Funktionentheorie

Ableitung

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen

$z_0 \in \Omega$

$$\frac{d}{dz} f(z)\Big|_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

d.h. $\forall (z_n) \in \Omega$

$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

$$\frac{d}{dz} f(z)\Big|_{z=z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0}$$

$C^1(\Omega)$

$$C^1(\Omega) = \left\{ f:\Omega\to\mathbb{C} \,/\, f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) ;\ u,v \text{ stetig} ;\ \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \text{ stetig} \right\}$$

holomorph

$f \in C^1(\Omega)$

f ist analytisch oder holomorph, wenn

$$\left(\exists \frac{d}{dz} f(z)\Big|_{z=z_0}\right) (\forall z_0 \in \Omega)$$

$f \in \Theta(\Omega)$

$w = \sqrt{z}$

Riemannebene

Cauchy Riemann Gleichung

$$f \in \Theta(\Omega) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

positive Jakobi Determ.

$$f \in \Theta(\Omega) \Longrightarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \geq 0$$

hinreichendes Kriterium für Holomorphie

$$f \in C^1(\Omega) \wedge \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ,\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f \in \Theta(\Omega)$$

$\frac{\partial f}{\partial z}$ $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \text{immer definiert} \end{gathered}}$$

Holomorph. Funktion

$$\Theta(\Omega) = \left\{ f \in C^1(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Winkel

$z_0 \in \Omega$ $\quad \gamma_1, \gamma_2$ dif.bare Kurven

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\quad \gamma_i', \Gamma_i'$ Tangenten

$\Gamma_i = f \circ \gamma_i$

$$\sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \sphericalangle(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0))$$

Rechenregeln

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(f g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar z} + g \frac{\partial f}{\partial \bar z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar z} + \beta \frac{\partial g}{\partial \bar z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} \frac{f}{g} = \left(g \frac{\partial}{\partial \bar z} f - \frac{\partial}{\partial \bar z} g f\right) / g^2 \quad g \neq 0$$

Bsp

Polynome analytisch

Linienintegral

γ Kurve in Ω $\quad \gamma \in C^1([a,b], \Omega)$

$f \in C^0(\Omega)$ (stetig)

$$\int_\gamma f \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt} \, dt$$

Bsp

$$\int_{|z|=r} z^n \, dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Green

$$\int_{\partial\Omega} f \, dz = \int \frac{\partial f}{\partial \bar z} \, d\bar z \wedge dz$$

analytisch → keine Arbeit

f analytisch $\rightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$

(Cauchy)

Matrizen

$M(n, \mathbb{R})$	n×n Matrizen reell
$M(n, \mathbb{C})$	n×n Matrizen kompl.
$O(n, \mathbb{R})$	orthog.
$SU(n)$	unitär
$su(n)$	schiefhermitsch

$e^z \in \Theta$

$e^z \in \Theta(\Omega) \quad \forall\, \Omega \subseteq \mathbb{C}$

Anwd.

Anwend. von Cauchy:
Berechn. von uneigentl. Integralen

Cauchy Formeln

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, beschränkt
$\partial\Omega$ endl. Verein. v. Jord. Kurven
$f \in \Theta(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega \quad \forall z \in \Omega$$

Abschätz. d. Arbeit integrals durch Länge

$$\left| \int_\gamma f\,dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \underbrace{L(\gamma)}_{\text{Länge}}$$

ganze Funkt.

$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow f$ ganze Funkt.

Liouville

f ganz, beschränkt

$\Rightarrow f$ konst

bianalytisch

$\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{C}$ $\quad \Omega_1 \xrightarrow{f} \Omega_2$

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$, f bij, $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$

f bianalytisch, biholomorph

Picard

f ganz

$(\exists a_1, a_2)(\nexists z)\ f(z) = a_1 \vee f(z) = a_2$

$\Rightarrow f$ konstant

"Eine ganze Funktion, die zwei Zahlen auslässt ist konst.

Bew. d. Fundamentalsatzes

Bew. d. Fundamentalsatzes

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} < \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|a_n||z|^n}$

P keine Lösung $\wedge\ P \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \frac{1}{P} \in \mathcal{O}(\Omega)$

$\frac{1}{P} \in \mathcal{O}(\Omega) \wedge \frac{1}{P}$ beschränkt $\Rightarrow P$ konst ↯

$\frac{d}{dz} f \in \Theta(\Omega)$

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen $\quad f \in \Theta(\Omega)$

$\Longrightarrow$ (1) $\frac{d}{dz} f \in \Theta(\Omega)$

(2) $f \in C^\infty(\Omega)$

"nette Funktion"

$f \in \Theta(\Omega) \Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} f \in \Theta\Omega$

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}} d\omega$$

Potenzreihe

$a_n, n \geq 0 \in \mathbb{C} \quad z_0 \in \mathbb{C}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Potenzreihe mit Koeff. a_n und Zentrum z_0

Konverg. radius

$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$ konv. rad.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konv. absol. und gl. mässig in jeder Kugel $|z-z_0| < r < R$ und div. $|z-z_0| > R$

$\Omega \subset \mathbb{C} \to M(n, \mathbb{C})$

$A \in M(n, \mathbb{C})$

$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i} \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1 \ldots \lambda_k\} \to (\lambda - A)^{-1} \in M(n, \mathbb{C})$

denn

$$(\lambda - A)^{-1}_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\alpha_{ij}(\lambda)}{\det(\lambda - A)}$$

$B : \Omega \subset \mathbb{C} \to M(n, \mathbb{C})$

$\qquad \lambda \mapsto b_{ij}(\lambda)$

$B(\lambda)$ analytisch $\Leftrightarrow$ $b_{ij}(\lambda)$ anal. $\forall i,j$

P_i, N_i

$A \in M(n, \mathbb{C}) \quad \delta < \min_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|$

$$P_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_i| = \delta} (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda$$

$$N_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_i| = \delta} (\lambda - \lambda_i)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda$$

Jordan

1) $P_i P_j = \delta_{ij} P_i = P_j P_i \quad \sum_{i=1}^{k} P_i = I$
   $A P_i = P_i A \quad P_i^2 = P_i$ Projektion
2) $N_i P_j = \delta_{ij} \cdot N_i = P_j N_i$, $N_i N_j = 0 \; i \neq j$
   $N_i^{(\mu_i - 1)} = 0 \quad i = 1 \ldots k$ nilpotent
3) A ähnl. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \sum_{i=1}^{k} N_i$ Jordan

wichtige Beweisgleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n\ge 0} |a_n|^2 r^{2n}$$

Cauchy-Ungleichung

$f(z) = \sum a_n z^n \in \mathcal{O}(D_R)$

$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad r < R$

$\Rightarrow |a_n| r^n \le M(r) \quad (\forall n \ge 0)$

Verallg. von Liouville

f ganz $\quad |f(z)| \le C \cdot |z|^N$

C unabh. von z $\quad \forall z$

$\Rightarrow f$ Polynom $\quad$ grad $f \le N$

Lemmas

$f \in C^0(\Omega) \rightarrow |f| \in C^0(\Omega)$

Ω beschränkt $\Rightarrow (\exists z_0 \in \bar{\Omega}) \ |f(z_0)| = \sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)|$

Maximum Prinzip

Ω offen, zusammenh. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

$f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$(\exists z_0 \in \Omega) \ |f(z_0)| \ge \sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| \Rightarrow f$ konst.

Ω offen beschränkt

$\sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)| \ge \sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)|$

f_r

$f_r(x) = f(r e^{2\pi i x}) \quad f \in \Theta(D_R),\ r < R$
$(\Rightarrow f_r(x+1) = f_r(x)\ \forall x$ per. Funkt.$)$

$C^p(T^1)$

$C^p(T^1) = \{ f(x) \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(x+1) = f(x)\ \forall x \}$
$T^1 = S^1$ eind. Torus
$T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$
$(\Rightarrow (\forall p)(\forall r < R)\ f_r(x) \in C^p(T^1))$

Fourier koeffizienten

$f \in C^0(T^1) \wedge n \in \mathbb{Z}$
$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx$

$\hat{f}_r(n) = \int_0^1 f_r(x) e^{-2\pi i n x}\, dx$

$= \begin{cases} a_n r^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Pythagoras i. unendl. Dim

$\int_0^1 |f_r(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_r(n)|^2$

Fourier Entwicklung

$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(n)\, e^{-2\pi i n x}$ primit. period Funktionen

inneres Produkt

$f, g \in C^0(T^1)$
$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \bar{g}(x)\, dx$

VR $C^0(T^1)$

$C^0(T^1)$ VR über $\mathbb{C}$

dim C^0

$\langle e^{2\pi i m x}, e^{2\pi i n x}\rangle = \delta_{mn}$
orth. Menge
$\Rightarrow \dim C^0 = \infty$

C^0 unit. VR

1) $\langle af, g\rangle = a\langle f,g\rangle = \langle f, \bar{a} g\rangle$
2) $\langle f_1+f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$
3) $\langle f, g_1+g_2\rangle = \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle$
4) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$
5) $\langle f,f\rangle \geq 0$, $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f=0$
$\Rightarrow$ C^0 unitärer VR über $\mathbb{C}$

bilinear

Schwarz'sche Ungleich.

$f,g \in C^0(T^1)$
$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$

Norm

$$\|f\| = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 |f|^2 dx\right)^{1/2}$$

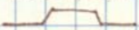
$\|\ \|$ Norm

$\|\ \|$ Norm auf $C^0(T^1)$
i) $\|f\| \geq 0$ $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f=0$
(ii) $\|af\| = |a|\,\|f\|$ $a \in \mathbb{C}$
(iii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ Δ Ungl.

Cauchy Folge

$f_n \in C^0(T^1)$ $n \geq 1$ ist Cauchy Folge $\Leftrightarrow$
$\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0$

$C^0(T^1)$ vollst. metr. Raum

$C^0(T^1)$ kein vollst. metrischer Raum  bez. $\|f\|$

aber vollst. metr. Raum bez. $\|f\|_\infty$

Hilbert Raum

Hilbertraum: vollständig metrischer unitärer VR

Bsp f. Hilberträume

$\mathbb{C}^n \quad \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{ x = (\ldots a_{-1}, a_0, a_1 \ldots) \mid a_n \in \mathbb{C} \wedge \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$

Besselsche Ungleichung

$f \in C^0(T^1) \Rightarrow$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2$

$\hat{f}(n) = \langle f, e^{2\pi i n x}\rangle$

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$

$f \in C^1(T^1) \quad S_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$

$\Rightarrow S_n(x)$ konv. glm. nach f

$\sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\| n^{-1/2}$

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

$\hat{f}(n) = \langle f, e^{2\pi i n x}\rangle$

$\hat{f}$ Koordinaten in ∞-dim VR

$\hat{f'}$

$f \in C^1(T^1)$

$\Rightarrow \hat{f'}(n) = 2\pi i n \hat{f}(n)$

Kolmogorov

($\exists$ period Fkt f)

$\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty \wedge \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

divergent $\forall x \in I$

Cesàro Konverg.

$f \in C^0(T^1)$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$ konv. glm. nach f

$\wedge$ inj.

$C^1(T^1) \xrightarrow[\text{inj.}]{\wedge} l_1^2(\mathbb{Z}) = \{a_n, n \in \mathbb{Z} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| n^2 < \infty\}$

Bessel Gleich

Parseval

$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$

$S_n \to f$

$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \xrightarrow{\text{glm}} f$

$\forall f \in C^1(T^1)$

höhere Abl. schnelleres Abfallen

$f \in C^k(T^1)$

$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 n^{2k} < \infty$

$f \in C^\infty(T^1) \Rightarrow \hat{f}(n) = O(n^{-k}) \; \forall k > 0$

reell analytisch

$f \in C^0(T^1)$ reell analytisch $\Longleftrightarrow$ $(\forall x \in [0,1])(\exists \varepsilon_x < 0)$ f analyt. in $|z-x| < \varepsilon_x$

Dirichletscher Kern

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k t} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$$

$C^\omega(T^1)$

$C^\omega(T^1) = \{ f \in C^0(T^1) \mid f \text{ reell analyt.} \}$

$C^\omega(T^1) \subsetneq C^\infty(T^1)$

$\hat{f}(n) \le c \cdot e^{-\varepsilon|n|}$

$f \in C^\omega(T^1) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0) \; |\hat{f}(n)| < c\, e^{-\varepsilon |n|}$

Fejérsche Kern

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(t) = \frac{1}{n} \frac{(\sin \pi n t)^2}{(\sin \pi t)^2}$$

Fejér Mittel

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} S_m$$

$$S_m = \sum_{n=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{2\pi i k x}$$

Satz v. Fejér

$$f \in C^0(T^1) \Rightarrow \sigma_n \xrightarrow{gl} f \quad (n \to \infty)$$

$\|f\|_\infty$

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)|$$

$f \in C^0(T^1)$

~~Metrik~~ Norm in $C^0(T^1)$

$C^0(T^1)$

$C^0(T^1)$ vollst. metr. Raum

$\Theta(z,\omega)$

$$\omega \in H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im} z > 0 \}$$

$$\Theta(z,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 \omega}$$

$z \in \mathbb{C}$

Θ wohl definiert

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 \omega}$ konv. absol. und gleichmässig auf beschränkte Menge $\subset \mathbb{C} \times H$

$\Rightarrow \Theta(z,\omega)$ anal. Funkt. von z und ω

Sehr schöne Funktion

(1) $\theta(z+1, \omega) = \theta(z, \omega)$

(2) $\theta(z+\omega, \omega) = e^{-2\pi i (z + \frac{1}{2}\omega)} \theta(z, \omega)$

(3) $\theta\left(\frac{1+\omega}{2}, \omega\right) = 0$

(4) $\theta(z, \omega) = 0 \Rightarrow z = \frac{1+\omega}{2} + k + l\omega$

(5) $\theta(0, it) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \quad t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

Jakobiidentität

(6) $\hat{\theta}(n) = e^{\pi i \omega n^2}$

Jakobi Identität

(1) $\sqrt{\frac{\omega}{i}}\, \theta(z, \omega) = e^{-\pi i \frac{z^2}{\omega}} \theta\left(\frac{z}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right)$

(2) $\theta\left(z, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \omega (z+n)^2}$

→ verallgem. von (5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$$

Identitäts Satz

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zush. offen

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $z_0 \in \Omega$ $\quad \left.\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right|_{z=z_0} = 0 \quad n \geq 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$

f, g anal. in Ω $\quad z_n \in \Omega$ $n \geq 1$ Folge

$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0 \in \Omega \quad f(z_n) = g(z_n) \quad n \geq 1$

$\Rightarrow f = g$

$$f \in \Theta(\Omega) \qquad \Omega_1 \overset{\text{echt}}{\subseteq} \Omega \text{ offen}$$

f keine Nst. an $\partial\Omega_1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \# \quad \text{(Anzahl Nst. von } f \text{ in } \Omega_1\text{)}$$

$C^0(D)$ Banachraum

$C^0(D) \qquad D \subseteq \mathbb{R}^n$ komp

$C^0(D)$ vollst. metrischer VR

Banachraum

Norm $\|f\| = \sup |f(x)|$

gleichgrad. stetig

$\{f_k\}$ gl. grad. stetig $\Longleftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)(\forall k)$
$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon \Leftarrow |x-y| < \delta$

ASCOLI

$\{f_k\}$ pktw. beschränkt
gl. gr. stetig
$\Longrightarrow \{f_k\}$ beschränkt
$\wedge \{f_k\}$ hat konv. Teilfolge

beschränkt glgrad. stetig

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad f_k \in \Theta(\Omega) \quad D \subseteq \Omega$

$\|f_k\|_D < M_D \quad (\forall D)$

$\Longrightarrow \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ glgr stetig $(\forall D)$

Ascoli f. analyt. Fkt.

$\|f_k\|_D \le M_D \quad (\forall D) \quad f_k \in \Theta(\Omega)$

$\Rightarrow (\exists \text{ TF } \{f_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \mid$ TF konv. gl. m.

Identitäts-Satz

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zush. $\quad (z_n) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C} \quad \neg$ konst.

$\lim z_n = z_\infty \in \Omega$

$f \in \Theta(\Omega) \quad f(z_n) = 0 \quad \forall n \ge 1$

$\Rightarrow f = 0 \quad (\forall z \in \Omega)$

unendl. Produkt.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_j}\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)$$

Weierstrass

$0 < |z_1| < |z_2| < \ldots$ Folge $\subset \mathbb{C}$

ohne endl. HP $\longrightarrow$

$(\exists\, p_1, p_2 \ldots \in \mathbb{Z}) \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right)$

$f(z)$ ganze Fkt. $\wedge f(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_i \; \exists i$

$E(u,p)$

$$E(u,p) = (1-u)\, e^{\left(u + \frac{u^2}{2} + \ldots \frac{u^p}{p}\right)}$$

$G(z)$

$$G(z) = \prod_{n\geq 1} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

γ

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} - \log n$$

Eulersche Konst.

$\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n\geq 1} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$

ANALYTISCH ERWEITERN

$\Gamma(z)$ anal.

$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}$ analyt auf $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

Pol

f analyt in $0 < |z-z_0| < R$

z_0 Pol Ordnung n $\Longleftrightarrow$

$(z-z_0)^n f(z)$ analyt in $|z-z_0| < R$

$\wedge\ (z-z_0)^{n-1} f(z)$ $\neg$ analyt.

meromorph

Alle Singul. Pole $\Longrightarrow$
Fkt. meromorph

Zetafunkt. analyt.

$\zeta(s)$ analytisch auf $Re(s)>1$

Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} (1-p^{-s})^{-1}$$

Fasten your seatbelts

$$\pi^{-1/2 s}\,\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s+1} + x^{+\frac{1}{2}s+1}\,\psi(x)\,dx$$

Riemannsche Funktionalgl.

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}(1-s)\right)\,\zeta(1-s)$$

$\psi(x)$

$$\psi(x) = \sum_{n=1} e^{-\pi n^2 x} = (\Theta(0, ix) - 1)/2$$

Riemann Vermutung

$\forall$ NST v. $\zeta(s)$ nicht trivial liegen auf $Re(z) = \frac{1}{2}$

triviale NST von ζ

$\zeta(-2n) = 0 \quad n \geq 1$

Hadamard de la Vallée-Poussin

$\zeta(s)$ keine NST auf $\mathrm{Re}(s) = 1$

analyt. Isomorphismus

f analytisch $\wedge$
$|f(z)| \leq 1 \quad |z| \leq 1 \quad \wedge$
$f^{-1} \exists \iff$
f analyt. Isomorphismus

Schwarzsches Lemma

~~f Isomorph.~~ $|f(z)| < 1$

$f(0) = 0 \Rightarrow |f(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1$

$|f(z^*)| = |z^*| \quad \exists z^* \; |z^*| < 1 \; z^* \neq 0$
$\wedge \; f(0) = 0$
$\Rightarrow \exists \phi \in \mathbb{R} \quad f(z) = e^{i\phi} z$

Erst. d. Schwarzschen Lemmas

f analyt. Isomorph d. E. Kreis
0 Fixpunkt $\Rightarrow f$ Rotation

$\forall$ Isomorph

$|\alpha| < 1 \quad \phi \in \mathbb{R}$

$e^{i\phi} \dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha} z - 1}$ sind $\forall$ analyt. Isomorph d. Einheitskreises

$SL(2,\mathbb{C})$

$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a..d \in \mathbb{C}, \det 1 \right\}$

ist Lie'sche Gruppe

T_g homom. $SL(2,\mathbb{C})$

$\exists$ Homomorphism

$T_g(z) \to SL(2,\mathbb{C})$

$T_{g_2} \circ T_{g_1} = T_{g_2 \cdot g_1}$

T_g

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad T_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$\langle x,y \rangle_M$

$\langle x,y \rangle_M = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$

Lorentz-trafo

L Lorentztrafo $\Leftrightarrow$

$\langle x,y \rangle_M = \langle Lx, Ly \rangle_M$

L_g Lorentz trafo

$g x g^* \in$ Herm ($x \in$ Herm)

$g \in SL(2,\mathbb{C})$

$\det x = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

$x = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + i x_2 \\ x_1 - i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in$ Herm

L_g lin Abb. auf Herm

L_g Lorentztrafo

SU(1,1)

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar b & \bar a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

SU(1,1) SL(2,ℝ)

SU(1,1) isomorph SL(2,ℝ)

$\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ SL(2,ℝ) hyp. Isomet.

SL(2,ℝ) $\cong$ analyt. Isomorph. von $\mathbb{H}$ $\underline{\mathbb{H} \to}$
isometr. Abb in Hyperb. Geometrie

Laurent Reihe

$f \in \mathcal{O}(\Omega - \{z_0\})$
$z \in \Omega - \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\, d\omega \quad n \geq 0$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'}^{C} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\, d\omega \quad n < 0$$

hebbar Pol wesentliche Singul.

z_0 hebbare sing. $\Leftrightarrow a_n = 0 \quad n \leq -1$
z_0 Pol n-ter Ordn. $\Leftrightarrow a_n = 0 \quad n \leq -m-1$
$a_{-m} \neq 0$
z_0 wesentliche sing. $\Leftrightarrow$
kein Pol $\neg$ hebbar

Residuum $Res(f; z_0)$

f anal. $\wedge$ z_0 sing. isoliert
Residuum in z_0 $Res(f; z_0)$
$Res(f; z_0) = a_{-1}$

Residuen-Satz von Cauchy

f ana $\in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_i \mid i \leq n \in \mathbb{N}\}$
C Jordankurven enth. z_i

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$

Weierstrass

f analyt mit isol.
wesentl. Singul. a
$\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ und $c \in \mathbb{C}$ geg.
$\Rightarrow (\exists z)\ |z-a| < \rho \quad |f(z) - c| < \varepsilon$

$\langle v,w \rangle_z$

$\langle v, w \rangle_z$ allg. Skalarprod.

L_γ

$$L_\gamma = \int_0^1 \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle_{z(t)}\, dt$$

Gruppe auf H

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
$z_1 \cdot z_2 = (x_2 y_1 + x_1, y_1 y_2)$
$(0,1)$ 1 Elem. — Gruppe
$(-x y^{-1}, y^{-1})$ Inv. Elem

Tensoren Grundbegriffe

$(V_1, V_2 \dots V_r)$ Folge von VR über k
$(v_1, \dots v_r) \to A(v_1, \dots v_r)$
Multilinearform

V VR fest n dim V^* Dualraum
$\forall V_i$ in $(V_1 \dots V_r)$ $V_i = V \vee V_i = V^*$
V^* p mal V q mal $p+q=r$

jede Multilinearform über $(V_1 \dots V_r)$ nennt man p stufig kontravarianter und q stufig kovarianter Tensor über V

$q=0$ rein kontravarianter Tensor
$p=0$ rein kovarianter Tensor
$p \neq 0 \wedge q \neq 0$ gemischter Tensor Stufe (p,q)

kovariante Tensoren 1. Stufe: Vektoren $\in V^*$
kovariante Tensoren 1. Stufe Vektoren $\in V$
$p=0 \wedge q=0$ Skalare aus k

A, B über gleiche Folge $(V_1 \dots V_r)$
so gleichart. Tensoren

Invariante von $L_H(\gamma)$ bei Abb T_g

$g \in SL(2,\mathbb{R})$

$$\int_0^1 \frac{\left|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right|}{\operatorname{Im}\gamma(t)} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{d}{dt} T_g \gamma(t)\right|}{\operatorname{Im} T_g \gamma(t)}\,dt$$

Hyperbol. Länge invariant bei T_g Abb. Anal. Abb. zu Translat. in eukl. Gm

$L_H f(\gamma(t)) \leq L_H \gamma(t)$

$f: H \to H$ analyt.
γ belieb. Kurve in H

$$L_H f(\gamma(t)) \leq L_H \gamma(t)$$

Krümmung

Krümmung bei P =

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi\rho - c(\rho)}{\rho^3}$$

$c(\rho)$ Kreisumfang

Bsp

ellipt. Gm $c(\rho) = \sin(\rho) \cdot 2\pi$
hyperb. Gm $c(\rho) = \sinh(\rho)\, 2\pi$
euklid. Gm $c(\rho) = 2\pi\rho$

Hyperb. Kreis

$$\gamma(\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} e^{\rho i} - \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} e^{\rho i} + \cos\frac{\theta}{2}}$$

Complex Analysis Ahlfors

Laplace Gleichungen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

folgt aus Cauchy-Riemann Gl.

harmon. Funktion

$\Delta u = 0$

harmonische Funktion

konjugierte harmonische Funktion

$$\Delta u = 0 \wedge \Delta v = 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

v ist die zu u konjugierte harmonische Funktion

Nullst. von Polynomen

$P(z)$ Polynom

Das kleinste konvexe Polygon, welches alle Nullstellen von $P(z)$ enthält, enthält auch alle Nullst. von $P'(z)$

Topologie

topol. Raum

Ein topolog. Raum ist ein Paar (X, T) von Mengen
"T ist eine Topologie auf X"

T ist eine Menge von Teilmeng. von X und es gilt

(1) $\emptyset \in T,\ X \in T$
(2) $G_1, G_2 \in T \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in T$
(3) $S \subseteq T \Rightarrow \bigcup_{G \in S} G \in T$

T Menge der offenen Gebiete G

topol. Räume

Bsp.: Diskrete Topologie
$T = \{G \mid G \subseteq X\}$
Indiskrete Topologie
$T = \{\emptyset, X\}$
koendliche Topologie
$T = \{G \mid X \setminus G \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$
euklidische Topologie
$X = \mathbb{R}$
$T = \{G \subseteq \mathbb{R} \mid (\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq G\}$

abgeschlossen

(X, T) topol. Raum
$F \subseteq X$ abgeschlossen, falls
$(X - F) \in T$

jeder HP von F gehört zu F
HP: ξ HP $\Leftrightarrow$ in $\dot{U}_\varepsilon(\xi)$ $\exists$ Element von A $(\forall \varepsilon)$

offen: $(\forall \xi \in G)\ \exists U_\varepsilon(\xi) \subseteq G)$

dualer top. Raum

(X, C) heisst Topologie der abgeschlossenen Mengen von X

1b) $\emptyset \in C, X \in C$

2b) $F_1, F_2 \in C \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in C$

3b) $S \subseteq C \Rightarrow \bigcap_{F \in S} F \in C$

Dualität

(X, C) top. Raum (1b) bis (3b) $\wedge$

$T = \{ F' \mid F \in C \}$ $\Longrightarrow$

(X, T) top. Raum (1) bis (3)

Stetigkeit

$(X_1, T_1), (X_2, T_2)$ top. Räume

$f: X_1 \to X_2$ stetig $\Longleftrightarrow$

$(\forall G \in T_2)\ f^{-1}(G) \in T_1$

"Das Urbild einer offenen Menge ist offen"

Homöomorphismus

$f: X_1 \to X_2$ Homöomorphismus

$\Longleftrightarrow$ 1) f stetig

2) f bij.

3) f^{-1} stetig

top. Eigensch.

Top. Eigenschaft. eines top. Raumes sind Eigenschaft. welche unter Homöomorphismen des Raumes auf sich selbst erhalten bleiben.

Topologie

Topologie ist das Studium d. top. Eigenschaften

Selbstdualität d. Stetigkeit

$f: X_1 \to X_2$ stetig $\iff$

$(\forall F_2 \in C_2) \quad f^{-1}(F_2) \in C_1$

"Das Urbild abgeschl. Mengen ist abgeschlossen"
"Stetigkeit ist selbstdual"

U_x

$U x \qquad = U_x \{x / E(x)\}$

x hat Eigensch. $E(x)$

Komposition

Komposition:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & X_2 \arrow[r, "f"] & X_3 \end{tikzcd} \qquad (f\circ g)(x) = f(g(x))$$

stet. d. komp.

f, g stetig $\Rightarrow f \circ g$ stetig

Basis

$X \neq \emptyset \quad \mathcal{B} \subseteq P(X)$ heisst Basis, falls:

(1c) $\emptyset \in \mathcal{B}$

(2c) $X = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$

(3c) $E_1, E_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \bigcup_{E \in \mathcal{B}'} E \quad \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$

Topologie aus Basis

$T = \{ G \,/\, G = \bigcup_{E \in \mathcal{B}'} E \quad \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \}$

T ist eine Topologie auf X

Metrik

Metrik auf X ist $d: X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ mit

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

offene Kugel Ball

$B(x,r) = \{ y : d(x,y) < r \}$

offene Kugel (Ball)

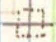
induz. Topologie

$B_{ind} = \{ B(x,r) \mid x \in X, r \geq 0 \}$
bildet Basis auf X
"von d induzierte Topologie"

Metriken auf $\mathbb{R}^2$

$P_i \in \mathbb{R}^2 \quad P_i = \langle x_i, y_i \rangle$

$d_1(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ 

$d_2(P_1, P_2) = \max\{ |x_2-x_1|, |y_2-y_1| \}$ 

$d_3(P_1, P_2) = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$ 
Taximetrix

O_e

e endl. Teilmenge von $\mathbb{N}$

$O_e := \{ M \subseteq \mathbb{N} \mid e \subseteq M \}$

Basis von $P(\mathbb{N})$

$\{ O_e \mid e \text{ endl.} \} \cup \{ \emptyset \}$

bilden Basis für $P(\mathbb{N})$
$B \subseteq P(P(\mathbb{N}))$

gleichwert. Basen

Basen B_1, B_2 für Topolog. auf X defin. dieselbe Topologie $\Leftrightarrow$

(A) Für jeden Punkt $x \in X$ und $E_1 \in B_1$, $x \in E_1$ ex. $E_2 \in B_2$ mit $x \in E_2 \subseteq E_1$

(B) Für jeden Punkt $x \in X$ und $E_2 \in B_2$, $x \in E_2$ ex. $E_1 \in B_1$ mit $x \in E_1 \subseteq E_2$

$x \in G \Rightarrow y \in G$
$y \in G \Rightarrow x \in G$

X metr. Raum $\quad x, y \in X$

$(x \in G \Rightarrow y \in G \quad \forall G \text{ offen}) \Rightarrow$
$(y \in G \Rightarrow x \in G \quad \forall G \text{ offen})$

top. Raum $\neq$ metr. Raum

Nicht jeder top. Raum ist ein metrischer Raum!

$x, y \in X \quad x \neq y$

$T = \{\emptyset, \{y\}, X\}$ Topol. auf X

$x \in G \Rightarrow y \in G$
$y \in G \not\Rightarrow x \in G$ (offen)

nicht metrisierbar

klassische ε, δ Definition d. Stetigkeit

$f : X_\delta \to X_\varepsilon$
$\quad B_\delta \quad B_\varepsilon$ Basen

f stetig $\Leftrightarrow$
$(\forall x \in X_\delta)(\forall E_\varepsilon \in B_\varepsilon)(\exists E_\delta \in B_\delta)$
$f(x) \in E_\varepsilon \Rightarrow x \in E_\delta \wedge f(E_\delta) \subseteq E_\varepsilon$

gröb
fein

$T \subseteq T'$ $\quad$ T gröber T schwächer
$\quad T'$ feiner T' stärker

$\mathcal{S}$

$X \neq \emptyset \quad S \subseteq P(X)$
$\mathcal{S} = \{T' \mid S \subseteq T' \subseteq P(X),\ T' \text{ Top auf } X\}$

$T = \bigcap T'$
$T' \in \mathcal{S}$

$T = \bigcap_{T' \in \mathcal{S}} T'$ $\quad$ $T \neq \emptyset$ da $S \subseteq T$
$\quad$ $\mathcal{S} \neq \emptyset$ da $P(X) \in \mathcal{S}$

T schwächste Topologie

T schwächste Top. welche mind. alle Elem. von S als offene Meng. enthält

Basis für T

$B = \{ H_1 \cap H_2 \ldots H_n \;\; H_i \in S \;\; n \in \mathbb{N} \} \cup \{\emptyset, X\}$
Basis für schwächste Topologie auf X welche S enthält

$T \upharpoonright Y$

eingeschränkte
relativierte

relativierte Topologie
$T \upharpoonright Y := \{ Y \cap G \mid G \in T \}$

$Y \hookrightarrow X$

$Y \subseteq X \quad f: Y \hookrightarrow X$ Inklusionsabb.
$\Rightarrow f$ stetig (als Abb. $T \upharpoonright Y$ nach T)
$T \upharpoonright Y$ schwächste Top. für welche f stetig

Subbasis

$S \subseteq \mathcal{P}(X)$ bildet Subbasis zur Basis B falls $B = \{ H_1 \cap \ldots H_n \mid H_i \in S \} \cup \{\emptyset, X\}$

also: schwächste Topol. welche S enthält ist diejen. für welche S eine Subbasis ist.

Stetigkeit Subbasis

$f: X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow$
$f^{-1}(H)$ offen für jedes H einer Subbasis für Y

f_α stetig

$f_\alpha : Y \to X_\alpha \quad \alpha \in I$

T_α Topol. auf X_α $\Longrightarrow$

$\exists$ schwächste Top T auf Y welche alle f_α stetig macht

Produkt und Potenz

$\emptyset \neq X_\alpha \quad \alpha \in I \qquad \prod_{\alpha\in I} X_\alpha =$

$\{ y \mid y : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \quad y(\alpha) \in X_\alpha \}$

$X^I = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \quad X_\alpha = X \quad \alpha \in I$

Produkt-topologie

Produkttopologie auf $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$

schwächste Top, welche alle Projekt.funkt. $p_\alpha \; \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\alpha$ stetig macht

Basis für Produkttopologie

Basis f. Produkttopologie $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$

Alle Produkte $\{ \prod_{\alpha\in I} Q_\alpha \mid Q_\alpha \in T_\alpha \wedge$ $Q_\alpha = X_\alpha$ für alle bis auf endlich viele $\}$

Produkttopologie Bsp

$I =]0,1[\qquad I \times I$ Prod. Topol.

Rechtecke Basis für $\mathbb{R}^2 / I \times I$

Subbasiselemente Zylinder

Koord. funkt.

$f_\alpha(y) = p_\alpha(f(y))$
$f_\alpha = p_\alpha \circ f$

Stetigkeit von f auf $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$

$Y \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ stetig $\Leftrightarrow$
$(\forall \alpha\in I)\ f_\alpha : Y \to X_\alpha$ stetig

KSt. Funkt.

$f : X \times Y \to Z$
$f_{x_0} : Y \to Z \quad f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$

Stet. d. KSt. Funkt.

f stetig $\Rightarrow f_x, f_y$ stetig $\quad \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$
umkehrung nicht!

∃ von schwächste Topologie

$f : X \to Y \quad X$ top. Raum
f surj. ; T_X Topol. auf X
$\Rightarrow \exists$ stärkste top. auf Y
welche f stetig macht

Quot. Topol.

T_Y Quotiententop.

Quot. Topol.

$f : X \to S^1 \quad X = [0,1]$
$f(t) = e^{2\pi i t}$
$\mathbb{R}^2 \supset S^1$ Quotiententop.

$\underset{f}{\sim}$ Äq. rel.

$f: X \to Y$ $\quad \underset{f}{\sim}$ Äq. rel. auf X

$x_1 \underset{f}{\sim} x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$

Quot. Topol. mittels $\underset{f}{\sim}$ definiert

$q(x) = \{x' \mid x' \sim x\}$

$X/_\sim$ Menge aller Äq. klassen

$q: X \to X/_\sim$ surj.

Quotient. top modulo $\sim$

:= Topol. auf $X/_\sim$ ist feinste welche q stetig macht

Ident. Def. der Quotienten topologie

$f: X \to Y$ surj.

Topol. def. durch $\sim_f$ ident. mit Topol. d. die feinste ist welche f. stetig macht

Poincaré Funda-mental-polynome

Zylind. Möbius Torus klein. Proj.

Retrakt

$Y \subseteq X$ $\quad r: X \to Y$ stetig auf $r(y) = y$ $(\forall y \in Y)$

Y Retrakt von X m. Retraktion r

Retrakt

$Y \subseteq X$ Retrakt von X $\Leftrightarrow$
für Z und jedes $f: Y \to Z$ stetig
gilt, dass f zu einer stetigen Abb.
$F: X \to Z$ erweitert werden kann.

Retrakt

X, Y top. Räume
Y homöomorph Retrakt zu von X $\Leftrightarrow$
$\exists f: X \xrightarrow{st.} Y,\ g: Y \xrightarrow{st.} X \quad f \circ g = Id|_Y$

Zusammenhang

X zusammenhängend $\Leftrightarrow$
$(X = G_1 \cup G_2 \wedge G_1 \neq \emptyset \wedge G_2 \neq \emptyset \Rightarrow$
$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \quad \forall G_1, G_2$ offen$)$

offen $\wedge$ abgeschl.

