialtheorie

5.1. Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ glatt berandet, $f \in C(\partial\Omega)$, $g \in C(\bar{\Omega})$.
Dann heisst $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit

(i) $\Delta u = g$
(ii) $u|_{\partial\Omega} = f$ Lösung des Dirichletproblems

Falls $g = 0$, so heisst u auch
Lösung des klassischen Dirichletproblems

5.2. Bemerkungen

(1) Eindeutigkeit der Lösung, falls $\bar{\Omega}$ kompakt (vgl 4.13.)

(2) Das allgemeine Dirichletproblem kann folgendermassen auf das klassische zurückgeführt werden, wenn wir annehmen, dass $\bar{\Omega}$ kompakt ist:

Mithilfe der Fundamentallösung N von Δ bestimmen wir eine spezielle Lösung v von $\Delta u = g$: wir setzen g stetig zu einer Funktion g' mit kompaktem Träger fort und setzen $v := N * g'$.
Dann wird das Problem auf das klassische Dirichletproblem
$$\Delta w = 0$$
$$w|_{\partial\Omega} = f - v|_{\partial\Omega}$$ reduziert und

die Lösung u des ursprünglichen Problems lautet demzufolge: $u = w + v$.

(3) Das allgemeine Dirichletproblem ist auch aequivalent zum Problem
$$\Delta w = s$$
$$w|_{\partial\Omega} = 0$$
(inhomogene Differentialgleichg, aber homogene Randbedingungen) :

Wir setzen f zu einer Fkt. $h \in C^2(\bar{\Omega})$ fort und bestimmen Δh.
Dann wird das Problem auf $\Delta w = g - \Delta h$
$w|_{\partial\Omega} = 0$ reduziert
und die Lösung u des ursprünglichen Problems lautet:
$$u = w + h$$

5.3. <u>Definition</u> Seien $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$.

Setze $D(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ $\quad$ ($\nabla u = \operatorname{grad} u$)

$$D(u) := D(u,u)$$
$D(u)$ heißt <u>Dirichlet-Integral</u>

5.4. <u>Satz</u> (<u>Dirichletprinzip</u>)

Sei u eine Lösung des klass. Dirichletproblems mit Randwerten f. Dann gilt $\forall v \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $v|_{\partial\Omega} = f$:
$$D(v) \geq D(u)$$

Bew. ⌜ Setze $w := v - u$. Es gilt:

$$D(v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla(u+w) \cdot \nabla(u+w) \, dx =$$
$$= D(u) + D(w) + 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx \overset{4.2.}{=}$$
$$= D(u) + D(w) + 2 \int_{\partial\Omega} w \, \partial_\nu u \, d\sigma - 2 \int_\Omega w \Delta u \, dx =$$
$$= D(u) + D(w), \text{ da } w|_{\partial\Omega} = 0, \ \Delta u = 0 .$$
Beachte noch, dass $D(w) \geq 0$; also folgt die Beh. ⌟

5.5. Bemerkungen

(1) $D(\cdot,\cdot)$ ist eine positiv semidefinite Bilinearform auf $C^1(\bar{\Omega})$.

(2) Eine Lösung u des klass. Dirichletproblems minimier $D(\cdot)$; vergleiche dazu in der Mechanik das Prinzip der kleinsten Wirkung!

(3) (1) und (2) implizieren die Existenz einer minimierenden Folge v_n, $v_n \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $v_n|_{\partial\Omega} = f$ d.h.

$$\lim_{n\to\infty} D(v_n) = \inf D(w),\ w \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ mit } w|_{\partial\Omega} = f.$$

Die Funktionen v_n können zur Konstruktion einer Folge φ_n verwendet werden, die gegen eine Funktion φ – Lösung des Dirichletproblems – konvergiert.

5.6. Ansatz zur Lösung des klassischen Dirichletproblems:

Wir führen folgende Aequivalenzrelation auf $C^1(\bar{\Omega})$ ein:

$u \sim v$ gdw $u - v = \text{const}$.

