

MD-CSP
ANALYSE

DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.

Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.

SECONDE EDITION.



A PARIS,

Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du
Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel.

MDCCXVI

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Université d'Ottawa
BIBLIOTHÈQUES



LIBRARIES

University of Ottawa





P R E F A C E.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage , suppose la commune ; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénétre jusque dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : & par là elle fait connoître ceux des grandeurs finies , qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences , ceux encore des différences troisièmes , quatrièmes , & ainsi de suite , sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter.

De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini , ou une infinité d'infinis.

Une Analyse de cette nature pouvoit seule nous conduire jusqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés , & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment , c'est-à-dire les tangentes de ces courbes , leurs perpendiculaires , leurs points d'inflexion ou de rebroussement , les rayons qui s'y réfléchissent , ceux qui s'y rompent , &c.

Les polygones inscrits ou circonscrits aux courbes , qui par la multiplication infinie de leurs côtés , se confondent enfin avec elles , ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'est que depuis la découverte de l'Analyse dont il s'agit ici , que l'on a bien senti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens sur ces matières , principalement d'*Archimede* , est assurément digne d'admiration. Mais outre

qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légèrement; ce ne sont presque par tout que propositions particulieres & sans ordre, qui ne sont apercevoir aucune méthode réguliere & suivie. Ce n'est pas cependant qu'on leur en puisse faire un reproche légitime: ils ont eu besoin d'une extrême force de génie* pour percer à travers tant d'obscurités, & pour entrer les premiers dans des païs entièrement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits; du moins, quoi qu'en dise † *Viette*, ils ne se sont point égarés: & plus les chemins qu'ils ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils sont admirables de ne s'y être pas perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pû faire davantage pour leur temps: ils ont fait ce que nos bons esprits auroient fait en leur place; & s'ils étoient à la nôtre, il est à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela est une suite de l'égalité naturelle des esprits & de la succession nécessaire des découvertes.

Ainsi il n'est pas surprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin; mais on ne sçauroit assés s'étonner que de grands hommes, & sans doute d'aussi grands hommes

* *Archimedis de lineis spiralibus tractatum cum bis terque legisset, totaque animi vires intulisset, ut subtilissimarum demonstrationum de spiralium tangentibus artificium adsequeretur; nusquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certius recessi, quin scrupulus animo semper hareret, vim illius demonstrationis me non percipisse totam &c.*
Bullialdus Præf. de lineis spiralibus.

† *Si verè Archimedes, fallaciter conclusit Euclides, &c. Suppl. Geom.*

que les Anciens, en soient si long-temps demeurés là; & que par une admiration presque superstitieuse pour leurs ouvrages, ils se soient contentés de les lire & de les commenter, sans se permettre d'autre usage de leurs lumières, que ce qu'il en falloit pour les suivre; sans oser commettre le crime de penser quelquefois par eux-mêmes, & de porter leur vuë au delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette manière bien des gens travailloient, ils écrivoient, les Livres se multiplioient, & cependant rien n'avançoit: tous les travaux de plusieurs siècles n'ont abouti qu'à remplir le monde de respectueux commentaires & de traductions répétées d'originaux souvent assés méprisables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & sur tout de la Philosophie, jusqu'à M. *Descartes*. Ce grand homme poussé par son génie & par la supériorité qu'il se sentoît, quitta les Anciens pour ne suivre que cette même raison que les Anciens avoient suivie; & cette heureuse hardiesse, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vuës nouvelles & utiles sur la Physique & sur la Géométrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'avisa de penser.

Pour ne parler que des Mathématiques,

dont il est seulement ici question, M. *Descartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la solution d'un Problème où *Pappus* dit* qu'ils étoient tous demeurés. On sçait jusqu'où il a porté l'Analyse & la Géométrie, & combien l'alliage qu'il en a fait, rend facile la solution d'une infinité de Problèmes qui paroissent impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la résolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes qu'autant qu'elles lui pouvoient servir à en trouver les racines: de sorte que l'Analyse ordinaire lui suffisant pour cela, il ne s'avisa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laissé de s'en servir heureusement dans la recherche des tangentes; & la Méthode qu'il découvrit pour cela, lui parut si belle, qu'il ne fit point de difficulté de dire, *que ce Problème étoit le plus utile & le plus général, non seulement qu'il sçût, mais même qu'il eût jamais désiré de sçavoir en Géométrie.