X zush. $\Leftrightarrow$ $X, \emptyset$ einzige offen und abgeschl. Mengen

zush. $X \to Y$

$f: X \to Y$ surj. stetig
X zush. $\Rightarrow$ Y zush.

zush. von $Y \subseteq X$

$Y \subseteq X$
X zush $\Leftrightarrow$ Y zush. in $T|Y$

zush von $A \subseteq X$

$A \subseteq X$ zush. $\Leftrightarrow (\forall G_1, G_2 \subseteq X$ offen$)$
$A \subseteq G_1 \cup G_2 \wedge A \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow A \cap G_1 = \emptyset \vee A \cap G_2 = \emptyset$

Intervall

A ist Intervall $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)\ (a < c < b \Rightarrow c \in A)$

zush Intervall

$A \subseteq \mathbb{R}$ zush $\Longleftrightarrow$ A Intervall

vereinen

A_i zush $(\forall i \in I)$ $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $\forall i, j \in I$

$\Rightarrow X = \bigcup_{i \in I} A_i$ zush.

A zush / $\bar{A}$ zush

A zush. $\Rightarrow \bar{A}$ zush.

zush. komp.

$x \in X$ X top. Raum

K_x zusammenhangskomp.

$K_x = \bigcup \{ S \subseteq X \mid S \text{ zush. } x \in S \}$

K_x grösste

K_x zush., abgeschl., grösste zush. Teilmenge von X, die x enth.

Äq klasse

Zush.komp. bilden Äq klassen eird. von X

tot. unzush.

X total unzush. $K_x = \{x\}\ (\forall x \in X)$

total unzus.

- $\mathbb{Q}$ total unzusammenhängend
- Cantors Diskontinuum C

$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \quad x_k = 0, 2 \}$

bogenweise zusammenhängend

X bogenweise zusammenhängend $\Leftrightarrow$
$(\forall a,b \in X)(\exists f \text{ stetig})\, f:[0,1] \to X \wedge f(0)=a \wedge f(1)=b$

bogenw. ⇒ zush.

X bogenw. zusammenhäng. $\Rightarrow$ X zush.

zush ⇏ bogw.

$(\exists \text{ zush } X)$ $X \neg$ bogw. zush.

$\mathbb{R}^n$ offen zush. ⇒ Bog. zush.

in $\mathbb{R}^n$ sind $\forall$ offen. zush. Mengen auch Bogenw. zush.

abgeschl. Hülle

$\bar{A} = \bigcap \{ G \subseteq X \mid G \text{ abgeschl.} \wedge A \subseteq G \}$

offene Hülle

$A^\circ = \bigcup \{ U \subseteq X \mid U \text{ offen} \wedge UA \subseteq GA$

hausdorff'sch

X hausdorff'sch $\Leftrightarrow$
$(\forall x,y \in X)(\exists g(a,b), g(c,d))$ $x \neq y$
$\Rightarrow x \in g(a,b) \wedge y \in g(a,b) \wedge g(a,b) \cap g(c,d) = \emptyset$

lokal

E Eigenschaft auf Teilräumen eines Topol. Raumes definiert

X hat Eigenschaft <u>lokal</u> $\Leftrightarrow$
$(\forall x \in X)(\exists$ Umgeb. x belieb. klein mit Eigenschaft E

Umgebung

$U \subseteq X$ Umgebung von x :⇔
$(x \in U) \land \exists G$ offen $x \in G \subseteq U$

beliebig klein Umgeb.

belieb. kleine Umgeb. von x hat E :⇔
$(\forall$ Umg. $U \subseteq X)(\exists V$ Umg. $\subseteq X)$ $V \subseteq U$ V hat E

lokal zush.

X lokal zush ⇔
$(\forall x \in X)$ $\exists$ bel. kleine zush. Umgeb.

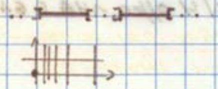
offene Teilm. lokal zush.

jede offene Teilmenge eines lokal zush. Raumes ist lokal zush.

zush. k. offen zush

Zush. komp. eines lokal zush. Raumes sind offen u. zush.

Bsp gegenbsp



lokal nicht global

global nicht lokal

f stetig auf

$f: X \to Y$ stetig auf
X lokal zush $\Rightarrow$ Y lokal zush.
X bog. zush $\Rightarrow$ Y bog. zush.

separierte Teilmengen

X top. Raum $A, B \subseteq X$
A, B separiert ⇔ $\bar{A} \cap B = \emptyset \land A \cap \bar{B} = \emptyset$

offene Überdeckung

X top. Raum
Familie C von offenen Teilmengen G_i; $i \in I$
heisst offene Überdeckung von X $\Leftrightarrow$

$X = \bigcup_{i \in I} G_i \qquad C = \{G_i : i \in I\}$

Teil-überdeckung

$J \subseteq I \qquad X = \bigcup_{i \in I} G_i$

$C_J = \{G_i : i \in J\}$ Teilüberdeckung

Lindelöf

X heisst Lindelöf $\Leftrightarrow$
jede offene Überd. enth. abzählbare Teilüberd.

kompakt

X heisst kompakt $\Leftrightarrow$
jede offene Überd enth. endl. Teilüberd

abzählbar kompakt

X heisst abzählbar kompakt falls jede offene Überd. mit abzählb vielen G_i eine endl. Teilüberd. enthält

[ ] Heine Borel

In $\mathbb{R}$ jedes abgeschl. Intervall kompakt   Heine Borel

kompakt

$C = \{G_i \mid i \in I, \ G_i \text{ offen}\}$
X kompakt $\Leftrightarrow$

$\bigcup_{i \in I} G_i = X \Rightarrow (\exists E \underset{c}{\subseteq} I) \ \bigcup_{i \in E} G_i = X$

$A \subseteq X$ komp

$A \subseteq X$ A kompakt $\Leftrightarrow$
A kompakt in Relativtopol.

kompakt topol. Begriff.

$f: X \to Y$ stetig auf
X kompakt $\Rightarrow$ Y kompakt

endl. Durchschnitts eigenschaft

X besitzt endl. Durchschnittseig $\Leftrightarrow$

$\{ F_i \mid i \in I, F_i \text{ abgschl} \}$
$(E \underset{e}{\subseteq} I) \bigcap\limits_{i \in E} F_i \neq 0 \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq 0$

komp $\Leftrightarrow$ DE

X komp $\Leftrightarrow$ X hat endl. DE

Haus-dorf'sch

X Hausdorff'sch $\Leftrightarrow$
$(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists G_1, G_2 \text{ offen})$
$G_1 \cap G_2 = \emptyset \wedge x \in G_1, y \in G_2$

kompakt abgeschl HR

In Hausdorff'schen Räumen
kompakte Mengen abgeschlossen

komp. in $\mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\Leftrightarrow$
A abgeschl $\wedge$ beschränkt

$\subset$ komp.

Abgeschl. Teilmenge von
komp. Raum kompakt

Max. auf komp Mengen

$f: X \to \mathbb{R}$ stetig X komp
$\Rightarrow$ f nimmt auf X Max. und
Min. an.

$f(F)$ abgeschlossen

$f: X \to Y$ stetig
X komp. Y Hausdorff'sch
$\Rightarrow$ f abgeschl. ($f(F)$ abgeschl. f. F abgeschl.)

kompakt abgeschl $\wedge$ beschränkt

In jedem metr. Raum sind
kompakte Meng. abgeschl und
beschränkt.

lokal kompakt

X lokal komp. $\Leftrightarrow$
jeder Punkt $x \in X$ besitzt beliebig
kleine Umgebung die kompakt

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ lokal komp. aber nicht
komp.

komp. Hausd.R. lokal komp.

komp. Hausdorffraum lokal kompakt

Prod. zush zush

Produkt zush. Räume zush.

Injektion

$$i_\beta^z : X_\beta \to \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

$$i_\beta^z(t) = (z_1, z_2, \dots, \underset{z_\beta}{t}, \dots) \quad t \in X_\beta$$

$$(i_\beta^z(t))(\alpha) = \begin{cases} t & \alpha = \beta \\ z_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

X, Y komp. X×Y komp.

X, Y kompakt $\Rightarrow X \times Y$ komp.

Tycho-nof

Tychonof allgemein

X_α $\alpha \in I$ komp. $\Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ komp.

Auswahlaxiom

Auswahlaxiom:

$$X_\alpha \neq \emptyset \quad \alpha \in I \Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \emptyset$$

Tychonof ⇒ Auswahlaxiom

Satz v. Tychonof ⇒ Auswahlaxiom

Trennungsaxiome

Trennungsaxiome:

T	topol. Axiome
T_0	$x \neq y \Rightarrow \exists$ Umg U $x \in U \wedge y \notin U$ $\vee \exists$ Umg V $x \notin V \wedge y \in V$
T_1	$x \neq y \Rightarrow \exists$ Umg U $x \in U \wedge y \notin U$
T_2	$x \neq y \Rightarrow \exists$ Umg U, V $x \in U \wedge y \in V$ $\wedge\ U \cap V \neq \emptyset$
T_3	T_1 und regulär: $x \notin F$ abgeschl $\Rightarrow$ $(\exists$ Umg $U, V)$ $x \in U \wedge F \subseteq V$ $\wedge\ U \cap V = \emptyset$
T_4	T_1 und normal: F_1, F_2 abgeschl. $\wedge\ F_1 \cap F_2 = \emptyset$ $\Rightarrow (\exists$ Umg $U_1, U_2)$ $F_1 \subseteq U_1$ $F_2 \subseteq U_2$ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$T \Leftarrow T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow T_3 \Leftarrow T_4$

$T \not\Rightarrow T_0 \not\Rightarrow T_1 \not\Rightarrow T_2 \not\Rightarrow T_3 \not\Rightarrow T_4$

Folge

(y_n) Fkt. $y : \mathbb{N} \to Y$

Konvergenz

$(y_n) \to x \Leftrightarrow$
$(\forall U(x))(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ y_n \in U$

Limes

$(\exists! x) : x = \lim_{n \to \infty} y_n$

erste Abzählbarkeitsbedingung

X erfüllt "erste Abzählbarkeitsbed."
$\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists$ abzählb. lokal. Basis$)$

1. AB

lokale Basis

L lokale Basis am Pkt. $x \in X \Leftrightarrow$
$(\forall B \in L)$ B Umg v. x $\wedge$
$(\forall U(x))(\exists B \in L)\ B \subseteq U$

Bsp. f. lokal. Basis

$X \subseteq \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$
$L = \{ B(x, 1/n) \ \ n \geq 0 \}$
lokale Basis

$x \in \bar{Y} \Leftrightarrow \exists$ Folge

X top. Raum 1. AB

$x \in X \quad Y \subseteq X \Rightarrow$
$x \in \bar{Y} \Leftrightarrow (\exists (y) \in Y)\ (y) \to x$

Semi-metrik

Semimetrik
Metrik $d(x,y)=0 \not\Rightarrow x=y$

Filter

Ein Filter F auf $X \neq \emptyset$
ist Menge von Teilmengen v. X

(1) $X \in F$, $\emptyset \notin F$
(2) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$
(3) $A \in F$ $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in F$

Bsp. von Filtern

Hauptfilter principle Filter

$\emptyset \neq A$ $F = \{ B \mid A \subseteq B \subseteq X \}$

Fréchet filter

X unendl. $F = \{ Y \subseteq X : Y'$ endl. $\}$

Umgebungsfilter

$x \in X$ top. R.
$N_x = \{ U \mid x \in U \subseteq X$. U Umg. $x \}$

Folgenfilter Elementarfilter

(x_n) in X
$F = \{ A \subseteq X \mid x_n \in A \ (\forall n > n_0) \}$

Filterbasis

Filterbasis $F_0 \neq \emptyset$ M. u. TM v. X

(1) $\emptyset \notin F_0$
(2) $A, B \in F_0 \Rightarrow (\exists C \in F_0)\ C \subseteq A \cap B$

von F_0 erz. Filter

$F = \{ B \mid (\exists A \in F_0)\ B \supseteq A \}$
von F_0 erzeugter Filter

Konvergenz von Filter

Filter F konv gegen $x \in X$ $\Leftrightarrow$
$F \supseteq N_x$ $\qquad F \to x$

Filterbasis F_0 konv gegen $x \in X$ $\Leftrightarrow$
erz. Filter $\to x$ $\qquad F_0 \to x$

Kriterium f. $a \in \overline{Y}$

$Y \subseteq X$
$a \in \overline{Y} \Leftrightarrow (\forall G \text{ offen})\ a \in G \Rightarrow G \cap Y \neq \emptyset$

$x \in \overline{Y} \Leftrightarrow \exists F_0$

$x \in X$ top. R. $\quad Y \subseteq X \Longrightarrow$
$x \in \overline{Y} \Leftrightarrow (\exists F_0 \subseteq Y)\ F_0 \to x$

Folgen
Folgenfilter

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \to x \Leftrightarrow$ Folgenfill. $F \to x$

konv.
top.
Begriff

Folgen und Filterkonv.
topol. Begriffe

HP

a HP des Filters F $\Leftrightarrow$
$(\exists\, G \supseteq F)\quad G \to a$

$g(t) \to l$
$t \to x$

$g(t) \to l \quad (t \to x) \Leftrightarrow$
$(\forall$ Filter $F)\ F \to x \Rightarrow g(F) \to l$

Übertrag.
Prinzip

g stetig bei x $\Leftrightarrow$
$g(f) \to g(x) \qquad f \to x$

gericht.
Menge

part. geord.

M gerichtet $\Leftrightarrow$ M refl. HO
$(\forall\, a,b \in M)(\exists c)\quad a \le c \wedge b \le c$

obere Halbverband
Baum unter Halbverb.

Netz

Netz auf X ist Abb. $f: D \to X$
D gericht. Menge
$\{x_d : d \in D)\qquad \{x_d\}$

konv. begr. für Netze

$\{x_\delta : \delta \in D\} \to x \iff$
$(\forall \text{Umg. } U(x))(\exists \delta_0)(\forall \delta > \delta_0)\ x_\delta \in U$

"x_δ schliessl. in U"

assoziiert. Netz

$\{x_\delta \mid \delta \in D\}$ zu F_0 assoziiert $\iff$
F_0 so gerichtet. $A \leq B :\iff A \supseteq B$
$(\forall \delta \in F_0)$ wähle $x_\delta \in \delta$ (Auswahlaxiom)

prov. Zuordn.

$F_0 \to x \Rightarrow \{x_\delta : \delta \in F_0\} \to x \quad \forall x$

assoz. Filter

$\{x_\delta : \delta \in D\}$ Netz auf X
$F = \{A \subseteq X \mid x_\delta \text{ schliessl. in } A\}$ assoz. Filt.

Netz Filter

$\{x_\delta : \delta \in D\} \to x \iff$
assoz. Filter $F \to x$

kanon. Netz

$D = \{(a, A) \mid a \in A \in F_0\}$
$(a, A) \geq (b, B) \iff A \subseteq B$
wähle f. $\delta = (a, A)$ $x_\delta = a$
$\{x_\delta \mid \delta \in D\}$ kanon. Netz zu F_0

kan Netz F_0

$\{x_\delta : \delta \in D\} \to x \iff F_0 \to x$

F-stetig

$f: X \to Y$ F-stetig $\Leftrightarrow$

$\{f(x_n)\} \to f(x)$

$(\forall \{x_n\})\ \{x_n\} \to x$

HP Adhärenz

F_0 Filterbasis auf $Y \subseteq X$

$x \in X$ X top. Raum

x HP von F_0 $\Leftrightarrow$

$\cancel{\exists}(\forall A \in F_0)\ x \in \bar{A}$

$\mathrm{Ad}(F_0) = \bigcap\{\bar{A} : A \in F_0$

Adhärenz, Menge der HP v. F_0

Lim(F_0)

Lim(F_0) Menge aller Limespunkte v. F_0

F_0 konv $\Leftrightarrow$ Lim$(F_0) \neq \emptyset$

f HP

$f: X \to Y$ stetig x HP F_0

$\Rightarrow f(x)$ HP von $f(F_0)$

(HP top Begriff)

HP von Netz

$\{x_\delta / \delta \in D\}$ Netz auf $Y \subseteq X$

$x \in X$ HP von $\{x_\delta\}$ $\Leftrightarrow$

x HP von assoz. Filter

⊂ ⊂ ⊂ ⊂

F_0, G_0 Filterbasen auf X
$F \subseteq G$

$\Rightarrow \lim F = \lim F_0 \subseteq \lim G_0$
$\subseteq Ad(G_0) \subseteq Ad(F_0) = Ad\, F$

$\Rightarrow (F \to x \Rightarrow x$ HP von $F)$

komp. HP v. F

X komp $\Leftrightarrow (\forall F \text{ in } X)\ \exists$ HP von F

Zorn'sches Lemma

$F \neq \emptyset$ part. geordn.
jede nichtleere totalgeordn. Teilfamilie hat obere Schranke in F
$\Rightarrow F$ hat maxim. Element

Tarski

Jeder Filter auf Y kann zu Ultrafilter erweitert werden.

Bsp. v. Ultrafil.

Hauptfilter $A = \{a\}$
Verfeinerung d. Fréchet Filter

Ultraf. top. Regr.

$f: X \to Y$ auf
F Ultraf. auf $X \Rightarrow f(F)$ Ultrafill.

Differentialgeometrie

Mannig-faltigkeit

M^n zush. Hausdorffraum
abzählb. Basis
$(\forall x \in M^n)(\exists U_x)$ U_x homöm. $U(P)$
$U'(P)$ offene Umg. in $\mathbb{R}^n$
$\varphi_P : U(P) \to \varphi_P(U(P))$

Karte von P

$(U(P), \varphi_P)$ Karte von P auf M^n

Atlas

$\bigcup_{i \in I} U_i = M^n$

$\{(U_i ; \varphi_i) \mid i \in I\}$ (topol.) Atlas der Mannigfall.

differenz. Atlas C^r Atlas

(u^{1k}, u^{2k}) Koord. in U_k
(u^{1i}, u^{2i}) Koord in U_i
$U_i \cap U_k \neq \emptyset$
$(u^{1k}, u^{2k}) = \varphi_k \circ \varphi_i^{-1}(u^{1i}, u^{2i})$
$\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}$ Homöom. von
$\varphi_i(U_i \cap U_k)$ und $\varphi_k(U_i \cap U_k)$
$\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}$ differenzierbar $\forall ij$
$\Leftrightarrow$ differenzierbarer Atlas
entspr. C^r Atlas

diff'bare Mannigf.

M^n diff'bare Mannigf.
$\Leftrightarrow \exists$ C^r Atlas

komp. Ultrafilter

X kompakt $\Leftrightarrow$ $\forall$ Ultrafilt. konv.

$F \to x$, $p_\alpha(F) \to x_\alpha$

$$F \to x \text{ in } \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \Leftrightarrow$$

$$p_\alpha(x) \to x_\alpha \quad \forall \alpha \in I$$

rel. komp.

M relativ komp. $\Leftrightarrow$ $\overline{M}$ komp.

total beschr.

M totalbeschränkt in metr. Raum :$\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \{m_i\}_{i=1}^{n})(\forall m \in M)(\exists i \leq n)\ d(m, m_i) < \varepsilon$$

rel. komp. tot. beschr.

X vollst. metr. Raum

$M \subseteq X$ relativkomp $\Leftrightarrow$ M tot. beschr.

Metrik

$d : X^2 \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,x) = 0 \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{array}\right\} \text{Semimetr.} \\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \end{array}\right\} \text{Metrik}$$

Norm

$\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\|\lambda \cdot x\| = \lambda \cdot \|x\| \quad \lambda \in k$
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bsp. f. Metriken

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, X \subseteq \mathbb{R}^n$
- $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ in $\mathbb{R}^3$
  $d(f,g) = \max |f(t) - g(t)|$
  auf $C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ f stetig}\}$
  X komp
- p prim $\quad x \in \mathbb{Q} \quad x = p^k \frac{u}{v}$
  $(u,v) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}$ Darst. eind
  p-adische Bewert. auf $\mathbb{Q}$
  $|x|_p := p^{-k}$
  $d(x,y) := |x-y|_p$ p-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$
- Metrik aus Norm
- ℓ^p-Räume
  $X = \{x \mid x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \text{ f.} \sum |x_k| < \infty\}$
  $p > 0$ p-Norm
  $$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p$$
  $\ell^\infty = \{x \mid x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \text{ beschr}\}$
  $\|x\|_\infty := \sup |x_k|$

gl. mässig stetig

$f : X \to Y \quad X, Y$ metr. $\quad d, d'$
f glm. stetig $\Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,y)\ d(x,y) < \delta$
$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Logik u. Mengenlehre

$\bar{\ddot{a}q}$

Mächtigkeit

$A \;\ddot{a}q\; B \iff (\exists f\; A \to B)\; f$ bijekt

Äquivalenzrelation

A_n

$A_n := \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$

zählen

$A_m \;\ddot{a}q\; A_n \iff m = n$

abzählbar endlich

$A \;\ddot{a}q\; \mathbb{N}$ abzählbar

$(\exists n)\; A \;\ddot{a}q\; A_n$ endlich

abzählb. v endlich

$(\forall A \subseteq \mathbb{N})\big((\exists n)\; A \;\ddot{a}q\; A_n \vee A \;\ddot{a}q\; \mathbb{N}\big)$

Teilmenge von $\mathbb{N}$ abzählb. oder endlich

$\cup \mathbb{N}^k$

$\mathbb{N}^2 \;\ddot{a}q\; \mathbb{N}$

$\mathbb{N}^k \;\ddot{a}q\; \mathbb{N} \quad k \in \mathbb{N}^+$

$\bigcup_k \mathbb{N}^k \;\ddot{a}q\; \mathbb{N}$

surj. Abb.

$f: \mathbb{N} \to B$ f surjekt.
$\Longrightarrow$ B abzählb. od. endl.

$\mathbb{Q}$ alg. Zahl.

$\mathbb{Q}$ abzählbar
algebr. Zahlen abzählb.

algebr. Zahlen

algebr. Zahlen:

$z \in \mathbb{C} \wedge \exists\, a_0 \ldots a_n \in \mathbb{Z} \quad a_n \neq 0$

$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$

Mächtigkeit

$|A_n| = n$
$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$\leq$

$m \leq n \Longleftrightarrow m + \ell = n \quad \exists \ell$

$\leq$ inj

$m \leq n \Longleftrightarrow |A| = m \quad |B| = n$
$\exists f: A \xrightarrow[\text{inj}]{} B$

Refl. Halbordn

$\leq$ Reflexive Halbordnung
trans., refl., ident., asym.

Kardinalzahlen

Semiring

$$m + n = n + m$$
$$m_1 + (m_2 + m_3) = (m_1 + m_2) + m_3$$

$$m \cdot n = n \cdot m$$
$$m_1 (m_2 \cdot m_3) = (m_1 \cdot m_2)\, m_3$$

$$m (m_1 + m_2) = m\, m_1 + m\, m_2$$

Semiring

B^A

B^A Gesamtheit aller Abb. von A nach B

B^A äq

$$\left.\begin{matrix} A \text{ äq } A' \\ B \text{ äq } B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow B^A \text{ äq } B'^{A'}$$

Potenzgesetze

$$m^{n_1 + n_2} = m^{n_1} \cdot m^{n_2}$$
$$m^{n_1 n_2} = (m^{n_1})^{n_2}$$
$$(m_1 \cdot m_2)^n = m_1^n \cdot m_2^n$$

Kontinuum

$$|\mathbb{R}| = \aleph$$

$\aleph = 2^{\aleph_0}$

$$\aleph = 2^{\aleph_0}$$

$\aleph_0 < \mathcal{I}$

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Diagonalverfahren

$\ulcorner$ $f: B \to \{0,1\}^B$

$f_b: B \to \{0,1\}$

$f_0 = 0110$
$f_1 = 1000$
$f_2 = 1111$
$f_3 = 100$ [illegible]

$d(x) = 1 - f_x(x)$

$d \overset{?}{=} f_{b_0}$

$d(b_0) = 1 - f_{b_0}(b_0) \neq f_{b_0}(b_0)$ $\lrcorner$

Cantor Bernstein

$m \le n \wedge n \le m \Rightarrow m = n$

Cantor-Bernstein

Korollare

$$2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathcal{I}^{\aleph_0}$$

Unendlichkeiten

$\mathcal{I}_0 = \aleph_0$

$\mathcal{I}_1 = 2^{\aleph_0} = \mathcal{I}$

$\vdots$

$\mathcal{I}_{n+1} = 2^{\mathcal{I}_n}$

$\aleph_1$ kleinste Mächt. nach $\aleph_0$

Kontinuumshypoth. $\aleph_1 = \mathcal{I}_1$

Isomorphismus

$(M_1, \le_1)$ $(M_2, \le_2)$

$f: M_1 \to M_2$ bij

$a \le_1 b \Rightarrow f(a) \le_2 f(b)$

$\Leftrightarrow f$ Isomorphismus

äq isom.

endl. Mengen äq $\Leftrightarrow$ isom.

iso $T_{\leq}$

$(M, \leq)$ abzählb. geordn. Menge
$\Rightarrow (\exists T \subseteq \mathbb{Q})(M, \leq)$ iso $(T \leq_{\mathbb{Q}})$

dicht

Geordnete Menge ist dicht $\Leftrightarrow$
$(\forall a,b)(\exists x)\ (a<b) \Rightarrow a<x \wedge x<b$

Cantor

$(M_1, \leq), (M_2, \leq)$ geordn. Menge
abzählbar, dicht weder kleinstes
noch größtes Element
$\Rightarrow (M_1, \leq)$ iso $(M_2, \leq)$

Ordinalzahlen mit Addition u. Multipl.

Ordnungstypen $\tau(M, \leq)$
Ordinalzahlen

Addition

$\tau_1(M_1, \leq_1) + \tau_2(M_2, \leq_2) = \tau(M_1 \cup M_2, \leq)$

$M_1 \cap M_2 = \Lambda$
$a \in M_1 \wedge b \in M_2 \Rightarrow a \leq b$
$a \in M_i \wedge b \in M_i \Rightarrow a \leq_i b$

Multiplikation

$\tau_1(M_1, \leq_1) \cdot \tau_2(M_2, \leq_2) = \tau(M_1 \times M_2, \leq)$

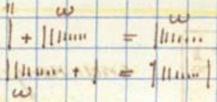
$\boxed{(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq b_2)}$

Ordinalzahlen
$\mathbb{1}, \mathbb{2}, \mathbb{3}, \ldots \quad \omega$

nicht kommut.

$1 + \omega = \omega$

$\omega + 1 \neq \omega$



Assoziativ

$(\tau_1 + \tau_2) + \tau_3 = \tau_1 + (\tau_2 + \tau_3)$

Zerlegung von Ordinalzahlen

Probl. Zerlegung in auf wieviele Arten möglich.

$\tau(Q) = \tau(Q^-) + \tau(Q)$ $\quad Q^- = \{q / q \in Q, q \in Q$

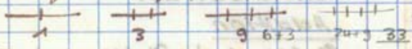
$\tau(Q) = \tau(Q) + \tau(Q^+)$

$\tau(Q) = \tau(Q^{\sqrt{2}}) + \tau(Q$ $\quad q < \sqrt{2}$

$\tau(\mathbb{N}) = 1 + \omega = 2 + \omega \ldots$

Zerleg. v. geord. Meng.

Probl. Zerlegung einer geordn. Menge auf wiev. Arten i. geordn. Mengen möglich



Eigensch. der Multiplik.

Multipl.

nicht komm.

$2 \times \omega = \omega + \omega$ $\quad (0,0) \ldots (0,\omega)\ (1,0) \ldots (1,\omega)$

$\omega \times 2 = \omega$ $\quad (0,0)(0,1) \ldots (\omega,0)(\omega,1)$

assoziativ

distrib. von einer Seite

$(\tau_1 + \tau_2)\tau_3 = \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3$

quasi kontr.

f quasikontr. (eine Lipschitzbed.)
$(\exists c>0)(\forall x,y)\, d'(f(x),f(y)) \le c\, d(x,y)$

kontr.

f kontrah. (Lipschitzbed.)
$(\exists c<1)(\forall x,y)\, d'(f(x),f(y)) \le c\, d(x,y)$

Distanz Punkt-Menge

$d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} d(x,y)$
Distanz Punkt - Menge

B zwischen A, C

A, B, C offen
$A \subseteq \bar{A} \subseteq B \subseteq \bar{B} \subseteq C \iff$
B liegt zwischen A und C

Urysohn'sches Lemma

X normal $\Rightarrow$ abgeschl. disj. Mengen durch stetige Funkt. trennbar

Metrisat.satz von Urysohn

X T_4 Raum m. abz. Basis
$\Rightarrow$ X metrisierbar

Cauchy-Filter/Netz/Folge

X semimetr. Raum

- $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Cauchy Folge $\Longleftrightarrow$
  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k)(\forall m,n \geq k)\ d(x_m, x_n) < \varepsilon$
- $\{x_\delta : \delta \in D\}$ Cauchy Netz $\Longleftrightarrow$
  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in D)(\forall \delta', \delta'' \geq \delta)\ d(x_{\delta'}, x_{\delta''}) < \varepsilon$
- F_0 Cauchy Filterbasis $\Longleftrightarrow$
  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in F_0)\ \underbrace{\sup_{x,y \in A} d(x,y)}_{\text{Durchmesser v. } A} < \varepsilon$

Cauchy Netz Filter

$\{x_\delta : \delta \in D\}$ Cauchy Netz $\Longleftrightarrow$
assoz. Filter Cauchy Filter

vollst. metr. Raum

X metr. ist vollst. $\Longleftrightarrow$
$\forall$ C-Filterbasen konv.

semi-metr. Raum vollst.

semimetr. Raum vollst. $\Longleftrightarrow$
$\forall$ C-Netze konv. $\Longleftrightarrow$ $\forall$ C-Folgen konv.

Wohl-ordnung

Wohlordnung $(M, \leq) \Leftrightarrow$
jed. nichtleere Teilmenge T besitzt kleinst. Elem.
$(\exists t_0)\ t_0 \in T \wedge (\forall t)\ t \in T \Rightarrow t_0 \leq t$

wohl geordnete Mengen

ω, $\omega + \omega$, $\omega \times \omega$ wohlgeordnet

Zermelo

Zu jeder Menge M ex. Wohlordn. relation $\leq$

äquivalent Auswahlprinz.

schwächere Seite

schwäch. sich als Zermelo

Zu Menge M mit Abb. f
$f: P(M) \setminus \{M\} \to M$
$\exists \leq$ wohlordn. $f(\{x \mid x < a\}) = a$

Kette

Kette k_0
(1) $\Lambda \in k_0$
(2) $x \in k_0 \wedge x \neq M \Rightarrow \underline{x \cup f(x)} \in k_0$
(3) $k_0' \subseteq k \Rightarrow \bigcup_{x \in k_0} x^{+}$ $x \in k_0'$ $k \subseteq Pot(M)$

normal

P normal in k_0:
$(\forall x)\ x \in k_0 \Rightarrow x \subseteq P \vee P \subseteq x$

Auswahlaxiom

M Menge v. Mengen $\wedge A \in M \Rightarrow A \neq \Lambda$
$A, B \in M \Rightarrow A = B \vee A \cap B = \Lambda$
$\Rightarrow (\exists T)(\forall A \in M)\ A \cap T \neq \emptyset$

$\exists$ Basis $\forall$ VR	$(\forall\, VR)(\exists\, \text{Basis})$
$\mathbb{R}$ VR ü. $\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$ VR über $\mathbb{Q}$ Basen: Hamel Basen
Zornsches Lemma	$(M,\leq)$ teilw. geordn. Menge $(\forall\, \text{Ketten})(\exists\, \text{obere Schranke})$ $\Rightarrow (\exists\, \text{maxim Element in } M)$
Tychonof Zorn Zermelo Auswahl.	Tychonof $\Leftrightarrow$ Zorn $\Updownarrow$ $\Updownarrow$ Zermelo $\Leftrightarrow$ Auswahla.

$N \subseteq M$

obere Schranke	$(\exists a\in M)(\forall x\in N)$	$x R a$
maxim. Element	$(\exists a\in N)(\nexists x\in N)$	$a R x \quad x\neq a$
Maximum	$(\exists a\in N)(\forall x\in N)$	$x R a$
Supremum	$(\exists a\in M)(\forall x\in N)$	$x R a$
kleinste obere Schranke	$(\nexists y\in M)$	$y R a$

Totalität $\Rightarrow$ maxim. Elem. = Supremum

Maximum = grösstes Element

LM6

Primterme $f_1^0, f_2^0, \ldots \; x[2] \ldots$

Terme
- Primterme
- t_1 Term $\Rightarrow$ $f^1(t_1)$ Term
- t_1, t_2 Term $\Rightarrow$ $f^2(t_1, t_2)$ Term

Primformeln $P_1^1(t), P_1^2(t_1, t_2) \ldots$ $\phi[1] \ldots$

Formeln
- Primformeln
- $\phi \vee \psi \ldots$ Formeln $(\psi \ldots) \phi \ldots$

Alphabet Σ Menge v. Zeichen

Zeichen Äqu.klasse v. graph. Gebild.

Sprache Σ^* Menge d. endl. Folgen über Σ

Struktur Menge M
$\hat{f}^n \; M^n \to M$
$\hat{P}^n \; M^n \to \{0,1\}$

freie Variable

x kommt frei vor in Formeln

$P(x_1 \dots x_n)$	kommt vor
$\phi \,\square\, \psi$	kommt in einem vor
$(\forall x_y)\,\phi$	wenn in ϕ frei
$(\forall x)\,\phi$	gebunden

Quant. reihen folge

Quantoren reihenfolge nicht vertauschen!
MinMax $\neq$ MaxMin

Axiome d. Logik

Axiome d. Logik

1. Aussagenlogische Identit.
2. $(\forall x)\,\phi \Rightarrow \phi$ $\quad$ $\phi \rightarrow (\exists x)\,\phi$
3. $(\forall x_1)\; x_1 = x_2$
   $x_1 = x_2 \Rightarrow \left(\phi\big|^{x_0}_{x_1} \Rightarrow \phi\big|^{x_0}_{x_2}\right)$
   gleichh. axiome
4. Schlussregeln
   $\phi \quad \phi \Rightarrow \psi \quad \psi$ $\quad$ Modus ponens
   Subst. $\quad \phi \quad \phi\big|^{x_1}_{t}$ falls erlaubt
5. $\phi \rightarrow \psi \qquad \exists(x)\,\phi \rightarrow \psi$
   $\psi \rightarrow \phi \qquad \psi \rightarrow (\forall x)\,\phi$
   x nicht frei in ψ

Zahlentheorie

G_m

$$G_m = \{x \mid m \mid x\}$$

$H \subseteq \mathbb{Z}$ $H = G_m$

H Untergruppe von $\mathbb{Z}$
$\Rightarrow (\exists m)\ H = G_m$

ggT

$$d = ggT(a,b) \Leftrightarrow (\exists d)\,(d \mid a \wedge d \mid b \wedge (\forall x)(x \mid a \wedge x \mid b \Rightarrow x \mid d))$$

spez. chin. Restsatz

$m_1 \ldots m_k$ paarw. teilerfremd
$r_1 \ldots r_k$ belieb.
$\Rightarrow \exists x \quad x \equiv r_i \mod m_i \quad i = 1..k$

Variationsrechnung

Grundproblem

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx \quad \text{extremal}$$

ohne Nebenbed.

Brachystochronen

Brachystochronenproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} = T$$

Eulersche Difgl.

Zurückführung auf Difgl. von Euler

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0 + \varepsilon\eta, y_0' + \varepsilon\eta')\,dx$$

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y_0, y_0')\eta + f_{y'}(x, y_0, y_0')\eta']\,dx = 0$$

part. Int.