$\mathcal{U} := [u] := \{ s \mid s - u = \text{const} \}$

Setze $(\mathcal{U}, \mathcal{V})_\Omega := D(u,v)$ $(u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V})$; man verifiziert leicht, dass dies ein Skalarprodukt auf $C^1(\bar{\Omega})\backslash_\sim$ ist,

$$C^1(\bar{\Omega})\backslash_\sim := \{ \mathcal{U} \mid u \in C^1(\bar{\Omega}) \}.$$

Es induziert die Norm $\|\mathcal{U}\|_\Omega := \sqrt{(\mathcal{U},\mathcal{U})_\Omega}$

Wir definieren den Hilbertraum $\mathcal{F}(\Omega) := \overline{\left(C^1(\bar{\Omega})\backslash_\sim, \|\cdot\|_\Omega\right)}$

weiter $\mathcal{F}_0(\Omega) := \overline{\left(C_0^\infty(\bar{\Omega})\backslash_\sim, \|\cdot\|_\Omega\right)}$

$$H(\Omega) := \{ \mathcal{U} \in \mathcal{F}(\Omega) \cap C^2(\Omega)\backslash_\sim \mid \Delta\mathcal{U} = 0 \},$$

wobei $\Delta\mathcal{U} := \Delta u$ für ein beliebiges $u \in \mathcal{U}$.

(zur Erinnerung:

(1) $\overline{(E, \|\cdot\|)}$ bezeichnet den <u>Abschluss von E bzgl der Norm $\|\cdot\|$</u>,

dh. zu den Elementen von E nimmt man alle Grenzwerte von Cauchyfolgen aus Elementen in E hinzu:

$e \in \overline{(E, \|\cdot\|)}$ gdw ex. Cauchyfolge e_j, $e_j \in E$,

$$\lim_{j\to\infty} e_j = e$$

(2) Ein Hilbertraum H ist ein (Vektor)Raum, der bzgl einer durch ein Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist, dh: jede Cauchyfolge in H konvergiert gegen ein Element aus H)

Bemerkung: $\mathcal{F}_0$ und H sind abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{F}$.

5.7. <u>Satz</u> $\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{F}_0(\Omega) \oplus_{\|\cdot\|_\Omega} H(\Omega)$, dh.

$\forall U \in \mathcal{F}(\Omega)$ existiert eine eindeutige Zerlegung $U = V + W$; $V \in H(\Omega)$, $W \in \mathcal{F}_0(\Omega)$ mit $(V, W)_\Omega = 0$;

zu $u \in U$ können wir also $v \in V$, $w \in W$ so wählen, dass $u = v + w$, wobei v harmonisch ist und $w \in C_0(\Omega)$ (ie: $w|_{\partial\Omega} = 0$): wir wählen aus V denjenigen Repräsentanten, der auf $\partial\Omega$ verschwindet, und setzen $w = u - v$.

Wir beweisen die dazu aequivalente Aussage:

$V \in \mathcal{F}(\Omega)$ ist harmonisch gdw $(V, W)_\Omega = 0$ $\forall W \in \mathcal{F}_0(\Omega)$,

und dies wiederum ist gleichbedeutend mit:

v ist harmonisch gdw $D(v, w) = 0$ $\forall w \in W \in \mathcal{F}_0(\Omega)$

OBdA wählen wir $w \in W \cap C_0(\Omega)$
($D(v+c, w+d) = D(v,w)$, wo c,d beliebige Konstanten sind !)

Bew. ⌜ (1) Sei v harmonisch.

$$\Rightarrow \int_\Omega \Delta v \cdot w \, dx = 0 \qquad \forall w \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow 0 = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx = D(v,w) \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega)$$

(Anwendung der 2. Green'schen Formel)

$$\Rightarrow (V,W)_\Omega = 0 \quad \forall W \in \mathcal{F}_0 .$$

(2) Sei $(V,W)_\Omega = 0 \quad \forall W \in \mathcal{F}_0$

$$\Rightarrow D(v,w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega \Delta v \cdot w = 0 \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \Delta v = 0 \quad \text{(Regularitätssatz)}$$

⌟

5.8. Bemerkung

Es sei das klassische Dirichletproblem zu lösen:

$$\Delta u = 0$$
$$u|_{\partial\Omega} = w .$$

Wir setzen w stetig differenzierbar auf Ω fort; nun liefert der Satz die Existenz der Zerlegung von w in $w = u + v$, wobei $\Delta u = 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$ mit $D(u,v) = 0$ – bzw $W = U + V$ wobei $\Delta U = 0$, $V \in \mathcal{F}_0$ mit $(U,V)_\Omega = 0$ –.