* *Collect.
Mathem.
Lib. 7.
initio.*

* *Geomet.
Liv. 2.*

Comme la Géométrie de M. *Descartes* avoit mis la construction des Problèmes par la résolution des égalités fort à la mode, & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela; la plupart des Géomètres s'y appliquèrent, ils y firent aussi de nouvelles découvertes, qui

s'augmentent & se perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Paschal*, il tourna ses vuës de tout un autre côté: il examina les courbes en elles-mêmes, & sous la forme de polygone; il rechercha les longueurs de quelques-unes, l'espace qu'elles renferment, le solide que ces espaces décrivent, les centres de gravité des unes & des autres, &c. Et par la considération seule de leurs élémens, c'est-à-dire des infiniment petits, il découvrit des Méthodes générales & d'autant plus surprenantes, qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & sans analyse.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Descartes* pour les tangentes, M. de *Fermat* en trouva aussi une, que M. *Descartes* a enfin avoué* lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne. Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. *Barrow* l'a rendue depuis en considérant de plus près la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondan-
tes;

* Lett. 71.
Tom. 3.

res ; & ce triangle est semblable à celui qui se doit former de la tangente , de l'appliquée , & de la soutangente : de sorte que par une simple Analogie cette dernière Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Descartes* , & que cette Méthode , elle-même , demandoit auparavant.

M. *Barrow* * n'en demeura pas là , il inventa aussi une espèce de calcul propre à cette Méthode ; mais il lui falloit , aussi-bien que dans celle de M. *Descartes* , ôter les fractions , & faire évanouir tous les signes radicaux pour s'en servir.

* *Leß. Geomet. p. 80.*

Au défaut de ce calcul est survenu celui du célèbre * M. *Leibnis* ; & ce sçavant Géometre a commencé où M. *Barrow* & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus ; & il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M^{rs} *Bernoulli* ont été les premiers qui se sont aperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais osé tenter auparavant.

* *Acta Erud. Lips. an. 1684. p. 467.*

L'étendue de ce calcul est immense : il convient aux courbes mécaniques , comme aux

géométriques ; les signes radicaux lui sont indifférens ; & même souvent commodes ; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra ; la comparaison des infiniment petits de tous les genres lui est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites , aux questions *De maximis & minimis* , aux points d'inflexion & de rebroussement des courbes, aux développées, aux caustiques par réflexion ou par refraction, &c. comme on le verra dans cet Ouvrage.

Je le divise en dix Sections. La première contient les principes du calcul des différences. La seconde fait voir de quelle manière l'on s'en doit servir pour trouver les tangentes de toutes sortes de courbes, quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime , quoique M. *Craige* * n'ait pas crû qu'il pût s'étendre jusqu'aux courbes mécaniques ou transcendantes. La troisième, comment il sert à résoudre toutes les questions *De maximis & minimis*. La quatrième, comment il donne les points d'inflexion & de rebroussement des courbes. La cinquième en découvre l'usage pour trouver les développées de M. *Hugens* , dans toutes sortes de courbes.

* *De figurarum curvilinearum quadraturis*,
part. 2.

La sixième & la septième font voir comment il donne les caustiques, tant par réflexion que par réfraction, dont l'illustre M. *Tschirnhaus* est l'inventeur, & pour toutes sortes de courbes encore. La huitième en fait voir encore l'usage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes. La neuvième contient la solution de quelques Problèmes qui dépendent des découvertes précédentes. Et la dixième consiste dans une nouvelle manière de se servir du calcul des différences pour les courbes géométriques : d'où l'on déduit la Méthode de M^{rs} *Descartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces sortes de courbes.

Il est à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très peu de propositions ; mais elles sont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il est aisé de faire l'application à tant de propositions particulières qu'on voudra : je la fais seulement sur quelques exemples choisis, persuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les Méthodes, & que les Livres qui ne consistent qu'en détail ou en propositions particulières, ne sont bons qu'à faire perdre

du temps à ceux qui les font, & à ceux qui les lisent. Aussi n'ai-je ajouté les Problèmes de la Section neuvième, que parcequ'ils passent pour curieux, & qu'ils sont très universels. Dans la dixième Section ce ne sont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de M^{rs} *Descartes* & *Hudde*; & si elles sont si limitées, on voit par toutes les précédentes que ce n'est pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode Cartésienne à laquelle on l'assujettit. Au contraire rien ne prouve mieux l'usage immense de ce calcul, que toute cette variété de Méthodes; & pour peu d'attention qu'on y fasse, l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de M^{rs} *Descartes* & *Hudde*, & que la preuve universelle qu'il donne de l'usage qu'on y fait des progressions arithmétiques, ne laisse plus rien à souhaiter pour l'infailibilité de cette dernière Méthode.

J'avois dessein d'y ajouter encore une Section pour faire sentir aussi le merveilleux usage de ce calcul dans la Physique, jusqu'à quel point de précision il la peut porter, & combien les Mécaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché :

Le public n'y perdra pourtant rien , & il l'aura quelque jour même avec usure.