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right] \eta(x)\,dx = 0$$

$$\rightarrow \frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\frac{\delta f}{\delta y'} = 0$$

Variation

$$\delta y = \varepsilon\eta(x) \qquad y = y_0 + \delta y$$

erste Variat.

$$\delta J = J'(0)\,\varepsilon$$

allg. isoperim. Problem

Variationsprobl. mit Nebenbedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx \quad \text{extremal}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')\,dx = a$$

allg. isoperimetrisches Problem

isoperim. Problem

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx \quad \text{extremal}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

geodät. Linien

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \quad \text{minimal}$$

$$g(x,y,z) = 0$$

Ast 1

Algebr. Strukturen

KORRESPONDENZ

vorsurj. eindeutig : ABBILDUNG, FUNKTION

injektiv : INJEKTION — surjektiv : SURJEKTION

BIJEKTION

transitiv : TRANSITIVE RELATION

- reflexiv : QUASIORDNUNGSRELATION
  - symmetrisch : AEQUIVALENZ REL
  - identiv : REFLEXIVE HALBORDN.
    - linear : REFLEXIVE VOLLORDN.
- linear : SCHWACHE ORDNUNG
- irreflexiv : IRREFLEXIVE quasi/HALBORDNUNG
  asym irreflex Halbordn.
  - konnex : IRREFLEXIVE VOLLORDNUNG
- identiv : TEILWEISE ORDNUNG
- wohlg : WOHLORDNUNG

refl iden, trans. → Ordnung

irrefl trans antisym → strenge Ordn

reflexiv	$(\forall x)\ xRx$
irreflexiv	$(\nexists x)\ xRx$
symmetrisch	$(\forall x,y)\ xRy \Rightarrow yRx$
asymmetrisch	$(\nexists x,y)\ xRy \wedge yRx$
identiv	$(\forall x,y)\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
transitiv	$(\forall x,y,z)\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
linear, total	$(\forall x,y)\ xRy \vee yRx$
konnex	$(\forall x,y)\ x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
voreindeutig	$(\forall x,y,z)\ yRx \wedge zRx \Rightarrow y=z$
eindeutig	$(\forall x,y,z)\ xRy \wedge xRz \Rightarrow y=z$
eineindeut.	vor $\wedge$ nach eindeutig
wohlgeordnet	$(\exists t_0 \in T)(\forall t \in T)\ t \in T \Rightarrow t_0 \leq t$

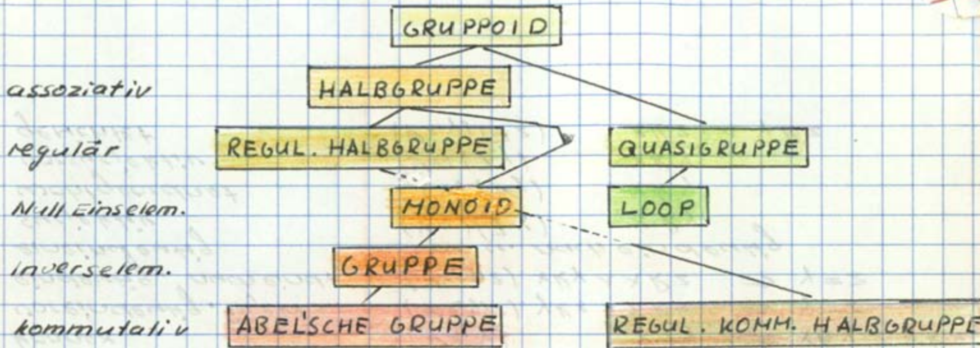
assoziativ	$(\forall x,y,z)$	$x \square (y \square z) = (x \square y) \square z$
kommutativ	$(\forall x,y)$	$x \square y = y \square x$
0-1 Elem.	$(\exists n)(\forall x)$	$x \square n = x = n \square x$
Inverselem.	$(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M)$	$x \square \bar{x} = n$

assoziativ	$(\forall x,y,z)$	$x\square(y\square z) = (x\square y)\square z$
kommutativ	$(\forall x,y)$	$x\square y = y\square x$
Null/Einselement	$(\exists n)(\forall x)$	$x\square n = n\square x = x$
Inverselement	$(\forall x)(\exists y)$	$x\square y = n$
links kürzbar	$(\forall x,y,z)$	$x\square y = x\square z \Rightarrow y=z$
rechts kürzbar	$(\forall x,y,z)$	$y\square x = z\square x \Rightarrow y=z$
regulär	$(\exists x,y)(\forall a,b)$	$a\square x = b \wedge y\square a = b$
nullteilerfrei	$(\forall x,y)$	$x\square y = n \Rightarrow x=n \vee y=n$

distributiv $\square$	$(\forall x,y,z)$	$x\circ(y\square z) = (x\circ y)\square(x\circ z)$
distributiv $\circ$	$(\forall x,y,z)$	$x\square(y\circ z) = (x\square y)\circ(x\square z)$
adjunktiv $\square$	$(\forall x,y)$	$x\square(x\circ y) = x$
adjunktiv $\circ$	$(\forall x,y)$	$x\circ(x\square y) = x$

Ast 2

reflexiv	$(\forall x)\quad xRx$
irreflexiv	$(\nexists x)\quad xRx$
symmetrisch	$(\forall x,y)\quad xRy \Rightarrow yRx$
asymmetrisch	$(\nexists x,y)\quad xRy \wedge yRx$
identiv, antisymm.	$(\forall x,y)\quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
transitiv	$(\forall x,y,z)\quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
linear, total	$(\forall x,y)\quad xRy \vee yRx$
konnex	$(\forall x,y)\quad x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
voreindeutig, injekt.	$(\forall x,y,z)\quad yRx \wedge zRx \Rightarrow y=z$
eindeutig, nacheind.	$(\forall x,y,z)\quad xRy \wedge xRz \Rightarrow y=z$
eineindeutig	vor u. nacheindeutig
surjektiv	$(\forall y)(\exists x)\quad xRy$
wohlgeordnet	$(\exists x)(\forall y)\quad xRy$
vorsurjektiv	$(\forall x)(\exists y)\quad xRy$
gerichtet	$(\forall x,y)(\exists z)\quad xRz \wedge yRz$


GRUPPOID
assoziativ
HALBGRUPPE
regulär
REGUL. HALBGRUPPE
QUASIGRUPPE
Null Einselem.
MONOID
LOOP
inverselem.
GRUPPE
kommutativ
ABEL'SCHE GRUPPE
REGUL. KOMM. HALBGRUPPE

Ast 3

o kommut. Halbgruppe □ Halbgruppe distributiv	SEMIRING
o abelsche Gruppe auch (multiplikativ) statt regul. denn Integritätsring □ regul. komm. Halbgruppe mit Einselement	RING
	INTEGRITÄTSBEREICH
□ Gruppe	SCHIEFKÖRPER
□ abelsche Gruppe	KÖRPER

ZPE Ring oder Gaussscher Ring   "Primfaktoren"

ein Unterring I ist Linksideal in R $a, b \in I$ $a - b \in I$
$r \in R$ $ra \in I$
analog Rechtsideal und zweiseitiges Ideal

□ ○ assoziativ
kommutativ
adjunktiv

□ ○ distributiv

□ ○ Null/Einselemente
Inverselemente

VERBAND

DISTRIBUTIVER VERBAND

BOOL'SCHER VERBAND

Gruppe	Gruppe	Körper
Gruppe	Ring	R-Modul
Gruppe	Körper	Vektorraum
Ring	Körper	Algebra

Ast 4

$(V, \oplus, \odot)$
$(K, +, \cdot, 0, 1)$
$* : K \times V \to V$

Skalareinselement		$(\forall \vec{a} \in V)$	$1 * \vec{a} = \vec{a}$
gemischte Assoziat.	$\cdot$	$(\forall r, s, \vec{a})$	$(r \cdot s) * \vec{a} = r * (s * \vec{a})$
gemischte Assoziat.	$\odot$	$(\forall r, \vec{a}, \vec{b})$	$(r * \vec{a}) \odot \vec{b} = \vec{a} \odot (r * \vec{b}) = *$
gemischte Distribut.	$+$	$(\forall r, s, \vec{a})$	$(r + s) * \vec{a} = r * \vec{a} \oplus s * \vec{a}$
gemischte Distribut.	$\oplus$	$(\forall r, \vec{a}, \vec{b})$	$r * (\vec{a} \oplus \vec{b}) = r * \vec{a} \oplus r * \vec{b}$

$* = r * (\vec{a} \odot \vec{b})$

VEKTORRAUM

$(V, \oplus)$ kommut. Gruppe
$(K, +, \cdot)$ Körper
$* \quad K \times V \to V$
gemischte Assoziat. $\cdot$
beidseit. Distribut. $+ \oplus$
Skalareinselement

$(M, \oplus, \vec{0})$ kommut. Gruppe
$(R, +, \cdot, 0, 1)$ Ring mit Eins
$* : R \times M \to M$
Skalareins elem.
gemischte Assoziativität ·
beidseitig distribut. + $\oplus$

$(V, \oplus, \vec{0})$ komm. Gruppe
$(K, +, \cdot, 0, 1)$ Körper

$(A, \oplus, \odot, \vec{0})$ Ring
$(K, +, \cdot, 0, 1)$ Körper
gemischte Assoziativität $\odot$

R - LINKS-MODUL

VEKTORRAUM

ALGEBRA

Term

(1) Variable und
Individuen konst Terme
(2) F n-st Fkt. zeichen $\wedge$
$t_1 \dots t_n$ Terme $\Rightarrow$
$F(t_1, \dots, t_n)$ Term

Ausdruck
Formel

(1) $t_1 \dots t_n$ Terme $\wedge$
R n st. Relations zeichen $\Rightarrow$
$R(t_1 \dots t_n)$ Ausdruck
(2) A, B Ausdrücke $\rightarrow$
$\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$
Ausdrücke
(3) $A(x)$ Ausdruck (x frei $\Rightarrow$)
$(\exists x) A(x)$; $(\forall x) A(x)$ Ausdrücke

freie – nicht frei Variabeln

freie Variabeln → neue
Begriffsbild.
$x_2 / x_3 \Leftrightarrow (\exists x_1)(x_1 \cdot x_2) = x_3$

keine freien Variabeln →
Aussagen

$(\forall x_0)(\exists x_1, x_2, x_3, x_4)\ x_0 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$

Evaluations-funktion

$$[\;]: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$
$$t \mapsto x$$

$$[x[3]]_{a_0,a_1,\ldots} \doteq' a_3$$
$$[221]_{a_0\ldots} \doteq' 221$$
$$[t_1+t_2]_{a_0\ldots} = [t_1]_{\ldots} \oplus [t_2]$$

$$[\;] : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$$

$$[t_1=t_2]_{\ldots} = \delta\left([t_1]_{\ldots}, [t_2]_{\ldots}\right)$$
$$[\phi]_{a_0,a_1\ldots} \longrightarrow \{0,1\}$$

$$[(\phi \wedge \psi)]_{\vec{a}} := [\phi]_{\vec{a}} \mathbin{\dot{\wedge}} [\psi]_{\vec{a}}$$

$$[(\phi \vee \psi)]_{\vec{a}} := [\phi]_{\vec{a}} \mathbin{\dot{\vee}} [\psi]_{\vec{a}}$$
$$\dot{\Rightarrow}$$
$$\dot{\Leftrightarrow}$$

$\dot{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\dot{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\dot{\Rightarrow}$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\dot{\Leftrightarrow}$	0	1
0	1	0
1	0	1

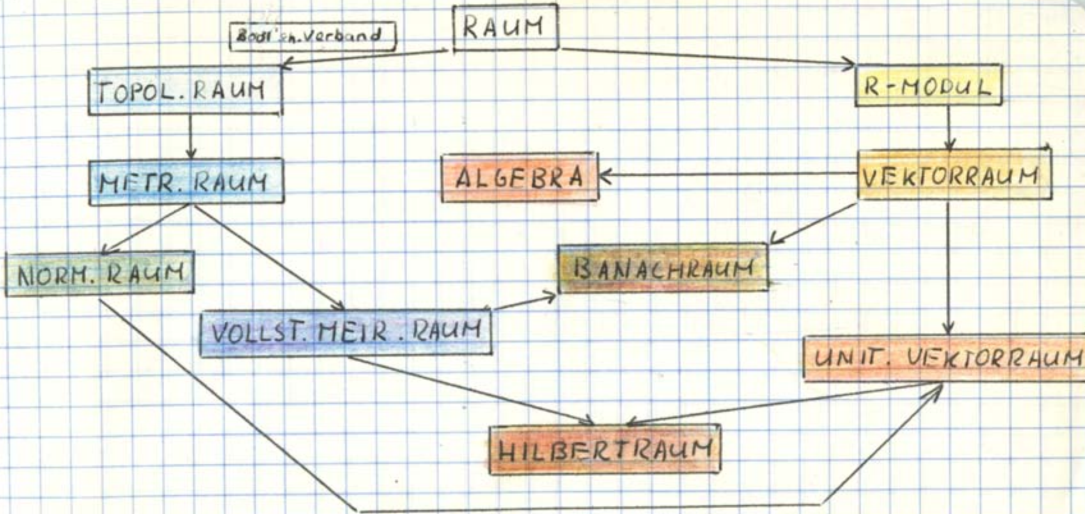
$\dot{\neg}0=1$
$\dot{\neg}1=0$

$$[(\forall(x[1])\phi]_{\vec{a}} := \underset{a_1'}{\mathrm{Min}}\, [\phi]_{a_0 a_1' \ldots}$$

$$[\exists(x[2])\phi]_{\vec{a}} := \underset{a_2'}{\mathrm{Max}}\, [\phi]_{a_0,a_1,a_2'\ldots}$$

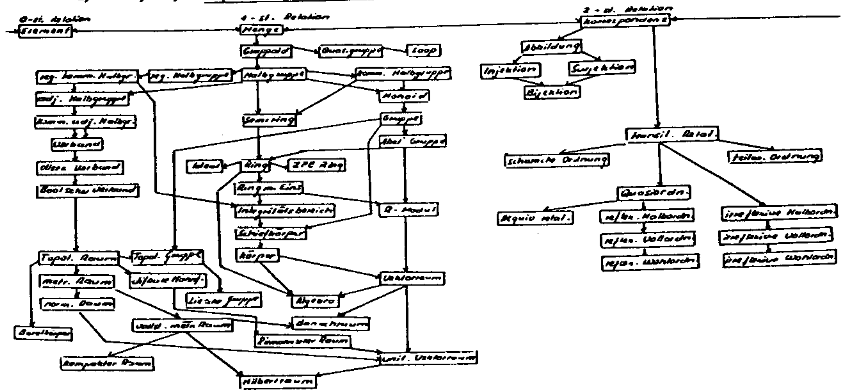
Funktions Prädikats-zeichen

	Funkt.	Präd. - zeichen
0st.	f_1^0	P_1^0, P_2^0
1st.	$f_1^1(x_1)$	$P_1^1(x_1)$
2st.	$f_1^2(x_1,x_2)$	$P_1^2(x_1,x_2)$


RAUM
Bool'sch.Verband
TOPOL. RAUM
R-MODUL
METR. RAUM
ALGEBRA
VEKTORRAUM
NORM. RAUM
BANACHRAUM
VOLLST. METR. RAUM
UNIT. VEKTORRAUM
HILBERTRAUM

Grobaufbau der Mathematik

Interpretationsprinzip : "Alles Seiende kann fast als n-stellige Relation interpretiert werden (n ∈ Z)"



X — Y   Heisst : jedes Y ist ein X

060184 Oliver Knill

Spez. Relativitäts theorie

Postulate v. Einstein

Relativitätsprinzip:

Alle physikalischen gesetze sind In allen Inertialsystemen gleich.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertial-systemen gleich.

Lorentz Transform.

$$x' = x$$
$$y' = \gamma(v)\,(y - v \cdot t)$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(v)\,\left(t - \frac{v}{c^2} \cdot y\right)$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Längen-kontrakt.

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot L_0$$

Zeit dilatation

$$T = T_0 \,/\, \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

radioaktives Zerfallsgesetz

$$dN(t') = -\underbrace{\lambda}_{\text{Zerfallskonst}} N(t') \cdot dt'$$

$$N(t') = N_0 \cdot e^{-\lambda t'}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{mittlere Lebensdauer}$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_0 \gamma_0}} \quad \text{relativist.}$$

relat. Dopplereffekt

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \quad \text{longitudinal}$$

Addition von Geschwindigkeiten

$$u_1' = \frac{u_1}{\gamma(v)\left(1-\frac{v\,u_2}{c^2}\right)}$$

$$u_2' = \frac{u_2 - v}{1-\frac{v \cdot u_2}{c^2}}$$

$$u_3' = \frac{u_3}{\gamma(v)\left(1-\frac{v\,u_2}{c^2}\right)}$$

Massen-zunahme

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Aequivalenz von Energie und Masse

$$T = \frac{m_0 \cdot c^2}{\gamma_0} - m_0 c^2$$

$$\underline{E = m(u) \cdot c^2}$$

Streuprozesse

Impuls und Energieerhalt.
in relat. Streuprozessen.

Elektromagnetismus

Coulomb-Gesetz

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}}{r_{12}}$$

Superposition

Elektrostatik auch Superpositionsprinzip

Elektr. Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(t)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

mehrere Punktlad.

$$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

mittlere Ladungsverteilung

$$\varrho := \frac{\Delta Q(\Delta V)}{\Delta V}$$ ΔV genügend gross, klein

Feld eines Körpers

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cancel{(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, dV'$$

Gauss

$$\iint_A \vec{E}\, d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q_{\text{innerh.}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V \text{ von } A \text{ eingeschl.}} \varrho \cdot dV$$

El. Leiter

El. Leiter: System, in welchem Ladungen verschoben werden können.

Metalle

Metall: Im Innern:
$\vec{E} = 0$, $\rho = 0$
Oberfläche:
$E_{\parallel} = 0$, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

elektrostat. Potential

Potentialnullp.

$$V(P) = \int_P^0 \vec{E}\, d\vec{r}$$

Potent. eines Körpers

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV$$

Potent. eines Teilchens

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r'^2}\, dr' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Dipol.

Dipol $\vec{p}$ $\cdot +q$, $2a$, $\cdot -q$

Dipol moment

$\vec{p} = q \cdot 2a$ Dipolmoment

Potential eines Dipols

$$V(\vec{r}) = \frac{q \cdot 2a}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Potent. Energie

$$U(\vec{r}) = q \cdot V(\vec{r})$$

pot. Energie Joule — Potential Volt

Poisson Laplace

$$\Delta V = \frac{-1}{\varepsilon_0}\varrho(r) \quad \text{Poisson Gl.}$$

$$\Delta V = 0 \quad \text{Laplace Gl.}$$

$$\iiint \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \varrho(r)\, dV$$

$$\iiint -\operatorname{div}\operatorname{grad} V\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \varrho(r)\, dV$$

$$\Delta V = \frac{-1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r})$$

Kapazität

$$Q = \underset{\text{Kapazität}}{C} \cdot V$$

Kondensatoren

Plattenkond. $Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot F}{d} V$

Koaxkabel $Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R/r_0)} V$

Energiedichte

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

Pot. Energie einer Ladungs-konfigur.

$$U_{Lk} = \iiint u(\vec{r})\, dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \vec{E}^2(\vec{r})\, dV$$

U_{Lk}

$$U_{Lk} = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{C}{2} V^2$$

Kond. $\parallel$ seriell

$$C_{\parallel} = C_1 + C_2$$
$$1/C_{ser} = 1/C_1 + 1/C_2$$

Dielektrizitätskonst

$$Q = \varepsilon\, C_0\, V$$

ε: Dielektrizitätskonst.

σ pol

$$\sigma_{pol} = n \cdot p$$

n: Anzahl pos. Lad. pro m^3

σ_{pol}: Ladungsdichte der Dipolmomente

Polarisierbarkeit α

Polarisierbarkeit eines Atoms α

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_{ext}$$

Modell : $\alpha = 4\pi\, \varepsilon_0 R^3$

$\varepsilon \leftrightarrow \alpha$

verdünntes Dielektrikum $\quad \varepsilon = 1 + \dfrac{n\alpha}{\varepsilon_0}$

dichtes Dielektrikum $\quad \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \dfrac{\alpha n}{3\varepsilon_0}$

(Clausius, Mosotti)

Polarisation

Polarisation $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$ mittleres elektr. Dipolmom. pro Volumeinh.

Grundgleichungen der Elektrostatik

Elektrostatik	
integral	differentiell
$\oiint \vec{E}\, d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho\, dV$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$	

mittl. Geschw.

$$\bar{\vec{v}} = \left(\sum_j \vec{v}_j n_j\right) \cdot 1/n$$

Stromdichte

$$\vec{i} = q \cdot n \cdot \bar{\vec{v}}$$

dI

$$dI(d\vec{f}) = q \cdot n \cdot \bar{\vec{v}} = \vec{i} \cdot d\vec{f}$$

I

$$I(F) = \iint_F \vec{i}\, d\vec{f}$$

i

mehrere Ladungsträger

$$\vec{i} = \sum_k q_k n_k \bar{\vec{v}}_k$$

Kontinuitäts-gleichung

$$\iint_A \vec{i}\, d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho\, dV$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{i}(x,y,z,t)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,y,z,t)$$

stat. Feld. $\operatorname{div}\vec{i} = 0$

$$\iint \vec{i}\, d\vec{f} = 0$$

Ohm'sches Gesetz

$\vec{i} = \sigma \vec{E}$ $\quad \underset{E}{\sigma}$ unabh. von

Ohm für hom. Feld.

hom. $\vec{E}$ Feld

$I = \sigma \frac{F}{d} V \qquad R = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{F}$

σ

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k}$$

Kontinuitäts gleich

$$\iint_A \vec{i}\, d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot dV$$

$$\operatorname{div}\vec{i} = \frac{d}{dt}\rho$$

Integralform d. Ohmschen Gesetzes

$$R = \frac{\int \vec{E}\, d\vec{r}}{\iint \sigma \vec{E}\, d\vec{f}}$$

Elektromotor. Kraft

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q_0} \int \vec{F}\, d\vec{r}$$

Eigentlich Spannung

Leistung der Quelle

$$\boxed{P_Q = \mathcal{E} \cdot I}$$

spez. f. Ohmsche Widerst.

$$\mathcal{E} = R \cdot I$$

$$P_Q = R \cdot I^2$$

RC-Stromkreis

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Q

$$Q = \varepsilon_0 \iint_{A(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ladungs invarianz

$$\iint_{A(t)} \vec{E}\, d\vec{A} = \iint_{A'(t')} \vec{E}' \cdot d\vec{A}' \quad \overset{LT}{t \to t'}$$

Lorentz trafo

Lorentz Kraft

$$F_2 = \frac{q I v}{2\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r}$$

$\vec{B}$ Feld

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B} \text{ Feld}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad \vec{E} \text{ Feld}$$

μ_0

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \qquad 4\pi\, 10^{-7}\ N/A$$

gerader Leiter

B Feld v. geradem Leiter

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Kraft zw. ∥ Leitern

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \ell I_1 I_2}{r}$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$\int_C \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \iint_F \vec{i} \cdot d\vec{f}$$

Quellenfreiheit

$$\iint_A \vec{B}\, d\vec{f} = 0$$

$\vec{B}$ Feld einer Ladungsverteilung

$\vec{B}$ Feld von Ladungsverteilung	
integral	differentiell
$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \iint \vec{i}\, d\vec{f}$	$\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{i}$
$\iint \vec{B}\, d\vec{f} = 0$	$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$
$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{i}$	

$\vec{A}(\vec{r})$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{i}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A}$$

B Feld eines Leiters

$$\vec B(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\text{Leiter}} \frac{d\vec l \times \vec \rho}{\rho^3}$$

Biot-Savart Kraft

$$d\vec F = I\cdot d\vec l \times \vec B$$

magn. Dipolmom. d. Stromschleife

$$\boxed{\vec m = abI\cdot\vec n}$$

Stromschleife

$\underset{\uparrow \\ \text{Fläche}}{A} I\vec n$

Dreh-moment auf Schleife

$$\vec M = \vec m \times \vec B$$

für beliebige ebene Schleife

Hall Effekt

Hall Effekt

$V = B\cdot v\cdot h$

Lorentztrafo von $\vec E, \vec B$

Lorentztrafo von $\vec E, \vec B$:

$E_x' = \gamma(v)\,(E_x + vB_z)$

$B_x' = \gamma(v)\,(B_x - \frac{v}{c^2}E_z)$

$E_y' = E_y \quad B_y' = B_y$

$E_z' = \gamma(v)\,(E_z - vB_x)$

$B_z' = \gamma(v)\,(B_z + \frac{v}{c^2}E_x)$

φ

$$\boxed{\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{f}}$$

Faraday

Ind. Gesetz v. Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday allgemein

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

Induktion Selbstindukt.

$$\mathcal{E}_{21} = L_{21} \, \dot{I}_1(t)$$
$$\mathcal{E}_{SI} = -L \, \dot{I}_2(t)$$

$$\dot{I}_2 + \frac{R}{L} I_2 = \frac{L_{21}}{L} \dot{I}_1$$

Difgl. f. Indukt.

Maxwell-gleichungen

1. $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{i} + \varepsilon_0\mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$
2. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
3. $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$
4. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Energie in Spule u. Kond.

$$U_L = \frac{L}{2} I^2 \qquad U_C = \frac{1}{2C} Q^2$$

Spule — Kondensator

L Torusspule

L (Torusspule)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 f}{2\pi R}$$

Energie $\vec B, \vec E$ Feld

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

magn. Eigenschaft. von Materie

diamagn $\vec m_A = 0$ $(B_{ext} = 0)$

para, feromagn $\Big\}$ $\vec m_A \neq 0$ — para: $\vec M = 0$, feromagn: $\vec M \neq 0$

Magnetisierung

$$\vec M = \frac{\sum_{\Delta V} \vec m_{A_i}}{\Delta V}$$ Magnetisier.

mittl. mgn. Dipolmoment pro Vol-einheit

Satz von Larmor

Satz von Larmor:

In einem mit $\vec\Omega = \frac{e}{2m}\vec B$ rotierendem System sind Elektronenbahnen unverändert

Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Vakuum

Vakuum

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

elektromagn Wellen

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{B}$$

Wellengleichung

WÄRME

C Wärme-kapazität

$\Delta Q = C \cdot \Delta T$ Wärmekap. C

spez. wärme $c = C/gr$

gas-druck

$p = \dfrac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{a}}{\Delta a}$ $\Delta\vec{a}$ Flächenstück

1 bar = $10^5 N/m^2$

univers. Gasgesetz

$P \cdot V = N \cdot k \cdot T$

$k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/°

Boltzmann konst

Mol

1 Mol S Masse von N_0 Molek vom Stoff S

Dimension N (SI)

μ Anzahl Mol $\mu = \frac{N}{N_0} = \frac{M}{m_\mu}$

R_0

$R_0 = N_0 \cdot k$ univ. gaskonst

V_0

$V_0 = \dfrac{R_0 T_0}{P_0}$ T_0 – 0°C, P_0 – 1 atm $= 22.4\ l$

1 Mol d. ideal. gases

Druck

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m}{2} v^2 \right\rangle$$

n Anzahl Teilchen pro Vol.einh.
$\langle\ \rangle$ mittlere ...

Temp.

$$\left\langle \frac{m}{2} v^2 \right\rangle = \alpha T$$

$$\alpha = \frac{3}{2} k$$

Theorie Exper.

$$p \cdot V = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{m}{2} v^2 \right\rangle$$
$$= \frac{2}{3} \alpha N T \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} k$$
$$= N \cdot k \cdot T$$

Äquipartition der Energie

mittlere kin. Energie in Glgew.zust. eines Moleküls (Gas)
$f \cdot \frac{1}{2} k T$ f # Freiheitsgrade

mittlere pot. Energie in Glgew.zust. eines Moleküls
$\frac{1}{2} k T \cdot$ # Freih.grade d. Vibration

Bsp

1 atomig	$U = N \cdot \frac{3}{2} k T$
2 atom.	$U = N \cdot \frac{7}{2} k T$
" ohne vibr.	$U = N \cdot \frac{5}{2} k T$
Festkörper	$U = N \cdot \frac{6}{2} k T$

molare spez. Wärmekap.

molare spez. Wärme bei konst. Vol.

$$c_V = \frac{1}{\nu} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \text{Wärmekap/mol}$$

Volumen konst $\Delta Q = \Delta U$

$$c_V = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT}$$

Bsp

1atom. $c_V = \frac{3}{2} R_0$

2atom $c_V = \frac{7}{2} R_0$

ohne vibr $c_V = \frac{5}{2} R_0$

Festkörper $c_V = \frac{6}{2} R_0$

Dulong Petit Gesetz

Maxwell-Boltzmann'sche Verteil. d. Molekülgeschw.

$$\frac{dN(v)}{dv} = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$dN(v)$ # Molek $v \ldots v+dv$

Wirk. querschnitt

$\sigma = R^2\pi \qquad R = 2r$

Wirkungsquerschn. 2 erkugeln

Anzahl Zusstöße pro sec

$$Z = \sqrt{2}\,\sigma n \bar{v}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad n \;\#\,\text{Mol.}/\text{Vol.}$$

$\bar{\lambda}$

mittlere freie Weglänge

$$\bar{\lambda} = \frac{\text{mittlere Strecke in Zeit } t}{\text{mittlere \# Stösse auf Strecke}} = \frac{\bar{v}\,t}{Z\cdot t}$$

$\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n}$$

$\bar{\lambda} \leftrightarrow p$

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\sigma p}$$

Barometr. Höhenformel

$$n(z) = n_0\, e^{-\frac{mg}{kT} z}$$

$(p = n\cdot k\cdot T)$

Teilchenverteilung in Atmosphäre

Maxwell-Bolzmannsches Verteil.gesetz d. Energie

Zustände d. Energie E_i (pro Volumenelem. des Phasenraums) ist propor. zum Bolzmannfaktor

$$f_i \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

exakte Herl. d. Magnet. b. paramagn. Stoffen

$M = n \cdot m_A \left[\coth a - \frac{1}{a} \right]$ $\quad a = \frac{m_A B}{kT}$

Magnetisierung bei Paramagn. Stoffen

$a \ll 1$ $\quad M = \frac{n\, m_A^2 B}{3kT}$

Grundannahme d. Thermodynamik

Grundannahme d. Thermodynamik: Vielteilchenproblem hat Gl.gew. zustände

homog. System

homog. System: durch 2 Variable Zustand festgelegt

irreversible reversible Trafo

reversible Trafo
- umkehrbar, verläuft über Folge von Gl.gew.zust.

irreversible Trafo
- nicht umkehrbar, verläuft über 1-mehrere Nicht-Gl.gew.zustände

Arbeit

$p \cdot dV = \delta A^r = -\delta A^a$

Arbeit b. endl. Volând.

endl. Vol. änderung $V_A \to V_B$

$$\Delta A^{\nearrow}_{A\to B} = \int_{V(A)}^{V(B)} P(V)\,dV$$

totale innere Energie

Totale innere Energie U

U_A totale innere Energie im Punkt A

Thermodyn. Potential

1. HS d. Thermodynamik

1. HS d. Thermodynamik

$$\Delta U_{A\to B} = \Delta Q^{\swarrow} + \Delta A^{\swarrow}$$

- auch f. irrevers. Prozesse
- Kreisprozesse $\Delta Q^{\swarrow} = \Delta A^{\nearrow}$
- $dU = \partial Q^{\swarrow} - \partial A^{\nearrow}$
  $= \partial Q^{\swarrow} - P\,dV$

$c_P - c_V = R_0 \cdot \mu$

$$c_V = \frac{(\partial Q^{\swarrow})_V}{dT}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{dU(T)}{dT}$$

$$c_P = \frac{(\partial Q^{\swarrow})_V}{dT}\cdot\frac{1}{\mu} = c_V +$$

$$c_P - c_V = R_0\cdot\mu$$

isotherme und adiab. zust.gl.

isotherme zust. gl.

$p \cdot v = const.$

adiab. zust. gl.

$$\frac{dT}{T} = (1-\gamma)\frac{dv}{v} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

isoth. adiab. Zustgl.

$p \cdot v = const$ Isoth.
$p \cdot v^{\gamma} = const$ adiab.

μ

$v = \frac{V}{\mu}$ Volumen pro Mol

Van d. Waals Zust. gl.

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v+b) = R_0 T$$

T_c, p_c, v_c

$v_c = 3b$
$T_c = \frac{8a}{27bR_0} \qquad p_c = \frac{a}{27b^2}$

Joule Thomson Effekt

$$dT = \frac{1}{\nu c_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right] dp$$

$$\approx \frac{1}{c_p}\left[\frac{2a}{R_0 T} - b\right] dp$$

Inversionstemperatur

$$T_i = \frac{2a}{R_0 b}$$ Invers. temperat.

$$T_i = \frac{27}{4} T_c$$

Thermodyn. Kreisprozess

Thermodyn. Kreisprozess ist revers. Trafo $A \xrightarrow{1} B$ gefolgt von revers. Trafo $B \xrightarrow{2} A$

Wirk. grad

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{vom Res. höhe Temp geliefert Wärme}}$$

η_{carnot}

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

2. Hauptsatz d. Thermodynamik

2. Hauptsatz d. Thermodynamik

Clausius:
∄ period. Maschine, die ohne äussere Arbeit Temp. von Res. nied. Temp. in Res höh. Temp.

Thomson:
∄ period. Maschine, welche syst. Wärme entzieht und in Arbeit verwandelt ohne dass Veränd. zurückbleiben.

quantitative Form d. 2. Hauptsatzes

revers. Wärmemasch. zwischen zwei Wärmeresero. arbeiten haben gleich. Wirkungsgrad

$$\eta_{rev.} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

irrevers. Wärmemasch. zwische denselben Res. haben kleinere Wirkungsgrad

Entropie

Entropie eines Zust. A

$$S_A = \int_0^A \frac{dQ}{T}$$

2. HS

$$dS = \frac{dQ}{T}$$ Gradientenfeld tot. Differential

neue Form d. 2. HS

L_T

L_T isoth. Verdampfungswärme

Clausius Clapeyron

$$\frac{dP(T)}{dT} = \frac{L_T}{T(v_B - v_A)}$$

v_A Volumen d. Flüssigk.

v_B Volumen d. Gases

U v p

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T^2 \left(\frac{d\left(\frac{P}{T}\right)}{dT}\right)_V$$

2. HS neu

2. HS

Ein revers. Prozess im abgeschl. System ändert Entropie nicht. Irreversibl. Prozess erhöht Entropie

Boltzmann

$$S_A = k \cdot \ln(W_A)$$

Klassische Mechanik

1. Kepler

$\vec{x}(t)$ liegt in Ebene
Bahn = Ellipse

$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \varepsilon$

$\overline{OP} = a$

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

2. Kepler

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = c$$

3. Kepler

$$T^2 / a^3 = b$$

Kraftgesetz

$$F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -\frac{m\,4\pi^2}{b} \frac{\vec{x}}{r^3}$$

Folgerung aus Keplergesetze

N-Teilchen

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = -\varkappa \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t)|^3} (\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t))$$

N Teilchensystem punktförm. Körper
Superpositionsprinzip

Zeit

Zeit def. durch period. Vorgang. Wertmenge der Zeit $= \mathbb{R}$

physik. Raum

$\underline{\mathbb{E}^3}$ Koord. Syst. : Starrer Körp.

Metrik $|\vec a - \vec b| = \sqrt{\sum_i (a_i - b_i)^2}$

kong. Transfo.

$$y_k = \sum_{l=1}^{3} O_{kl} x_l + a_k$$

$O^T O = 1\!\!1$ $\quad \vec a$ Translation

euklid. Raum = affiner Raum isomorph zu $\mathbb{R}$

Drehung

$\vec e$ Drehachse $\quad \varphi$ Drehwinkel

$$\vec y = e \wedge \vec x \cdot \sin\varphi + (1-\cos\varphi)(\vec e \wedge \vec x) \wedge \vec e$$

eukl. Bew.

eukl. Bew. = Schraubung

Kinematik

$\vec x(t)$ Bahn

$$\vec v(t) = \dot{\vec x}(t) = \frac{d\vec x(t)}{dt}$$

$$\vec b(t) = \ddot{\vec x}(t) = \dot{\vec v}(t)$$

$$|\vec b_{\parallel}| = \frac{d\,|\vec v|}{dt}$$

$$|\vec b_{\perp}| = \frac{|\vec v|^2}{\rho}$$

Newtonsche Bewegungsgleichungen

1) Aequivalenzklasse von Inertialsystemen

$m\ddot{\vec{x}} = 0$

2) $m_i \ddot{x}_i(t) = \vec{k}_i(\vec{x}_1 \ldots x_N, \dot{x}_1 \ldots \dot{x}_N, t)$

3) $\vec{k}_{ij} = -\vec{k}_{ji}$

$\Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$

$$k_{ij}(x_i - x_j) = \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{r_{ij}} f_{ij}(r_{ij})$$

Erhaltungssätze

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i k_i = \vec{k}_{tot}$$

Impulssatz

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i x_i \times \vec{k}_i = \vec{D}$$

Drehimpulssatz

Energiesatz

Galilei'sches Relativitäts-prinzip

$\{\vec{x}_i(t)\}_{i=1}^{N}$ Lösung von

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_j k_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$\Longrightarrow$ $y_i(t') = \pm O x_i(t) + \vec{v} \cdot t$

- O orth. Matrix
- $\vec{a}, \vec{v}$ konst. Vektoren im $\mathbb{R}^3$
- $t' = \pm t + \tau$

wieder Lösung

Parameter u. Galileitrafo

3 Transl.	Impulssatz
3 Geschwtrafo	Schwerp.satz
3 Param. f. O	Drehimpulssatz
1 Param. τ	Energiesatz

Abl. von Matr.

$$\frac{d}{dt} A \cdot B = \dot{A}B + A\dot{B}$$

Drehung

$$\Omega = O^T \dot{O} \qquad e^{t\Omega} = O$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{\omega}| = \omega$$

$$\Omega \vec{x} = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$$
$$\dot{\Omega} \vec{x} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{x}$$

Relativbeweg.