Da wir in einem Hilbertraum arbeiten, gilt:
$U =$ Projektion von W auf $H(\Omega)$
Insbesondere:

$$D(w-u) = \min_{s \in H} D(w-s)$$

5.9. Die Lösung des klassischen Dirichletproblems im "obern" Halbraum

$\mathbb{R}_+^{n+1} := \{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t > 0 \}$

$\Delta_x := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$

Gesucht ist eine Lösung von

$$\left(\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1} \quad \text{mit}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Fouriertransformation bzgl. x liefert :

$$\widehat{\Delta_x u} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(k,t) = -|k|^2 \hat{u} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u} = 0$$

$\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$, wobei wir annehmen, dass $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Somit lautet ein erster Lösungsansatz :

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k) \left(c e^{-|k|t} + (1-c) e^{|k|t} \right)$$

(die Summe der Koeffizienten muss $=1$ sein : Randbdg !)

Wir möchten natürlich gerne beidseitig Fourier-invertieren; dann muss es sich aber zumindest um temperierte Distributionen handeln (sonst ist $\vee$ gar nicht definiert !);

daher muss $(1-c)\hat{f}(k) e^{|k|t} \equiv 0$ sein $\left(\hat{f} e^{|k|t} \notin \mathcal{S}' \right)$

$$\Rightarrow \hat{u}(k,t) = \hat{f}(k) \left((e^{-|k|t})^\vee \right)^\wedge = \left(f * (e^{-|k|t})^\vee \right)^\wedge$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f * \left(e^{-|k|t}\right)^\vee$$

5.10. Lemma $\left(e^{-|k|t}\right)^\vee(x) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$

Mit $P_t(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(e^{-|k|t}\right)^\vee (x)$ wird dann

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y)\, dy$$

$P_t(x)$ heisst <u>Poissonkern</u> (zum klass. Dirichletproblem) <u>für den oberen Halbraum</u>

Bew. ⌈ (1) $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\beta^2/4s}\, ds$:

⌈ Zunächst ist $e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta y}}{1+y^2}\, dy$:

(Anwendung des Residuensatzes) Sei $\beta \geq 0$.

(a) $\frac{e^{i\beta y}}{1+y^2}$ hat i als einzigen, zudem einfachen Pol in $\{\operatorname{Im} y \geq 0\}$

$$\Rightarrow 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\beta y}}{1+y^2}\Big|_{y=i} = 2\pi i \lim_{y\to i} (y-i)\frac{e^{i\beta y}}{1+y^2} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-\beta}}{2i} = \pi e^{-\beta}$$

(b) $$\lim_{R\to\infty} \left| \int_0^\pi \frac{e^{i\beta R e^{i\vartheta}}}{1+R^2 e^{2i\vartheta}} iRe^{i\vartheta}\, d\vartheta \right| \leq$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\, d\vartheta = 0$$

(c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta y}}{1+y^2}\, dy = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\beta y}}{1+y^2}\Big|_{y=i} -$$

$$- \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{e^{i\beta R e^{i\vartheta}}}{1+R^2 e^{2i\vartheta}} iRe^{i\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= \pi e^{-\beta}$$

Für $\beta < 0$ analoges Vorgehen mit Integration in der unteren Halbebene.

Zusammen mit $\frac{1}{1+y^2} = \int_0^\infty e^{-(1+y^2)s}\,ds$ folgt:

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta y}}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y}\int_0^\infty e^{-(1+y^2)s}\,ds\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y}\, e^{-(1+y^2)s}\,dy\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta y - y^2 s}\,dy\,ds \overset{\text{II.1.8.}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s}\, e^{-\beta^2/4s}\sqrt{2\pi}\,(2s)^{-\frac{1}{2}}\,ds = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\, e^{-\beta^2/4s}\,ds$$

