Ein Linearisierungs theorem

Wir werden folgendes Linearisierungs theorem beweisen:

Das Linearisierungstheorem von Caratheodory Cartan

Sei $\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_1, \dots, z_n)$ f_i holomorph, $i = 1, \dots, n$ in beschränkter Umgebung U von 0 in $\mathbb{C}^n$

kurz: $\frac{dz}{dt} = f(z)$

Angenommen $f(0) = 0$ und $z(0) \in U$ $z(t) \in U$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Umgebung V von 0 und eine dort definierte holom. Koordinaten transformation $z = U(\xi) = \xi + \sum_{\nu \geq 1} u_\nu \xi^\nu$, sodass die transformierte Gleichung folgende Gestalt hat:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi$$

A konstant, diagonalisierbar mit rein imagin. Eigenwerten

Für den Beweis brauchen wir das wichtige Theorem:

Existenz u. Eindeutigk. d. Haarmasses

Auf jeder kompakten topologischen Gruppe mit abzählbarer Basis gibt es ein eindeutiges Haar mass.

Zur Erinnerung:

topol. Gruppe

G heisst topol Gruppe, falls

1) G eine Gruppe ist
2) G ein topol. Raum ist
3) $\varphi : G \times G \to G$
$(x, y) \mapsto x^{-1}y$ ist stetig

Haar Mass

G sei eine topol. Gruppe
$M \in C(G)^*$ heisst Haar Mass, falls

1) $M(1\!\!1) = 1$ "normiert"
2) $\forall a \in G$ $M(f(x*a)) = M(f(x))$ "translations invarianz"
3) $M(f(x^{-1})) = M(f(x))$ "inversions invarianz"
4) $f \geq 0$ $f \neq 0 \Rightarrow M(f) > 0$ "positiv definit"

Formale Potenzreihen schreiben wir kurz so:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad \nu \in \mathbb{N}^n \text{ Multiindex}, \quad a_\nu \in \mathbb{C}^n, \quad z = (z_1, \dots, z_n)$$

Kalkül der formalen Potenzreihen

ausführlicher geschrieben, sieht das wie folgt aus

$$f(z) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_1 \dots \nu_n} z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n}$$

$$= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n = 0}^{\infty} \begin{pmatrix} a^{(1)}_{\nu_1 \dots \nu_n} & z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \\ \vdots & \\ a^{n}_{\nu_1 \dots \nu_n} & z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ \vdots \\ a_0^{(n)} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_n^{(1)} \\ a_1^{(n)} & a_n^{(n)} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots$$

man schreibt auch:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$$ wobei A_ν homogene Polynome vom Grad ν sind.

Jede formale Potenzreihe kann als Transformation $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ aufgefasst werden. Der Raum d. formalen Potenzreihen G ist eine kommutative Algebra über $\mathbb{C}$. In der "Algebra" schreibt man auch $\mathbb{C}^n[z_1, \dots z_n]$.

G Algebra d. formalen Potenzreihen

$$\tilde{G} = \{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu \mid \det A \neq 0 \}$$

$\tilde{G}$ Gruppe von Transformationen

In diesem Raum kann die Komposition erklärt werden, die $\tilde{G}$ zu einer Gruppe macht (→ Vorlesung)

$$\tilde{G}_1 = \{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu \mid A = \mathbb{1} \}$$ ist eine Untergruppe von G. Sie wird Gruppe d. formalen Koordinatentransf. genannt

$\tilde{G}_1$ Gruppe von Koord. transf.

Wir wollen auf dem Raum der formalen Potenzreihen eine Topologie einrichten:

Topologie auf G

$f \in G$

$\mu \in \mathbb{N}^n$ $\quad \pi_\mu : G \to \mathbb{C}^n$ ist lineare Abb.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \to a_\mu$$

$$\pi : G \to \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^n)}$$ Vektorraumisomorphismus

$$\pi = \prod_{\mu \in \mathbb{N}^n} \pi_\mu$$

Wir liften nun mit π die Produkttopologie von $(\mathbb{C})^{\mathbb{N}^n}$ auf G d.h. wir nehmen die gröbste Topologie auf G, welche alle π_μ stetig macht. Diese Topologie heisst "Topologie d. koordinatenweisen Konvergenz", denn eine Folge $(f_n) \subseteq G$ konvergiert genau, dann, wenn die Koeffiz. d. Polynome konvergieren.