$S \to S'$ belieb. bewegt

$$\vec{x}_i(t) = O(t)\cdot\vec{y}_i(t) + \vec{a}(t)$$

$$m_i \ddot{\vec{y}}_i = \vec{k}_i{}' - 2m_i\,\vec{\omega}\wedge\dot{\vec{y}}_i \quad \text{Coriolis}$$
$$- m_i\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{y}_i) \quad \text{Zentrif.}$$
$$- m_i\,\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{y}_i \quad \text{Drehbeschl.}$$
$$- m_i\,\ddot{\vec{a}} \quad \text{Beschl.}$$

Hamilton funktion

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

$$U(q) = -\int_{q_0}^{q} k(q')\,dq'$$

Phasenraum

Phasenraum (p,q) Ebene
Bahnen = Niveaulinien von $H(p,q)$

$$\frac{p^2}{2m} \geq 0 \Rightarrow \text{erlaubte Konf.}$$
$$\{q : U(q) \leq E\}$$

Energiesatz

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

Energiesatz

Bahnen im Phasenraum

Bahnen:
- Streubahnen
- geschlossene Bahnen
- Kriechbahnen

2 Körperproblem

$m_1, m_2, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ 2 Teilchen

$M = m_1 + m_2 \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$\vec{X} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2)$$

$$\vec{X}(t) = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{x}_0$$

$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad \underline{\mu = \frac{m_1 m_2}{M}}$ red. Masse

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_1} \vec{\nabla}_1 U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{1}{m_2} \vec{\nabla}_2 U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{\mu}(-\vec{\nabla} U)(|\vec{x}|)$$

Drehbewegung

$\vec{x}(t) = R(t)\, \vec{x}(0) \quad R(0) = \mathbb{1}$

$\Omega : \vec{x} \mapsto \vec{\omega} \wedge \vec{x}$

$\dot{R} = \Omega \cdot R \quad \Omega + \Omega^T = 0$

$\underline{R(t) = e^{\Omega t}}$

$$e^{\Omega t} : \vec{x} \mapsto (\vec{x}, \vec{e})\vec{e} + (\vec{e} \wedge \vec{x}) \sin \Omega t - \vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{x}) \cos \omega t$$

Streutheorie

$$\left.\begin{array}{l} U(q) \to 0 \quad |q| \to \infty \\ \int |U(q)|\, dq < \infty \end{array}\right\} \text{Voraus s.}$$

q_0, p_0 Anfangsbed.

$$\frac{p_0^2}{2m} + U(q_0) > \sup U(q)$$

$\Rightarrow$ Vorwärtsstreuung

Streutheorie

$$\left(\exists\, q_\pm,\ p_\pm = \sqrt{2mE}\right) \text{ kein Bd. mehr}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left| q(t) - \left(\frac{p_\pm}{m} t + q_\pm\right) \right| = 0$$

$$m \cdot \ddot{q} = -\frac{dU}{dq} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 + U(q)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}$$

$$\Rightarrow \underline{t(q) - t(q_0) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{E - V(q')}}}$$

$$q(t) \longrightarrow q_- + \frac{p_-}{m} t \qquad (t \to -\infty)$$

$$q(t) \longrightarrow q_+ + \frac{p_+}{m} t \qquad (t \to +\infty)$$

$$S(q_-, p_-) = (q_+, p_+)$$

$$t' \to t = t' + \tau$$

$$q_\pm \mapsto q_\pm + \frac{p_\pm}{m} \tau$$

Stosszeit

$$\Delta T = \lim_{\substack{t \to \infty \\ t' \to -\infty}} \left(\frac{q(t)}{\dot{q}(t)} - t - \left(\frac{q(t')}{\dot{q}(t')} - t'\right) \right) = \frac{m \cdot q_+}{p_+} - \frac{m \cdot q_-}{p_-}$$

2 Körperproblem voll integriert

$$e = \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{x}}|^2 + U(\vec{x}) = \text{const.}$$

$\vec{L} = \mu\vec{x}\wedge\dot{\vec{x}}$ const $\Rightarrow$ ebene Bahn

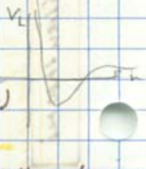
$\vec{x} = (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi, 0)$

$\dot{\vec{x}} = \dot{r}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + r(-\sin\varphi)\dot\varphi, \cos\varphi\dot\varphi, 0)$

$\vec{x} \perp \dot{\vec{x}}$

$\Rightarrow \vec{L} = \mu\cdot|x|\cdot|\dot{x}| = \underline{\mu\cdot r^2\dot\varphi}$

$$e = \frac{\mu}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + U(x)$$



$$\rightarrow e = \frac{\mu}{2}\dot r^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{\text{Potential der Zentrifugalkraft}} + U(r)$$

$\mu r^2\dot\varphi = L$ $\qquad dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{e - V_L(r)}}$

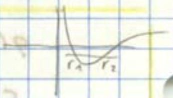
$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$ $\qquad d\varphi = \frac{L}{\mu r^2}dt =$

$= \frac{L}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{dr}{\sqrt{e - V_L(r)}}$

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{(r')^2\sqrt{e - V_L(r')}}$$

gebundene Bahnen

$dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{dr}{\sqrt{e - V_L(r)}}$



$$t(r) - t(r_0) = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_1\ r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{e - V_L(r)}}$$

$$T(e,L) = 2\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_1}\frac{dr'}{\sqrt{e - V_L(r')}}$$

$= \Delta\varphi$ nach einer Periode (Drehung des Perihels)

$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ rational $\rightarrow$ Bahn periodisch

Theorem v. Bertrand

Nur für $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ Kepler und $U(r) = \frac{f}{2} r^2$ sind alle gebund. Bahnen Periodisch

$e > U_0 = \lim_{r\to\infty} U(r) \Rightarrow$ Streubahnen

$U_L'(r=r_1) < 0 \rightarrow$ keine Kriechbahn

Phasenpkt. $\begin{pmatrix}\vec{p}(t)\\ \vec{x}(t)\end{pmatrix} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \begin{pmatrix}\vec{p}_\pm \\ \vec{x}_\pm = \vec{s}_\pm + \frac{\vec{p}_\pm}{\mu} t\end{pmatrix}$

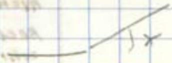
Streubahnen

$d\sigma$ Flächenelem. in Einschussebene $= b\cdot d\varphi\cdot db$

$d\Omega$ Raumelement in das das Teilchen hineingestreut wird.

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ different. Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_n \left| \frac{b_n}{\sin\chi} \frac{db_n}{d\chi} \right|$$



Windungsanzahl und Streuwinkel bestimmen Stossparameter

Lagrange'sche Systeme

mechan. System mit
verallgemeinerten Koordinaten
$q_1 \cdots q_n$

Holonome Zwangsbed. — auf ganz $\mathbb{R}$ eingeschr.

$F_k(q_1 \cdots q_n) = 0$ $\quad n-r$ # Freiheitsgr.

F_k nicht von t abh. — skleronom

F_k von t abh. — rheonom

$q_1(\tau) \cdots q_n(\tau)$ — Bahn d. Systems unter Einfluss einer imag. Kraft
τ imag. Zeit

$dq_i = \left.\frac{d q_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$ — Variationen d. q_i

$\frac{d}{d\tau} F_k(q_1 \cdots q_n) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial q_j}(q_1(\tau) \cdots q_n(\tau)) \left.\frac{dq_j(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau}$

$q = (q_1 \cdots q_n)$

inneres Produkt

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial q_j}(q)\, dq_j = (\nabla F, dq) = 0$

nicht holonome Zwangsbed. — Bewegung nur infinitesimal eingeschränkt

Bedingung nur im Kleinen eingeschränkt

$\forall i,j,k \quad F^i\left(\frac{\partial F^i}{\partial q^k} - \frac{\partial F^k}{\partial q^i}\right) + \text{zykl.} = 0 \Rightarrow$ nicht holonom

$(\exists J) \quad J F^j = \frac{\partial G}{\partial q_j}$ $\quad J$ integr. Faktor

Zwangskräfte $\quad (Z, dq) = \sum_{i=1}^{n} Z^i dq_i = 0$

$Z \perp$ Variationen

Zwangsbed. $\quad \sum F_k^j(q)\, dq_j = 0$

$F_i(q) = \begin{pmatrix} F_i^1(q_1 \cdots q_n) \\ \vdots \\ F_i^n(q_1 \cdots q_n) \end{pmatrix}$ $\qquad VR \quad V_R$
$\qquad dq \perp VR$

$\Rightarrow Z(q) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k F_k(q)$

freibende Kräfte $k(q) = \begin{pmatrix} k_1(q_1 \dots q_n) \\ \vdots \\ k_n(q_1 \dots q_n) \end{pmatrix}$

Gleichgewichtspunkt $q^0 = (q_1^0 \dots q_n^0)$

$k(q_0) + Z(q_0) = 0$

$\Rightarrow k(q_0) \in U_q \quad \dim U_q = r$

s holonome Zwangsbed. $\Rightarrow$ # Freiheitsgr. $n-s$

$\Rightarrow$ dim Lösungsraum $r-s$

q_0 Gleichgewichtspunkt $\Rightarrow$ durch q_0 geht $(r-s)$ dim Fläche lokal von Gl.gew.punkten

$$\delta A = \sum_{j=1}^{n} (k_j(q) + Z_j(q))\, dq_j$$

virtuelle Arbeit

$$= \sum_{j=1}^{n} k_j(q)\, dq_j \qquad \text{falls } (F_n, dq) = 0$$

Zwangskräfte leisten keine Arbeit

q_0 gleichgewichtsp. $\Rightarrow \delta A = (k, dq) = 0$

Bsp.: Massenpunkt auf Fläche $F(\vec{x}) = 0$

$\vec{k}(x) + \lambda (\vec{\nabla} F)\vec{x} = 0 \qquad$ freib. Kraft $\perp$

$F(\vec{x}) = 0 \qquad$ Tangentialebene

Bsp.: starrer Körper $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_N, m_1 \dots m_N$

$y_j = O\vec{x}_j + \vec{a} \qquad$ unabh. von j

$$d\vec{x}_j = \vec{y}_j - \vec{x}_j = \underbrace{(O - 1\!\!1)}_{\varepsilon \Omega}\vec{x}_j + \underbrace{\vec{a}}_{\varepsilon \vec{x}}$$

$$= \varepsilon(\vec{\omega} \wedge \vec{x}_j + \vec{x})$$

$$\delta A = \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \vec{k}_j (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_j) + \varepsilon \Big(\sum_{j=1}^{N} \vec{k}_j\Big)\vec{x}$$

$$= \varepsilon \underbrace{\Big(\sum_j \vec{x}_j \wedge k_j\Big)}_{\vec{D}}\vec{\omega} + \varepsilon \underbrace{\Big(\sum_j \vec{k}_j\Big)}_{\vec{k}_{tot}}\vec{x}$$

$\delta A = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \wedge \vec{k}_{tot} = 0$

Lagrange Gleichung 1. Art

$$m_j \ddot{\vec{x}}_j = \vec{K}_j + \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu \vec{F}_\mu^{\,j} \qquad \sum_{j=1}^{N} F_\mu^{\,j} \dot{\vec{x}}_j = 0$$

$d\vec{x}_j = \dot{\vec{x}}_j \cdot dt$

Zwangsbed.

virtuelle Arbeit δA^*

$$\delta A^* = \sum_{j=1}^{N} \Big(m_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j \underbrace{- \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu F_\mu^{\,j}\Big) d\vec{x}_j}_{} = 0$$

$$\delta A^* = \sum_{j=1}^{N} (m_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j)\, d\vec{x}_j^{\,0} = 0 \qquad \text{Alemb. Prinzip}$$

Körper : $\vec{x}$, $F(\vec{x}) = 0$ auf Fläche, m

$x_j = x_j(u_1, u_2)$

Flächenkoord.

(u_1, u_2) Flächenpunkte

$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}$ Basis für Tang. ebene

erlaubte infinit. Variation

$$d\vec{x} = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdot du_2$$

Alembert: $\delta A^* = (m\ddot{\vec{x}} - \vec{k})\, d\vec{x} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \dot{u}_2$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_1^2} \dot{u}_1^2 + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_2^2} \dot{u}_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_1 \partial u_2} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \ddot{u}_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \ddot{u}_2$$

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} \qquad \text{Metrik}$$

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} du_j$$

$$\text{Abstand} = \sqrt{d\vec{x} \cdot d\vec{x}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, du_i\, du_j}$$

Gesamtlänge: Integrieren auf geodät Linie

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}\right)$$ Christoffel Symbol

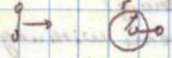
$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{k})\,\dot{\vec{x}} = 0$ einsetzen

$$\rightarrow \sum_{ik} \Gamma_{ik,j}\,\dot{u}_i \dot{u}_k + \sum_k g_{jk}\,\ddot{u}_k = f_j \qquad f_j = \vec{k}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j}$$

Difgl. einer geod. Linie

Bsp. Hantel

Beweg. typen ohne Kräfte



$\frac{\dot{\vec{x}}}{r} = \omega$

N Massenpunkte mit r holon. Zwangsbedingungen.

$\vec{x}_j = \vec{x}_j(q_1 \dots q_f)$ # FG.

$F_k(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N) = 0 \quad k = 1 \dots r$

$\Rightarrow f = 3N - r$

Bew.glng: $\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\vec{x}}_j \cdot \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_k} = \sum_j \vec{k}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k}$

$$\frac{d\vec{x}_j}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt}$$

$$\dot{\vec{x}}_j = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_\alpha}\cdot \dot{q}_\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\vec{x}}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$\delta A^* = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_j \vec{K}_j \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

$$\vec{K}_j = \vec{\nabla}_{\vec{x}_j} U$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} U \qquad L = T - U \text{ von } \dot q_\alpha \text{ unabh.}$$

Lagrange Gleichung

Euler Lagrange Gl. Euler'sche Ableit.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0}$$

Lagrange'sche Gl. 2. Art.

Bedingung — Holonome Bedingungen, Kräfte haben Potential

Hamilton Prinzip

$q^*(t)$ löst Bew.gl

$\Rightarrow q^*(t)$ extreme Wirkung

$I(q) \; \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q(t), \dot q(t), t)$ Extremung

nichtholon. Zwangsbed

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}(q^*, \dot q^*, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}(q^*, \dot q^*, t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha F_\alpha^{\,k}(q^*)$$

spez. $F_\alpha^{\,j} = \frac{\partial G_\alpha}{\partial q_j}$

spez. $F_\alpha^{\,j} = \frac{\partial G_\alpha}{\partial q_j} \qquad G_\alpha(q_1 \dots q_f) = 0$

$$\mathcal{L}(\xi, \dot\xi, t) = L(q, \dot q, t) + \sum_{\alpha=1}^{f} \lambda_\alpha G_\alpha q$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_m} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\xi_m} = 0$$

Eichtrafos

$$L'(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) + \frac{d}{dt} M(q(t),t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k} = 0$$

haben gleiche Lösungen

Koord. trafo

Koordinatentrafo

$$q_i' = g_i(q;t)$$
$$q' = G(q;t)$$
$$\dot q' = (DG)(q,t)\cdot \dot q + \frac{\partial G}{\partial t}(q;t)$$

Invarianz b. Koord. trafo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_i'} - \frac{\partial L'}{\partial q_i'} = 0 \quad i=1\ldots f \quad (1)$$

1 $q(t)$ Lösung von

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i=1\ldots f$$

$\Rightarrow q'(t) = G(q,t)$ Lösung von (1)

Nöther'sches Theorem

Noether'sches Theorem

$$\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}(q(t),\dot q(t),t)\, X_j(q(t)) = \text{const}$$

G_s, X

$G_s : q \to q' = G_s(q,t)$

$G_s \in C^\infty$

$G_0(q,t) = q$

$G_{s_1}(G_{s_2}(q,t)) = G_{s_1+s_2}(q,t)$

$\frac{d}{ds} G_s(q,t) = X(G_s(q,t))$

X Vektorfeld

$L(G_s(q), (DG_s)\dot{q} + \frac{dG_s}{dt}, t) = L(q,\dot{q},t)$

zykl. Variable
kan. konj. Impuls

zyklische Variable q_k

L von q_k unabh.

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{konst}$

kanonische konj. Impuls konst. falls q_k zykl. Variable

r Zwangsbed. $s = 1 \ldots r$

f Freiheitsgrade $\alpha = 1 \ldots f$

$\sum_\alpha \Lambda_\alpha^{(s)} \dot{q}_\alpha + \Lambda_0^{(s)} = 0$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum \lambda^{(s)} \Lambda_\alpha^{(s)}$

Drehgruppen

$SO(3) \cong$ Vollkugel vom Radius π
mit identif. Diametralpunkt.
"Affin?"

Paulimatrizen:
Basis f. Raum d. unit. 2×2 $SU(2)$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$SO(3) = S^3$ mit id. Diametralp.
(affine 4dim. Ebene)
$= SU(2)/\mathbb{Z}_2$

Lorenzgruppe im 4dim Minkowskiraum.

Euler Maupertuis

$$\delta \int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}} \sqrt{2(E-U(q))}\, ds = 0$$

$q^{(1)}, q^{(2)}$ fest Variat. nur zugel. wenn E unveränd.

Lineare Schwingungen

$L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q) - U(q)$

$T(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q, A(q)\dot q)$

$U(q) = U_0 + \frac{1}{2}(q, B(t) q)$

Annahmen : $A(q) > 0$ $|q|$ klein
$B(t)$ symm.
$O(|q|^3)$ vernachl.
B konst.
$A(q) \to A(0)$

$O^T A O = M$ diagon. ; $q = O M^{-1/2} q'$

$L^{(2)}(\dot q', q, t) = \frac{1}{2}(\dot q', \dot q') - \frac{1}{2}(q', C q')$

$C = M^{-1/2} O^T B O M^{-1/2}$

$\xi = \begin{pmatrix} q' \\ \dot q' \end{pmatrix}$ $k = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ -C & 0 \end{pmatrix}$

$\ddot q' = -C q'$

$\dot\xi = k\xi$ Hamilton'sche Form

$\Rightarrow \xi = e^{kt}\xi(0)$

C symm $\Rightarrow O_1^T C O_1 = \Omega^2$ diag.

$q' = O_1 Q$

$L^{(2)}(Q,\dot Q,t) = \frac{1}{2}(\dot Q,\dot Q) - \frac{1}{2}(Q,\Omega^2 Q)$

$$Q_j(t) = Q_j(0) \cos\omega_j t + \dot{Q}_j(0) \sin\omega_j t$$

$$q = \underbrace{O M^{-1/2} O_1}_{D} Q$$

$$\boxed{\begin{aligned} q(t) &= D\{ \cos(\Omega t) D^{-1} q(0) \\ &\quad + \Omega^{-1} \sin(\Omega t) D^{-1} \dot{q}(0) \} \\ D &= O M^{-1/2} O_1 \\ \Omega &= O_1^T C O_1 \\ C &= M^{-1/2} O^T B O M^{-1/2} \\ M &= O^T A O \end{aligned}}$$

Doppelpendel

$$q_1(t) = \varphi \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

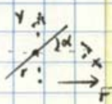
$$q_2(t) = \varphi \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

Lagrangesysteme

- verallgemeinerte Koordinaten
- Zwangsbedingungen $s = 1, \dots r$
- Freiheitsgrade $\alpha = 1, \dots f$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_\alpha \Lambda_\alpha^{(s)} \dot q_\alpha + \Lambda_0^{(s)} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_s \lambda^{(s)} \Lambda_\alpha^{(s)} \end{aligned}}$$

Bsp. rollendes Rad



Koordin. φ, θ, x, y

Zwangsbed. $\dot x - \dot\theta\, r \cdot \cos\varphi = 0$

$\dot y - \dot\theta\, r \sin\varphi = 0$

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{m}{2} r^2 \dot\theta^2 + \frac{m}{4} r^2 \dot\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y} - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot \theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\lambda_1 r \cos\varphi - \lambda_2 r \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot \varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Lösen d. Difgl. vereinfacht d. Erhaltungssätze:

- L t-unabh. $\to$ Energieerh.
- zyklische Variabeln

allg.: <u>Theorem von E. Nöther</u>

Vor.: - G_s 1param Gruppe von Diffeomorph. ($G_s \in C^\infty$, $G_s^{-1}\exists$)

$\left.\frac{dG_s}{ds}\right|_{s=0} = X(G_s)$ $\qquad DG_s = \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j}(q,t)\right)$

$q'(t) = G_s(q,t)$

$\dot{q}'(t) = DG_s(q,t)\dot{q} + \frac{\partial G_s}{\partial t}$

- $L\left(G_s(q), DG_s\,\dot{q} + \frac{\partial G_s}{\partial t}, t\right) = L(q,\dot{q},t)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} X_j(q,t)\right) = 0}$$

Bsp. zykl. Variable $\varphi \to \varphi + s$

$G_s: (\varphi, \psi) \to (\varphi + s, \psi)$

$X = (1, 0)$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \cdot 1 = \text{const}$

Hamilton Funktion

$$H(p,q,t) = \sum_{j=1}^{f} p_j \dot{q}_j - L(q,\dot{q},t)$$

Hamiltonfunktion

$L \rightarrow H$ Legendre Trafo

Hamilton-sche Bew.-gln.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$J\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{2f}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$J\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Γ Phasenraum

$$\Gamma = \left\{ x \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \right\}$$

Phasenraum

allg. Form v. Difgl. 1.Ordn.

$\dot{x} = F(x,t)$ F Vektorfeld

allgem. Form v. Difgl. 1.Ordn.

Fluss Strömung

$x(t) = \phi_{t,s}(x_0)$

$x(t)$ abh. von $x_0 = x(s)$

$\phi_{t,s}(x_0)$ von F erzeugter Fluss (in Schw. Propagator)

Eigenschaften von $\phi(t,s)$

$\frac{d}{dt}\phi_{t,s} = F \circ \phi_{t,s}$

$\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r} = \phi_{t,r}$

F unabh. von t

$\Rightarrow \phi_{t,s} = \psi_{t-s}$

$\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$

Situation in Hamilton Mechanik

$F(x,t) = -J \frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$

$(J^2 = -1\!\!1)$

Situation in Hamilton-Mechanik

F Gradientenfeld

spez. lineares System

spez.
lineare (harmon.) Systeme:

$$H(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) \quad A \text{ symm.}$$

$$F(x) = -J\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot{x} = -JAx$$

$$\Rightarrow x = \Phi_{t,s}(x) = e^{-JA(t-s)}x_0$$

$$P(t) := e^{-JA(t-s)} \Rightarrow x(t) = P(t)x_0$$

$$P(t)^T J P(t) = J$$

symplektisch

M symplektisch $\Leftrightarrow M^TJM = J$

Sp(t, R)

$Sp(t, \mathbb{R})$
symplektische Gruppe

denn sympl. Mat. bilden Gruppe.

sympl. Matrizen
kommutieren.
verm. gilt f. t-Systeme
→ Liouville

Theorem v. Liouville

$(\exists H)$

$\phi_{t,s}$ lokal a. $J\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}$ erzeugt

$\Leftrightarrow (\forall t,s)(\forall x \text{ in Def. a. } \phi_{t,s})\ D\phi_{t,s}(x)$ sympl.

kanon. Trafo

$\psi : \Gamma \to \Gamma$ kanonisch $\Leftrightarrow$

$(D\psi)(x) \in Sp(f,\mathbb{R})\ \forall x$

Hamiltonsch

Vektorfeld F Hamilton'sch $\Leftrightarrow$

$F = -J\frac{\partial k}{\partial x}$ für Funkt. k auf Γ

Invarianz bzg. d. kanon. Trafo d. Phasenraums

ψ_t kanon. Koord.trafo von Γ

$\phi_{t,s}$ Fluss zu $J\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}$

$x(t) = \phi_{t,s}(x) \qquad x = x(s)$

$x(t) = \psi_t(y(t))$

$\Rightarrow$ $y(t)$ erfüllt hamilt. B.G.

$\exists k \quad J\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial y}$

Poisson Klammern

h, g glatte Funkt auf Γ

$$\{h, g\}(x) = \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}\right](x)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right](x)$$

Eigenschaft. d. Poissonklamm.

$$\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0$$
$$\{p_i,q_j\} = \delta_{ij} \quad \forall i,j$$
$$\{x_i,x_j\} = J_{ij} \quad \forall i,j$$
$$\{h,g\} = -\{g,h\}$$
$$\{\{h_1,h_2\}h_3\} + \{\{h_3 h_1\}h_2\} + \{\{h_2 h_3\}h_1\} = 0$$ Jakobi Id.

Kriter. f. kanon. Abb.

$x = \psi(y)$ ψ kan. Trafo $\Longleftrightarrow$
$$\{h\circ\psi, g\circ\psi\}(y) = \{h,g\}(\psi(y)) \ \forall h,g$$

($\{x_i,x_j\} = \{y_i,y_j\} \quad \forall i,j.$
$\Rightarrow \psi$ kanon.)

Wiederkehr eigenschaft

$x\in\Omega$ Wiederkehreigenschaft falls $\phi_t(x)$ Ω immer wieder besucht $(t\to\infty)$

Poincaré Zermelo

Fast jedes $x\in\Omega$ hat Wiederkehreigenschaft

$\tilde{\Gamma}$
$\mathcal{H}$
$\dot{\xi} = -J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}$

Erweiterung d. Phasenraums

$t = q_0 \qquad E = -p_0$

$\tilde{\Gamma} = \{(q_0, p_0 ; q, p)\}$

$\mathcal{H}(q_0, p_0, q_1, p_1 \ldots) = H(q, p\; t = q_0) + p_0$

Kurvenparam. λ "künstl. Zeit"

$$\dot{\xi} = -J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}$$

Involution

$H_1, \ldots, H_f$ in Involution
$\Longleftrightarrow \{H_i, H_j\} = 0 \quad \forall i,j$

Liouville
Jacobi
Arnold...

$H_1 \ldots H_f$ in Involution
$\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}, \ldots \frac{\partial H_f}{\partial x} \right)$ f linear unabh. Vektorfelder
$\Rightarrow \exists$ lokal f Funkt. $G_1 \ldots G_f$
so d. $(q,p) \rightarrow (G_1 \ldots G_f, H_1 \ldots H_f)$
kanonisch ist. d.h.
$\{G_i, G_j\} = \{H_i, H_j\} = 0$
$\{G_i, H_j\} = -\delta_{ij} \quad \forall i,j$

lokal integrabel

$H = H_1, H_2 \dots H_f$ in Involut.

$\frac{\partial H_1}{\partial p} \dots \frac{\partial H_f}{\partial p}$ lin. unabh.

lokal integrables System

Autonomes mechan. System mit Hamilt. Funktion H

$\dot{H}_i = \{H, H_i\} = 0$ auton. System

$\dot{G}_1 = \{H, G_1\} = 1$

$\dot{G}_i = \{H, G_i\} = 0 \quad \forall i = 2 \dots f$

$H_i(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f) = h_i$

$G_1(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f) = g_1 + t$

$G_i(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f) = g_i \quad \forall i \geq 2$

$\psi^{-1}(G(t), H)$ ist Lösung

prakt. Durchführung der Integration

1° $H_i(q_1, \dots, q_f, p_1 \dots p_f)$
auflösen nach $p_1 \dots p_f$

$p_j = F_j(q_1 \dots q_f, H_1 \dots H_f)$

$\exists$ wenn $\frac{\partial H}{\partial p}$ regulär

2° $S(q, H) = \int_{q_0}^{q} \sum_{k=1}^{f} F_k(q', H)\, dq'_k$

erzeugende Funkt.

3° $G_j(q, H) = \int_{q_0}^{q} \frac{\partial S}{\partial H_j}(q_1 \dots q_f, H_1 \dots H_f)$

damit $(q, p) \xrightarrow{\psi} (G, H)$ konstr.

4° $G_j(q, H) = \frac{\partial S}{\partial H_j}(q, H)$
auflösen nach $q_1 \dots q_f$

mögl. da $\frac{\partial^2 S}{\partial H_j \partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial H_j}$ regul.

Bsp. einer prakt. Integration (2 Körperproblem

$f = 1$

$$(q,p) \xrightarrow{4} (G,H) \qquad H$$

$$\dot{G} = \{H,G\} = 1 \Rightarrow G = t_0 + t$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

1° $\Rightarrow p = \sqrt{2m(H - U(q))}$

2° $S(q,H) = \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2m(H - U(q'))}$

erzeug. Funkt.

3° $G = \frac{\partial S}{\partial H} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{H - U(q')}}$

$$= t(q,H) - t(q_0,H)$$

4° auflösen nach q

Hamilton-Jakobi Methode zum Ab-Separieren von Variabeln

$$H\left(q_1 \ldots q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E$$

Hamilt. Jakobi Gln.

problem separierbar, wenn H.J. Gln. auf Form

$$F\left(q_1 \ldots q_f, \varphi_f\left(q_f, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right), \frac{\partial S}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S}{\partial q_{f-1}}\right) = 0$$

$$\varphi_f\left(q_f, \frac{\partial S_f}{\partial q_f}\right) = H_f \longrightarrow S_f$$

Problem vollst. separierbar, wenn Fortsetz. in gleiche Weise möglich.

Satz von Arnold

$\{H_i, H_j\} = 0 \quad \forall i,j \leq f$

$M_{\underline{H}} = \{(\underline{q},\underline{p}) : H_i(\underline{q},\underline{p}) = h_i \; (\forall i)\}$

$(\dim. f)$

$\nabla H_1, \ldots, \nabla H_f$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ 1. M_H glatte Mannigfall.
M_H inv. durch v. H erz. Fluss $H = F(H_1, \ldots, H_f)$

2. $M_{\underline{H}}$ komp. $\Rightarrow$
$M_{\underline{H}}$ diffeom. $\mathbb{T}^f$
$\mathbb{T}^f = \{(\varphi_1, \ldots \varphi_f) \; 0 \leq \varphi_j < 2\pi\}$

3. ϕ_t beschr. quasi-period. Beweg. $\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega_k$
$\omega_k = \omega_k(h_1, \ldots, h_f$

4. Beweg. gl. durch Quadr. lösbar

Analysis

Fourier-trafo

Fouriertrafo von $f(x)$
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Fixpunkt $e^{-x^2/2}$

$$\widehat{e^{-x^2/2}}(k) = e^{-k^2/2}$$
Gauss'sche Funkt. Fixpunkt.

VR $L(\mathbb{R}^1)$

$L(\mathbb{R}^1) = \{ f(x) \mid f(x) \in \mathbb{C} \wedge$
$\wedge$ f Riemann integr.b. $\wedge \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$

Norm auf L-

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{Norm}$$

$C_0(\mathbb{R}^1)$

$C_0(\mathbb{R}^1) = \{ f(x) \mid f$ stet. $\wedge$
$\wedge \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \}$

Riemann Lebesgue Lemma

$\wedge : L(\mathbb{R}^1) \to C_0(\mathbb{R}^1)$
injekt. lin Abb.
($\hat{f}$ sog. glm. stetig)

triviale Folgerungen

(i) $\sup_{k\in\mathbb{R}^1} |\hat f(k)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|$

(ii) $f,g\in L(\mathbb{R}^1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat f(k)\, g(k)\, dk$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, \hat g(k)\, dk$

(iii) $\hat{\bar f}(k) = \overline{\hat f}(-k)$

(iv) $f_y(x) := f(x-y) \Rightarrow \hat f_y = e^{-iky}\hat f(k)$

(v) $\widehat{f(\lambda x)}(k) = \frac{1}{\lambda}\hat f\left(\frac{k}{\lambda}\right) \quad \lambda \neq 0$

$f^\vee$
f umkehrt
Umkehr F.Trafo

$$f^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{ikx}\, dk$$

Umkehrsatz
$\hat f^\vee = f$

$$\hat f^\vee = f \Leftarrow \forall f, \hat f \in L(\mathbb{R}^1)$$

Koroll-ar

$$f, \hat f \in L(\mathbb{R}^1) \Rightarrow \hat{\hat f}(\gamma) = f(-\gamma)$$

EW von Λ

$$\lambda \text{ EW von } \Lambda \Rightarrow \lambda = 1, -1, i, -i$$

Faltung

$f, g \in L(\mathbb{R}^1)$

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$\|f*g\|$ wohnt in $L(\mathbb{R}^1)$

$f * g \in L(\mathbb{R}^1)$

$$\|f*g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

$f, g, f*g \in L(\mathbb{R}^1)$

$$\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Schwarz Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) = \{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1) \mid (\forall\, m, n \geq 0)\ \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} f \right| \to 0 \quad x \to \pm\infty \}$$

Schwarz-Raum

$\frac{d}{dk} \hat{f}(k)$, $\widehat{\frac{d}{dx} f}(k)$

- $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$
- $\widehat{\frac{d}{dx} f}(k) = ik\, \hat{f}(k)$
- $\frac{d}{dk} \hat{f}(k) = \widehat{\left(-ix f(x)\right)}(k)$

Differential operatoren A, A^*, H

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right)$$

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x \right)$$

$$H = A^* A = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right)$$

Hermitische Funktionen

$$h_0 = \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}} \; ; \; h_n = \frac{(A^*)^n h_0}{\sqrt{n!}} = \frac{A^* h_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Skalarprodukt

$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$$
$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{g} \, dx$$

Eigenfunktionen d. Fouriertrafo

(i) $\widehat{Af} = i A \hat{f}$

$\widehat{A^* f} = -i A^* \hat{f}$

$\widehat{Hf} = H \hat{f}$

(ii) $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$

(iii) $A h_n = n^{1/2} h_{n-1}$

$A^* h_n = (n+1)^{1/2} h_{n+1}$

$H h_n = n h_n$

(iv) $\hat{h}_n = (-i)^n h_n \quad n \geq 0$

$f \equiv 0$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \quad \langle f, h_n \rangle = 0$

$\Longrightarrow f \equiv 0$

Hermitsche Entwicklung von f

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \quad f = \sum_{n \geq 0} \langle f, h_n \rangle h_n$

$\hat{f}$

$\hat{f} = \sum_{n \geq 0} \langle f, h_n \rangle (-i)^n h_n$

Skalarprod. auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu Norm

$$\boxed{\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \langle f, f\rangle}$$

Länge a. Funkt. aus Koord.

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle f, h_n\rangle|^2$$

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

allg. $\langle f, g\rangle = \sum_{n \geq 0} \langle f, h_n\rangle \overline{\langle g, h_n\rangle}$

^ ist unitär

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$$

^ ist unitär

$i\frac{d}{dx}$

$i\frac{d}{dx}$ selbstadj. Operator auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Diagon. von $i\frac{d}{dx}$

$$(\wedge \circ i\frac{d}{dx} \circ \vee) f(k) = k \cdot f(k)$$

$\wedge$ Trafomatrix zu die $i\frac{d}{dx}$ diagonalisiert!

Heisenberg Ungleichung

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 \, dk \geq \frac{1}{4} \|f\|_2^4$$

Wärme leitungs gl.

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$$

Cauchy Problem

parab. part. Difgl

Lös. d. Wärme leit.gl

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} f(y)\,dy$$

Wellen gleich.