(2) $$\left(e^{-|k|t}\right)^{\vee}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|k|t}\, e^{ikx}\,dk \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\, e^{-|k|^2t^2/4s}\,ds\, e^{ikx}\,dk =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|k|^2t^2/4s}\, e^{ikx}\,dk\,ds =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\left(\frac{2s}{t^2}\right)^{n/2} e^{-|x|^2 s/t^2}\,ds =$$

$$= \left(\frac{2}{t^2}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}}\, e^{-\left(\frac{|x|^2}{t^2}+1\right)s}\,ds \overset{\text{Subst.}}{=}$$

$$= \left(\frac{2}{t^2}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{|x|^2}{t^2}+1\right)^{-\frac{n-1}{2}} s^{\frac{n-1}{2}}\, e^{-s}\cdot\left(\frac{|x|^2}{t^2}+1\right)^{-1} ds =$$

$$= \frac{2^{n/2}}{t^n\sqrt{\pi}}\left(\frac{|x|^2}{t^2}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,t^n}\cdot\frac{t^{n+1}}{\left(|x|^2+t^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t}{\left(|x|^2+t^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

5.11. <u>Satz</u> Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y)\, dy$$

harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ und es gilt:

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = f(x)$$

Bew. ⌈ (1) $\left(\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) P_t(x) = 0$:

$$-|k|^2 \widehat{P}_t + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{P}_t = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(-|k|^2 e^{-|k|t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-|k|t}\right) = 0$$

und daraus folgt unmittelbar, dass $\Delta u = 0$

(2) Es gilt: (i) $\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\, dx = \widehat{P}_t(0) = e^{-|k|t}\Big|_{k=0} = 1$

(ii) $P_t(x) \geq 0$

(iii) $P_t(x) = t^{-n} P_1\left(\frac{x}{t}\right)$

Für den Rest des Beweises stütze man sich auf den Hinweis: Approximierende Identität! ⌋

5.12. <u>Die Green'sche Funktion</u>

Wir haben gesehen, dass jedes allgemeine Dirichlet-problem – insbesondere das klassische – aequivalent ist zu:

$$\Delta u = f$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad , \text{ wobei } f \in C(\Omega).$$

(vgl 5.2. (2)/(3))

Die Idee zur Lösung dieses Problems ist folgende:

Wenn wir $\forall x \in \Omega$ eine Funktion g_x finden mit

$$\Delta g_x(y) = \delta_x(y)$$
$$g_x|_{\partial\Omega} = 0 \quad , \text{ so können wir diese}$$

Funktionen g_x mit dem Wert $f(x)$ gewichtet zusammensetzen und erhalten so die Lösung des Problems :

$$u(y) := \int_\Omega f(x)\, g_x(y)\, dx$$

Die Gesamtheit der g_x nennen wir Green'sche Funktion.

Mathematische Präzisierung :

5.13. <u>Definition</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

Eine Funktion $G(x,y)$ auf $\Omega \times \bar{\Omega}$ heisst <u>Green'sche Funktion</u> (zum Laplaceoperator) <u>für Ω</u>, falls $\forall x \in \Omega$ gilt :

(i) Die Funktion $h(y) := G(x,y) - N(x,y)$ ist harmonisch auf Ω und stetig auf $\bar{\Omega}$, wobei $N(x,y) := N(x-y)$ das Newtonpotential bezeichnet (vgl 4.16.)

(ii) $G(x,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$

5.14. <u>Lemma</u> Die Green'sche Funktion ist eindeutig.

Bew. ⌜ Wir nehmen an, dass $G_1(x,y)$, $G_2(x,y)$ Green'sche Funktionen für Ω sind.

Dann gilt :

$$G_1(x,\cdot) - G_2(x,\cdot) = \big(G_1(x,\cdot) - N(x,\cdot)\big) - \big(G_2(x,\cdot) - N(x,\cdot)\big) =$$

$= h_1(\cdot) - h_2(\cdot)$ ist als Differenz von zwei harmonischen Funktionen wieder harmonisch,

zudem $\quad G_1(x,\cdot) - G_2(x,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$.

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, folgt $G_1(x,\cdot) \equiv G_2(x,\cdot)$ mit dem Eindeutigkeitssatz 4.13. ,

also auch $G_1(x,y) \equiv G_2(x,y)$ auf $\Omega \times \bar{\Omega}$ ⌟

5.15. Satz Für jedes glatt berandete, beschränkte Gebiet Ω existiert die Green'sche Funktion und es gilt
$$G \in C^\infty(\Omega \times \bar{\Omega})$$

(ohne Beweis)

5.16. Lemma $G(x,y) = G(y,x)$ auf $\Omega \times \Omega$, dh.

die Green'sche Funktion ist symmetrisch.