G kann (bezüglich Addition u. Multiplikat.) als topol. Ring betrachtet werden.

$\hat{G}$ wird (bezügl. Komposition) zu einer topolog. Gruppe.

(Aus dem Blickwinkel der Funktionalanalysis ist G ein lokalkonvexer Raum mit Seminormen $p_\nu(f) = |a_\nu|$)

Auf $\hat{G}$ und $\hat{G}_1$ haben wir selbstverständlich die induzierte Topologie genommen.

Beschränktheit

Eine Transformationsmenge $\{T(\alpha)\} \subseteq \tilde{G}$ heisst

(schwach) beschränkt, falls

$\forall \mu \in \mathbb{N}^n \; \exists M_\mu \in \mathbb{R} \quad |a_\mu(\alpha)| \leq M_\mu \quad \forall \alpha$

d.h. $\exists \underset{\text{Majorante}}{F} \in \hat{G}(\mathbb{R}) \quad T(\alpha) \prec F \quad \forall \alpha$

Abgeschlossenheit

(schwach) abgeschlossen, falls

$\{T(\alpha)\}$ alle konvergenten Folgenlimits enthält

Kompaktheit

(schwach) kompakt, falls

jede Folge eine konv. Teilfolge enthält

$\Longleftrightarrow$ beschränkt u. abgeschlossen (folgt aus Tychonoff)

$\boxed{\text{Cartans Eindeutigkeitssatz}}$

$$\boxed{T \in \tilde{G}_1 \quad \{T, T^2, \dots\} \text{ beschränkt } \Rightarrow T = \mathbb{1}}$$

Γ $$T = z + \sum_{\nu \geq k} a_\nu z^\nu \qquad |a_k| > 0 \quad |k| \geq 2$$

$$T^2 = \left(z + \sum_{\nu \geq k} a_\nu z^\nu\right) + \sum_{\nu \geq k} a_\mu \left(z + \sum_{\nu \geq k} a_\nu z^\nu\right)^\mu$$

$$= z + 2 \cdot a_k z^k + \text{ Glieder höherer Ordnung}$$

$\vdots$

$$T^\ell = z + \ell \cdot a_k z^k + \dots$$

Da $\{T, T^2, \dots\}$ beschränkt ist, folgt $a_k = 0$ $\lrcorner$

Bem: Es gibt eine Verallgemeinerung dieses Sätzchens von Behnke u. Peschl, :

$$\boxed{T \in \tilde{G}_1 \quad \exists U \in \tilde{G} \quad \{UT, UT^2, \dots\} \text{ beschr. } \Rightarrow T = \mathbb{1}}$$

die genaugleich bewiesen wird.

$\boxed{\text{Lemma}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\{T(\alpha)\} \subseteq \tilde{G} \text{ beschränkte Gruppe} \\ \Rightarrow \overline{\{T(\alpha)\}} \text{ kompakte topol. Gruppe}\end{array}}$$

Γ 1) $\overline{\{T(\alpha)\}}$ ist nach Definition kompakt.

2) $\{T(\alpha_m)\}, \{T(\beta_m)\} \subseteq \overline{\{T(\alpha)\}}$ $\quad T(\alpha_m) \to T(\alpha)$
$T(\beta_m) \to T(\beta)$

$T(\alpha_m) \cdot T(\beta_m) \to T(\alpha) T(\beta)$, da die Koeffizienten von $T(\alpha_m) \cdot T(\beta_m)$ Polynome sind in den Koeff. von $T(\alpha_m)$ und $T(\beta_m)$. D.h. $T(\alpha) \cdot T(\beta)$ ist in $\overline{\{T(\alpha)\}}$ und die Gruppenmultiplikation ist stetig.