$u_{tt} = u_{xx}$ Wellengl

hyperb. Part Difgl

$u(x,0) = f(x)$

$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x)$

Lösung d. Difgl. $-y'' + q(x)y = \lambda y$

$y'' + q(x)y = \lambda y \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

Potenzreihenansatz

$$\left\{ \boxed{\begin{array}{l} y_1(x,\lambda,q) = \sum C_n(x,\lambda,q) \\ C_n(x,\lambda,\mathfrak{z} q) = \mathfrak{z}^n C_n(x,\lambda,q) \end{array}} \right\}$$

$$y_1(x,\lambda,q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} [s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)] \, dt$$

$$c_\lambda(x) = \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$s_\lambda(x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} x)}{\sqrt{\lambda}}$$

$y'' + q(x)y = \lambda y \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} [s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)]$$

Eigenwerte v. $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q$ reell

q stetige reelle Fkt v. $0 \le x \le 1$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von $L = \frac{-d^2}{dx^2} + q$ reell

d.h. $-y'' + qy = \lambda y \quad y(0) = y(1) = 0$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\frac{d}{dx} y_2(1,\lambda,1) \neq 0$

$y_2(1,\lambda,q) = 0 \quad \lambda$ EW

$$\Rightarrow 0 < \int_0^1 y_2^2(x,\lambda,q)\,dx = \frac{d}{d\lambda} y_2(1,\lambda,q) \cdot y_2'(1,\lambda,q)$$

Richtungsableit.

$$d_x f(y) = \frac{d}{d\varepsilon} f(x + \varepsilon y)\Big|_{\varepsilon = 0}$$

$$= \langle y, \frac{d}{dx} f \rangle$$

Verhal. auf nächsten Seite

$q \in C[0,1]$

$\mu_1(q) < \mu_2(q) < \ldots \nearrow \ldots$

Nst von $y_2(1,\lambda,q)$ Eigenwerte

$$g_2(x,q) = \frac{y_2(x,\mu_n(q),q)}{\sqrt{\dot{y}_2(1,\mu_n(q),q)\, y_2'(1,\mu_n(q),q)}}$$

Eigenfunkt.

$$\int_0^1 v g_n^2 dx = d_q \mu_n(v)$$

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + \int_0^1 q\,dx + r_n$$

$$\sum r_n^2 < \infty$$

Verallgem. von Fourierreih.

g_n $n \geq 1$ orthog. Basis
$\forall f$ f' stetig $f(0) = f(1) = 0$

$f = \sum_{n \geq 1} \langle f, g_n \rangle g_n$

n+1 NST

$g_n(x, q)$ hat genau $n+1$ NST in $[0,1]$

n dim Randomwalk Anwendung d. Fouriertheorie

n-dim. random walk
$\sigma_n \in \mathbb{Z}^d$ $|\sigma_n| = 1$ n-ter Schritt
$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_n$ Position
$P(\sigma_n = \pm e_i) = \frac{1}{2d}$ $i = 1 \ldots d$

$$P(S_n = k) = \int_{T^d} f_d^{\,n}(x)\, e^{-2\pi i k x}\, dx$$

$$f_d = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \cos 2\pi x_i$$

$B(\sigma)$ totale # Besuche

$$E(B) = \begin{cases} \infty & d = 2 \\ < \infty & d \geq 3 \end{cases}$$

$P(S_n = 0$ unendl. viele $n) = 1$ $(d = 2)$
$P(\lim_{n \to \infty} |S_n| = \infty) = 1$ $d \geq 3$

∃! Haarsches Integral

G rel. komp. Gruppe

∃! Haarsches Integral auf G

- $I(L(a)f) = I(R(a)f) = I(J(a)f) = I(f)$ $(\forall a \in G)$
- $I(f) \geq 0$ $\forall f \geq 0)$
- $f \geq 0 \wedge I(f) = 0 \Rightarrow f = 0$

inneres Produkt $\langle f,g \rangle$ auf $C(G)$

inneres Produkt auf $C(G)$

$\langle f,g \rangle = I(f \cdot \bar{g}) = \int_G f(x)\bar{g}(x)\,dx$

$L^2(G)$ Vervollst. von $C(G)$

$L^2(G)$ Vervollst. von $C(G)$

bez. Norm $\|f\|_2 = \langle f,f \rangle^{1/2}$

$U(n)$ komp. topol. Gruppe

$U(n) = \{ g \in Gl(\mathbb{C},n) \mid g^* = g^{-1} \}$

$U(n)$ kompakte topol. Gruppe

endl. dim. unitäre Darstell. von G

G topol. Gruppe

$\rho : G \to U(n)$ stetiger Homomorph.

ρ ist eine endl. dim. unitäre Darstell. von G $\dim \rho = n$

invariante Unterräume

$\rho : G \to U(n)$ Darstellung

$U \subseteq \mathbb{C}^n$ URaum invariant $\Leftrightarrow$

$\rho(a)V \subseteq V$ $(\forall a \in G$

insbes. $\{0\}$, $\mathbb{C}^n$ invar. Unterräume irreduz. Darstell.

Darst. ρ irreduzibel $\Leftrightarrow$ ρ hat ausser $\{0\}$ und $\mathbb{C}^n$ keine invar. Unterräume

Gruppen darst.

$G \xrightarrow{\varrho} Gl_n(\mathbb{C})$ Homom.
Darstellung von G

topol. Gruppe

topol. Gruppe G ist eine Gruppe mit einer Topologie, so dass
$(a,b) \in G \times G \mapsto a \cdot b \in G$
$a \in G \mapsto a^{-1} \in G$
stetig sind

komp. Gruppe

kompakte Gruppe $\Leftrightarrow$ komp. topol. Gruppe

Bsp. v. topol. gr.

$\mathbb{R}^n$ nicht kompakte gr
T^l kompakte gr.
$SU(2)$ komp. gr.
$Gl(n,\mathbb{C})$ nicht komp. gr.

$C(G)$

$C(G)$ Menge aller komplexen stetigen Funkt. auf G
G komp. Gruppe

$\|f\|_\infty$

$\forall f \in C(G) \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)| < \infty$

$C(G)$ Banach raum

$C(G)$ Banach Raum

$C_\mathbb{R}(G)$

$C_\mathbb{R}(G) \subset C(G)$ UR d. reellen Funkt.

L(a)
R(a)
J

$(\forall a \in G)(\forall f \in C(G))$

$L(a) f(x) = f(a^{-1}x)$

$R(a) f(x) = f(x \cdot a)$

$J f(x) = f(\frac{1}{x}) = f(x^{-1})$

L(a)
R(a)
J linear
Abbild.

a fest $L(a), R(a), J$
lineare Abb.
$C(G) \to C(G)$

L(a)
R(a)
J isom.
lin. Abb.

$\| L(a)(f) \|_\infty = \| f \|_\infty$

$\| R(a) f \|_\infty = \| f \|_\infty$

$\| J f \|_\infty = \| f \|_\infty$

isom. lin Abb

L(ab)
= L(a)·L(b)

$L(ab) f(x) = L(a) \cdot L(b) f(x)$

$R(ab) f(x) = R(a) R(b) f(x)$

$J R(a) f(x) = R(a) J f(x)$

Haarsches
Integral

G komp. Gr.

I Haarsches Integral

- I stetige lin Abb $C(G) \to \mathbb{C}$
- $I(L(a) f) = I(f) \quad \forall a \in G$
- $I(\mathbb{1}) = 1$
- $f, f_n \in C(G)$

  $\| f_n - f \|_\infty \to 0 \Rightarrow I(f_n) \to I(f)$

Algebra

Gruppe

G Menge

$\cdot : G \times G \to G$ Abbildung

$(G, \cdot)$ Gruppe $:\Longleftrightarrow$

$I \ (\forall a,b,c \in G) \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$II \ (\exists e \in G)(\forall a \in G) \ e \cdot a = a = a \cdot e$

$III \ (\forall a \in G)(\exists b \in G) \ a \cdot b = e = b \cdot a$

triv. Eigenschaft.

(1) $(\exists e' \in G) e' \cdot a = a \ (\forall a \in G) \Rightarrow e' = e$

(2) $(\exists b' \in G)(\forall a \in G) \ b' \cdot a = e \Rightarrow b' = b$

(3) $(\forall a,b \in G)(\exists! x,y \in G) \ a \cdot x = b \wedge y \cdot a = b$

Regularität $(3) \to II, III$

(4) $e^{-1} = e$

(5) $(a^{-1})^{-1} = a$

(6) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(7) Klammern weglassen

(8) $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$ $(a^k)^l = a^{k \cdot l}$

abelsche Gruppe

$(G, \cdot)$ Gruppe

$(\forall a,b \in G) \ a \cdot b = b \cdot a \quad \Longleftrightarrow :$

$(G, \cdot)$ abelsche Gruppe

Bsp. v. lin. Gruppen

$GL(n,K)$	$\det \neq 0$	general linear group
$SL(n,K)$	$\det = 1$	special linear group
$O(n)$	orthog. gr. über $\mathbb{R}$	
$SO(n)$	$\det = 1$	special orthogonal gr.
$U(n)$	unit. gr. über $\mathbb{C}$	
$SU(n)$	$\det = 1$	special unitary gr.

Beispiele d. Gruppen

- $(K,+)$
- $(K\setminus\{0\},\cdot)$
- $(\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\},\cdot)$
- $(\{f \mid f: M\to M \text{ bij}\},\circ)$
  Permutations oder Symm. Group
- $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- Gruppe d. zu m teilerfremden Restklassen
- Diedergruppe D_n
  Symmetriegr. d. reg. n-Ecks
- Symmetriegruppe v. Polyedern
- endl. erzeugte Gruppen

Homomorph.

$(G,\cdot)$, $(H,\cdot)$
$\varphi: G\to H$ Homomorph $\Leftrightarrow$
$\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ $\forall x,y\in G$

$\varphi(e_H)$ $\varphi(a^{-1})$

$e_H = \varphi(e_G)$
$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Bsp. Homom.

- $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+)$ log
- $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}_m,+)$ $a+m\mathbb{Z}$
- $(Gl(n,\mathbb{R}),\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ det

$\varphi\circ\psi$

$\varphi: G\to H$ $\psi: H\to K$ HM.
$\Rightarrow \varphi\circ\psi$ $G\to K$ HM.

Isomorphismus

$\varphi: G \to H$ HM
φ Isomorph. $\Longleftrightarrow$
$(\exists \psi)$ $\psi: H \to G$ $\psi \circ \varphi = id_G$
$\varphi \circ \psi = id_H$
$\varphi: G \xrightarrow{\cong} H$ $G \cong H$

φ bij. HM $\Rightarrow$ φ Isom.

$\varphi: G \to H$ HM
φ Isom. $\Leftrightarrow$ φ bij.

φ_x Autom.

$\varphi_x(a) = x a x^{-1}$
$\varphi_x: G \xrightarrow{\cong} G$ Isom.
von x ind. Automorphismus

Endom. Autom.

$\varphi: G \to G$ Hm : Endomorphism.
$\varphi: G \to G$ Im : Automorphism.

Untergruppe

$(G, \cdot)$
$U \subset G$ $U \neq \emptyset$ Untergruppe v. G $\Leftrightarrow$
$(\forall a, b \in U)$ $a^{-1}, a \cdot b \in U$

$a^{-1}b \in U$

$U \neq \emptyset$ $U \subset G$ Untergr. $\Leftrightarrow$
$\forall a, b \in U$ $a^{-1} b \in U$

Untergr. von $\mathbb{Z}$

$(U, +) \leq (\mathbb{Z}, +) \Rightarrow (U, +) = (m\mathbb{Z}, +)$

erzeugte zykl. Untergruppe

$(G,\cdot)$ $a \in G$

$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leq G$

a erzeug. Element der von a in G erz. zykl. Untergruppe

Modelle d. zykl. Gruppen

H zyklisch $\Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_m$

$\mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z}$ unendl. zyklisch

Untergr. v. $\mathbb{Z}$

U UG v. $\mathbb{Z} \Rightarrow U = \{0\} \vee U \cong \mathbb{Z}$

Ordnung eines erzeug. Elem.

$a \in G$ $a^m = e$ $m = \min\{|n| \mid a^n = e\}$

m Ordnung von a $m = |a|$

$\nexists$ min $\Rightarrow$ m von unendl. Ordn.

$|a| = |\langle a \rangle|$

Bild u. Urbild v. UG UG

$\varphi: G \to H$ Homom.

U UG v. G V UG v. H

$\Rightarrow \varphi(U)$ UG von H Bild

$\varphi^{-1}(V)$ UG von G Urbild

Kern u. Bild

$\varphi: G \to H$ Homom.

$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{e_H\})$ Kern v. φ

$\varphi: G \to H$ Homom.

$\operatorname{Im} \varphi = \varphi G$ Bild v. φ

ker ↔ inj, im ↔ sur

$\varphi : G \to H$ Homom.

φ inj $\Leftrightarrow$ $\ker \varphi = \{e_G\}$
φ surj $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} \varphi = H$

* Links- Rechts- nebenklasse

U UG v. G
$xU = \{xu \mid u \in U\}$ Linksnebenklasse
$Ux = \{ux \mid u \in U\}$ Rechtsnebenklasse

* Zerl. in Linksnebenkl.

$G = \bigcup_{r \in R} rU$ Zerlegung in Links bzw rechts nebenklassen
R Repräsentantensystem

* Index

$|R| = |G : U|$ (L) Index v. U in G (R)

* Lagrange

$|G| = |U|\,|G : U|$

* Ord prim zyklisch

Jede Gruppe v. Primzahlordnung ist zyklisch

* Produkt direktes

A, B Teilmeng. von G
$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$

* AB Ugruppe |AB| Dedekind

- AB Untergruppe v. $G \Leftrightarrow AB = BA$
- $|AB| = \dfrac{|A|\,|B|}{|A \cap B|}$
- $A \le C \le G \wedge C \subset AB \Rightarrow AB \cap C = A(B \cap C)$
(Dedekind Identität)

$(|G:A|,|G:B|)=1$ $G=AB$

A, B Untergr. G mit endl. Index

a) $|G:A\cap B| \leq |G:A|\cdot|G:B|$

b) $(|G:A|,|G:B|)=1 \Rightarrow$

$|G:A\cap B| = |G:A|\cdot|G:B|$

$\Rightarrow AB = G$

Trafo mit a

innere Automorphismus

$a, g \in (G,\cdot)$ $\quad G \mapsto G^a$

$g^a = a^{-1} g a$

Transformation mit a

Konj. v. M in G

$M \subseteq G$

$M^g = \{m^g \mid m \in M\}$

Konjug. von M in G

Normalteiler

$(N,\cdot) < (G,\cdot)$ $\quad N \trianglelefteq G \Leftrightarrow$

N Normalteiler v. $G \Leftrightarrow N^g \subseteq N \ \forall g \in G$

G einfach

$\langle E,\cdot\rangle, \langle G,\cdot\rangle$ einzige Normalteiler $\Leftrightarrow G$ einfach

Aut(G)

Aut(G) Menge d. Autom. bilden Gruppe

Inn G

$\phi: G \to \text{Aut}\, G$

$x \mapsto \varphi_x : G \to G$

$\text{im}\,\phi = \text{Inn}\, G \leq \text{Aut}\, G$

ZG

$Z G = \{x \in G \mid \forall a \in G \ \ xa = ax\}$
Zentrum d. Gruppe G

unter x konj. Untergr

xUx^{-1} zu U unter x konj. Untergruppe

Normal teiler

U Normalteiler $\Leftrightarrow$
$U = xUx^{-1} \ \ \forall x \in G \Rightarrow U \triangleleft G$

abelsche Untergr. ZG

G abelsch $\Rightarrow$ (U UG G $\Rightarrow U \triangleleft G$
$ZG \subset G \Rightarrow ZG \triangleleft G$

ker φ ⊲ G

$\varphi : G \to H$ Homomorph.
$\ker \varphi \triangleleft G$

Isouibaki Aussagen

Aequiv. Aussagen für UG U
(i) $xUx^{-1} \subseteq U$
(ii) $xUx^{-1} = U$ $\quad U \triangleleft G$
(iii) $xU \subseteq Ux$
(iv) $xU = Ux$

Bed für Multipl. zierbarkeit d. Nebenklassen

U UG von G
$U \triangleleft G \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x_1U = x_2U \\ y_1U = y_2U \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1y_1U = x_2y_2U$

Quotientengruppe von G nach N

$N \lhd G$

$G/_N = (\{xN : x \in G\}, \cdot)$

$\cdot : (xN)(yN) = xyN$

Homomorph. $G \to G/N$

$\exists$ Homomorph. $\pi : G \to G/N$

Projektion $\quad \pi x = xN$

$\ker \pi = N$

Kommutator(gruppe)

$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ Kommutator

Kommutatorgruppe

$G' = \langle \{ [A,B] \mid A,B \in G \} \rangle$

Kommutatorgruppe

- G' NT von G
- $G' = e \Leftrightarrow G$ abelsch
- G/G' abelsch
- $\varphi : G \to A$ abelsch
  $G' \subseteq \ker \varphi$

φ Faktorisiert über G/k

$\varphi : G \to H$

$k \lhd G \wedge k \subseteq \ker \varphi$

$\varphi^* \; G/_k \to H \qquad$ von φ u. k induz. Abb.

$\varphi = \varphi^* \circ \pi$

φ Faktorisiert über G/k

$\ker \varphi_* = e \quad$ für $k = \ker \varphi$

1. Homom. Satz

$\varphi : G \to H$ homomorph
$\varphi_* : G/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi$

2. Isom. Satz

$N \trianglelefteq G \quad U \overset{UG}{\leq} G$
$\pi : G \to G/N$ induz. Homom. $\quad \pi' = \pi|U$
$\pi'_* : U/U\cap N \xrightarrow{\sim} UN/N$
$\quad u(U\cap N) \mapsto uN$

3. Isom. Satz

$M \trianglelefteq G, N \trianglelefteq G \quad M \supseteq N$
$\sigma_* : G/M \cong G/N/M/N$

Darst. von Perm.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \sigma_1 & \dots & & \sigma(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & \dots & & i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i_v \end{pmatrix}$

k-Zyklen

k Zyklus $(i_1 \dots i_k)$
$= \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{k-1} & i_k \dots & i_m \\ i_2 \dots i_k & i_1 \dots & i_m \end{pmatrix}$

2 Zyklen Transposit.

Perm. → Zykl. → Transp.

- jede Perm. eine Prod. v. Zyklen
- jeder Zyklus ist Prod v. Transp.

Konjug. in $\mathfrak{I}_n$

$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ entsteht aus σ durch Anwend. von τ auf Zyklen von σ

Typus d. Permut.

$\sigma \in \mathfrak{I}_m \quad q_i$ # Zyklen der Länge i in der Zerleg. von σ
$\sum_{i=1}^{m} i \cdot q_i = m$
$(q_1 \dots q_m)$ Typus

Zyklentypen und mächt. d. entspr. Klassen

$\exists\ p(m)$ Zyklentypen von $\mathfrak{S}_m$

$$|\{(q_1 \dots q_m)\}| = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{m} q_i!\, i^{q_i}}$$

sign

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{|\{(i,j)\ i<j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)\}|}$$

sign $\mathfrak{S}_n \to C_2$ Homom.

$\operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\sigma' = \operatorname{sign} \sigma\cdot\sigma'$
sign : $\mathfrak{S}_n \to C_2$ Homom.

$\prod (i^\sigma - j^\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma\,(i-j)$

$\mathfrak{A}_n$

$\ker(\operatorname{sign}) =: \mathfrak{A}_n$
altern. Gruppe v. n Elem.
(gerade Perm.)

einfach

G einfach $\Leftrightarrow$
G hat nur Normalteile E, G

$\mathfrak{S}(\Omega)$

$\mathfrak{S}(\Omega)$ ~~Menge~~ Gruppe d. bij. Abb. von Ω auf sich

Permutationsdarstellung

G operiert auf Ω $\Leftrightarrow$
$\exists\ \phi\ G \to \mathfrak{S}(\Omega)$ Homom.
$(\forall\, g,h \in G)\ \phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h \qquad \phi_g = \phi(g)$

ϕ vorgeg. Permutationsdarstellung

$\ker \phi = \{e\}$ G heisst Permutationsgruppe
G operiert treu
effektiv

Reimul. Darst. von $SL(2,\mathbb{R})$

H obere Halbebene

$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$

$SL(2,\mathbb{R})$ operiert auf H

$f: z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

$\ker \phi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

kompl. Darst.

$\rho: G \to Gl(n, \mathbb{C})$ heisst eine komplexe Darstellung der Dim. n

Stabilisator

$a \in \Omega$

$H_a = \{ x \in G \mid \phi_x(a) = a \}$

Stabilisator oder Isotropie UG von a

Orbit

$a, b \in \Omega$

$a \sim b \iff (\exists x \in G)\ \phi_x(a) = b$

Äq klassen: Bahnkurven

Orbit

transitiv

Operation von G auf Ω transitiv, Ω selbst ist Bahnkurve

Isomorphie d. Isotropie UG wenn a,b in gl. Bahnkurve

$a \sim b$

$\Rightarrow e_x : H_a \xrightarrow{\sim} H_b$ innere Autom.

also $y \to x y x^{-1}$ bildet H_a in H_b ab

Äq klasse d. Bahnkurven ⇔ Äq klasse d. L-Nebenklassen

Punkte d. Bahnkurve in c entsprechen bij. den L-Nebenklassen v. H_c.

G endl. $\Rightarrow$ # Elem. in Bahnkurve $= [G : H_c]$

Cayley

Jede Gruppe G ist isomorph zu Untergruppe $J(G)$

Zentrum Klassen-gleich.

G endl.

$|G| = |Z(G)| + h_1 + \dots + h_m \qquad h_i > 1, \quad h_i \mid |G|$

p-Gruppe

P p-Gruppe (p prim)

$|P| = p^n \quad n \geq 0$

p-Sylow Untergr.

p prim $\quad |G| = p^n \cdot q \quad p \nmid q$

$n \geq 0 \quad$ ~~G p-Sylowgrupp~~

$P \leq G \quad |P| = p^n \quad P$ heisst

P Sylowuntergruppe

1. Satz v. Sylow

1. Satz v. Sylow

$|G| = p^n q \Rightarrow \exists P \overset{UG}{\leq} G \quad |P| = p^n$

2. Satz v. Sylow

P, Q p-Sylow UG von G

$\Rightarrow \exists x \in G \quad Q = x^{-1} P x$

Alle p-Sylow UG von G isomorph

externes direktes Produkt

A,B mult. Gruppen
$G = A \times B$ heisst externes direktes Produkt d. A und B
$G = (\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}, \cdot)$
$(a,b)\cdot(a',b') = (aa', bb')$

internes direktes Produkt

G internes direkt. Produkt ihrer UG A, B wenn
$(\exists \varphi : G \to A \times B)$ $\varphi|_A : A \cong H = \{(a, e_B)\}$
$\varphi|_B : B \cong K = \{(e_A, b)\}$

internes dir. Produkt Kriterium

G internes Prod. d. UG A u. B
$\iff$ (1) $A \cdot B = G$
(2) $A \cap B = \{e\}$
(3) $A, B \trianglelefteq G$

intern dir. Prod. Kriterium

G intern. Prod. d. UG A u B
$\iff (\exists!\, a \in A)(\exists!\, b \in B)\ ab = b\cdot a \to$

Ring

Ring R: abelsche Gruppe (additiv) zus. mit Operat. ·
(1) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ assoz.
(2) $\left.\begin{array}{l} a\cdot(b+c) = ab+ac \\ (a+b)c = ac+bc \end{array}\right\}$ distr.

Ring mit Eins: Elem. $1 \neq 0$ ausgez.
(3) $1\cdot a = a = a \cdot 1 \quad \forall a \in R$

Ring komm.: komm. HG.

Links Nullteiler

$a \in R$ Links Nullteiler
$a \neq 0 \wedge (\exists\, b \neq 0 \in R)\ a \cdot b = 0$

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ Nullt.

$\exists$ Nullteil. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \iff m \neq$ prim

Integritätsbereich

R Ring mit 1, kommutat.
keine Nullteiler $\iff$
R Integritätsber. od. Bereich

In Integritätsber. kürzen mögl.

R Bereich $\forall\, a \in R$ $a \neq 0$
$a \cdot b = ab' \Rightarrow b = b'$

Einheit

R Ring m. 1 $a \in R$ heisst
Einheit in R $\iff$
$\exists\, b \in R$ $a \cdot b = 1 = b \cdot a$

Einheiten

Bsp	$\mathbb{Z}$	± 1
	k	$a \neq 0$
	$M_n(\mathbb{C})$	$Gl_n(\mathbb{C})$
	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$(a,m) = 1$

Gruppe d. Einh.

Einheiten in Ring m. 1 bilden Gruppe

Divisionsring - Schiefkörper

R Ring m. 1
$\forall a \in R \; a \neq 0 \Rightarrow a$ Einheit
$\Rightarrow$ R Divisionsring od. Schiefkörper
zus. kommut. Körper

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ Körper

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ Körper $\Leftrightarrow$ m prim

Zahlkörper

$k \subseteq \mathbb{C}$ Zahlkörper $\Leftrightarrow$
additiv. Gruppe v. k ist endl. dim VR über $\mathbb{Q}$

R[x] Polynomring

$R[x]$ Polynomring in d. Unbestimmten x über R
$\{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = f(x)\}$ $a_i \in R$
$R[x]$ komm. Ring m. 1

$\deg f(x) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0 \quad a_{n+1} = 0$
$\deg(0) = -\infty$

R[[x]] Potenzreihenring

$R[[x]] \supset R[x]$
$\{ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

$R[[x]]$ Potenzreihenring
kommut. Ring mit 1

Ring d. Polyn. mit mehrer. Variabl.

$R[x,y]$ Ring d. Polynome in x,y über R
$R[x,y] = (R[x])[y]$
$R[x_1 \ldots x_n] = R[x_1 \ldots x_{n-1}])[x_n]$

Algebra

Algebra A über Körper k ist ein Ring m. 1 der zugl. VR über k ist und dessen Multiplik. bilinear bez. k ist

Krit. für Bilinearit.

Bilinearität folgt aus
$\lambda \in k$, $a,b \in A$
$(\lambda a) b = \lambda (a \cdot b) = a (\lambda b) = (\lambda a \cdot b)$

Gruppen-algebra kG

G Gruppe k Körper
Gruppenalgebra kG
kG als VR mit Basis $\{e, x, y \dots\}$
$\underset{\text{in } kG}{x \cdot y} = \underset{\text{in } G}{x \cdot y}$

Ring homo-morph.

$\varphi : R \to S$ Ringhomomorphism.
(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
(2) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

Homomorph. von Ringen mit 1

R, S Ringe m. 1
$\varphi : R \to S$ Homomorph v. Ring mit 1
φ Ringhomom.
$\varphi(1_R) = 1_S$

Unter-ring

R Ring U Unterring
(1) $a - b \in U \quad \forall a, b \in U$
(2) $a \cdot b \in U \quad \forall a, b \in U$

L-Ideal / R-Ideal / Ideal

R Ring J L-Ideal von R
(1) J UG von R
(2) $(\forall a \in R)(\forall b \in J)\ a \cdot b \in J$
entspr. Rechtsideal
L u. R ideal : 2 seit. Ideal

Ideale ⊂ UR

Ideale spezielle Unterringe
analog Normalteiler

ker φ Ideal

φ Ringhomom.
ker φ 2 seit. Ideal

R/I

R Ring I Ideal in R
R/I Ring d. Restklassen mod I
addit. Gruppe R/I
prod. in R/I $(a+I)(b+I) = a \cdot b + I$

kan. Proj.

kan. Proj.: $\pi: R \to R/I$
$a \mapsto a + I$
zu jedem 2 seit. Ideal $\exists$ Ringhomomorphism.

R/I hat Einsel. w. $I \neq R$

R Ring m. 1
I Ideal in R $I \trianglelefteq R$ $I \neq R$
$\Rightarrow$ R/I hat Einselement

Isomorphiesatz für Ringe

R, S Ringe
$\varphi : R \to S$ R.Homom.

$\Rightarrow (\exists \varphi^*)\ \varphi^* : R/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi$
$\varphi^*(a + \ker\varphi) = \varphi a$

R Isomorphismus

$\varphi : R \to S$ R Isomorph
1) φ R.Homom.
2) φ Isom. d. addit. Gruppen

Körper k hat nur Ideale k, {0}

k Körper
k, $\{0\}$ einzige Ideale in k

(a)

$(a) = \{ra \mid r \in R\} \subset R$
von a erzeugtes Hauptideal

Hauptidealbereich

Integritätsbereich R
R Hauptidealbereich $\Leftrightarrow$
$(\forall I$ Ideal $\subset R \mid I$ Hauptideal$)$

Bsp: HIB

$\mathbb{Z}$, Körper k
k Körper $k[x]$

k[x] Hauptidealbereich

k Körper $k[x]$ Hauptidealbereich

Bsp

$\mathbb{R}[x,y]$ Integritätsber.
kein Hauptidealber.

$R = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ Gauss'sch Zahlenring

$\mathbb{R}[x] /_{(1+x^2)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$

$R = \mathbb{Z}$ Hauptidealbereich

maximales Ideal

Ein echtes Ideal I $I \neq R$ heisst maximal, wenn aus $I \subseteq J \subseteq R$ stets folgt $J = I \vee J = R$

krit. f. R/I körp.

R Ring komm. mit 1.
I Ideal v. R maximal $\Leftrightarrow$ $R/_I$ körper

Teil'

R kommutat. Ring mit 1
$a | b \Leftrightarrow \exists c \in R \quad b = c \cdot a$
$a \nmid b \Leftrightarrow \neg a | b$

Primelem.

$p \in R$ Primelement $\Leftrightarrow$
(i) p keine Einheit
(ii) $p = a \cdot b \Rightarrow a$ oder b Einheit

faktorieller Ring

Integritätsber. R faktoriell

(i) $(\forall a \in R \setminus a \neq 0)$
$a = \varepsilon p_1 \ldots p_n$ ε Einh
p_i Primelem.

(ii) $a = \varepsilon p_1 \ldots p_n = \delta q_1 \ldots q_m$
$\Rightarrow n = m \wedge \exists \pi \in \mathfrak{S}_m \; p_i = \varepsilon' q_{\pi_i}$

einf. Lemma

R faktoriell $p \in R$ Primelem.
$\Rightarrow p \mid a \cdot b \wedge p \nmid a \Rightarrow p \mid b$

ggT

R Ring $p \in R$ ggT v. a, b (a,b)

(i) $p \mid a \wedge p \mid b$
(ii) $(\exists d \in R) \; d \mid a \wedge d \mid b \Rightarrow d \mid p$

teilerfremd

a, b teilerfremd $\Leftrightarrow (a,b)$ Einh.

ggT ∃! bis auf ε in faktor. Ringen

R faktoriell $a, b \in R$
$\Rightarrow \exists \operatorname{ggT}(a,b)$ und ist eind. bis auf Einheit

$a \mid b \Leftrightarrow (a) \supset (b)$

R Idealintegritätsber.
$a \mid b \Longleftrightarrow (a) \supseteq (b)$

einf. Lemma

R faktorieller Ring $p \in R$
p Primelem.
$\Rightarrow (a \cdot b \in (p) \; a \notin (p) \Rightarrow b \in (p))$

Primideal

$I \subseteq R$ Ideal in R heisst Primideal
$I \neq R$
$\wedge\ ab \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I$

Primideale in faktl. Gruppen Ringen

R faktoriell $p \in R$
(p) Primideal $\Leftrightarrow p = 0 \vee p$ Primideal

∃! ggt in Hauptidealber.

R Hauptidealber.
$(\forall a, b \in R)(\exists$ ggT $(a,b))$ eindeut. bis auf Multiplik. mit Einheit

alle Hauptidealber. faktoriell

R Hauptidealbereich
$\Rightarrow R$ faktoriell

Ringordnung

vgl. Übersicht über Ringe

- Ring
- komm. Ring m. 1
- Integritätsring
- Ring mit GgT
- Faktorieller Ring
- Hauptidealring
- euklid. Ring
- ~~Divisionsring~~
- Körper

euklidische Ring

R Ring Integr. $\Leftrightarrow$

$\exists g : R \to \mathbb{N}$

euklid. Wertfunktion:

1) $g(a \cdot b) = g(a) \cdot g(b)$ } Wertfunktion

2) $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3) $0 < g(a) \leq g(b) \Rightarrow (\exists q)\, g(b - aq) < g(b)$

$\Leftrightarrow$ R euklidische Ring

in Hauptidealkr.: Primideal - maxim. Ideal

R Hauptidealber $(p) \neq 0$

(1) p Primelement

$\Updownarrow$

(2) (p) Primideal

$\Updownarrow$

(3) (p) maximales Ideal

Konstruktion v. Quotientenkörper

R Integritätsbereich

$R' = R \times (R \setminus \{0\})$

$Q = R' / \sim$

$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2$

Äquiv.rel.

Addit. $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$

Multiplit. $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$

Q kleinste Erweiterungskörper

- Q Körper
- $(\exists R^* \subset Q)\ R^* \cong R$
- R Körper $\Rightarrow Q = R$

abspalt. von NST

R komm. Ring m. 1
$f(x) \in R[x]$ Polynom mit $\deg f(x) \geq 1$
$\alpha \in R$ Nullst. v. $f(x) \Leftrightarrow \exists g(x)\ f(x) = (x-\alpha)\cdot g[(x)]$

irreduzibles Polynom

$f(x) \in R[x]$ irreduzibel
(i) $\deg f(x) \geq 1$
(ii) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
$\deg g(x) \geq 1 \Rightarrow \deg h(x) = 0$

höchst. n NST in R

R Integr.ber. $f(x) \in R[x]$
$\deg f(x) = n \geq 1$
$\Rightarrow f(x)$ hat höchst. n Nullst.

primitiv

$f(x) \in R[x]$ primitiv $\Leftrightarrow$
ggT d. Koeff. v. $f(x)$ Einheit

$f(x), g(x)$ primit. $\Rightarrow f(x)\cdot g(x)$ primitiv

R faktoriell $f(x), g(x) \in R[x]$
beide primitiv $\Rightarrow f(x)\cdot g(x)$ primitiv

Gauss $R[x] - Q[x]$

R faktoriell $f(x) \in R[x]$ $\deg f(x) \geq [1]$
$f(x)$ Primelem in $R[x] \Leftrightarrow$
$f(x)$ Primelem in $Q[x]$

R faktoriell $\Rightarrow R[x]$ faktor.

R faktoriell $\Leftrightarrow R[x]$ faktoriell

Irreduzibilitätskriterium v. Eisenstein

R faktoriell $\quad f(x) \in R[x]$
$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_s x^s \quad p \in R$
($\exists$ primelem..) $\quad p \mid a_i \quad 0 \le i \le s-1$
$p \nmid a_s \quad p^2 \nmid a_0 \Rightarrow f(x)$ irreduzibel

Bsp. zu Eisenstein

- $R = \mathbb{Z} \quad k = \mathbb{Q}$
  $f(x) = x^n - a$
  $f(x)$ irredu. $\Rightarrow \sqrt[n]{a}$ irrational.

- $R = \mathbb{Z} \quad k = \mathbb{Q} \quad p$ prim
  $g(x) = \frac{x^p - 1}{x-1} = x^{p-1} + \dots + x + 1$ irredu.
  $g(x)$ Kreisteilungspolynom
  $\ulcorner f(x) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} \quad g(x) = f(x-1)$

Körpererweiterung

$k \subseteq L \quad k, L$ Körper
$k \subseteq L$ Körpererweiterung v. k

$\dim_k L = [L:k]$
Körpergrad von L über k

$k \subseteq L$ endlich $\Leftrightarrow [L:k] < \infty$
L heisst Erweiterungskörper vom Grad n über k

Gradsatz

$k \subseteq k' \subseteq k'' \quad k \subseteq k'$ endl. Körpererw.
$\qquad k' \subseteq k''$ endl. Körpererw.
$\Rightarrow k \subseteq k''$ endl. $\quad [k'':k] = [k'':k'] \cdot [k':k]$

algebraisch transzendent

$k \subseteq L$; $\alpha \in L$ algebr. über k :⇔
$(\exists$ Polynom $f(x) \in k[x])\ f(\alpha) = 0$;
$(\nexists$ Polynom $f(x) \in k[x])\ f(\alpha) = 0$:⇔
$\alpha \in L$ transzendent über k

∃! von Minimalpolynom

$k \subseteq L$ Körpererw. $\alpha \in L$
α algebr. über k
$\exists!$ irreduz. norm. Polynom
$h(x) \in k[x]$
(1) $h(\alpha) = 0$
(2) $(\forall f(x) \in k[x])\ (\exists g(x) \in k[x])$
$f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Minimalpolynom Grad

Das eind. best. Polynom $h(x)$ heisst Minimalpolynom von α über k deg $h(x)$ heisst der Grad von α über k

$[L:k]=n \Rightarrow$ grad $\alpha \leq n$

$k \subseteq L$ endl. $[L:k] = n$
$\Rightarrow (\forall \alpha \in L)\ \alpha$ algebr. über k
$\wedge$ grad $\alpha \leq n$

algebr. Körpererweit.

$k \subseteq L$ algebr. Körpererw.
:⇔ $(\forall \alpha \in L)\ \alpha$ algebr.

$k[\alpha]$

$k[\alpha]$ der von k durch Adjunktion von α entst. Körper $\Rightarrow$

$k \subseteq L$ α algebr. über k

$$k[\alpha] := \bigcap_{\substack{k \subseteq k' \subseteq L \\ \alpha \in k'}} k'$$

$k[x]/(m(x)) \Rightarrow k(\alpha)$

$k \subseteq L$ $\alpha \in L$ algebr. über k

$m(x) \in k[x]$ MP von α über k

$\Rightarrow \varphi^*: k[x]/_{m(x)} \cong k(\alpha)$

$k(\alpha)$ hat Basis $\{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$

$k \subseteq L$ $\alpha \in L$ algebr. v. Grad n

$\beta \in k(\alpha) \Rightarrow \exists!\, a_0, \dots, a_{n-1} \in k$

$\beta = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i$ eindeutig

d.h. $k(\alpha)$ hat k. Basis

$\{\alpha^0, \alpha^1, \dots \alpha^{n-1}\}$

α alg. v. Grad n $\Rightarrow [k(\alpha):k] = n$

α algebr. über k von Grad n

$\Rightarrow k \subseteq k(\alpha)$ endl. Körpererw.

