

LECTURE 29
PROPERTIES
INTEGRAL

Oliver Knill, Harvard University

November 16, 2020

PLAN

1. Poll

2. Riemann Integral Review

3. Properties

4. Exact value for x

5. Exact value for x^2

6. Swimming pool

POLL

Which one is
the Riemann
Sum

approximation
of

$$\int_0^1 e^x dx$$

A

$$\sum_{k=1}^n e^{k/n}$$

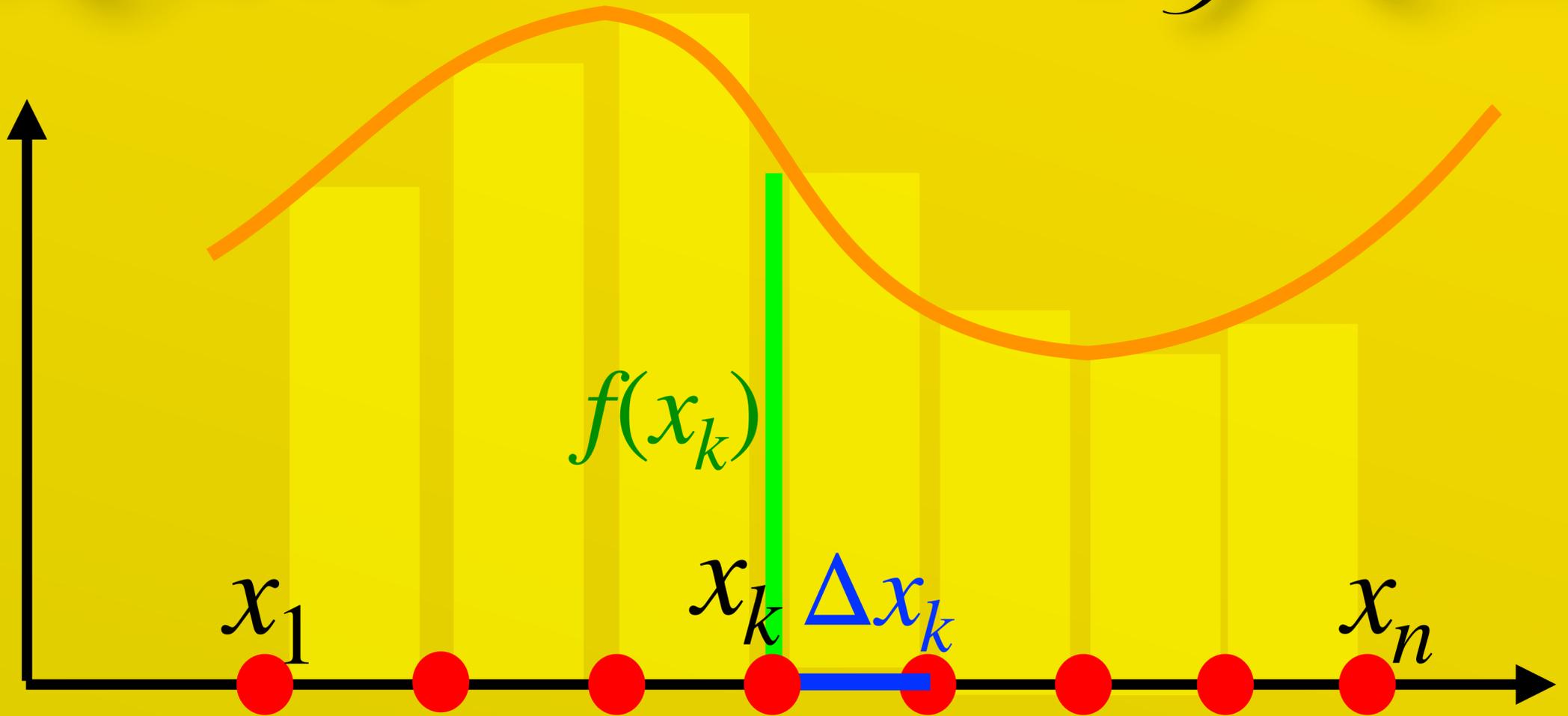
B

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n}$$

C

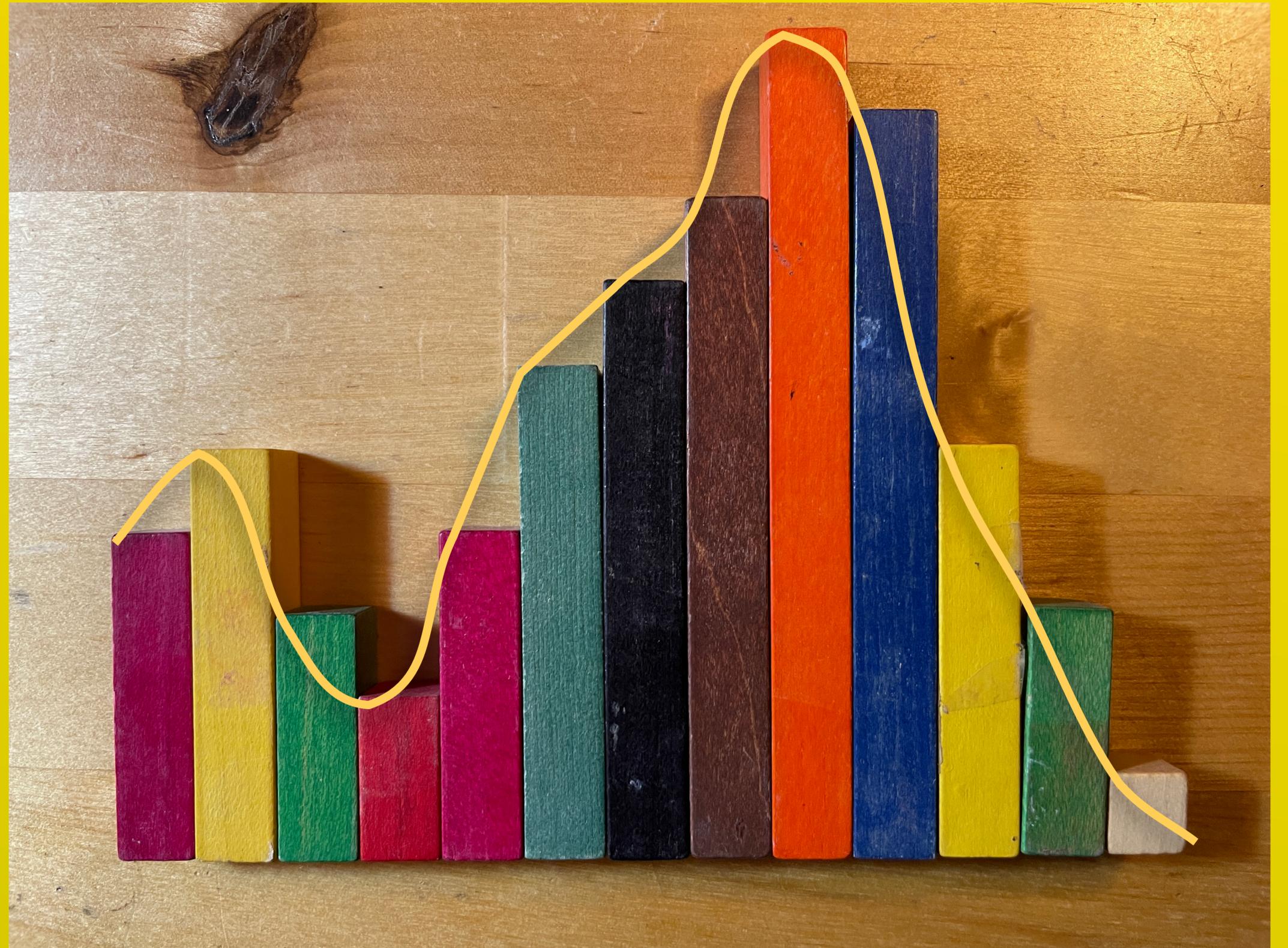
$$n \sum_{k=1}^n e^{k/n}$$

RIEMANN INTEGRAL



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a \leq x_k < b} f(x_k) \Delta x_k$$