3) Assoziativität ist trivial

4) $T(\alpha) \in \overline{\{T(\alpha)\}}$, $\exists\, T(\beta) \in \overline{\{T(\alpha)\}}$: $T(\alpha) \cdot T(\beta) = \mathbb{1}$

$T(\alpha_m) \to T(\alpha)$ $\quad \exists\, (T(\beta_m))$ $\quad T(\alpha_m)\, T(\beta_m) = \mathbb{1}$

Da $\overline{\{T(\alpha)\}}$ kompakt ist, existiert Teilfolge $(T(\beta_{m_\nu}))$ von $T(\beta_m)$, die konvergiert.

$T(\beta_{m_\nu}) \to T(\gamma)$

$T(\alpha_{n_\nu}) \cdot T(\beta_{n_\nu}) = \mathbb{1} \Rightarrow T(\alpha) \cdot T(\gamma) = \mathbb{1}$

$T(\gamma) = T(\beta)$ $\lrcorner$

Linearisierung
$T \to L(T)$

$T \in \hat{G}$
$L : \hat{G} \to Gl_n(\mathbb{C})$
$T \to A = a_1$ Linearer Teil von T

Man könnte meinen, dass man durch diese Linearisierung viel verliert. dem ist nicht so:

Satz von Caratheodory

"Darstellung von $\{T(\alpha)\}$ in $\{L(T(\alpha))\}$"

$\{T(\alpha)\}$ beschränkte Untergruppe von $\hat{G}$
$L(\{T(\alpha)\})$ ist isomorph $\{T(\alpha)\}$ als Gruppe
falls $\{T(\alpha)\}$ kompakt, dann ist der Isomorphismus sogar ein Isomorphismus als topol. Gruppe

$\ulcorner$

1) L ist ein Homomorphismus $\quad L(ST) = L(S)\cdot L(T)$

$$T = \sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \qquad L(T) = A$$

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} b_r z^r = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \qquad L(S) = B$$

$$S\cdot T = \sum_{r=1}^{\infty} C_r = \underbrace{A_1 \circ B_1}_{C_1} + \underbrace{A_1 \circ B_2 + A_2 \circ B_1}_{C_2} + \dots$$

$$L(S\cdot T)z = C_1 = A_1 \circ B_1 = A\cdot B(z) = L(S)\cdot L(T)z$$

2) L ist bijektiv

müssen nur Injektivität zeigen:

$U, V \in \{T(\alpha)\} \quad S = U\cdot V^{-1} \quad L(U) = L(V)$

$f = \{S, S^2, S^3, \dots\} \quad f$ ist beschränkte Halbgruppe

$L(S) = L(U)\cdot L(V)^{-1} \quad L(U) = L(V) \Rightarrow L(S) = 1$

$\overset{\text{Cartan}}{\Longrightarrow} S = \mathbb{1} \Rightarrow U = V$

3) L ist stetig

klar, da L Projektion ist

4) Ist $\{T(\alpha)\}$ kompakt $\Longrightarrow L^{-1}$ ist stetig

ist eine topologische Konsequenz. $\lrcorner$

Als Korollar haben wir sofort das später noch gebrauchte:

Bem.: $\boxed{\begin{array}{l} \{T(\alpha)\} \text{ beschränkte Untergruppe von } \tilde{G} \\ \tilde{\pi}_\gamma \quad \{L(T(\alpha))\} \to \mathbb{C} \\ \qquad L(T(\alpha)) \mapsto a_\gamma \quad \text{ist stetig} \end{array}}$

Γ als Beweis genügt eine Zeichnung:

$$\begin{tikzcd} \overline{\{T(\alpha)\}} \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "\pi_\gamma"'] & & \{L(T(\alpha))\} \arrow[dl, "\tilde{\pi}_\gamma"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

L^{-1}, π_γ sind stetig,
$\tilde{\pi}_\gamma = \pi_\gamma \circ L^{-1}$ $\lrcorner$

Jetzt wird's interessant: Der nächste Satz behauptet, dass eine beschränkte topol. Gruppe von formalen Potenzreihen simultan diagonalisiert werden kann.