$[k(\alpha):k] = n$

α algebr. mit $n \mid m$

$k \subseteq L$ endl. $[L:k] = m$

$\alpha \in L \Rightarrow \alpha$ algebr. von Grad n

mit $n \mid m$

Wahrsch.k.rechn

diskrete Ereignisalgebra
diskreter Wahrsch.raum

Ω Ereignisraum $|\Omega| \leq \aleph_0$

$a = P(\Omega)$ Ereignisalgebra

$P: \quad a \to \mathbb{R}_0^+$

$\qquad A \mapsto P(A)$ Wahrsch.vert. WV
(W.k. muss)

KOLMOGOROFF

1) $P[\Omega] = 1$

2) $A_1 \ldots \in a \quad P[\bigcup_i A_i] = \sum_i P[A_i]$

$\qquad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$

(Ω, a, P) diskreter W'raum
(diskrete Ereignisalgebra)

triv. Folg.

1) $P[\emptyset] = 0$

2) $P[A'] = 1 - P[A]$

3) $B \subseteq A \Rightarrow P[B] \leq P[A]$

4) $P: \ a \to [0,1]$

WV $P \rightsquigarrow$ Gewichte p_ω

$p_\omega = P[\{\omega\}]$ Gewichte

(1) $P[A] = \sum_{\omega \in A} p_\omega$

(2) $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \qquad \Rightarrow p_\omega \leq 1$

Poisson Vert.

$\Omega = \mathbb{N}$

$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k$ Erwartungswert

Laplace Modell

$|\Omega| < \infty$ (Ω endlich)

$P_\omega = \text{const.} = \frac{1}{|\Omega|}$

$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#\text{ günst. Fälle}}{\#\text{ mögl. Fälle}}$

elem. Kombinatorik

$S_i = S \quad i = 1 \ldots n$

$|S| = N$

$\Omega = \prod_{i=1}^{n} S_i$

$\Omega_0 = \{\omega = (x_1 \ldots x_n) \in \Omega \mid x_i \neq x_j \ i \neq j\}$

$\Omega_1 = \{\omega = (x_1 \ldots x_n) \in \Omega\}$

$\Omega_2 = \{\omega = (x_1, \ldots x_n) \in \Omega_0\}$

$\Omega_3 = \{\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \mid (x_1 \ldots x_n) \in \Omega\}$

$\Omega_4 = \{\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \mid (x_1 \ldots x_n) \in \Omega_0\}$

$|\Omega_1| = N^n$ Variat. m. Widerh.

$|\Omega_2| = \frac{N!}{(N-n)!}$ Variat. o. Widerh.

$|\Omega_3| = \binom{N+n-1}{n}$ Komb. m. Wide.

$|\Omega_4| = \binom{N}{n}$ Komb. o. Widerh.

Random Walks und ihre Fluktuationen

$\Omega = \{\omega = (x_1, \ldots x_n) \mid x_i = \{-1, 1\}\ i = 1, \ldots n\}$

$S_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i$ Bilanzsumme

$P[S_n = x] = P[\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) = x\}]$

$T_{-a}(\omega) = \min\{k > 0 \mid a + S_k(\omega) = 0\}$

Ruinzeitpunkt

Einl. Folgerungen

$$P[S_n = x] = 2^{-n} \binom{n}{\frac{n+x}{2}}$$
$$k = \frac{n+x}{2}$$

$$P[S_n = x] = \frac{n}{2k} P[S_{n-1} = x-1]$$
$$= \frac{n}{2(n-k)} P[S_{n-1} = x+1]$$

Reflektl. Prinzip

$$P[a + S_n = b,\ T_a \leq n] = P[S_n = a+b]$$

Zufalls variable

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^1$$
$\omega \mapsto X(\omega)$ Zufallsvariable

Erwart. wert

$$E[X] := \sum_{\omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$
$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P[X = x]$$

optimales Stoppen bei Spielsystemen

$$T : \Omega \to \{0, \dots, N\}$$
$\omega \mapsto T(\omega)$ Stoppzeit

$A \in \mathcal{A}_n :\Rightarrow A = \{\omega \mid x_1 = \alpha_1 \dots x_n = \alpha_n / \alpha_i = \pm 1\}$

vergangene Ereignisse

$V_k(\omega)$ Einsatz f. Periode ω

$\{V_k = c\} \in \mathcal{A}_{k-1}$

$$S_N^V = \sum_{k=1}^{N} V_k(\omega)\, x_k(\omega)$$ Bilanz

keine Spiel-Strategie

$\forall$ jedes Spielsystem (v_k) ist
$E[S_N^v] = 0$

Wald'sche Identität

$(\forall T) \quad E[S_T] = 0$
$E[S_T^2] = E[T]$

Ruin problem

A, B spielen mit Anf.kap a, b
$P[\{T_{-a} < T_b \,,\, T_{-a} \leq N\}] = r_A^N$
$P[\{T_b < T_{-a} \,,\, T_b \leq N\}] = r_B^N$
$r_A^N \to r_A \quad N \to \infty$
$r_A = \frac{b}{a+b}$

Ballot theorem

$P[T_{-a} = n] = \frac{a}{n} P[S_n = a]$

$P[S_n = a, S_1 > 0, \dots S_{n-1} > 0] = P[S_n = a] \cdot \frac{a}{n}$

erste u. letzte Rückk. zeit

$T_0 = \min\{n > 0 \mid S_n = 0\}$
$L = \max\{n \geq 0 \mid S_n = 0\}$

P[L]

$P[L = 2n] = P[S_{2n} = 0] \cdot P[S_{2N-2n} = 0]$

arcsin Gesetz

$P[\frac{L}{2N} \leq z] \to \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{z}$

bedingte Wahrscheinlichkeit

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ diskr. WR
B Ereign mit $P[B] \neq 0$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad A \in \mathcal{A}$$

heisst bedingte W'keit d. Ereign. A bzgl. d. Ereign. B.

Insider Recur

$$P[X_{n+1} = 1 \mid S_N = a] = \frac{1}{2} + \frac{a}{2N}$$

abs. W aus bed. W

$(B_i)_{i \in I}$ Zerl. von Ω in disj. Ereign. B_i
$$P[A] = \sum_{i \in I} P[A|B_i] \cdot P[B_i]$$

$P[\bigcap A_i]$

$$P[A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n] = P[A_1] \cdot P[A_2 | A_1] \cdots P[A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$$

Q_{xy}

Q_{xy} W'keit, dass Übergang vom Zust. x in Zust. y

$P_\mu[\;]$ μ

P_μ WV auf Ω mit
(a) $P_\mu[X_0 = x] = \mu(x)$
(b) $P_\mu[X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0 \ldots X_n = x_n] = Q_{x_n y}$
(Markoff'sche Eigenschaft)
$P_\mu[X_n = x] = (\mu Q^n)x = \mu_n(x)$
(spez. wenn Q konst.

μ Gleichgew

μ Gleichgew wenn $\varphi_n \equiv \mu$ d.h. $\mu = \mu Q$

Bayes'sche Regel

$(B_i)_{i \in J}$ disj. Zerl. von Ω

$$P[B_i | A] = \frac{P[A|B_i]\, P[B_i]}{\underbrace{\sum_{j \in J} P[A|B_j] \cdot P[B_j]}_{P[A]}}$$

Stochast. unabh. Ereign

Kollekt. von Ereign. A_i $(i \in I)$ heisst stoch. unabh., wenn $J \subset I$ endl $P[\bigcap_{i \in J} A_i] = \prod_{i \in J} P[A_i]$

$A_i \to \{A_i, A_i^c\}$

A_i $(i \in J)$ unabh $\Rightarrow$
$B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ $(i \in J)$ unabh.

Binom. Vert

$P[X_i = 1] = p$ $i = 1 \ldots N$
$\{X_i = 1\}$ unabh.

$P[S_N = k] = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$
Binominalvert mit Parameter p

$E[S_N] = N \cdot p$
$P[T = k] = \frac{1}{p}$

Poisson Verteil

Bin. Vert $N \to \infty$ $p \to 0$
$N \cdot p = E[S_N] = \lambda = const.$

$P[S_n = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Anpassung an Modelle

Anpassung d. Modells an empir. Daten:
N Kenngrössen X_i
$\lambda \doteq \frac{\sum X_i}{N}$

$N \cdot P[\lambda = k]$ theor. Wert für Kenngr.

$Y = X_1 + X_2$ poissonvert.

X_1, X_2 unabh. (d.h. $\{X_1 = x_1\}$ unabh $\{X_2 = x_2\}$ $\forall x_1, x_2$)
X_1, X_2 Poissonvert. mit Par. λ_1, λ_2
$\Rightarrow X = X_1 + X_2$ Poissonvert mit Param. $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

Bed. Vert von X_1 bez $\{X = n\}$ ist Binominalvert mit
$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ und n

Entropie

$-\log p(\omega)$ Mass f. Überraschung
$H(P) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)(-\log p(\omega))$
Entropie

relat. Entropie

$\log \frac{\tilde{p}(\omega)}{p(\omega)}$ Likelihood Quotient

$H(\tilde{P}|P) := \tilde{E}\left[\log \frac{\tilde{p}(\omega)}{p(\omega)}\right]$

$= \sum \tilde{p}(\omega) \log \frac{\tilde{p}(\omega)}{p(\omega)}$ relat. Entropie von $\tilde{P}$ bez. P

$H(\tilde{P}|P) \geq 0$

$H(\tilde{P}|P) \geq 0$

gleich vert.

P gleichvert. Ω endl.
$H(P) = \log |\Omega|$
P maximale Entropie

geom. Verteil.

$P[T=k] = (1-p)^{k-1} p$
geom. Verteilung mit Param. p
$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = \frac{1}{p}$ Erw.wert

maxim. Entropie d. geom. Vert.

geom. Vert. hat maximale Entropie unter allen $\tilde{P}$ mit demselben Erwart.wert $\frac{1}{p}$

Research Shock

$\Omega = \{\omega = (x_1 \dots x_N) \mid x_i = 1, 0\}$ $X_i(\omega) = x_i$
$P_p[X_i = 1] = p$ $(i = 1, \dots N)$
$\{X_i = 1\}$ unabh. bez. P_p

Polyas Urnenmodell $P = \int_0^1 P_p \, dp$
$P[A] = \int_0^1 P_p[A] \, dp$
$P[X_i = 1] = \frac{1}{2}$
$P[X_n = 1 \mid X_1 = x_1, \dots X_{n-1} = x_{n-1}] = \frac{k+1}{n+1}$
Research Shock

expon. Familie

Ω endl. P WV auf Ω
$U : \Omega \to \mathbb{R}^1$
$P_\lambda(\omega) = \frac{1}{Z(\lambda)} e^{\lambda U(\omega)} p(\omega)$
P_λ WV auf Ω

$\{P_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^1\}$ expon. Familie zu P und U

P_λ mit minim. rel. Entropie

Unter allen $\tilde{P}$ mit $\tilde{E}[U] = E_\lambda[U]$ ist P_λ diej. mit minim. relat. Entropie $H(\tilde{P}|P)$

Wahrsch.raum

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrsch.raum $\iff$
1) $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω
2) P Wahrschmass d.h. P posit. norm. Mass
(i) $P[\Omega] = 1$
(ii) $A_1 \ldots \in \mathcal{A}$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\Rightarrow P[\bigcup A_i] = \sum_{i \in I} P[A_i]$

Lemma von Borel-Cantelli

$(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ $A_\infty := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$

1) $\sum P[A_i] < \infty \Rightarrow P[A_\infty] = 0$
2) $\sum P[A_i] = \infty$ A_i unabh. $\Rightarrow P[A_\infty] = 1$

∞ viele unabh. 0-1 Experimente m. Erfolgswar. p

$\Omega = \{ (x_1 \dots) \mid x_i \in \{0,1\} \}$
$\mathcal{A} = \{ x_i = 1 \}_\sigma$

$\exists !$ WV P auf $(\Omega, \mathcal{A})$
i) $P[x_i = 1] = p$
ii) $\{x_i = 1\}$ unabh. bez P

Affe und Schreib-maschine

$[x_1 \dots x_N]$ vorgeg. binäre Text
$\longrightarrow$
$P[\{[x_1 \dots x_n]$ erscheint ∞ oft$\}] = 1$

messbare Abbild.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ WR $\quad \tilde{\Omega} \neq \emptyset$
$\tilde{\mathcal{A}}$ σ Algebra auf $\tilde{\Omega}$
$\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$
φ heisst messbar, wenn
$(\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}})\ \varphi^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{A}$

$P \to \tilde{P}$ Wert.. auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$

φ messbar $\leadsto$ $\tilde{P}[\tilde{A}] = P[\varphi^{-1}(\tilde{A})]$
ist Wahrsch.wert auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$
$\tilde{P}$ Bild von P unter φ

Fall wo $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}}_0)_\sigma$

$\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}}_0)_\sigma \implies$ genügt zu fordern $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}_0 \Rightarrow \varphi^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{A}$

Zufalls variable

Zufallsvariable : messbare Abb.
$X : \Omega \to \mathbb{R}^1$; T_σ Borelsche Mengen

$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{R}$

Verteilung
Verteilungsfunktion

Verteilung von X

$P[X(\omega) \in A] = \mu(A)$ $A \in \mathcal{R}^1$

$F(b) = \mu((-\infty, b])$

$= P[X \leq b]$

Verteilungsfunktion

Vert. Funktion
Eigenschaften
charakt.

Vert. funkt. F

a) 1) Monotonie $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

2) rechtsstetig $F(x) = \lim_{h \downarrow 0} F(x+h)$

3) Normiert $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

b) umgek. $\forall F$ mit 1), 2), 3)

ist Vert. Funkt. für $\exists!$ WV auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R}^1)$

Dichtefunkt.
von μ bzw F

WV μ auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{R}^1)$ F dazu geh. VF

$\mu(F)$ absolutstetig $\Longleftrightarrow$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ $x \in \mathbb{R}^1$

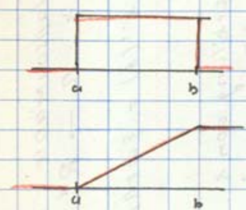
$f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

f heisst Dichtefunkt. von μ (F)

(f induz. absolutstetige VF F

Gleichvert. auf [a,b]

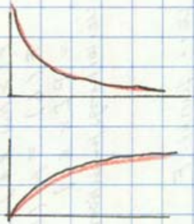
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ x-a & x \ge a < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Exponent. verteil.

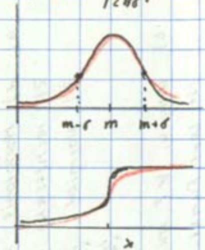
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & (x \ge 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

Normal. verteil.

$$f_{m\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F_{m\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$= \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \Phi = F_{0,1} = N(0,1)$$

standard. Normalvert.

Erwart. wert

$$E[X] = \int X(\omega)\, P(d\omega)$$

Erwartungswert

Berechnung von $E[h(x)]$

Berechn. von $E[X]$ mit Hilfe d. Vert. μ von X

$\forall\, h: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ messbar

$$E[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^1} h(x)\, \mu(dx)$$

$$E[h(x)] = \begin{cases} \sum h(x_i)\, \mu(\{x_i\}) & \mu \text{ diskret d.h. konz. auf abz. Meng} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx & \mu \text{ abs. stetig mit Dichtefunkt. } f \end{cases}$$

spezielle $h(x)$ p-tes Moment, Varianz

$h(x) = x^1$

$$\Rightarrow E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$h(x) = x^p$

$$\Rightarrow E[x^p] = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x)\, dx \quad p\text{tes Moment}$$

$h(x) = (x - E[x])^2$

$$\Rightarrow E[(x - E[x])^2] = \int (x - E[x])^2 f(x)\, dx$$

Varianz d. ZV. X

$$= E[x^2] - E[x]^2$$

Bsp. für p-tes Moment

Bsp

① gleichvert. auf $[a,b]$

$$E[X^p] = \frac{1}{p+1}\,\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{b-a} \; ; \quad \operatorname{var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

② Exponentialvert.

$$E[X^p] = \frac{p!}{\alpha^p} \; ; \quad \operatorname{var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

③ Normalvert.

$$E[X^p] = \begin{cases} 0 & p \text{ ungerade} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{\frac{p}{2}} \sigma^p\, \Gamma\!\left(\tfrac{1}{2}(p+1)\right) \end{cases}$$

$$= E[|X|^p]$$

$p=1 \quad E[|X|] = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$p=2 \quad E[X^2] = \sigma^2 = \operatorname{var}(X)$

Entropie
rel. Entropie

$$H(\mu) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\log f(x)\,dx$$

$$H(\tilde\mu\,|\,\mu) = \int \log\frac{\tilde f}{f}\,d\tilde\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\tilde f}{f}\log\frac{\tilde f}{f}\right) f\,dx$$

$\mu, \tilde\mu$ W-Vert auf $\mathbb{R}$ mit Dichtefunkt $f, \tilde f$

maxim. Entropien

μ = Gleichvert hat max. Entropie unter allen $\tilde\mu$ auf $[a,b]$

μ = Expon.vert hat max Entropie mit Erwartwert $\frac{1}{\alpha}$

μ = Norm.vert hat max. Entropie mit Erw.wert m Varianz σ^2

Jensensche Ungleich

X ZV mit endl $E[X]$
h konvex $\Rightarrow E[h(X)] \geq h(E[X])$

$\mathcal{L}^p$ Raum integrierb.

$X \in \mathcal{L}^p(\Omega, P) \Leftrightarrow E[|X|^p] < \infty$ $p \in \mathbb{N}$
$E[|X|] < \infty \Leftrightarrow X$ ist integrierbar

Varianz Standardabweich.

$var(X) = E[(X - E[X])^2]$
Varianz von X
$\sqrt{var(X)}$ Standardabweichung
$\sigma(X)$

$E[X]$ Prognose für $X(\omega)$
$X - E[X]$ Prognosefehler
$var(X)$ mittlere quadr. Prognosefehler
Mass für Streuung, Risiko

cov X

$cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E[X_2])]$
Kovarianz von X_1, X_2

Eigensch. v. Var u. cov

$var(aX + b) = a^2 var X$
$var(X_1 + X_2) = var X_1 + var X_2 + cov(X_1, X_2)$
$cov(X_1, X_2) = E[X_1 \cdot X_2] - E[X_1] E[X_2]$
$cov(\alpha X_1, X_2) = \alpha \, cov(X_1, X_2)$

Korrelations koeffizient

$\rho(x,y) := \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)}$

Korrelationskoeffizient von x, y
$\rho(x,y)$ ist Kennzahl für d. linearen Zush. zw. x u. y

lineare Prognose

lineare Prognose
$\hat{x}(\omega) = a\,Y(\omega) + b$
$\Delta^2 = E[(x-\hat{x})^2]$ minimal

$\Delta^2_{min} = \sigma^2(x)\,(1-\rho^2)$

$\hat{x} = \rho(x,y)\,\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}\,(y - E[Y]) + E[x]$

$a = \rho(x,y)\,\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}$

$b = E[x] - a\,E[Y]$

$\mathcal{R}^n$, $\bar{x}$

$\mathcal{R}^n$ von $A_1 \times \ldots \times A_n$ $(A_i \in \mathcal{R}^1)$
erzeugte σ Algebra auf $\mathbb{R}^n$
$\bar{x} = (x_1 \ldots x_n)$ x_i Zufallsv.: $\Omega \to \mathbb{R}$
$\bar{x} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ messb. Abb.
$A_1 \ldots A_n \in \mathcal{R}^1$
$\{\bar{x} \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x_i \in A_i\} \in \mathcal{a}$

gemeinsame Verteil. der Zufallsvariabl

Verteil. von $\bar{x} = (Y_1, \ldots Y_n)$
$\bar{\mu}[\bar{A}] = P[\bar{x} \in \bar{A}]$ $\bar{A} \in \mathcal{R}^n$
heisst gemeinsame Verteil. d. Zufallsvar. $x_1, \ldots, x_n$

absolut-stetig

$\bar{\mu}$ absolutstetig, wenn gilt
$\bar{\mu}[\bar{A}] = \int_{\bar{A}} \bar{f}(\bar{x})\,d\bar{x} \quad \bar{A} \in \mathcal{R}^n$

$\bar{f}$ messb. Funkt. auf $\mathbb{R}^n$ $\bar{f} > 0$
$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\bar{x})\,d\bar{x} = 1$

Unabh. bei Produkte d. Vert.

$X_1 \dots X_n$ unabh. $\Leftrightarrow$

$P[\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in A_i]$

$\bar{\mu}[A_1 \times \dots \times A_n] = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$

$\forall A_1 \dots A_n \in \mathcal{R}^1$
$\bar{\mu} = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ Produkt d. Verteilungen

$E[h_1 \dots h_n(x_n)] = \prod_{i=1}^{n} E[h_i(x_i)]$

$X_1 \dots X_n$ unabh. $\Rightarrow$
$E[h_1 \dots h_n(x_n)] = \prod_{i=1}^{n} E[h_i(x_i)]$

Dichtefunkt d. gemeins. Verteilung

$X_1 \dots X_n$ unabh. $f_1 \dots f_n$ Dichtefkt.
$\Rightarrow$ gemeins. Vert. $\bar{P}\bar{\mu}$ hat Dichtefunkt. $f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$

Dichtefkt. von $X = X_1 + X_2$

X_1, X_2 unabh. mit f_1, f_2
$\Rightarrow X = X_1 + X_2$ hat Dichtefkt.
$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\,dx$
(Faltung v. f_1, f_2)

Stochast. Konverg. von S_n gegen m

Schwaches Gesetz d. gr. Zahlen

$X_1 \dots X_n$ unkorreliert

$E[X_i]=m$ $\quad$ var $X_i=\sigma^2<\infty$

$$\forall \varepsilon>0 \quad P\left[\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geq \varepsilon\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Bernstein Polynome

$$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\binom{n}{k}$$

$$=E_x\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

Stone Weierstrass auf [0,1]

$f \in C[0,1]$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; \|f-B_n\| \leq \varepsilon$$

Konvergenzbegr.

$Z_1, Z_2, \dots Z$ ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

① stochast. konverg. von Z_n

$(\forall \varepsilon>0) \; \lim_{n\to\infty} P[|Z_n-Z| \geq \varepsilon]=0$

② fast sichere konverg.

$P[\lim_{n\to\infty} Z_n = Z]=1$

③ konverg. in L^p $\quad E[|Z_n-Z|^p] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

① ② ③

② $\Rightarrow$ ①

$\Downarrow$

③ $\Rightarrow$ ①

② $\Rightarrow$ ③ falls $\sup|Z_n| \in L^p$

starkes Gesetz d. grossen Zahlen

starkes Gesetz d. grossen Zahlen

$x_1, x_2 \dots x_{\dots}$ unabh $E[x_i] = m$

① $\sup E[x_i^4] < \infty$

② x_i ident. verteilt (Kolmogor.)

$\to P[\frac{1}{n} S_n \to m] = 1$

Standardisieren

Standardisieren und Standard

$E[S_n] = nm \quad m = E[x_i]$

$\operatorname{var} S_n = n\sigma^2 \quad \sigma^2 = \operatorname{var} x_i$

$$S_n^* = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\operatorname{var} S_n}}$$

μ_n konv. schwach gegen μ

$\mu_1, \mu_2 \dots$ WV auf $\mathbb{R}^1$

mit Vert.funkt $F_1 \dots F$

μ_n konverg. schwach gegen μ, falls

① $F_n(x) \to F(x)$ an jeder Stetigkeitsstelle x von F

$\Updownarrow$

② $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu \quad \forall f \in C_{b(U)}(\mathbb{R}^1)$

③ $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}^1)$

alg. Elem. bilden Unterkörper

$k \subseteq L$ $\alpha, \beta \in L$ α, β algebr. über k
$\Rightarrow \alpha \cdot \beta,\ \alpha \pm \beta,\ \alpha/\beta$ $\beta \neq 0$ algebr. über k

symbolische Adjunktion einer Nullstelle

$h(x)$ irred. Polynom in $k[x]$
grad $h(x) = n$
$\Rightarrow k[x]/_{(h(x))}$ Erweit.körper von k indem α exist mit $h(\alpha) = 0$
Ferner $[k[x]/(h(x)) : k] = n$

Zerfällungskörper

$f(x) \in k[x]$
Ein Körper L mit $k \subseteq L$ über dem $f(x)$ in Linearfakt. zerfällt und minim. grad über k besitzt heisst Zerfällungskörper von $f(x)$ über k

$|L| = p^n$ endl. Körper

L endl. Körper $\Rightarrow |L| = p^n$ p prim

konstruierbar

$\gamma \in \mathbb{R}$ konstruierbar $\Leftrightarrow$ mit Zirkel und Lineal ist Strecke d. Länge $|\gamma|$ aus Einh.strecke konstruierbar

Ebene von L

$\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in L\}$ Ebene von L

α konstr. har

$\alpha \in \mathbb{R}$ α konstr. har $\Leftrightarrow$
$\exists\ \gamma_1 \dots \gamma_n > 0$ $\gamma_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1} \dots \sqrt{\gamma_{i-1}})$
$i = 1 \dots n$
$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1} \dots \sqrt{\gamma_n})$

α konst har $\Rightarrow [k:\mathbb{Q}] = 2^n$

α konst. har $\Rightarrow \alpha \in k$
$\mathbb{Q} \leq k \leq \mathbb{R}$, $[k:\mathbb{Q}] = 2^n$ $\exists n$

Statistik

Problemstellung d. Statistik

$(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$ $\theta \in \Theta$

$X_1, \dots, X_n$ unabh. ZV ident. vert.

Beobacht.: $x_1 = X_1(\omega) \dots x_n = X_n(\omega)$ Daten

gesucht: Rückschlüsse auf den echten Parameter θ

Schätzer

Schätzer $t: \mathbb{R}^n \to \Theta$

$(x_1 \dots x_n) \mapsto t(x_1 \dots x_n)$

$T(\omega) = t(X_1(\omega) \dots X_n(\omega))$

Bsp. für Schätzer d. Erwart.werts

$\theta = E[X_i]$

mögl. Schätzer

- $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ arithm. Mittel
- $T = \begin{cases} X_{(k+1)} & n = 2k+1 \\ E((X_{(k)}, X_{(k+1)})) & n = 2k \end{cases}$

  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$

  Median d. Daten
- $T =$ gestimmtes Mittel

  erst $\alpha \cdot 100\%$ der Daten oben und unten wegköpfen und dann arithm. Mittel

  (Auskorrigieren verschmutzte Daten) → Robuste Statistik

Minimum d. quadr. u. absol. Fehlers

$x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^1$

1) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$ minimiert durch

$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$ minimiert durch

$a =$ Median

unverfälschte Schätzer

$(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$ $\quad \theta \in \Theta$

$g : \Theta \to \mathbb{R}^1$ $\quad$ Beurt. durch d. Θ

Schätzwert $T(\omega) = t(x_1(\omega) \ldots x_n(\omega))$
heisst unverfälscht (erwart.treu unbiased)

$$E_\theta[T] = g(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

d.h. der system. Fehler (bias)

$$B(\theta) = E_\theta[T] - g(\theta) = 0$$

1. Krit. für Güte d. Schätzer

arithm. Mittel als Schätzer für Erw.wert

arithm. Mittel als Schätzer von $g(\theta) = E_\theta[x_i]$ unverfälscht

gilt für bel. lin. Schätzer

$T = \sum_{i=1} \alpha_i x_i \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Schätzer für Varianz

$$T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

unverfälschte Schätzer für $g(\theta) = var_\theta(x_i)$

wenn $m = E_\theta[x_i]$ bekannt

$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$

Risikofunkt. vom Schätzer

$(T - g(\theta))^2$ quadr. Schätzfehler

$$R(T, \theta) = E_\theta[(T - g(\theta))^2]$$

Risikofunkt. vom Schätzer

2. Kriterium f. Güte d. Schätzer

Risikofunkt $= var_\theta(T)$ falls T unverf.

T unverf. $\Rightarrow$
$E_\theta[(T-g(\theta))^2] = var_\theta(T)$

Mini Max Prinzip

1) Mini max Prinzip
vorsicht. Ansatz aus Spieltheorie

suche $\tilde{T}$ mit
$R(\theta, \tilde{T}) = \min_T \max_{\theta \in \Theta} R(\theta, T)$

Bayes'sche Ansatz

2) Bayes'scher Ansatz
a priori Vert. μ auf Θ
$T \to \int R(\theta, T)\mu(d\theta)$
minimiere $\int R(\theta, T)\mu(d\theta)$

lin. Schätz opt. in Klasse d. lin. Schätz

arithm. Mittel BLUE
(best linear unbiased estimator)
also optim. in d. Klasse d. lin. Schätz

Maximum Likelihood Schätz

3) Maximum Likelihood Schätzer
"plausibelste Parameter θ"
$P_\theta[X_1 = x_1, \dots X_n = x_n] = L_\theta(x_1 \dots x_n)$
Likelihood funkt.
a) diskret. Fall $f(x_1 \dots x_n)$
$=$ Maxim. v. $\theta \to L_\theta(x_1 \dots x_n)$
b) abs. stet. Fall
$L_\theta(x_1 \dots x_n) = f_\theta(x_1) \dots f_\theta(x_n)$
$f(x_1 \dots x_n) = $ Max. v. $\theta \to L_\theta(x_1 \dots x_n)$

Informations-ungleichungen Rao-Cramer

$u_\theta : \begin{cases} f_\theta(x) & \text{Dichte} \\ \mu_\theta(x) & \text{gewicht} \end{cases}$

glatt mit gemeis. Träger
$\{x \mid f_\theta(x) > 0\}$
bzw $\{x \mid u_\theta(x) > 0\}$

Für jeden Schätzer
$T = t(x_1, \ldots x_n)$ $B = E_\theta[T] - g(\theta)$

$$\operatorname{var}_\theta(T) \geq \frac{(1 + B'(\theta))^2}{n I(\theta)}$$

$E[-(\ln f_\theta)'']$

$$I(\theta) := \begin{cases} \int \left(\frac{f_\theta'(x)}{f_\theta(x)} \right)^2 f_\theta(x)\, dx \\ \sum_x \left(\frac{\mu_\theta'(x)}{\mu_\theta(x)} \right)^2 \mu_\theta(x) \end{cases}$$

$I(\theta)$ Fischer · Information

Konfidenz verfahren zum Niveau α

Konstr. d. Konfidenzintervalls
$I(\omega) = I(x_1(\omega), \ldots x_n(\omega))$
$P_\theta[\theta \in I(\omega)] \geq 1-\alpha \quad \forall \theta \in \Theta$
α vorgeg. Niveau

t Verteil mit Dichte [illegible] n-1 Freih.graden

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Hypothese, Test, Gütefunktion, Signifikanzniveau, Macht

$(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$ $\theta \in \Theta$ Modell

$X_1 \dots X_n$ unabh. id. vert. mit μ_θ

Hypothese : $\Theta_0 \subset \Theta$

Test $e(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{Ablehn.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

kritischer Bereich $K = \{\omega \mid e(x_1 \dots x_n) = 1\} \subseteq \Omega$

Gütefunktion $\theta \to P_\theta[K]$

Test hat Signifikanz Niveau α
wenn $P_\theta[K] \le \alpha$ $(\theta \in \Theta_0)$

Für $\theta \in \Theta - \Theta_0$ $P_\theta[K]$ Macht
des Tests an Stelle θ

Likelyhood Quotienten Test

$\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ einfache Alternative

$L_\theta(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n) \\ \mu_\theta(x_1) \cdots \mu_\theta(x_n) \end{cases}$

Likelyhood Quotienten Test

$$K = \{\omega \mid \frac{L_{\theta_1}}{L_{\theta_0}}(x_1 \dots x_n) \ge c\}$$

mit krit. Schwellwert c, der sich aus vorgeg. Niveau α bestimmt

$P_{\theta_0}[K] \le \alpha$

Lemma von Neyman Pearson

Likelihood quot. test ist im folgend. sinn optimal.

$\hat{k} = \{ \vartheta(x_1, \dots x_n) = 1 \}$

andere Test mit

$P[\tilde{k}_0] \le P_{\theta_0}[k]$

$\Rightarrow P_{\theta_1}[\tilde{k}] \le P_{\theta_1}[k]$

(macht das LQT am grössten unter Tests die dasselbe Niveau resp.)

Verallgem. LQ Test

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\Theta} L_\theta(x_1 \dots x_n)}{\sup_{\Theta_0} L_\theta(x_1 \dots x_n)}$$

$k = \{ \lambda(x_1 \dots x_n) > c \}$

Geometrie

Klassifizierung d. Geometrie

synthet. Gm	geom. Objekte
analyt. Gm	algebr. Objekte
Kongruenzabb.	zus. Länge
Ähnlichk.abb.	Pkt., Ger., ∢, Verh. Inz
Affine Abb.	Punkte, Geraden, ∥, Inz.
Projekt. Abb.	Punkte, Gerad, Inzid.
Topol. Abb.	Punkte, Umg. Inzid.

Teil Verh.

$$(ABC) = \frac{(AC)}{(BC)}$$

$P \mapsto p$

A, B fest
$P \mapsto (A, B, P)$ bij.

Doppel verh.

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

harmon. liegend. Punkte

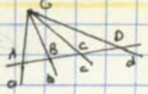
A, B, C, D heissen harmonisch
$(ABCD) = -1$

Doppelverh. v. 4 gerad.

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

Satz v. Pappus

$(ABCD) = (abcd)$



Erh. d. Doppelverh.

Bei Projektion einer g auf $\tilde{g}$ bleibt DV erhalten

proj. Ebene

affine Ebene u. (uneig. Punkte) = projekt. Ebene

genau ein Schnittpunkt in proj. Ebene

in proj. Ebene $g \cap h$ in genau einem Punkt.

vollst. □

4 Punkte in allg. Lage (keine 3 auf Gerade) bilden mit den 6 Verb.-Ger. vollst. □

topol. Aequiv.

proj. Ebene homöomorph Geraden durch Punkt M d.h. Kugelfläche mit Diametralpunkt Identifikation

kolline-ation

inzidenzerh. bij. Abb. d. proj. Ebene auf sich = kollineation

Perspektivität

persp. kollin

kollineation mit Fixgerade (Achse) und Fixgeradenbüschel (Zentrum) = persp. kollineation

proj. kollin

komp. v. perspekt. kollineat. = proj. kollineation

korrel-ation

bij. Abb. d. proj. Ebene, wobei kollin. Punkte in kopunkt. Geraden übergehen = korrelation

proj. korrel.

proj. korrel. = korrelation bei der eindim grundgebilde proj. abgebild.

proj. Abb.

proj Abb. = proj. kollineation oder proj. korrelation
proj. Abb. = Projektivität
(andere Def. möglichkeit
DV erh. bij. Abb. von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$)

Fundamentalsatz d. eindim. proj. Geometrie

$(\exists!\ \text{proj Abb}\ \varphi)$ $ABC \in \mathbb{P}$ Annahme $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \in \bar{\mathbb{P}} \Rightarrow (A)\varphi = \bar{A} \ldots (C)\varphi = \bar{C}$

Fundamentalsatz d. 1dim proj. Gm

Klassifik. d. Projekt.

proj. Abb
3 Fixpunkte → Identität
2 Fixpunkte ⇒ hyperbolisch
1 Fixpunkt → parabolisch
0 Fixpunkte ⇒ elliptisch

Gruppe d. proj. Trafos

$\mathbb{P}_1$ Menge d. Projektiv. auf Punktreihe
$\mathcal{P}_1 = [\mathbb{P}_1 ; \circ]$ Gruppe d. proj. Trafos
$\mathcal{P}_1$ ist 2 faktorig über Erz-system d. Involutionen

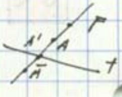
regul. Skala proj. Skala

regul. Skala zu affinem Koord.system O, E
$X \to (O, E, X)$
proj. Bild d. regul. Skala: projekt. Skala

Perspekt. regul., sing.

Projektiv. mit Fixpunkt gerad. und Fixger. Büschel heisst Perspektivität

F Zentrum
f Achse
$x = (A, \bar{A}, FA')$
Charakteristik



f, F inzid. regulare Perspekt.
f, F inzid singul. Perspekt.
Elation $x = +1$

Sonderf. d. Perspekt.

affine Sonderf. d. Perspekt.

- f uneigentlich — Streckung
  F∈f uneigentl. — Translation
- F uneigentlich — axiale Streckung
  F∈f F uneig. — Scherung

Haupts. d. 2dim proj. Gm

∃! proj. Trafo m. $\bar{A} = \varphi(A)$ $\bar{C} = \varphi(C)$
$\bar{B} = \varphi(B)$ $\bar{D} = \varphi(D)$

Affin

Affinit. : proj. Trafo mit Fixeinger.

Ordnung d. Trafos in d. Ebene

$\mathfrak{K}_2$ Gruppe d. Kongr. trafos
$\mathfrak{Ä}_2$ Gruppe d. Ähnl. trafos
$\mathfrak{A}_2$ Gruppe d. Affinit.
$\mathfrak{P}_2$ Gruppe d. Proj.