VISUALIZATION



Cuisenaire

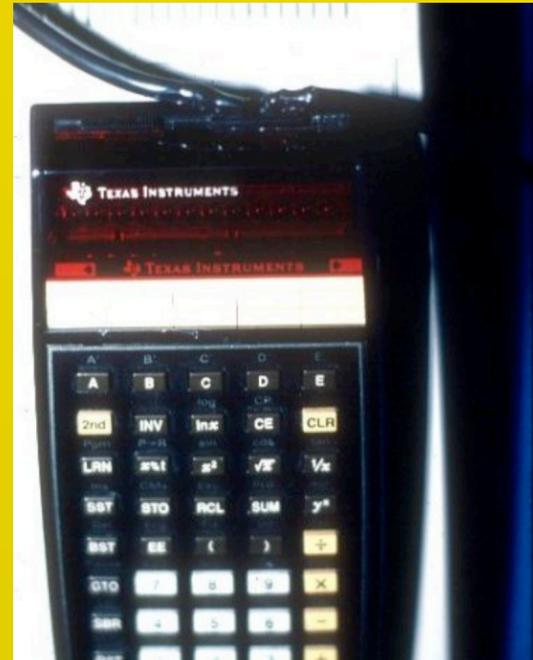
CUISENAIRE



First grade

NOSTALGIA

High School



Oliver Knill

Schaltinterface für TI-59, TI-58, TI-57

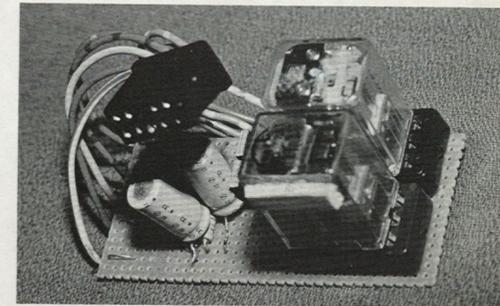
Es sind schon viele gute Bauanleitungen für ein Schaltinterface in CHIP publiziert worden. Warum denn ein anderes bauen? Ich suchte eine Schaltung, die es möglich macht, mehrere Kanäle zu steuern. Dafür eignet sich die Anzeige des Rechners als Schnittstelle sehr gut. Eine 7-Segment-Anzeige ist einfach aufgebaut. Wenn zum Beispiel Leitung 1 und 8 angesteuert werden, so leuchtet das berste Segment. Umgekehrt: Wenn das berste Segment leuchtet, kann bei 1 und eine Spannung abgegriffen werden.

Diese Spannung wird nun verstärkt und schaltet ein Relais. In der Anzeige können die Zahlen 0 bis 9 stehen. Betrachten wir das obere und mittlere waagerechte Segment. Es reichen die Ziffern 1, 4, 7, 8, um zwei Kanäle voll zu steuern. Bei den Modellen TI-58, TI-59 sind zehn Ziffern da. Es könnten also 20 Kanäle gesteuert werden. Das gibt aber Probleme:

- Die Kosten für 20 Kanäle sowie der Arbeitsaufwand wären hoch.
- Es müssen 22 Leitungen vom Rechner nach draußen geführt werden.
- Im Extremfall müssen 20 Relais