Satz $\boxed{\begin{array}{l} \{T(\alpha)\} \text{ beschränkte Topol. Untergruppe von } \tilde{G} \\ \Rightarrow \exists\, S \in \tilde{G}, \quad \forall \alpha \quad T(\alpha) = S^{-1} L(T(\alpha)) S \end{array}}$

Γ o.B.d.A $\{T(\alpha)\}$ kompakt

$\{L(T(\alpha))\}$ ist eine kompakte topol. Gruppe mit abzählb. Basis.

$\Rightarrow \exists$ Haar Mass M auf $\{L(T(\alpha))\}$

$a_\gamma(\alpha)$ M integrierbar, wegen obigem Lemma

d.h. $L(T(\alpha))^{-1} T(\alpha)$ ist koeffweise M integrierbar

und $L(L(T(\alpha)^{-1}) T(\alpha)) = \mathbb{1}$

$S := M(L(T(\alpha)^{-1}) T(\alpha))$ koeffweise integriert

$L(S) = M(I) = \mathbb{1}$ da $M(1) = 1$

$T(\beta)$ aus $\{T(\alpha)\}$

$$\begin{aligned} \underline{L(T(\beta)) S} &= L(T(\beta))\, M\left[L(T(\alpha)^{-1}) T(\alpha)\right] = M\left[L(T(\beta)) L(T(\alpha))^{-1} T(\alpha)\right] \\ &= M\left[L(T(\beta)) L(T(\alpha))^{-1} T(\alpha) T(\beta)^{-1} T(\beta)\right] \qquad L(T(\beta)) \text{ linear!} \\ &= M\left[\left(L(T(\alpha)) L(T(\beta)^{-1})\right)^{-1} (T(\alpha) T(\beta^{-1})\, T(\beta)\right] \\ &= M\left[L(T(\alpha) L(T(\beta))^{-1})^{-1} (T(\alpha) T(\beta^{-1})\right] T(\beta) \qquad \text{(Linearität)} \\ &= M\left[L(T(\alpha)^{-1} T(\alpha)\right] T(\beta) \qquad \text{translat. inv. von } M \\ &= \underline{S \cdot T(\beta)} \end{aligned}$$

$\lrcorner$

Noch zwei Bemerkungen zu den Eigenwerten und zur Diagonalisierbarkeit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \{T(\alpha)\} \text{ beschränkte Untergruppe von } \hat{G} \\ \lambda_k \text{ Eigenwerte von } L(T(\alpha)) \Longrightarrow |\lambda_k(\alpha)| = 1 \\ L(T(\alpha)) \text{ kann diagonalisiert werden} \end{array}}$$

$\ulcorner$ $\exists S(\alpha)$ $\quad U(\alpha) = S(\alpha)^{-1} T(\alpha) S(\alpha)$

mit $L(U(\alpha))$ in Jordannormalform und EW $\lambda_k(\alpha)$

$\{T(\alpha)^{\pm m}\}$ beschränkt $\Rightarrow$ $\{U(\alpha)^{\pm m}\}$ beschränkt

$\Longrightarrow |\lambda_k(\alpha)| = 1$

$U := L(U(\alpha))$ in Jordan Normalform $\quad U = u_{jk}$

$u_{j\,j+1} = 1 \Longrightarrow \lambda_j = \lambda_{j+1}$

$V := L(U(\alpha)^{m+1})$

$$V_{j,j+1}(\alpha) = \sum_{r_1 \ldots r_m = 1}^{n} u_{j,r_1}(\alpha)\, u_{r_1 r_2}(\alpha) \ldots u_{r_m, j+1}(\alpha)$$
$$= \lambda_j^m u_{j\,j+1} + \lambda_j^{m-1} u_{j,j+1} \lambda_{j+1} + \ldots u_{j,j+1} \lambda_{j+1}^m$$
$$= (m+1)\, \lambda_j^m\, u_{j\,j+1}$$