$\mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{Ä}_2 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{P}_2$

$SO(2,\mathbb{R})$ $O(2,\mathbb{R})$ $Gl(2,\mathbb{R})$ $Gl(3,\mathbb{R})/Z(Gl(3,\mathbb{R}))$
det 1

n-dim proj. Gm

n-dim kompl. proj. Raum

$\{ (\lambda y_0, \lambda y_1 \dots \lambda y_n) \mid y_i \in \mathbb{C} \quad \lambda \in \mathbb{C} \}$

n-dim. komplexe proj. Raum S_n

S_n als Gesamth. d. Strahlen in E_{n+1}

E_{n+1} UR d. dim $n+1$

$S_n = \{ E_1 \mid E_1 \subset E_{n+1} \}$

E_1 Strahl

Teilräume $S_m \subset S_n$

$S_m \subset S_n$ Teilraum

$S_m = \{ E_1 \mid E_1 \subset E_{m+1} \}$

$\overset{0}{y}, \dots \overset{m}{y}$ $m+1$ lin. unab. Punkte

$S_m = \{ y = (y_0 \dots y_n) \mid y_k = \sum_{i=0}^{m} \overset{i}{y}_k \gamma_i \}$

γ_i homogene koord. od. Parameter

$\overset{i}{y}$ Grundpunkte d. Koordsystems

$y = \sum_{i=0}^{m} \overset{i}{y} \gamma_i$

Symb. Bez.

S_0 Punkt

S_1 Gerade

S_2 Ebene

S_{n-1} Hyperebene $\quad (u y) = 0$

allgem. proj. Koord.

$m = n \quad y_k = \sum_{i=0}^{n} \overset{i}{y}_k \gamma_i$

$\gamma_i = \sum \vartheta_i^k y_k$

γ_k allgem. proj. Koord.

Ebene (Dreieckskoord)

Raum (Tetraederkoord)

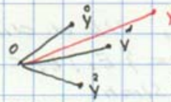
Vereinfachung d. Schreibw.

$$(uy) = u_y = \sum u^i y_i = u^0 y_0 + u^1 y_1 + \dots u^n y_n$$

Spez. S_2

Spez. S_2

$$S_2 = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{0}{y}_1 \\ \overset{0}{y}_2 \\ \overset{0}{y}_3 \end{pmatrix} \gamma_0 + \begin{pmatrix} \overset{1}{y}_1 \\ \overset{1}{y}_2 \\ \overset{1}{y}_3 \end{pmatrix} \gamma_1 + \begin{pmatrix} \overset{2}{y}_1 \\ \overset{2}{y}_2 \\ \overset{2}{y}_3 \end{pmatrix} \gamma_2 \right\}$$



$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ homog. koord

$\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}$ Grundpunkte

proj. Verbindungssätze

Proj. Verbin. sätze

I m+1 Punkte in S_n die nicht in einem S_q $q<m$ liegen bestimmen einen S_m

II d Hyperebenen in S_n die keinen S_q $q>n-d$ gemeinsam haben bestimmen S_{n-d}

III $p+q \geq n \Rightarrow S_p \cap S_q = S_d$

$d \geq p+q-n$

IV $S_d \subset S_p \cap S_q \Rightarrow$

$S_p + S_q \subseteq S_m \quad m \leq p+q-d$

V $S_p, S_q \subset S_m \quad \exists S_m \quad m \leq p+q+1$

VI $S_p \cap S_q = S_d \ (\emptyset)$

$S_p + S_q$ liegen in eind. best.

~~$S_p +$~~ S_{p+q-d} (S_{p+q+1})

zur Vereinfachung könnte man def

$S_p \cap S_q = \emptyset \Leftrightarrow S_p \cap S_q = S_{-1}$

Ein Punkt in E_{n+1} ist ein (-1) dim. proj. Raum in Σ_n

Inzidenz

S_p inzident S_q $\Longleftrightarrow$
$S_p \subset S_q \vee S_q \subset S_p$

spez. Punkt mit Hyperebene u
inzident, wenn $(u\,y)=0$

n-dim Dualitätssatz

n-dim. Dualitätsprinzip
Punkt $\longleftrightarrow$ Hyperebene
Grund: Symmetrie in $(u\,y)=0$

Dualer Raum von S_n

Raum der $(u^0, \ldots u^n)$
(Koord. d. Hyperebenen) heisst
der zu S_n duale Raum
Zuordnung Korrelation, Dualität

S_m S_{n-m-1}

$S_m \longleftrightarrow S_{n-m-1}$

Träger		
n-2	Hyperebenenbüschel	n-1
n-3	Netz, Bündel	n-1
2	Punktfeld	0
1	Punktreihe	0

<u>Punktreihe</u> Punkte einer Geraden
<u>Träger</u> Gerade d. Punktreihe
<u>Hyperebenenbüschel</u> Gesamtheit
der Hyperebenen in S_n, die einen
S_{n-2} enth. S_{n-2} <u>Träger</u>
<u>Punktfeld</u> Gesamtheit d. Punkte in S_2
Dual dazu <u>Netz oder Bündel</u>
von Hyperebenen in S_n die S_{n-3}
enthalten
Gesamtheit aller lin. Räume
durch Punkt y in S_n <u>Stern</u> mit
<u>Träger y</u>

Doppelverh.

u, v, x, y versch. Pkt einer gerade

$x = u\lambda_0 + v\lambda_1$

$y = u\mu_0 + v\mu_1$

$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \dfrac{\lambda_1\mu_0}{\lambda_0\mu_1}$ DV v. u, v, x, y

mehrfach proj. Raum

$S_{i_1 \dots i_k} = \{ (x_1 \dots x_k) \mid x_j \in S_{i_j} \}$

mehrfach proj. Raum mit dim $\sum_{j=1}^{k} i_j$

alg. Mannigfalt. alg. Hyperfläche

$\{ (x_1 \dots x_k) \in S_{i_1 \dots i_k} \mid F_l(x_1 \dots x_k) = 0 \quad l = 1 \dots s \}$

algebr. Mannigfaltigkeit

$s = 1$: algebr. Hyperfläche in $S_{i_1 \dots i_k}$

$F_l(x_1 \dots x_k)$ homogen in var. $x_1 \dots x_k$

Hyperflächen in S_n

Hyperfläche in S_n hat n. eine Gradzahl : Grad od. Ordnung d. Hyperfläche

in S_2 Hyperfläche Kurve

in S_3 Hyperfläche Fläche

Kurve 2. Grades Kegelschnitt

Hyperfl. 2. Grad Quadrik

2fach proj. R. als alg. Mannigf.

$\exists$ Abb. $S_{m,n} \to S_{mn}$ alg Mannigf. in S_{mn+m+n}

$(m+1)(n+1)$ Elem. $z_{ik} := x_i y_k$

koord. in S_{mn+m+n}

umgek: $z_{ik} z_{jl} = z_{il} z_{jk}$

$\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$ gl.

Affiner Raum

$S_n - \{y_0 = 0\} = A_n$
Affiner Raum
$(A_n, (0\ldots))$ Vektorraum

$y_0 = 0$ uneig. Hyperebene

Gruppe d. Proj. Abb. PGL(n,k)

$y'_i = \alpha_i^k y_k$ proj. Trafo / lin. Kollineation
α_i^k regul.
$\{\alpha_i^k\} = PGL(n,k)$ proj. Gruppe
$PGL(n,k) = GL(n,k)/Z(GL(n,F))$

HS über projekt. Transform.

proj. Trafo T in S_n eind. Bestimmt von $n+2$ Punkten y und Bildpunkten
$\nexists S_{n-1}$ $y \in S_{n-1}$ $Ty \in S_{n-1}$

Proj. Satz

$S_m, S'_m \subset S_n$ Teilräume
$S_{n-m-1} \cap S_m = \emptyset$
$S_{n-m-1} \cap S'_m = \emptyset$
$y \in S_m$ auf S'_m proj.:
$\left.\begin{array}{l} y \cup S_{n-m-1} = S_{n-m} \\ y' = S_{n-m} \cap S'_m \end{array}\right\}$ Perspekt.

Doppelverh. bei proj. Abb.

Bei proj. Abb. Doppelverh. erh.

affine Sonderformen d. Perspektiv.

Mass u. Integral

Mengenring

$\underline{\underline{R}}$ Mengenring $\Leftrightarrow$
a) $\emptyset \in \underline{\underline{R}}$
b) $(\forall A, B \in \underline{\underline{R}})\ A \cup B,\ A \setminus B \in \underline{\underline{R}}$

δ Ring

$\underline{\underline{R}}$ δ Ring $\Leftrightarrow$
a), b)
c) $(\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}}$

σ Ring

$\underline{\underline{R}}$ σ Ring $\Leftrightarrow$
a), b)
c) $(\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}}$

$A \cap B \in \underline{\underline{R}}$ / Mengenring

$\underline{\underline{R}}$ Mengenring $A, B \in \underline{\underline{R}}$
$\Rightarrow A \cap B \in \underline{\underline{R}}$

$\sigma \Rightarrow \delta$

$\underline{\underline{R}}$ σ Ring $\Rightarrow$ $\underline{\underline{R}}$ δ Ring

$\exists A \supseteq \bigcup A_i \Leftrightarrow \delta$

$\underline{\underline{R}}$ Mengenring
$\underline{\underline{R}}$ δ Ring $\Leftrightarrow$ $(\forall A_i)_{i\in I}$ abz. aus $\underline{\underline{R}}$
$(\exists A \in \underline{\underline{R}})\ \bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset A \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \underline{\underline{R}}$

Mengenalgebra

$\underline{\underline{R}}$ Mengenalgebra auf $X \Leftrightarrow$
a), b)
c) $X \in \underline{\underline{R}}$
Mengenalgebra = Boolsche Verband

σ Algebra

$\underline{\underline{R}}$ σ Algebra $\Longleftrightarrow$
$\underline{\underline{R}}$ Mengenalgebra
$\wedge\, \underline{\underline{R}}$ σ Ring

δ Algebra übergl.

$\underline{\underline{R}}$ Mengenalgebra auf X
$\wedge\, \underline{\underline{R}}$ δ Ring $\Rightarrow \underline{\underline{R}}$ σ Algebra

Bsp

$\{A \subset X \mid A \text{ endl.}\}$ δ Ring
$\{A \subset X \mid A \text{ abz.}\}$ σ Ring
$\{A \subset X \mid \ \}$ σ Algebra
$\{A \subset X \mid A \text{ endl.} \vee X \setminus A \text{ endl.}\}$ MA
$\{A \subset X \mid A \text{ abz.} \vee X \setminus A \text{ abz.}\}$ σA

$A_i = \bigcup_{\lambda \in L_i} B_\lambda$
(B_λ) disj.
HR → HMR

$\underline{\underline{R}}$ Mengenring $(A_i)_{i \in I}$ endl. Fam aus $\underline{\underline{R}}$

$(\exists (B_\lambda)_{\lambda \in L}$ disj. endl. Familie aus $\underline{\underline{R}} \setminus \{\emptyset\})(\forall i \in I)(\exists L_i \subset L)$
$A_i = \bigcup_{\lambda \in L_i} B_\lambda$

monotone Menge

$\mathbb{R}$ monotone Menge $\Longleftrightarrow$
a) $(\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abnehm. Folge in $\mathbb{R}$,
$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}}$

b) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zunehm. Folge in $\mathbb{R}$
$(\exists A \in \underline{\underline{R}})\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{R}$

MM monot. Menge
MR Mengenring
δ-R
σ-R
σA

$\bigcap_{i\in I} \underline{\underline{R}}_i$ ist

$(\underline{\underline{R}}_i)_{i\in I}$ nichtleere Fam. von MM, (MR, δR, σR) $\rightarrow$
$\bigcap_{i\in I} \underline{\underline{R}}_i$ MM (MR, δR, σR)

Korollar von Vorsatz

$\underline{\underline{A}}$ Menge v. Mengen $\Rightarrow$
$\exists$ kleinste MM (MR, δR, σR) die $\underline{\underline{A}}$ enth.

Erzeugte Strukturen

kleinste MM (MR, δR, σR) die $\underline{\underline{A}}$ enth. heisst von $\underline{\underline{A}}$ erzeugte MM (MR, δR, σR) $\underline{\underline{A}}_M$, $\underline{\underline{A}}_R$, $\underline{\underline{A}}_\delta$, $\underline{\underline{A}}_\sigma$

$\delta \to \sigma$ erzeugt

$\underline{\underline{R}}$ δ-Ring
$\underline{\underline{R}}_\sigma = \{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge in $\underline{\underline{R}} \}$

$\underline{\underline{R}}$ MR
$\underline{\underline{R}}_\delta = \underline{\underline{R}}_m$

$\underline{\underline{R}}$ MR
a) $\underline{\underline{R}}_\delta = \underline{\underline{R}}_M$
b) $(\forall A \in \underline{\underline{R}}_\delta)(\exists B \in \underline{\underline{R}}) A \subset B$

Halbmengenring

$\underline{\underline{R}}$ Halbmengenring HMR $\Leftrightarrow$
a) $\emptyset \in \underline{\underline{R}}$
b) $(\forall A, B \in \underline{\underline{R}})(\exists (A_i)_{i\in I}, (B_\lambda)_{\lambda\in L}$ disj. endl. Fam. in $\underline{\underline{R}})$
$A \setminus B = \bigcup_{i\in I} A_i \quad A \cap B = \bigcup_{\lambda\in L} B_\lambda$

Bsp. HMR

- $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ HMR
  $\{A \times B \mid A \in \mathfrak{R}, B \in \mathfrak{S}\}$ HMR
- $\{\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid$ a) $A_n \subset \{0,1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
  b) $\{n \in \mathbb{N} \mid A_n \neq \{0,1\}\}$ endl $\}$

HMR → MR erzeugt

$\mathfrak{R}$ HMR

$\mathfrak{R}_\varrho = \{\bigcup_{i \in I} A_i \mid (A_i)_{i \in I}$ disj. endl. Fam. aus $\mathfrak{R}\}$

Borel'sche Mengen

X Haus topol. Raum $\mathfrak{T}$ Menge d. offenen Mengen

$\mathfrak{T}_\sigma$ Borel'sche Mengen o. X

$\mathfrak{T}_\sigma = \mathfrak{T}\delta$

$\mathfrak{K}_\delta$

X Hausdorffraum $\mathfrak{k}$ Menge d. kompakten Mengen o. X

$\mathfrak{K}_\delta = \{A \mid A \in \mathfrak{T}_\sigma, A$ rel. komp$\}$
$\bar{A}$ komp

$\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kompaktifiz. Zahlengerade

nicht def. $\infty - \infty$

$0 \cdot \infty = 0$

$\mathfrak{I} \to \mathfrak{I}_\varrho, \mathfrak{I}_\sigma, \mathfrak{I}_\delta$

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $a < b$

$\mathfrak{I} := \{[x, y[\mid x, y \in]a, b[\}$

a) $\mathfrak{I}$ Halbmengenring

b) $\mathfrak{I}_\varrho = \{\bigcup_{i \in I} A_i \mid (A_i)_{i \in I}$ disj. endl. Fam. a. $\mathfrak{I}\}$

c) $\mathfrak{I}_\sigma = \{A \mid A$ Borel'sche Menge o. $]a, b[\}$

d) $\mathfrak{I}_\delta = \{A \mid A$ rel. komp. Bor. Mengen o. $]a, b[\}$

neue Def. von HMR in Praxis brauchbar

$\underline{\underline{R}}$ HMR $\Longleftrightarrow$

a) $\emptyset \in \underline{\underline{R}}$

b) $(\forall A,B \in \underline{\underline{R}})\ A \cap B \in \underline{\underline{R}}$

c) $(\forall A,B \in \underline{\underline{R}})(\exists (A_i; i \in I)$ disj. endl. in $\underline{\underline{R}}$

$A \setminus B = \bigcup_{i \in I} A_i$

μ posit. Mass

μ positives Mass auf $\underline{\underline{R}}$ HMR $\Leftrightarrow$

$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disj. a. $\underline{\underline{R}}$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

σ Additivität

Dirac'scher Mass

$\underline{\underline{R}}$ HMR $\quad x \in \bigcup_{A \in \underline{\underline{R}}} A$

$$\mu : \underline{\underline{R}} \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Diracsches Mass (1926)

Bsp Mass

$\underline{\underline{R}} = \{ A \subset X$ unendl. $\mid A$ endl $\vee X \setminus A$ endl $\}$

MA auf X

$$\mu : \underline{\underline{R}} \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \begin{cases} 1 & X \setminus A \text{ endl} \\ 0 & A \text{ endl.} \end{cases}$$

μ pos. Mass $\Leftrightarrow X$ überabz.

lim sup lim inf

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\limsup_{n \to \infty} \alpha_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} \alpha_m$$

$$\liminf_{n \to \infty} \alpha_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} \alpha_m$$

konvergenz. $\sum_{i\in I}\alpha_i$

$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n = \limsup_{n\to\infty}\alpha_n \iff:$

$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \lim_{n\to\infty}\alpha_n \quad (n\to\infty$

$(\alpha_i)_{i\in I}$ Fam. aus $\overline{\mathbb{R}}_+$

$\sum_{i\in I}\alpha_i := \sup\{\sum_{i\in J}\alpha_i \mid J\subset I \text{ endl}\}$

triviale Beziehungen

- $\varphi: J\to I$ bij.
  $((\alpha_i)_{i\in I}$ Fam. $\overline{\mathbb{R}}) \models \sum_{i\in I}\alpha_i = \sum_{\lambda\in J}\alpha_{\varphi(\lambda)}$
- $((\alpha_i)_{i\in I}$ Fam. $\mathbb{R}_+)$ $((I_\lambda)_{\lambda\in L}$ disj Fam. $\bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda = I)$
  $\sum_{i\in I}\alpha_i = \sum_{\lambda\in L}\sum_{i\in I_\lambda}\alpha_i$
- $((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fdg. $, \overline{\mathbb{R}}_+)$
  $\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=1}^{n}\alpha_m$
- $((\alpha_i)_{i\in I}), (\beta_i)_{i\in I}$ Fam, $\overline{\mathbb{R}}_+)$
  $\sum_{i\in I}(\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) = \alpha\sum_{i\in I}\alpha_i + \beta\sum_{i\in I}\beta_i$

fastHiv HS

$\underline{R}$ HMR μ pos. M. auf $\underline{R}$

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $((A_i)_{i\in I}$ disj. abz. Fam. $\underline{R})$
$\bigcup_{i\in I} A_i \in \underline{R} \Rightarrow \mu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I}\mu(A_i)$

Folgesatz Eindeut. keit d. Masse auf $\mathbb{R}_\rho$

$\underline{R}$ HMR μ, ν posit. Masse a. $\underline{R}_\rho$

$\mu|\underline{R} = \nu|\underline{R} \Rightarrow \mu = \nu$

Fortsetzung d. Masses v. $\underline{\underline{R}}$ HMR auf $\underline{\underline{R}}_R$

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ pos. Mass a. $\underline{\underline{R}}$
$\exists!$ posit. Mass ν auf $\underline{\underline{R}}_R$
$\nu / \underline{\underline{R}} = \mu$

Def. v. ν auf $\underline{\underline{R}}_R$

$\underline{\underline{R}}$ HMR $A \in \underline{\underline{R}}_R$
($\exists (A_\iota)_{\iota \in I}$ disj endl. Fam. a $\underline{\underline{R}}$)
$A = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$

$\nu(A) := \sum_{\iota \in I} \mu(A_\iota)$

Unterdefinitionen der σ-Additivität hier: Eigensch.

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ pos. Mass auf $\underline{\underline{R}}$
$A, B \in \underline{\underline{R}}$

a) Additivität

$A \cap B = \emptyset \quad A \cup B \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow$
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

b) $A \subset B \quad B \setminus A \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow$
$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

c) Monotonie

$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

d) Modularität

$A \cup B \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow$
$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

e) Subadditivität

$A \cup B \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

Stetigkeit d. Masse

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ pos. Mass auf $\underline{\underline{R}}$

a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge in $\underline{\underline{R}}$
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow$

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abn. Folge in $\underline{\underline{R}}$
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow$

$$\mu \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

σ Subadditivität

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ pos. Mass a. $\underline{\underline{R}}$
$A \in \underline{\underline{R}}$ $(A_\iota)_{\iota\in I}$ abz. Fam. a. $\underline{\underline{R}}$

$$A \subset \bigcup_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow \mu(A) \le \sum_{\iota\in I} \mu(A_\iota)$$

σ Subadditivität

μ beschr. auf σ-Ringen

$\underline{\underline{R}}$ σ Ring μ posit. Mass auf $\underline{\underline{R}}$
$\Rightarrow \mu$ beschränkt
d.h. $\sup_{A\in R} \mu(A) < \infty$

zunehm.

$a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ $a<b$ $f :]a,b[\to \mathbb{R}$
f zunehmend $\Longleftrightarrow$
$(\forall x,y \in]a,b[)\ x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

linksstetig

f linksstetig $\Longleftrightarrow$
$(\forall x \in]a,b[)(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge
aus $]a,b[$ $\sup x_n = x$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

$\mu[x,y[= f(y)-f(x)$

$a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ $a<b$
f zun., linksstet. reelle Fkt auf
$]a,b[$ $\underline{\underline{I}} := \{[x,y[\mid x,y \in]a,b[\}$
$\Longrightarrow \mu : \underline{\underline{I}} \to \mathbb{R}$
$\mu[x,y[= f(y) - f(x) \quad (x \le y)$
ist pos. Mass.

abzählb. Überdeck.

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ pos. Mass auf $\underline{\underline{R}}$
Eine abzählb. Überdeckung von A
aus $\underline{\underline{R}}$ ist eine abz. Familie
$(A_\iota)_{\iota\in I}$ aus $\underline{\underline{R}}$ $A \subset \bigcup_{\iota\in I} A_\iota$

μ-Null-menge

A heisst μ-Nullmenge, wenn
$(\forall B \in \underline{\underline{R}})(\forall \varepsilon > 0)(\exists (A_\iota)_{\iota\in I}$ abz. Überd.
von $A \cap B$ auf $\underline{\underline{R}}$ $\sum_{\iota\in I} \mu(A_\iota) < \varepsilon$

μ-fast überall

X Menge P Aussage über Variable x
(die x durchläuft)
P :μ-:fast überall, wenn
$\{x \in X \mid P(x)$ falsch oder $\neg$def$\}$ μ NMenge
Man schreibt :μ-:fü

Hilfssatz über μ Nullmengen

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ pos. Mass a. $\underline{\underline{R}}$
a) $\forall A \in \underline{\underline{R}}$ A μ NM $\Rightarrow \mu(A) = 0$
b) $\emptyset$ μ-Nullmenge
c) $(\forall B \in \underline{\underline{R}})$ $A \cap B$ μ-NM $\Rightarrow A$ μ NM
d) Teilm. v. μ-NM μ-NM
e) Verein abz. μ Nullm. μ NM.

Massraum σ Massraum

Massraum ist ein Tripel $(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$
X Menge $\underline{\underline{R}} \subset \underline{\underline{P}}(X)$ HMR μ pos. Mass
X heisst Grundmenge d. Massraumes
Ein σ Massraum ist ein Massraum $(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ sodass $\underline{\underline{R}}$ σ Ring

äusseres Mass auf X

X Menge $\mu : \underline{\underline{P}}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$
äusseres Mass $\Leftrightarrow$
a) $\mu(\emptyset) = 0$
b) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$
c) $((A_\iota)_{\iota \in I}$ abz. Fam $\underline{\underline{P}}(X)$
$\mu\left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\right) \le \sum_{\iota \in I} \mu(A_\iota)$

σ endl. Massraum

Massraum $(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ σ endlich
wenn abz. Überd. von X aus
$\underline{\underline{R}}$ exist.

vollst. Mass-raum

Massraum heisst vollständig $\Leftrightarrow$

a) $\underline{\underline{R}}$ MR

b) $\forall A \subset X \mid A\ \mu$-Nullm $\Rightarrow A \in \underline{\underline{R}}$

c) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge a. $\underline{\underline{R}}$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}}$

(μ ist vollst. bzgl. X)

zu $(X,\underline{\underline{R}},\mu)$ assoz. äusseres Mass

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum

$\mu^*_X : \underline{\underline{P}}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$A \mapsto \inf \{ \sum_{i\in I} \mu(A_i) \mid (A_i)_{i\in I}$ abz. Fam $\underline{\underline{R}} \wedge A \subset \bigcup_{i\in I} A_i\ \mu$ NM$\}$

μ^*_X heisst das zu $(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ assoz. äussere Mass $\mu^* = \mu^*_X$

Hilfssatz über äusseres Mass

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum

a) μ^* äusseres Mass

b) $\mu^* / \underline{\underline{R}} = \mu$

c) $(\forall A \subset X)$ $A\ \mu$ Nullm $\Leftrightarrow \mu^*(A) = 0$

d) $A \subset X$ $(\exists (A_i)_{i\in I}$ abz. überd. v. A aus $\underline{\underline{R}})$ $\mu(A) = \inf\{\sum_{i\in I} \mu(A_i)\}$

Caratheodory Konstr. eines vollst. δ-Massraums aus einem äusseren M.

X Menge μ äusseres Mass a. X

$\underline{\underline{R}} = \{ A \in \underline{\underline{P}}(X) \mid \mu(A) < \infty \ \wedge$

$(\forall B \subset X)\ \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)\}$

$\Rightarrow$ a) $\underline{\underline{R}}$ δ Ring

c) $(\forall A \subset X)\ \mu(A) = 0 \Rightarrow A \in \underline{\underline{R}}$

vollst.

b) $\mu / \underline{\underline{R}}$ pos Mass

d) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge aus $\underline{\underline{R}}$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}}$

zu μ assoz. δ Massr.

$(X,\underline{\underline{R}},\mu|\underline{\underline{R}})$ der zu μ assoz. δ Massraum

Fortsetzung des Masses von HMR auf δ-Ring

$(X,\underline{\underline{R}},\mu)$ Massraum
μ^* assoz. äussere Mass auf X
$(X,\underline{\underline{S}},\nu)$ zu μ^* assoz. δ Massr.

a) $(X,\underline{\underline{S}},\nu)$ vollst
b) $\underline{\underline{R}} \subset \underline{\underline{S}}$
c) $\nu|\underline{\underline{R}} = \mu$
d) $(\forall A \in \underline{\underline{S}})\ \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F. in $\underline{\underline{R}}$
$A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ μ Nullmenge
e) $A \subset X$
1) A μ Nullmeng
$\Updownarrow$
2) A ν Nullmeng
$\Updownarrow$
3) $A \in \underline{\underline{S}}$ $\nu(A)=0$

Stieltjessches Mass
Lebesguesches Mass

$a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ $a<b$ f zun. linksstet. reelle Fkt auf $]a,b[$
$\underline{\underline{I}} := \{[x,y[\mid x,y \in]a,b[\}$
$(]a,b[, \underline{\underline{I}}, \mu)$ Massraum
$\mu: \underline{\underline{I}} \to \mathbb{R}$ $[x,y[\mapsto f(y)-f(x)$ $x\le y$

Die Vervollst. von μ bzgl. $]a,b[$ heisst das zu f erzeugte Stieltjessche Mass

$f(x)=x$ $\forall x \in]a,b[$
Vervollst.
Lebesguesches Mass auf $]a,b[$

Eindeut. d. Fortsetzung

$\underline{\underline{R}}$ HMR μ, ν posit. Masse a. $\underline{\underline{R}}_\delta$
$(\forall A \in \underline{\underline{R}})\ \mu(A) \le \nu(A) \Rightarrow$
$(\forall A \in \underline{\underline{R}}_\delta)\ \mu(A) \le \nu(A)$

Vert. d. Massraum u. seine Vervollst.

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ δ Massraum
$(X, \underline{\underline{S}}, \nu)$ Vervollst. $\quad A \subset X$

a) $(\exists B \in \underline{\underline{R}})\ A \subset B \Rightarrow (\exists C \in \underline{\underline{R}})\ A \subset C \subset B$
$\mu^*(A) = \mu(C)$

b) $(\exists B \in \underline{\underline{R}})\ A \subset B \quad A \in \underline{\underline{S}} \Rightarrow$
$(\exists C, D \in \underline{\underline{R}})\ C \subset A \subset D \subset B \quad D - C\ \mu$ NM

c) $A \in \underline{\underline{S}} \Rightarrow$
$\exists\ (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zun. Folge aus $\underline{\underline{R}}$
$A \sim \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ μ Nullmenge

Idempot. d. Vervollst.

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ vollst. Massr. $\Rightarrow$
$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Vervollst. von $(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$

gleiche Vervollst. von Zwischenmass

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massr. mit Vervollst $(X, \underline{\underline{S}}, \nu)$
T HMR $\quad \underline{\underline{R}} \subset \underline{\underline{T}} \subset S \quad \lambda := \nu / \underline{\underline{T}}$

a) μ-Nullm. $\equiv$ ν Nullm

b) $\mu^* = \lambda^*$

c) $(X, \underline{\underline{S}}, \nu)$ ist Vervollst. v. $(X, \underline{\underline{T}}, \nu)$

charakt. Funkt. von A bzgl. X

$A \subset X$

$1_A^X = 1_A : X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

charakterist. Funktion von A bzgl. X

Treppen-funktion

$\underline{\underline{R}} \subset \underline{\underline{P}}(X)$

Treppenfunkt. auf X bzg. $\underline{\underline{R}}$

$f : P(\underline{\underline{R}}) \to \mathbb{R}$

$(A_\iota)_{\iota \in I} \mapsto \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota 1_{A_\iota}^X \quad (\alpha_\iota)_{\iota \in I} \in \mathbb{R}$

Vereinf. d. Treppenfunkt. bei MR

$\underline{\underline{R}}$ MR v. Teilmengen v. X

f Treppenfkt. auf X bzg $\underline{\underline{R}}$

a) $(\exists (B_\lambda)_{\lambda \in L}$ disj. endl. Fam $\underline{\underline{R}} - \emptyset)$ $(\exists \beta_\lambda)_{\lambda \in L}$ Fam. $\underline{\underline{R}})$ $f = \sum \beta_\lambda 1_{B_\lambda}$

b) $f \geq 0 \Rightarrow (\forall \lambda \in L)\, \beta_\lambda \geq 0$

c) $\forall \alpha > 0 \Rightarrow \{f \geq \alpha\} \in \underline{\underline{R}}$

d) $\forall \alpha \geq 0 \Rightarrow \{f > \alpha\} \in \underline{\underline{R}}$

$\wedge, \vee$

$f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$

$f \wedge g : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$x \mapsto \inf(f(x), g(x))$

$f \vee g : x \mapsto \sup(f(x), g(x))$

$(f_\iota)_{\iota \in I}$ Fam. aus $\overline{\mathbb{R}}^X$

$\bigwedge_{\iota \in I} f_\iota : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$x \to \inf_{\iota \in I} f_\iota(x)$

$\bigvee_{\iota \in I} f_\iota \quad x \to \sup_{\iota \in I} f_\iota(x)$

Teilvektorverband

$F \subset \mathbb{R}^X$

F Teilvektorverband v. $\mathbb{R}^X$

a) $0 \in F$

b) $(\forall f, g \in F)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\alpha f + \beta g \in F$

Teilvektorraum

c) $(\forall f, g \in F)\ f \wedge g,\ f \vee g \in F$

$\mathcal{L}$ Teilvektorverb.

$\underline{\underline{R}}$ MR auf X

$\mathcal{L}$ Menge d. Treppenfkt. auf X

a) $\mathcal{L}$ Teilvektorverb. von $\mathbb{R}^X$

b) $(\forall f \in \mathcal{L})\ f \wedge 1_X \in \mathcal{L}$

$\sum \alpha_\iota 1_{A_\iota} \to \sum \alpha_\iota \mu(A_\iota)$ wohldef.

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum

$(A_\iota)_{\iota \in I}$ endl. Fam. aus $\underline{\underline{R}}$

$(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ Fam. aus $\mathbb{R}$

$\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota 1_{A_\iota} = 0 \Rightarrow \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \mu(A_\iota) = 0$

$1_{A_\iota} \to \mu(A_\iota)$ Integral eindeutig

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum

$(A_\iota)_{\iota \in I}$, $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ endl. Fam a. $\underline{\underline{R}}$

$(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ Fam. aus $\mathbb{R}$

$\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota 1_{A_\iota} = \sum_{\lambda \in L} \beta_\lambda 1_{B_\lambda}$

$\Rightarrow \sum_{\lambda \in L} \alpha_\iota \mu(A_\iota) = \sum_{\lambda \in L} B_\lambda \mu(B_\lambda)$

Def. des Integrals
da noch nicht selbst ∫ nach.

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum
f Treppenfkt. auf X bzgl. $\underline{\underline{R}}$

$$f = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota 1_{A_\iota}$$

$$\mu(f) := \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \mu(A_\iota)$$

Eigenschaften des Integrals

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum $\underline{\underline{R}}$ HR sogar
$\mathcal{L}$ Menge d. Treppenfkt. auf X bzgl. $\underline{\underline{R}}$

a) $(\forall f, g \in \mathcal{L})(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
$\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha \mu(f) + \beta \mu(g)$

b) $(\forall f, g \in \mathcal{L})$ $f \leq g$
$\Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g)$ Monot.

c) $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abn. Folge aus $\mathcal{L}$
$\bigwedge (f_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 \Rightarrow$
$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(f_n) = 0$

d) $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zun. Folge aus $\mathcal{L}$
$(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{L})$ $\mu(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(f_n)$

messb. Raum

$(X, \underline{\underline{R}})$ messb. Raum
$\underline{\underline{R}}$ σ Ring $\underline{\underline{R}} \subseteq \underline{\underline{P}}(X)$

Messbare Mengen, messbare num. Funkt.

$A \subset X$ messb. Menge v. X $\Longleftrightarrow$
$\mathbb{R}$ messb. Menge

$(\forall B \in \underline{\underline{R}})$ $A \cap B \in \underline{\underline{R}}$

$f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ (num. Funkt.) messbar $\Longleftrightarrow$
$(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $\{f < \alpha\}$ messbar

$\underline{\underline{S}} := \{A \text{ messb}\}$
vgl. W.th.
dort alle Mengen
$\mathbb{R}$ messbar

$(X, \underline{\underline{R}})$ messb. Raum

$\underline{\underline{S}} := \{A \subset X \mid A \text{ messbar}\}$

a) $\underline{\underline{S}}$ σ Algebra auf X

b) $\underline{\underline{R}} \subseteq \underline{\underline{S}}$

c) $X \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{S}}$

Eigenschaften v. Messbaren Funktionen

X messbarer Raum

- $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^X \Rightarrow \alpha 1_X$ messbar
- $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ messb. $\Rightarrow -f$ messbar
- $(f_\iota)_{\iota \in I}$ abz. Fam. messb. num. Fkt. auf X
  $\Rightarrow \bigvee_{\iota \in I} f_\iota, \bigwedge_{\iota \in I} f_\iota$ messbar
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge messb. num. Fkt. auf X
  $\Rightarrow \liminf_{n \to \infty} f_n, \limsup_{n \to \infty} f_n$ messbar
- $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ messbar $\alpha \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow \{f < g + \alpha\}, \{f \leq g + \alpha\}, \{f = g + \alpha\}, \{f \neq g + \alpha\}$ messbar
- $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ messbar $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$
  $\{f < \alpha\}, \{f \leq \alpha\}, \{f = \alpha\}, \{f \neq \alpha\}, \{f > \alpha\}, \{f \geq \alpha\}$ messbar

<u>Flickkriterium</u>

- $(A_\iota)_{\iota \in I}$ disj. abz. Fam. messb. Mengen
  $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = X$ $(f_\iota)_{\iota \in I}$ Famil. messb. Fkt.
  $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ $f \restriction A_\iota = f_\iota \restriction A_\iota \Rightarrow f$ messbar

- $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ messb $\Leftrightarrow f^+, f^-$ messb $\Rightarrow |f|$ messb
  $\wedge$ $\{|f| = \infty\}, \{|f| < \infty\}$ messb.

- f messbar $g : X \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \begin{cases} f(x) & f(x) \in \mathbb{R} \\ 0 & f(x) \notin \mathbb{R} \end{cases}$
  g messbar

- $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ f, g messb
  $\Rightarrow f \cdot g, \underbrace{f + g}_{\text{falls def.}}$ messbar αf messb.