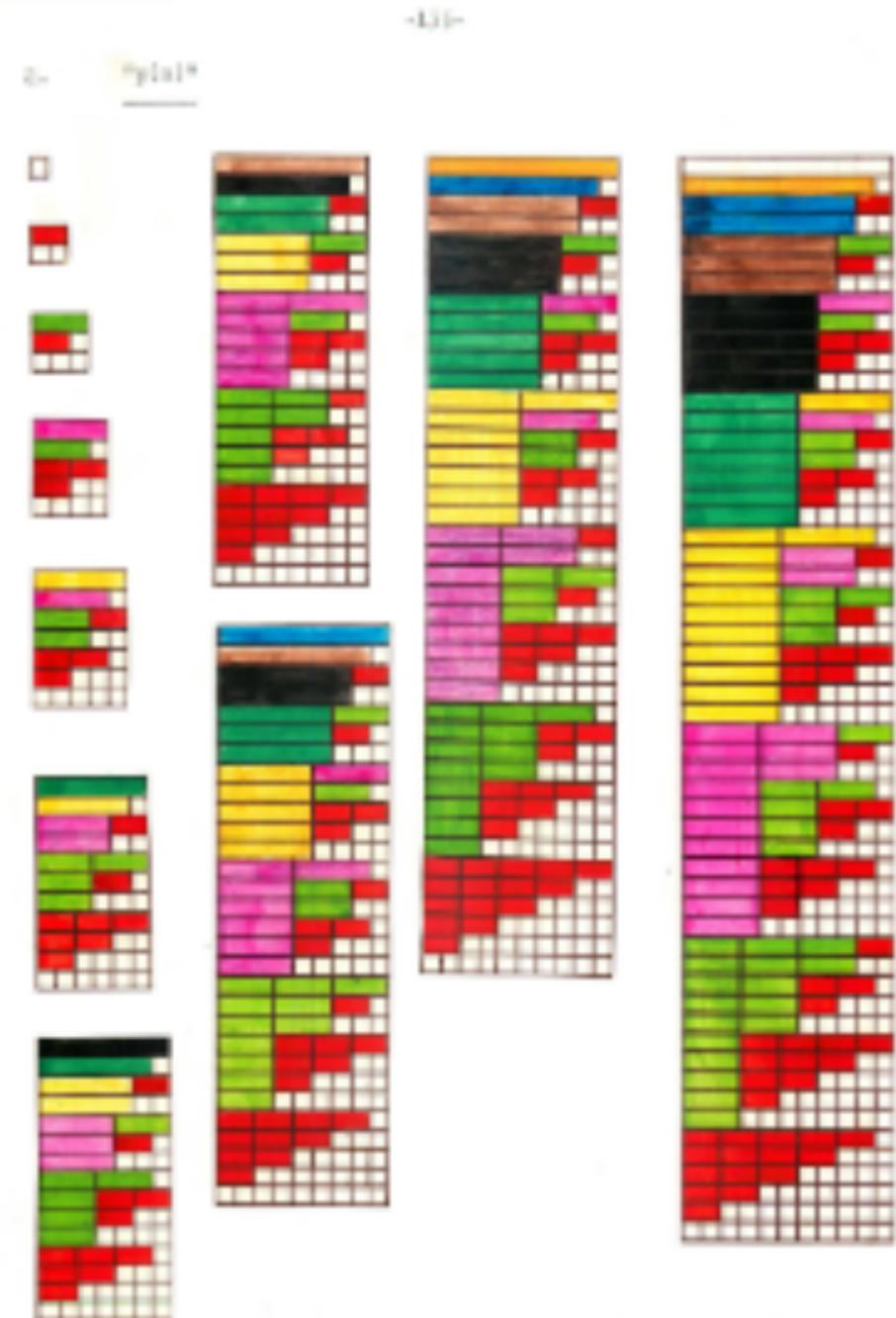
Die Schaltung

Der Schaltplan ist sehr einfach und kann auch von Computerfans aufgebaut werden, die über keine große Elektronik-erfahrung verfügen.