$|V_{j\,j+1}| = (m+1)|u_{j\,j+1}| \Longrightarrow |u_{j\,j+1}| = 0$ $\lrcorner$

Jetzt sind wir gerüstet, um das Linearisierungstheorem zu beweisen:

Bew Sei $\phi(t, z_0)$ die Lösung von $\frac{dz}{dt} = f(z)$

mit $\phi(0, z_0) = z_0$

$\phi(t, .)\quad \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad z_0 \longmapsto \phi(t, z_0)$ ist eine durch t parametrisierte Gruppe: $\phi(t, z_0)\,\phi(s, z_0) = \phi(t+s, z_0)$

$\phi(t, z_0)^{-1} = \phi(-t, z_0)$

Wir beschränken uns auf $z_0 \in V = B(R) = \{z \,|\, |z_1| \leq R_1 \ldots |z_n| \leq R_n\}$

$\hat{U}$ Polyzylinder

$\phi(t, z_0)$ ist eine holomorphe Funktion von z_0 $\cap V$ da f holomorph ist.

Sei k der Durchmesser von U.

1) $\{\phi(t,z_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist eine beschränkte topologische Gruppe

Nach Voraussetzung gilt: $\phi(t,z_0) \leq k \quad \forall t \in \mathbb{R}, z_0 \in V$

In V können wir $\phi(t,z_0)$ in eine Potenzreihe um z_0 entwickeln.

$$\phi(t,z_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(t) z_0^\nu \qquad |a_\nu(t)| \leq \frac{K \cdot \nu!}{R^\nu}$$

Cauchy

2) Es existiert ein holomorphes $u \in \hat{G}_J$, das die Difgleichung diagonalisiert:

$$\xi = \psi(t,\xi_0) = u(\phi(t, u^{-1}(\xi_0))) = B(t)\,\xi_0$$

Das diagonalisierende u hatte die Form $u = M[L(\phi(-t,z_0)\circ\phi(t,z_0))]$

$$= \sum u_\nu z_0^\nu \qquad u_\nu \leq \frac{k^2 \nu!}{R^{\nu+1}} = \frac{const}{R^\nu}$$

$\longrightarrow$ u holomorph

3) $B(t) = e^{At}$ $\quad A$ constant

$$B(t+s)\xi_0 = u(\phi(t+s, z_0)) = u(\phi(t, \phi(s) z_0))$$
$$= u(\phi(t, u^{-1}[u(\phi(s,z_0)]) = B(t)B(s)\xi_0$$

$$\frac{d}{dt} B(t)\Big|_{t=t_0} = \lim_{s\to 0} \frac{B(t+s)-B(t)}{s} = B(t)\cdot \lim_{s\to 0}\frac{B(s)-\mathbb{1}}{s}$$
$$= B(t)\cdot \underbrace{\frac{d}{dt}B(t)\Big|_{t=0}}_{:=A} = B(t)\cdot A$$

$\Longrightarrow B(t) = const.\cdot e^{At}$

$B(0) = \mathbb{1} \Rightarrow const = 1$

4) A ist diagonalisierbar

$B(t) = e^{At}$ ist diagonalisierbar

$$S(t)^{-1}\cdot B(t)\cdot S(t) = D(t) \quad \text{diagonal}$$
$$\| $$
$$e^{S(t)^{-1}At\,S(t)}$$

$\log D(t) = S(t)^{-1} At\, S(t)$ ist ebenfalls diagonal

5) Die Eigenwerte von A sind rein imaginär

$B(t)$ hat Eigenwerte λ_n mit $|\lambda_n| = 1$

Die Diagonalelemente von $S(t)^{-1}AtS(t)$ sind die Eigenwerte von A: $\mu_k(t) = \frac{1}{t}\log(\lambda_k(t)) = \frac{1}{t}\, i(\Theta_k(t) + 2\pi m)$