Bew. $\ulcorner$ Nach Konstruktion ist

$$0 = \Delta_z \left(G(y,z) - N(y,z) \right) = \Delta_z G(y,z) - \delta_y(z) =: \Delta_z G(y,z) - \delta(y-z)$$

Wir berechnen:

$$G(x,y) - G(y,x) = \int_\Omega \left[G(x,z)\,\delta(y-z) - G(y,z)\,\delta(x-z) \right] dz =$$

$$= \int_\Omega \left[G(x,z)\,\Delta_z G(y,z) - G(y,z)\,\Delta_z G(x,z) \right] dz =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[G(x,z)\,\partial_{\nu_z} G(y,z) - G(y,z)\,\partial_{\nu_z} G(x,z) \right] d\sigma(z) = 0,$$

$$\text{da } G(x,\cdot)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

$\lrcorner$

Dies – zusammen mit der Stetigkeit von $G(x,\cdot)$ auf $\bar{\Omega}$ – erlaubt es, die Green'sche Funktion auf $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ zu definieren, indem wir $G(x,y) \overset{\text{def}}{=} 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ setzen.

5.17. Satz Für eine Funktion $f \in C(\Omega)$ ist

$$u(y) = \int_\Omega G(x,y) f(x)\,dx$$ die Lösung von

$$\Delta u = f; \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Bew. ⌈ $\Delta u(y) = \int_\Omega \Delta_y G(x,y) f(x)\,dx = \int_\Omega \delta(x-y) f(x)\,dx = f(y)$

Dass $u|_{\partial\Omega} = 0$ gilt, ist offensichtlich ⌋

5.18. Die Green'sche Funktion für die Kugel

Der Konstruktion der Green'schen Funktion für die Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ liegt die folgende Idee zugrunde:

Wir denken uns in $x \in B_R(0) \setminus S_R(0)$ eine feste Einheitsladung und wollen das Potential u im Innern der Kugel bestimmen, unter der Annahme, dass die Kugel geerdet ist ($u|_{S_R(0)} = 0$). – Wir plazieren im Spiegelpunkt $x' = \left(\frac{R}{r}\right)^2 x$ von x eine entgegengesetzte Ladung und vermuten (oder wissen bereits), dass die Summe der geeignet gewichteten Newtonpotentiale von x und x' auf $S_R(0)$ verschwindet und folglich gleich der Green'schen Funktion in x: $G(x,\cdot)$ ist.

(Spiegelungsprinzip) $(r = |x|)$

5.19. Satz (a) $n \geq 3$. $N(x,y) - \frac{1}{r^{n-2}} N\left(\frac{x}{r^2}, y\right)$ ist die Green'sche Funktion für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $n = 2$. $N(x,y) - N\left(\frac{x}{r^2}, y\right) - \frac{\log r}{2\pi}$ ist die Green'sche Funktion für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Bew. ⌈ (1) Sei $n \geq 3$. $N(x,y)$ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$.

Für $x \in B_1(0) \setminus S_1(0)$ ist demzufolge $\frac{1}{r^{n-2}} N\left(\frac{x}{r^2}, y\right)$ harmonisch in $B_1(0)$, da $\frac{x}{r^2} \notin B_1(0)$.

Also ist $G(x,\cdot) - N(x,\cdot) = -\frac{1}{r^{n-2}} N\left(\frac{x}{r^2}, y\right)$ harmonisch auf $B_1(0)$.

Ebenso folgt diese Behauptung für $n=2$.

(2) Sei $y \in S_1(0) \Rightarrow |x-y| = \left|\frac{x}{r} - ry\right|$:

$$|x-y|^2 = r^2 - 2x\cdot y + 1 = |ry|^2 - 2\frac{x}{r}\cdot ry + \left|\frac{x}{r}\right|^2$$
$$= \left|ry - \frac{x}{r}\right|^2$$

(3) Sei $n \geq 3$. $y \in S_1(0)$

$$G(x,y) = N(x,y) - \frac{1}{r^{n-2}} N\left(\frac{x}{r^2}, y\right) =$$
$$= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n} - \frac{1}{r^{n-2}}\left|\frac{x}{r^2} - y\right|^{2-n}\right) =$$
$$= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n} - \left|\frac{x}{r} - ry\right|^{2-n}\right) \overset{(2)}{=} 0$$