Versuchsaufbau des Schaltinterface mit zwei Relais

Bauanleitung



PROPERTIES

$$\int_a^b 1 dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

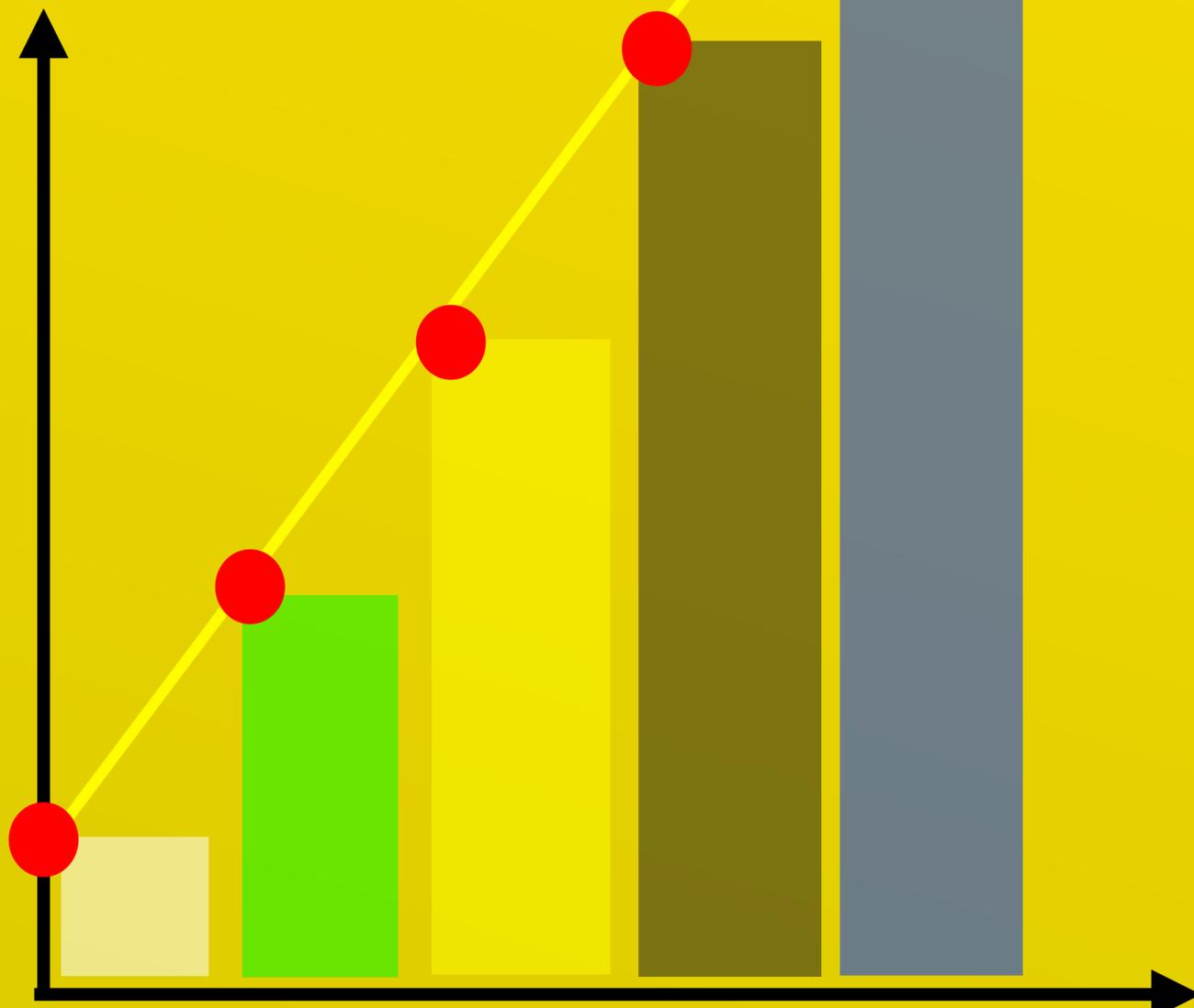
$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Can you
visualize
this?