Treppen funkt. messbar

$(X, \underline{\underline{R}})$ messb. Raum
f Treppenfunkt. auf X bzgl. $\underline{\underline{R}}$
$\Rightarrow f$ $\underline{\underline{R}}$ messbar

genau diejenigen Mengen Funkt. messbar die sich durch zun. Folge von Treppenfunkt. approximieren lässt

$(X, \underline{\underline{R}})$ messb. Raum
$f \in \overline{\mathbb{R}}_+^X$ $\underline{\underline{R}}$ messb.
$\exists (A_\iota)_{\iota \in I}$ abz. Fam. a. $\underline{\underline{R}}$
$\{f > 0\} \subset \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \implies$

$\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zun. Folge v. Treppenfunkt. auf X bez. $\underline{\underline{R}}$
$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$

μ-messbar $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{S}}$ messbar

$(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$ Massraum
$(X, \underline{\underline{S}}, \nu)$ Vervollst. v. $(X, \underline{\underline{R}}, \mu)$
$\mathcal{L}$ Menge d. Treppenfunkt. bez $\underline{\underline{S}}$

μ-messbar $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{S}}$ messbar
(f. Mengen u. Funkt.)

μ-integrierbar

f num. Fkt. auf X heisst (μ-)Integrierbar wenn
a) f μ messbar
b) $\sup\{\nu(g) \mid g \in \mathcal{L}, g \leq |f|\} < \infty$

Integral

$\int f \, d\mu = \sup\{\nu(g) \mid g \in \mathcal{L}\ g \leq f^+\} - \sup\{\nu(g) \mid g \in \mathcal{L}\ g \leq f^-\}$

Integral zu f bez. μ

$\mathcal{L}^1$

$\mathcal{L}^1(\mu, X) = \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu)$
Menge der μ integr.-baren Funkt. auf X

$A \subset X$

$A \subset X$ $\quad A \in \mathcal{L}^1 \iff 1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$f \in \overline{\mathbb{R}}^X$

Hilfssatz

a) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$
$\Updownarrow$
b) $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$
$\Downarrow$
c) $\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$

$\{|f| = \infty\}$ μ Nullm.

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$
$\Rightarrow f$ μ fü endl.
d.h. $\{|f| = \infty\}$ μ Nullm.

Treppenfkt. integr.

$f \in \mathcal{L}$
$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\quad \int f \, d\mu = \nu(f)$

Integr. auf bzl. MR

f Treppenfkt. bzgl. $\underline{R}$ MR
$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\quad \int f \, d\mu = \mu(f)$

$A \subset X \Rightarrow \nu(A) = \int 1_A \, d\mu$

$A \subset X$

a) $A \in \underline{\underline{S}}$

$\Updownarrow$

b) A μ integr.bar

$\Downarrow$

c) $\nu(A) = \int 1_A \, d\mu$

$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$

f ü

$f \in \overline{\mathbb{R}}^X$

$\Longrightarrow \sup\{\nu(g) \mid g \in \mathcal{L} \ g \leq |f|\}$

$= \sup\{\nu(g) \mid g \in \mathcal{L} \ g \leq |f| \text{ fü}\}$

$f \leq g$ μ fü $\Rightarrow \int f \leq \int g$

$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $f \leq g$ μ fü

$\Longrightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

$f = g$ μ fü $\Rightarrow \int f = \int g$

$f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ $f = g$ μ fü

$\Longrightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

$f = 0$ μ fü $\Leftrightarrow \int f = 0$

$f \in \overline{\mathbb{R}}_+^X$

a) $f = 0$ μ-fü

$\Updownarrow$

b) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\int f \, d\mu = 0$

$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$

$f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ f μ messb.

$\Rightarrow \left| \int f\,d\mu \right| \le \int |f|\,d\mu$

$\bigvee f_\iota \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\iota\in I$

$(f_\iota)_{\iota\in I}$ nicht leere abz. Fam a. $\mathcal{L}^1(\mu)$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $(\forall \iota\in I)\ f_\iota \le f$ μ-f.ü.

$\Rightarrow \sup_{\iota\in I} \vee f_\iota \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \exists (f_n)\ \bigvee f_n = f$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\Rightarrow \exists\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge a. $\mathcal{L}_+$

$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$

$\int \bigvee f(n)\,d\mu = \sup \int f_n\,d\mu$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun. Folge aus $\mathcal{L}_+$

$\sup \nu(f_n) < \infty$

$\Rightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f(n) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\int \bigvee f(n)\,d\mu = \sup \int f_n\,d\mu$

$f+g$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ falls defin.

$f+g$

$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad f \dotplus g \in \overline{\mathbb{R}}^X$

$\cancel{(\forall x \in X)(f \dotplus g)x = f\cdot}$

$\Rightarrow$ a) $f \dotplus g \quad f \vee g \quad f \wedge g \quad f \wedge 1_X \in \mathcal{L}^1\mu$

b) $\int f \dotplus g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

$f \leq g$ μ-f.ü.
$\int f = \int g$
$\Rightarrow f = g$ μ-f.ü.

$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad f \leq g \ \mu\text{-f.ü.}$

$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu \Rightarrow f = g \ \mu\text{-f.ü.}$

Sandwich krit.

$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad h \in \overline{\mathbb{R}}^X \quad f \leq h \leq g \ \mu\text{-f.ü.}$

$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

$\Rightarrow h \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\int h \, d\mu = \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

Beppo Levi 1906

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu Folge aus $\mathcal{L}^1(\mu)$

$(\forall n \in \mathbb{N}) \ f_n \leq f_{n+1} \ \mu$-f.ü.

$\longrightarrow$ a) $\vee f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\Updownarrow$ b) $\sup \int f_n < \infty$

$\Downarrow$ c) $\int \vee f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$

$\int \Sigma \quad \Sigma \int$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $\mathcal{L}^1(\mu)_+$

$\longrightarrow$ a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\Updownarrow$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu < \infty$

$\Downarrow$

c) $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu$

andere Formul. von Beppo Levi

$(f_i)_{i \in I}$ nicht leere abz. Fam aus $\mathcal{L}^1(\mu)$
$(\forall i, i'' \in I)(\exists i' \in I)$ $f_i \leq f_{i'}$ μ fü
$f_{i''} \leq f_{i'}$ μ fü

$\Longrightarrow$ a) $\vee f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$
$\Leftarrow$ b) $\sup \int f_i \, d\mu < \infty$
$\Downarrow$ c) $\int \bigvee_{i \in I} f_i \, d\mu = \sup_{i \in I} \int f_i \, d\mu$

Lebesgue'sche Konvergenzsatz 1907

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge aus $\mathcal{L}^1(\mu)$
$f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mu)$
$(\forall n \in \mathbb{N})$ $|f_n| \leq f$ μ fü
$\vee (\forall n \in \mathbb{N})$ $g \leq f_n \leq h$ μ fü

$\Longrightarrow$ a) $\int \liminf_{n \to \infty} f_n \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$
$\leq \limsup_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n \to \infty} f_n \, d\mu$ — Fatou'sches Lemma 1906

b) $f_0 \in \overline{\mathbb{R}}^X$ $\lim_{n \to \infty} f_n = f_0$ μ fü

$\Longrightarrow \int f_0 \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$

abz. Teilm. Nullm. $\mu(A) =$ Länge v. A f. Intervall

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $a < b$ μ lebesgue'sches Mass auf $]a,b[$ $\underline{\underline{R}}$ Defbereich v. μ

$\Longrightarrow$ a) jede abz. Teilmenge v. $]a,b[$ ist μ Nullmenge

b) $\forall A$ beschr. Integral von R
$A \subset]a,b[$ $A \in \underline{\underline{R}}$ $\mu(A)$ Länge v. A

Definition d. Riemannschen Integrals

$a,b \in \mathbb{R}$ f beschr. reelle Fkt. auf $]a,b[$

$$\forall A \subset [a,b[\qquad \alpha(A) := \inf_{x \in A \cap]a,b[} f(x)$$

$$\beta(A) := \sup_{x \in A \cap]a,b[} f(x)$$

$$\mathcal{A} := \{ (x_i)_{0 \le i \le n} \mid n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b \}$$

$$\forall \delta := (x_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{A}$$

$$\underline{f}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha([x_{i-1}, x_i[)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{f}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \beta([x_{i-1}, x_i[)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \inf_{\delta \in \mathcal{A}} \overline{f}(\delta)$$ oberes Riem. Integral v. f

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \sup_{\delta \in \mathcal{A}} \underline{f}(\delta)$$ unteres Riem. Integral v. f

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx =: \int f(x)\,dx$$

f Riemann integrierbar

$\{R\text{ integr}\} \underset{\text{echt}}{\subseteq} \{L\text{ integr}\}$

$a,b \in \mathbb{R}$ $a < b$ μ Lebesguesches Mass auf $]a,b[$ f Riemann integrierbare beschr. reelle Fkt. auf $]a,b[$

$\Rightarrow$ a) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\int f\,d\mu = \int f(x)\,dx$

b) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ g beschr.
g nicht Riemann integr.

Vektorverband
Teilvektorverband

Ordn.rel. $\le$	refl. ident trans.
geordn. Menge	Menge m. Ord.rel
obere Schranke x	E geordn. Menge $(x_\iota)_{\iota\in I}$ Fam aus E $x_\iota \le x$ $(\forall \iota \in I)$
nach oben beschr.	$\exists$ obere Schranke
beschränkt	$\exists$ obere, untere Schranke
Supremum = obere Grenze $\bigvee\limits_{\iota\in I}^{E} x_\iota$	kleinste obere Schranke
Verband	geordn. Menge $\forall x,y\in E \; \exists \; x\vee y \;\; x\wedge y$
induz. Ordn.rel.	$F\subset E$
Teilverband	$\forall x,y\in F \;\; x\vee y \;\; x\wedge y\in F$
geordn. VR	reeller VR E mit Ordn.rel $\le$ $(\forall x,y,z\in E)(\forall \alpha\in\mathbb{R}_+)$ $x\le y \Rightarrow x+z\le y+z$ $x\le y \Rightarrow \alpha x\le \alpha y$
$E_+ := \{x\in E \mid x\ge 0\}$	
Vektorverband	geordn. VR d. bzgl. Ordn.rel. Verband
$x^+ = x\vee 0$ $x^- = -x\vee 0$ $\lvert x\rvert = x\vee(-x)$	
Teilvektorverband F	F Teilvektorraum F Teilverband

H/S 3

E geordn. VR $x, y \in E$
$\alpha \in \mathbb{R}_+$ $(x_i)_{i\in I}$ Fam. a. E $\exists \bigvee_{i\in I} x_i$

a) $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$

b) $\exists \bigvee_{i\in I} (x + x_i) = x + \bigvee_{i\in I} (x_i)$

c) $\exists \bigvee_{i\in I} \alpha x_i = \alpha \bigvee_{i\in I} x_i$

d) $\exists \bigwedge_{i\in I} (-x_i) = -\bigvee_{i\in I} x_i$

$\vee$ mit $\wedge$ vert. entspr.

Eigensch. von Vektorverb.

E Vektorverb. $x, y, z \in E$
$y \geq 0$ $z \geq 0$ $x = y - z$
$\Rightarrow x^+ = y - y \wedge z \leq y$
$x^- = z - y \wedge z \leq z$

$x + y = x \vee y + x \wedge y$

$x = x^+ + x^-$
$x^+ \wedge x^- = 0$ orthog.
$|x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^- \geq 0$

reelles Mass

μ reelles Mass oder Mass
1) μ reelle Fkt. auf $\underline{\underline{R}}$
2) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disj. Folgen aus $\underline{\underline{R}}$
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

$M(\underline{\underline{R}}) = \{\mu \mid \mu$ reelles Mass a. $\underline{\underline{R}}\}$

$M(\underline{\underline{R}})$ Teilvektor verband

$M(\underline{\underline{R}})$ ist Teilvektorraum von $\mathbb{R}^{\underline{\underline{R}}}$

posit. Elem. von $M(\underline{\underline{R}})$ posit. Masse

Positivitätsmeng / Negativitätsmeng

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$
$A \in \underline{\underline{R}}$ Positivitätsmenge von μ
$\Leftrightarrow (\forall B \in \underline{\underline{R}})(B \subset A)\ \mu(B) \geq 0$

entspr. Negativitätsmeng von μ
$(\forall B \in \underline{\underline{R}})\ B \subset A \Rightarrow \mu(B) \leq 0$

(A_ι) Posit. meng. $\cup A$ Posit. meng.

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$ $(A_\iota)_{\iota \in I}$ abz. Fam v. Posit. mengen $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \underline{\underline{R}}$
$\Rightarrow \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ Posit. menge

Hilfssatz für Hahn

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$ $A \in \underline{\underline{R}}$
$\Rightarrow (\exists B$ Posit. menge v. μ $B \subset A)$
$(\forall C$ Posit. menge v. μ $C \subset A \setminus B)$
$\mu(C) = 0$

Satz v. Hahn

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$ $A \in \underline{\underline{R}}$
$\Rightarrow \exists A_+$ Posit. menge v. μ
$\exists A_-$ Negat. menge v. μ
$A_+ \cup A_- = A$ $A_+ \cap A_- = \emptyset$

Eindeut. d. Zerleg. in Posit. und Negat. mengen

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$ A', A'' Posit. meng v. μ
B', B'' Negat. meng. $A' \cap B' = \emptyset$
$A'' \cap B'' = \emptyset$ $A' \cup B' = A'' \cup B''$
$\Rightarrow \mu(A') = \mu(A'')$

Satz von Jordan

a) $M(\underline{R})$ ist Vektorraum.

b) $\mu \in M(\underline{\underline{R}})$ $A \in \underline{\underline{R}}$

A^+, A^- Posit. bzw. neg. Menge v. μ

$A^+ \cup A^- = A$ $A_+ \cap A_- = \emptyset$

$\Rightarrow \mu^+(A) = \mu(A_+)$ $\mu^-(A) = -\mu(A_-)$

$|\mu|(A) = \mu(A_+)\ \mu(A_-) \geq |\mu(A)|$

beschränkt
σ-beschränkt

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$ μ beschränkt $\Leftrightarrow$

$\sup |\mu(A)| < \infty$ $A \in \underline{\underline{R}}$

$\mu \in M(\underline{R})$ μ σ-beschränkt $\Leftrightarrow$

$(\exists (A_i)_{i\in I}$ abz. Fam. a. $\underline{R})$

$(\forall A \in \underline{R})\ \mu(A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i) = 0$

beschränkt ⇔ |μ| beschränkt ⇔ σ-beschränkt

$\mu \in M(\underline{\underline{R}})$

$\rightarrow$ a) μ beschränkt

$\Updownarrow$

b) $|\mu|$ beschränkt

$\Downarrow$

c) μ σ-beschränkt

Folg

Auf σ Ring alle Masse beschränkt

μ σ beschr ⇔ |μ| σ beschr

$\mu \in M(\underline{R})$

μ σ beschr $\Leftrightarrow$ $|\mu|$ σ beschr.

absolut-stetigkeit

$\nu \in M(\underline{R})$ $\quad (X, \underline{R}, \mu)$ σ Massraum

ν heisst μ-absolutstetig "$\nu \ll \mu$"

$\Leftrightarrow (\forall A \in \underline{R})\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

aequivalente Definitionen für absolut stetigk.

äquivalent sind

a) $\nu \ll \mu$

b) $|\nu| \ll \mu$

c) $(\forall A \in R)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall B \in \underline{R})\ B \subset A \wedge \mu(B) < \delta \Rightarrow |\nu|(B) < \varepsilon$

d) $(\forall A \subset X)$ A μ Nullm. $\Rightarrow A$ $|\nu|$ Nullm.

f $\underline{R}$ messb. $\Rightarrow f$ μ messb.

$(X, \underline{R}, \mu)$ σ Massraum $f \in \bar{\mathbb{R}}^{+}$ f $\underline{R}$ messb.

$\Rightarrow f$ μ messbar

lokal μ integrierbar

$f \in \bar{\mathbb{R}}^{X}$ f lokal μ-integrierbar wenn $(\forall A \in \underline{R})\ f 1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\mathcal{L}^1_{loc}(\mu, X)$ Menge d. lokal μ int.bar num. Funkt. auf X

$f\cdot\mu$

$f\cdot\mu : \underline{R} \to \mathbb{R} \quad A \mapsto \int f 1_A \, d\mu$

$\int f 1_A \, d\mu =: \int_A f \, d\mu$

Eigenschaft. von $f\cdot\mu$

$f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$

a) $f\cdot\mu \in M(\underline{R})$ $f\cdot\mu \ll \mu$

b) $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$
$(f\cdot\mu)^+ = f^+\cdot\mu$
$(f\cdot\mu)^- = f^-\mu$
$|f\cdot\mu| = |f|\cdot\mu$

c) $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff f\cdot\mu$ beschränkt

Radon Nykodym

Radon-Nykodym

$\nu \in M(\underline{R})$ $\nu \ll \mu$
ν σ beschränkt
$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$ $f\cdot\mu = \nu$
$f \in \mathbb{R}^X$ f $\underline{R}$-messbar

$(\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zun Folge aus $\underline{R})$
$\{f \neq 0\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\mathcal{L}^p,\ N_{p,\mu}$

$p \in \,]0,\infty[$

$\infty^p := \infty \qquad \frac{1}{\infty} := 0$

$\forall f \in \overline{\mathbb{R}}_+^X \quad f^p : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \mapsto f(x)^p$

$\mathcal{L}^p(\mu, X) := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p :=$
$\{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X \mid (f^+)^p, (f^-)^p \in \mathcal{L}^1(\mu) \}$

Funkt. aus $\mathcal{L}^p(\mu, X)$ p-fach μ integrierbar

$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu, X)$
$N_{p,\mu}(f) := N_p(f) := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$

$f \in \mathcal{L}^p(\mu)$
$|f| \in \mathcal{L}^p(\mu)$
$|f|^p \in ?$

$p \in \,]0,\infty[\quad f \in \overline{\mathbb{R}}^X$

a) $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$\Updownarrow$

b) f μ messb $\quad |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\Updownarrow$

c) f μ messb $\quad \exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad |f|^p \leq |g|$ μ-f.ü.

$\mathcal{L}^\infty(\mu)$

$\mathcal{L}^\infty(\mu, X) := \mathcal{L}^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty$
$:= \{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad |f| \leq \alpha$ μ-f.ü.
$\qquad f$ μ messbar $\}$

$N_{\infty,\mu}$

$\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$
$N_{\infty,\mu}(f) := N_\infty(f) := \inf \{ \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid |f| \overset{\mu\text{-f.ü.}}{\leq} \alpha \}$

$|f| \leq N_\infty(f)$

$f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$
$\Rightarrow |f| \leq N_\infty(f)$ μ fü

Bsp. v. ℓ^praum Dirac

$p \in]0,\infty[$
$\ell^p := \{ (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge aus $\mathbb{R}$ $|$ $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty \}$
$\ell^\infty := \{ (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschr. Folge aus $\mathbb{R} \}$

μ Zählmass $\Rightarrow \ell^p = \mathcal{L}^p(\mu)$

Krit. für $h \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$p \in]0,\infty[$ $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $h \in \overline{\mathbb{R}}^*$ μ messb.

a) $|h| \leq |f|$ μ fü $\Rightarrow h \in \mathcal{L}^p(\mu)$
b) $f \leq h \leq g$ μ fü $\Rightarrow h \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$f = g$ μ fü $\Rightarrow$ $N_p(g) = N_p(f)$

$p \in]0,\infty]$ $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $g \in \mathbb{R}^*$.
$f = g$ μ fü

$\Rightarrow g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $N_p(g) = N_p(f)$

$f = 0$ μ fü $\Leftrightarrow$ $N_p(f) = 0$

$p \in]0,\infty]$ $f \in \overline{\mathbb{R}}^*$

a) $f = 0$ μ fü
$\Updownarrow$
b) $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $N_p(f) = 0$

$|f| < \infty$

$p \in]0,\infty]$ $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$
$\Rightarrow |f| < \infty$ μ fü

Hölder'sche Ungleichung

$p, q \in [1,\infty]$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
konj. Zahlen
$f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$\Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$
$N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g)$
Hölder'sche Ungl.

Minkowski'sche Ungleichung

$p \in [1,\infty]$ $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$
$\alpha \in \mathbb{R}$ $f+g \in \overline{\mathbb{R}}^X$
$(\forall x \in X)$ $f(x) + g(x)$ defin.
$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

a) $f+g,\ \alpha f,\ f \vee g,\ f \wedge g \in \mathcal{L}^p(\mu)$

N_p Seminorm

b) $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$
Minkowski'sche Ungl.
$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$

$N_p(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} N_p(f_n)$

$p \in [1,\infty]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} N_p(f_n) < \infty$

Beh: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$
$N_p(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} N_p(f_n)$

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$

$p \in [1,\infty]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathbb{R}^X$
$\sum N_p(f_n - f_{n+1}) < \infty$
Beh: $\exists f \in \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathbb{R}^X$
a) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-f.ü.

b) $\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$

Seminorm, Norm, Banachraum

E reeller VR

$N: E \to \mathbb{R}_+$ seminorm

a) $(\forall x,y\in E)\ N(x+y)\le N(x)+N(y)$

b) $(\forall x\in E)\,(\forall \alpha\in\mathbb{R})\ N(\alpha x)=|\alpha|N(x)$

c) $x\in E \quad N(x)=0 \Rightarrow x=0$

a), b), c) Norm

$E\times E\to\mathbb{R}_+ \quad (x,y)\mapsto N(x-y)$

Metrik   kanon. Metrik

Ein Banachraum ist ein norm. Raum d. bez. d. ~~der~~ kan. Metrik vollst. ist.

Eincl. d. Rest Aequiv. klassenzerl.

E Menge $\sim$ Aequiv. rel. auf E

a) $\forall A,B\in E/\sim \quad A\ne B \Rightarrow A\cap B=\emptyset$

b) $E=\bigcup\limits_{A\in E/\sim} A$

E/F

E reell. VR   F TeilVR

$x\sim y :\iff x-y\in F \quad (\forall x,y\in E)$

$\sim$ Äquivrel auf E

$E/F := E/\sim$

A+B αA

$A,B\in E/F \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$x,x'\in A \quad y,y'\in B$

$x+y\sim x'+y' \quad \alpha x\sim\alpha x'$

$A+B := \dot{\overline{x+y}} \quad \alpha A := \dot{\overline{\alpha x}}$

E/F VR

E VR F TVR v. E

- $E \to E/F \quad x \mapsto \dot{x}$ linear
- E/F ist VR

Add. $A+B \quad \alpha A$

$A \to \|A\|$

E VR N Seminorm a. E

a) $N^{-1}(0)$ Teilvektorraum v. E

b) $(\forall A \in E/F)\,(\forall x, y \in A)\ N(x) = N(y)$

$\|A\| := N(x)$

c) $E/F \to \mathbb{R}_+ \quad A \mapsto \|A\|$ ist Norm

x' Linearform stetig, glm. stetig etc.

E norm. Raum x' Linearform auf E

a) x' stetig

$\Updownarrow$

b) x' stetig in 0

$\Updownarrow$

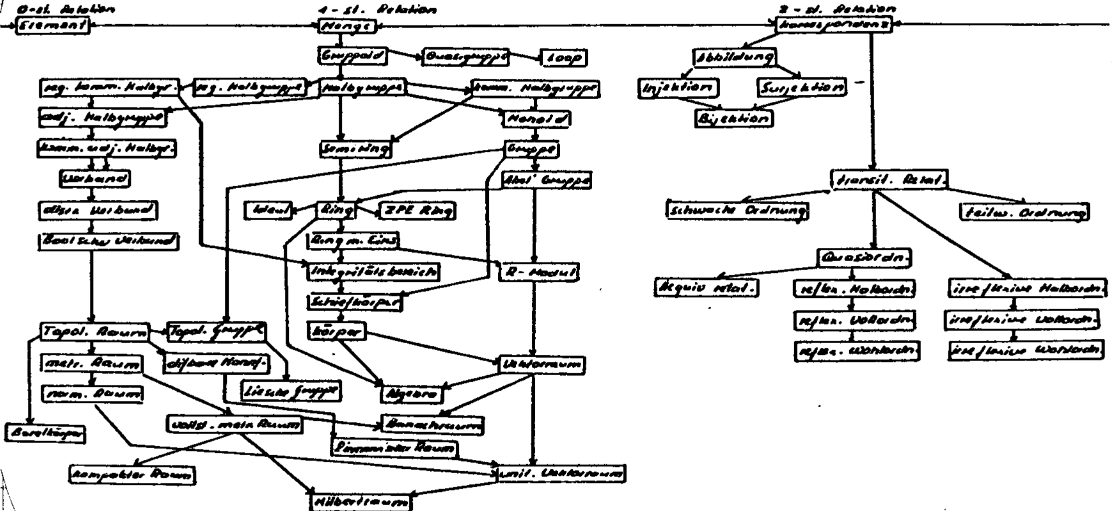
c) $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in E)\ |x'(x)| \le \alpha \|x\|$

$\Updownarrow$

d) x' glm. stetig

Grobaufbau der Mathematik

Interpretationsprinzip: "Alles Seiende kann fast als n-stellige Relation interpretiert werden (n≥0)"



$X \rightarrow Y$ heisst: jedes Y ist ein X

06.01.84 Oliver Knill

Fa I

Funkt. anal

metr. Raum

(X,d) metr. Raum

semimetr. Raum
$$\begin{cases} (i) & d(x,\ )\geq 0 \\ (ii) & d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z) \\ (iii) & d(x,y)=d(y,x) \end{cases}$$

$(iv)\quad d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

Bsp

$\mathbb{R}^n,\ \mathbb{C}^n,\ \ell^p,\ \mathcal{L}^p(\mu)$

wicht. Ungl

$|d(x,y)-d(a,b)| \leq d(x,a)+d(y,b)$

$\mathbb{R}^n$ vollst

$\ell^2(\mathbb{R})$ vollst.

dicht

$M\subset X$ M dicht in X
$\Leftrightarrow \overline{M}=X$

separ.

(X,d) separabel $\Leftrightarrow$
$\exists$ abz. dichte Menge M in X

ℓ^2, ℓ^∞

ℓ^2 separabel
ℓ^∞ nicht separabel

(X_1,d_1) + (X_2,d_2)

$(X_1,d_1), (X_2,d_2)$ metr. Räume
$(X_1 \oplus X_2, d_1+d_2)$ metr. Raum
$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1)+d_2$

M vollst. M abgeschl.

$M \subset X$ metr. Raum vollst.
M vollst. $\Rightarrow$ M abgeschl.

Bsp

$(C[a,b], \max\limits_{a\le t\le b})$ vollst. metr. Raum
$C[a,b]$, $\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$ $\to$ vollst.

vollst. $\Leftarrow$

(X,d) vollst $\Leftrightarrow$
$(\forall\ k_\gamma = \overline{U(x_\gamma,r_\gamma)})$ $k_{\gamma+1} \subset k_\gamma$
$r_\gamma \to 0$ $\exists\ a \in \bigcap\limits_\gamma k_\gamma$

eindeut. Ver-vollst.

jeder metr. Raum (X,d)
ist eindeutig zu vollst
metr. Raum (X^*, d^*) erweiterb
$d = d^*|X$ X dicht in X^*

Kontrakt.

$A: E \to E$ Kontraktion $\Leftrightarrow$
$\exists\ \theta \in (0,1)$ $d(Ax,Ay) \le \theta (x,y)$

(X,d) vollst. $E \subset X$ $\bar{E} \subseteq E$

Fixpunktsatz

$A: E \to E$ kontr.

$\bar{E} = E \Rightarrow \exists x^* \in E \; Ax^* = x^*$

lin Raum

X lin Raum

X $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ VR

norm. lin. Raum

X lin Raum **normiert**

$\exists N: X \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\left.\begin{array}{l} 2)\; N(\alpha x) = |\alpha| \cdot N(x) \\ 3)\; N(x+y) \leq N(x) + N(y) \end{array}\right\}$ semi-norm

sublin. Funkt. falls $\mathbb{R}$ VR und 2) 3)

Banachraum

X Banachraum

X vollst. norm. lin Raum

lin Mannigf. lin UR

$Y \subseteq X$ lin Mannigfalt.

$\forall x, y \in Y \; \alpha x + \beta y \in Y$

lin UR, abgeschl. lin Mannigf.

Hahn Banach

X $\mathbb{R}$ VR

$p: X \to \mathbb{R}$ sublin Fkt.

$Y \subseteq X$ lin Mannigf.

f: lin. Fkt. $f: Y \to \mathbb{R}$

$f(x) \leq p(x) \; \forall x \in Y \Rightarrow \exists F: X \to \mathbb{R}$ lin Funkt

$F(x) = f(x) \quad \forall x \in Y$

$|F(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$

Dualraum X'

X norm. Raum Banachraum

$X' = \{ f \mid f : X \to \mathbb{R}$ linear $(\exists a) \, |f(x)| \le a|x| \}$

X' Raum d. beschr. lin Funkl. Dualraum

$\|f\| = \sup_{|x| \le 1} |f(x)| < \infty$

$|f(x)| \le \|f\| \, |x| \quad \forall x \in X$

beschr. Funkl.

$f \ne 0$ lin Funkl.

f beschränkt $\iff$ $\ker f$ abgeschl.

codim.

$M \subset X$ UR ü $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

M hat codim $k \iff$

$(\exists x_1 \dots x_k \in X)(\forall x \in X)$

$x = m + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$

$(\exists! \alpha_j \in \mathbb{R}) \ (\exists! m \in M)$

ker f codim 1

$\ker f$ hat codim 1

für f lin Funkl

$\exists f$ $f(x_0)=|x_0|$

X Banachraum $x_0 \in X$

$\exists f \in X' \ f(x_0) = |x_0| \ \|f\| = 1$

konvex

$A \subset X$ konvex $\iff x, y \in A$

$\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in A$

Stützfkt.

$A \supset (0)$ konvex offen

$p(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda^{-1}x \in A\}$
Stützfunktion

Stützfkt.

(1) $0 \le p(x) \le M\|x\|$
(2) $A = \{x \in X \; p(x) < 1\}$
(3) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \lambda \ge 0$
(4) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

i.w.s. i.e.s. trennen

A, B konvexe Mengen in X
A, B durch Hyperebene
$f(x) = \alpha \quad f \in X'$ im

weiteren Sinne trennbar	im engeren Sinne trennbar
$f(x) \le \alpha \quad x \in A$	$f(x) \le \alpha - \varepsilon \quad x \in A$
$f(x) \ge \alpha \quad x \in B$	$f(x) \ge \alpha + \varepsilon \quad x \in B$

direkt Prod.

$X \times Y = Z = \{z = (x,y) \; x \in X, y \in Y\}$
$|z|_Z = |x|_X + |y|_Y$ oder $\|z\| = \max(|x|_X, |y|_Y)$

direktes Produkt

Quot. raum

M UR
$X/M := \{y = x + M \quad x \in X\}$
$\|\tilde{x}\| = \inf_{m \in M} |x - m| = \|x - M\|$

Quotientenraum

äquiv Normen

$|x|_1, |x|_2$ äquiv Normen $\Rightarrow$
$\exists c$
$$c^{-1}|x|_2 \le |x|_1 \le c|x|_2$$

Raum d. beschr. lin Abb

$$\{A: X \to Y\} = \mathcal{L}(X,Y)$$
$$\sup_{|x|=1} |Ax| = \|A\| < \infty$$
Raum d. beschr. lin. Abb.

$\mathcal{L}(X,Y)$ Banachraum

$\mathcal{L}(X,Y)$ Banachraum
wenn Y Banachraum

$\|x_0-M\|$

$$\|x_0 - M\| = \inf_{m\in M} |x_0 - m|$$

$M^\perp$

$$M^\perp = \{f \in X' \mid f(m) = 0\} \subset X'$$

duale Charakterisationssätze

$$\|x_0 - M\| = \max_{\substack{f\in M^\perp \\ \|f\|\le 1}} |f(x_0)|$$

$$\|f_0 - M^\perp\| = \sup_{\substack{|x|\le 1 \\ x\in M}} |f_0(x)|$$

Fu 4

X' separ.
X separ.

X' separabel $\to X$ separabel

refl.

X refl. $\Leftrightarrow X'' \cong X$

var(x)
Riem.-Stieltjesinteg.

$\sup \sum_{j=1}^{n} |x(t_j) - x(t_{j-1})| = \operatorname{var}_{[a,b]}(x)$

$BV[a,b] = \{x \mid \operatorname{var} x < \infty\}$

Funkt. von beschr. Variation

$\int_a^b x(t)\, d\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))$

$\left| \int_a^b x(t)\, d\alpha(t) \right| \leq \max_{[a,b]} |x(t)| \operatorname{var}_{[a,b]} \alpha$

Riemann Stieltjes Integral

Satz v. Riesz

$\forall f \in C[a,b]' \ \exists \alpha \in BV[a,b]$

$f(x) = \int_a^b x(t)\, d\alpha(t)$

Banach Steinhaus

X, Y Banachräume
$A_j \in \mathcal{L}(X,Y)$
$|A_j x| \leq M(x) \ \forall j \Leftrightarrow$
$\|A_j\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C$

Schwache konv.

punktweise konvergent

$x_j \to x \Leftrightarrow |x - x_j| \to 0$

starke konv.

$x_j \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_j) \to f(x)$
$(\forall f \in X')\ j \to \infty$

schwache konv.

$x_j \rightharpoonup x$

$x_j \to x \Rightarrow f(x_j) \to f(x)\ \forall f \in D$
$D \subseteq X'$ mit dichter lin. Hülle

schwache CF

x_j schwache CF $\Leftrightarrow$
$f(x_j)$ CF in $\mathbb{R}$ $\forall f \in X'$

vollst. bez. $\Rightarrow$

X refl. $\Rightarrow$ X vollst. bez. $\Rightarrow$

$\rightharpoonup\ \to$

$\dim X < \infty \Rightarrow (x_j \to x \Leftrightarrow x_j \rightharpoonup x)$

Einh.kugel folgen-kompakt

X reflex. (X' separ.) $\Rightarrow$
jede beschr. Folge hat
schwach konv. Teilfolge

Schwach* konvergenz

konv. in X'

$f_n \xrightarrow{*} f \iff f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X \subseteq X''$

$f_n \to f \iff f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X''$

Alaoglu

X separabel $\Longrightarrow$

$\forall \{f_n\} \in X' \quad \|f_n\| \leq M$

$\exists$ schwach* konv. Teilfolge

Projektion

K konvex abgeschl in Hilbertraum H

$x_0 \in H \setminus K \Longrightarrow \exists k_0$ eindl $\in K$

$|x_0 - k_0| = \|x_0 - K\|$

Darst. satz von Riesz

H Hilbertraum

$\forall f \in H' \quad f(x) = (x, y)$

Basis

$e_1, e_2, \ldots \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Basis $\iff$

$\mathcal{L}(\{e_j\}) = H$

Hilbertraum reflexiv

H Hilbertraum $\Longrightarrow$

H ~~separabel~~ reflexiv

orthon. Basis in Hilbert-räumen

H Hilbertraum
H orthonorm. Basis

adjung. Operatoren

$A \in \mathcal{L}(H)$ H Hilb.raum
$(Ax, y) = (x, A^* y)$
A^* adjung. Operator zu A

$A \in \mathcal{L}(X,Y)$ X,Y Banachr.
$A^* \in \mathcal{L}(X',Y')$
$(A^* f)(x) = f(Ax)$

$\|A^*\| = \|A\|$

glm. stark schwach Konverg.

$A_j \rightrightarrows A \iff \|A_n - A\| \to 0$

$A_j \to A \iff |A_n x - Ax| \to 0$
$(\forall x \in X)$

$A_j \rightharpoonup A \iff |f(A_n x) - f(Ax)| \to 0$
$\forall x \in X$
$\forall f \in X'$

geom. Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I - A)^{-1} \qquad \|A\| < 1$$

Exist. d. Spektralradius

$A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A)$
exist.

$r(A) \le \|A^m\|^{1/m} \quad \forall m \ge 1$
Spektralradius

Banach Algebra

$f, g \in L^1$

$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) \, ds \in L^1$

Faltung

L_1 wird zu Banach Algebra

Glättungsoperator

$k_n \in L^1(\mathbb{R})$

$\int_{-\infty}^{\infty} k_n \, dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} |k_n| \, dt \leq c$

$\forall \delta > 0$

$\int_{|t| \geq \delta} |k_n(t)| \to 0 \quad n \to \infty$

$\Longrightarrow \forall f \in L^1$

$k_n * f \to f \quad n \to \infty$

$L^1 \to C^r$

$g \in C^r_{komp}(\mathbb{R}) \quad f \in L^1(\mathbb{R})$

$g * f = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f(t-s) \, ds$

$\in C^r$

1. Kategorie
2. Kategorie

$M \subseteq X$ topol. Raum

$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \qquad \operatorname{int} \overline{M_i} = \emptyset$

$\Rightarrow$ M von 1. Kategorie
(mager)

M ist abzählb. Verein. von nirgens dichten Mengen

sonst M ist von 2. Kategorie

Baire

M von 1. Kategorie bzgl. X vollst.
$\Rightarrow$ $\operatorname{int} M = \emptyset$