(4) Sei $n = 2$. $y \in S_1(0)$

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left(\log|x-y| - \log\left|\frac{x}{r^2} - y\right| - \log r\right) =$$
$$= \frac{1}{\omega_n}\left(\log|x-y| + \log r - \log\left|\frac{x}{r} - ry\right| - \log r\right) \overset{(2)}{=} 0$$

5.20. <u>Satz</u> (a) $n \geq 3$. $N(x,y) - \left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} N\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 x, y\right)$

ist die Green'sche Funktion für $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$

(b) $n=2$. $N(x,y) - N\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 x, y\right) + \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{R}{r}\right)$

ist die Green'sche Funktion für $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Der Beweis verläuft in allen Schritten analog zum Beweis von 5.19.

5.21. <u>Satz</u> Sei $u \in C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung des klass. Dirichletproblems mit Randwerten g. Dann gilt:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\, \partial_{\nu_y} G(x,y)\, d\sigma(y)$$

Bew. ⌈ $$u(x) = \int_\Omega \delta(x-y)\, u(y)\, dy = \int_\Omega \Delta_y G(x,y)\, u(y)\, dy =$$

$$= \int_\Omega \left[u(y)\, \Delta_y G(x,y) - G(x,y)\, \Delta_y u(y) \right] dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\, \partial_{\nu_y} G(x,y) - G(x,y)\, \partial_{\nu_y} u(y) \right] d\sigma(y) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} u(y)\, \partial_{\nu_y} G(x,y)\, d\sigma(y)$$ ⌟

5.22. <u>Satz</u> (Verschärfung von 5.21.)

Sei $g \in C(\partial\Omega)$.
Dann ist
$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\, \partial_{\nu_y} G(x,y)\, d\sigma(y)$$

die eindeutige Lösung des klassischen Dirichletproblems
t Rdwerten g und $u \in C(\bar\Omega)$.

"

r schenken uns den Beweis, bemerken aber,
ss 5.22. unter der Annahme, dass

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\, \partial_{\nu_y} G(x,y)\, d\sigma(y) \in C^1(\bar\Omega)$$ auf
5.21. reduziert wird.

5.23. <u>Definition</u> $P(x,y) := G_{\nu_y}(x,y)$ heisst
<u>Poisson-Kern</u> (vgl 5.10 / 5.11.)

5.24. <u>Satz</u> Der Poisson-Kern für die Kugel $B_R(0)$ ist

$$P(x,y) = \frac{1}{R\omega_n} \cdot \frac{R^2 - r^2}{|x-y|^n} ,$$

wobei $r = |x|$, $x \in B_R(0)$, $y \in S_R(0)$

Bew. (1) Sei $y \in S_R(0)$. $\partial\Omega = S_R(0)$.
Dann ist $\nu_y = \frac{y}{R}$ und es gilt demnach:

$$\partial_{\nu_y} u(y) = \operatorname{grad} u \cdot \nu_y = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{R} \frac{\partial}{\partial y_j} u(y)$$

(2) Sei $n \geq 3$.

$$(2-n)\omega_n \partial_{\nu_y} G(x,y)$$

$$= \sum \frac{y_j}{R} \frac{\partial}{\partial y_j} |x-y|^{2-n} - \sum \frac{y_j}{R} \frac{\partial}{\partial y_j} \left| \frac{R}{r} x - \frac{r}{R} y \right|^{2-n} =$$

$$= -(2-n) \sum \frac{y_j}{R} |x-y|^{1-n} \frac{(x_j - y_j)}{|x-y|} +$$

$$+ (2-n) \sum \frac{y_j}{R} \left| \frac{R}{r} x - \frac{r}{R} y \right|^{1-n} \frac{\left(\frac{R}{r} x_j - \frac{r}{R} y_j\right)}{\left|\frac{R}{r} x - \frac{r}{R} y\right|} \cdot \frac{r}{R}$$

$\Rightarrow \omega_n \partial_{\nu_y} G(x,y) =$

$$= \frac{1}{R|x-y|^n} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j^2 - x_j y_j + x_j y_j - \frac{r^2}{R^2} y_j^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{R} \frac{R^2 - r^2}{|x-y|^n}$$