$$2x + 1$$

$$\int_0^n (2x + 1) dx$$



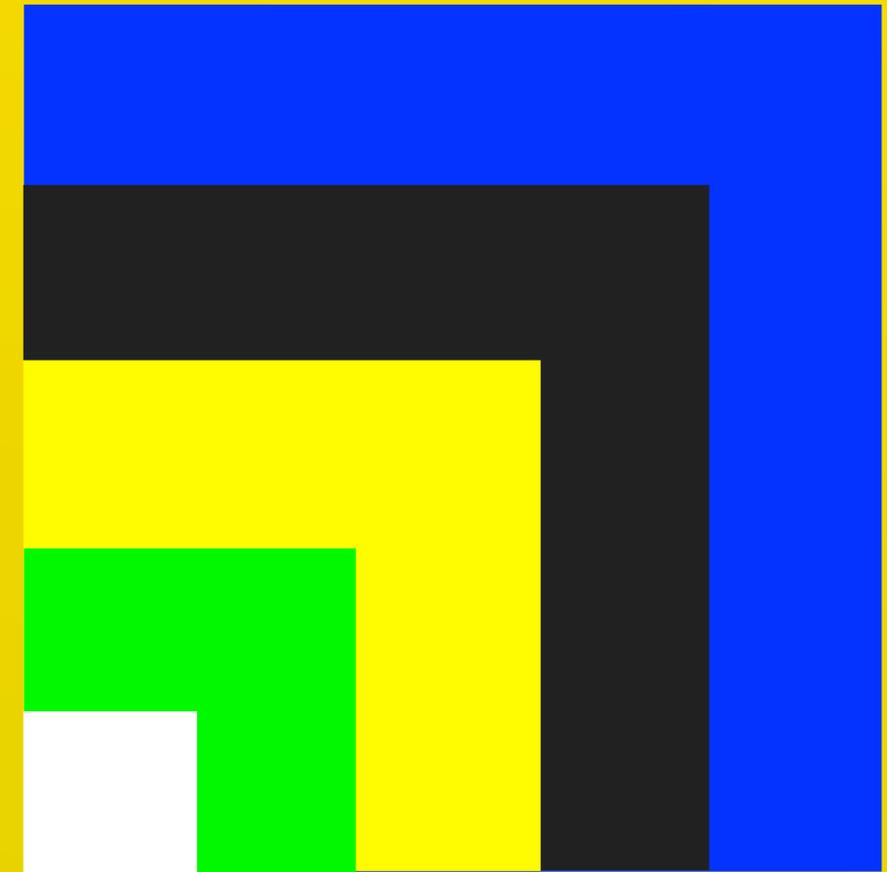
$$R_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