Da $B(t) = \mathbb{1}$ für $t=0$ gilt $\Theta_k(t) = 0$, $2\pi m = 0$

[...]phie

Ω offen in $\mathbb{C}^n$
$f: \Omega \to \mathbb{C}$ heisst <u>holomorph</u>, falls für alle $a \in \Omega$ eine Umgebung U von a existiert, in der f durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann:

$$f(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} c_\gamma (z-a)^\gamma \qquad \gamma \in \mathbb{N}^n, \quad c_\gamma \in \mathbb{C}$$

[...]ches [...]a

$\{c_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{N}^n}$ eine Menge komplexer Zahlen
$\exists\ R = (R_1, \ldots R_n)$ $\exists\ M > 0$ notat: $R^\gamma = R_1^{\gamma_1} R_2^{\gamma_2} \ldots R_n^{\gamma_n}$

$$|c_\gamma| R^\gamma \le M \qquad \forall \gamma \in \mathbb{N}^n$$

Dann konvergiert die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} c_\gamma (z-a)^\gamma$ gleichmässig im Polyzylinder $|z_j - a_j| < R_j$.

Auch die Potenzreihen $\sum_{\gamma=0}^{\infty} c_\gamma D^\mu (z-a)^\gamma$ $\mu \in \mathbb{N}^n$ konvergieren dort gleichmässig.

Beweis ist trivial $\square$

als korollar erhalten wir:

$$f(z) = \sum c_\gamma (z-a)^\gamma \Rightarrow c_\gamma = \frac{1}{\gamma!} (D^\gamma f)(a)$$

$D^\gamma = \frac{d^{\gamma_1}}{dz_1^{\gamma_1}} \cdots \frac{d^{\gamma_n}}{dz_n^{\gamma_n}}$

[...]uchy [...]meln

Ω offene Menge in $\mathbb{C}^n$
f holomorph in Ω $P(a,R) = \{z \mid |z_1| < R_1, \ldots |z_n| < R_n\} \subseteq \Omega$ "Polyzylinder"

$z \in \overline{P}(a,R)$

$$f(z) = \int_{|\xi_1 - a_1| = R_1} \cdots \int_{|\xi_n - a_n| = R_n} f(\xi_1 \ldots \xi_n) \prod_{j=1}^{n} (\xi_j - z_j)^{-1} \, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

kurz: $$f(z) = \int_{|\xi - a| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} \, d\xi$$

als korollare erhalten wir:

[...]uchy [...]gleich

f holomorph in Ω $\overline{P}(a,R) \subseteq \Omega$
$$\Rightarrow |D^\gamma f(z)| \le \frac{M \cdot \gamma!}{R} \quad \text{in } \overline{P}(a,R)$$

setzen Polarkoordinaten ein in Cauchy formeln.

$\boxed{D^\nu f(z)}$

$$\boxed{\begin{aligned} D^\nu f(z) &= \int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}}\, d\xi \cdot \frac{\nu!}{(2\pi i)^n} \\ &= \frac{\nu!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1-a_1|=R_1} \cdots \int_{|\xi_n-a_n|=R_n} \frac{f(\xi_1 \ldots \xi_n)}{\prod_{j=1}^n (\xi_j-z_j)^{\nu_j+1}}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \end{aligned}}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_\nu \frac{1}{\nu!} D^\nu f(a)\,(z-a)^\nu \quad \text{in } \overline{P}(a,R)}$$

$\ulcorner$ folgt direkt aus:

$$\prod_{j=1}^n (\xi_j - z_j)^{-1} = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} \prod_{j=1}^n \frac{(z_j-a_j)^{\nu_j}}{(\xi_j-a_j)^{\nu_j+1}},$$

(kurz: $(\xi - z)^{-1} = \sum_\nu \dfrac{(z-a)^\nu}{(\xi-a)^\nu}$) $\lrcorner$