(3) Sei $n = 2$.

$$\omega_n \partial_{\nu_y} G(x,y) = \sum \frac{y_j}{R} \frac{\partial}{\partial y_j} \log|x-y| - \sum \frac{y_j}{R} \frac{\partial}{\partial y_j} \log \left| \left(\frac{R}{r}\right)^2 x - y \right| =$$

$$= - \sum \frac{y_j}{R} \frac{(x_j - y_j)}{|x-y|^2} + \sum \frac{y_j}{R} \cdot \frac{\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 x_j - y_j\right)}{\left|\left(\frac{R}{r}\right)^2 x - y\right|^2} =$$

$$= \frac{1}{R|x-y|^2} \left(- \sum y_j (x_j - y_j) + \sum y_j \left(x_j - \left(\frac{r}{R}\right)^2 y_j \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{R|x-y|^2} \sum_{j=1}^{2} \left(y_j^2 - x_j y_j + x_j y_j - \frac{r^2}{R^2} y_j^2 \right) = \frac{1}{R} \frac{R^2 - r^2}{|x-y|^2}$$

In (2) und (3) wurde

$$\left|\frac{R}{r}x - \frac{r}{R}y\right| = |x-y|, \text{ wo } y \in S_R(0), \quad \text{verwendet}$$

(vgl 5.19. / 5.20.)

5.25. <u>Der Poissonkern als Summe von homogenen harmonischen Polynomen</u> (in $\mathbb{R}^3$) (vgl III.3.)

Wir hatten: $L^2(S_1^2(0)) = \bigoplus_{k\geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_k$

$$\pi_k : L^2(S^2) \to \tilde{\mathcal{H}}_k$$
$$g \mapsto \pi_k g \text{ , die Projektion auf } \tilde{\mathcal{H}}_k$$

Setze $\Pi_k g(x) := r^k \pi_k g(x')$

Wie verhält sich $\sum_{k\geq 0} \Pi_k g(x)$ auf $B_1(0)$? –

5.26. <u>Satz</u> $P(rx', y') \equiv \frac{1}{\omega_n} \frac{1-r^2}{|rx'-y'|^3} = \sum_{k\geq 0} r^k Z^k_{x'}(y')$.

Die Reihe konvergiert glm für $r < r_0 < 1$.

Bew. ⌈ Setze $u(rx') := \sum_{k\geq 0} r^k \pi_k g(x')$

Diese Reihe ist glm konvergent für $r < r_0 < 1$:

$$\sum_{k\geq 0} |r^k \pi_k g(x')| \overset{\text{III.3.25.(8)}}{=} \sum_{k\geq 0} r^k |(g, Z^k_{x'})| \leq$$

$$\leq \sum_{k\geq 0} r^k \|g\|_{L^2(S^2)} \cdot \|Z^k_{x'}\|_{L^2(S^2)} \leq \|g\|_{L^2(S^2)} \sum_{k\geq 0} r_0^k \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}}$$

$$\leq c(r_0) \cdot \|g\|_{L^2(S^2)} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$

Als Limes einer glm konvergenten Folge von harmonischen Funktionen ist $u(x)$ harmonisch in $B_1(0)$

Natürlich gilt : $u(x') = \sum_{k \geq 0} \pi_k g(x') = g(x')$

Also ist u die Lösung des klassischen Dirichletproblems mit Rdwerten g.

Es folgt :

$$u(rx') = \sum_{k \geq 0} r^k (g, z_{x'}^k) = \sum_{k \geq 0} r^k \int_{S^2} g(y')\, z_{x'}^k(y')\, d\sigma(y') =$$

$$= \int_{S^2} g(y') \left(\sum_{k \geq 0} r^k z_{x'}^k(y') \right) d\sigma(y')$$

Aus der Eindeutigkeit des Poissonkerns schliessen wir :

$$P(rx', y') = \sum_{k \geq 0} r^k z_{x'}^k(y')$$

5.27. <u>Bemerkung</u>

En passant haben wir damit einen weiteren Lösungsweg für das Dirichletproblem auf der Kugel gefunden !

$$u(rx') = \sum_{k \geq 0} r^k \pi_k g(x')$$

Man beachte speziell, dass die Randwerte keinerlei Stetigkeits- oder gar Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllen müssen !