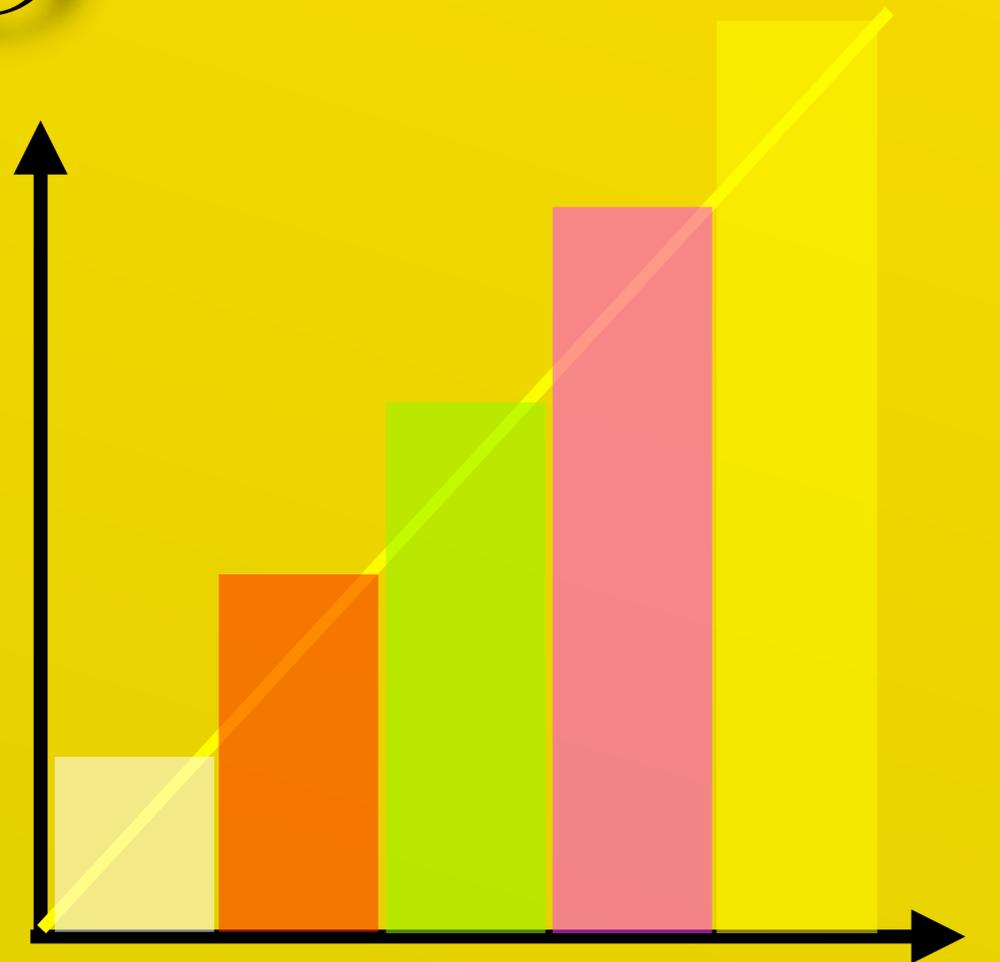
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$



$$R_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

GAUSS

$$\int_0^n x dx$$



$$R_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n$$

What is the formula ?

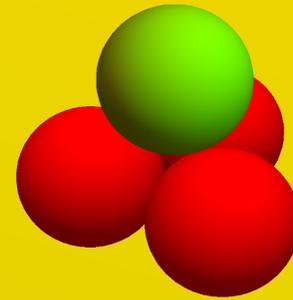


MEASURING THE WORLD 2012

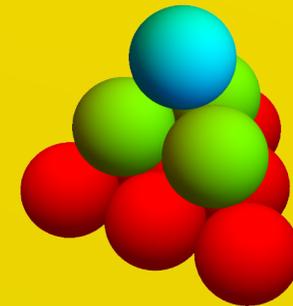
TETRAHEDRAL



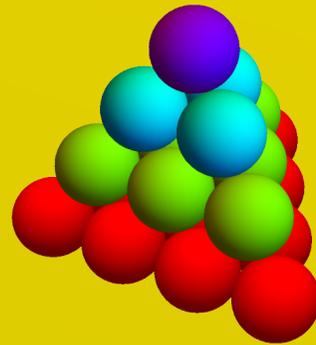
$$1$$



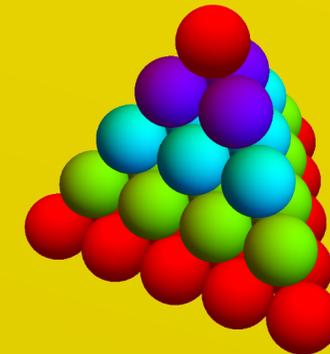
$$1+3=4$$



$$1+3+6=10$$



$$1+3+6=10$$



$$1+3+6+11=21$$

SUM OF SQUARES

$$1 + 4 = 5$$

$$1 + 4 + 9 = 14$$

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

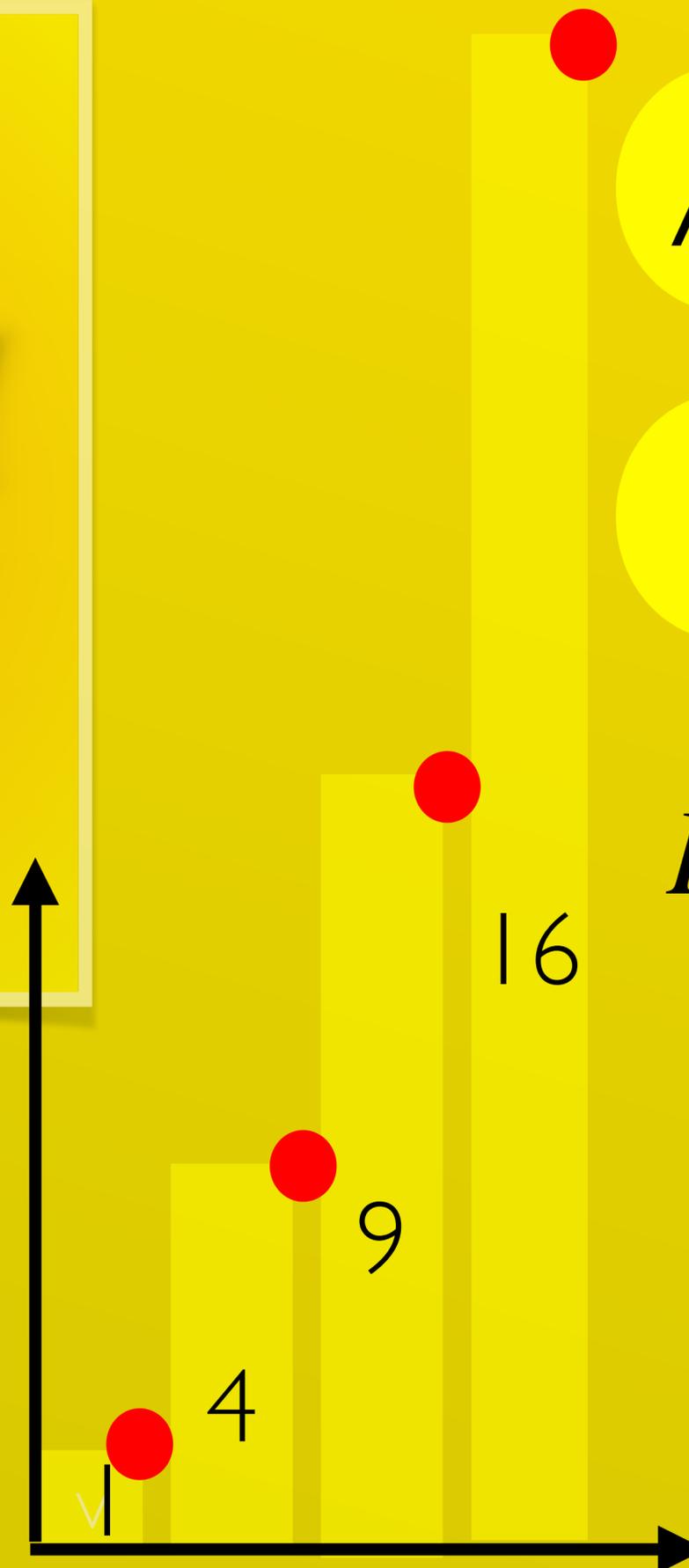
$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

....

```
data = Table[Sum[k^2, {k, n}], {n, 1, 10}]  
f = Chop[Fit[data, {1, x, x^2, x^3}, x]]
```

$$\int_0^n x^2 dx$$

JAM



A What is R_4

B Can you get from

$$R_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

to $\int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}$

*CA
JAM*

$$f(x) = \sin(x)$$

Order
the following
expressions

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

L_4

R_4

L_{20}

R_{20}

L_{100}

R_{100}

THE END