Dans tout cela il n'y a encore que la première partie du calcul de M. *Leibnis*, laquelle consiste à descendre des grandeurs entières à leurs différences infiniment petites , & à comparer entr'eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils soient : c'est ce qu'on appelle *Calcul différentiel*. Pour l'autre partie , qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui consiste à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux tous dont ils sont les différences , c'est-à-dire à en trouver les sommes , j'avois aussi dessein de le donner. Mais M. *Leibnis* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientiâ infiniti*, je n'ai eu garde de priver le public d'un si bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverse des tangentes , pour les rectifications des courbes , pour la quadrature des espaces qu'elles renferment , pour celles des surfaces des corps qu'elles décrivent , pour la dimension de ces corps , pour la découverte des centres de gravité , &c. Je ne rends même ceci public , que parcequ'il m'en a prié par ses Lettres , & que je le crois nécessaire pour préparer les esprits

à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la suite sur ces matières.

Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de M^{rs} *Bernoulli*, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnis*. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser.

C'est encore une justice dûë au sçavant M. *Newton*, & que M. *Leibnis* lui a renduë* lui-même: Qu'il avoit aussi trouvé quelque chose de semblable au calcul différentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé *Philosophia naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel est presque tout de ce calcul. Mais la Caractéristique de M. *Leibnis* rend le sien beaucoup plus facile & plus expeditif; outre qu'elle est d'un secours merveilleux en bien des rencontres.

Comme l'on imprimoit la dernière feuille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuventijt* m'est tombé entre les mains. Son titre, *Analysis infinitorum*, m'a donné la curiosité de le parcourir: mais j'ai trouvé qu'il étoit fort différent de celui-ci; car outre que cet Auteur

* *Journal
des Sçavans
du 30 Août
1694.*

ne se sert point de la Caractéristique de M. *Leibnis*, il rejette absolument les différences secondes, troisièmes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage sur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ses objections, & de faire voir combien elles sont peu solides, si M. *Leibnis* n'y avoit déjà pleinement satisfait dans les Actes* de Leypsic. D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la manière des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.

* *Acta Erud.*
an. 1695. p.
310 & 369.





T A B L E.

SECTION I. <i>Où l'on donne les Regles du calcul des différences,</i>	page 1
SECT. II. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les tangentes de toutes sortes de lignes courbes,</i>	11
SECT. III. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis,</i>	41
SECT. IV. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement,</i>	55
SECT. V. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les développées,</i>	71
SECT. VI. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réflexion,</i>	104
SECT. VII. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réfraction,</i>	120
SECT. VIII. <i>Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes,</i>	131
SECT. IX. <i>Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes,</i>	145
SECT. X. <i>Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de M^r Descartes & Hudde,</i>	164

ANALYSE



ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les regles de ce Calcul.

DEFINITION I.



On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

A

DEFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la

FIG. 1. *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque AMB , qui ait pour axe ou diamètre la ligne AC , & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la première. Cela posé, si l'on mène MR parallèle à AC ; les cordes AM , Am ; & qu'on décrive du centre A , de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS ; Pp sera la différence de AP , Rm celle de PM , Sm celle de AM , & Mm celle de l'arc AM . De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm , sera la différence du segment AM ; & le petit espace $MPpm$, celle de l'espace compris par les droites AP , PM , & par l'arc AM .

COROLLAIRE.

1. IL est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero : ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note d n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables AP , x ; PM , y ; AM , z ; l'arc AM , u ; l'espace mixtiligne APM , s ; & le segment AM , t : dx exprimera la valeur de Pp , dy celle de Rm , dz celle de Sm , du celle du petit arc Mm , ds celle du petit espace $MPpm$, & dt celle du petit triangle mixtiligne MAm .

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ON demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP , pm pour PM , l'espace Apm pour l'espace APM , le petit espace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS , l'angle pAm pour l'angle PAM , &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

*On suppose ordinairement dans la suite que les dernières lettres de l'alphabet, z, y, x, &c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premières a, b, c, &c. marquent des quantités constantes : de sorte que x devenant $x + dx$; y, z, &c. deviennent $y + dy$, $z + dz$, &c. * Et a, b, c, &c. demeurent * Art. 1. les mêmes a, b, c, &c.*

PROPOSITION I.

Problème.

4. PRENDRE la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres.

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'est à dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

* Art. 1. viendra alors $y + dy$; & $z, z + dz$; pour la constante a , * elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, quel'on trouvera en la retranchant de cette dernière, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres, ce qui donne cette règle.

R È G L E I.

Pour les quantités ajoutées, on soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

P R O P O S I T I O N I I.

Problème.

5. P R E N D R E la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.

1^o. La différence de xy est $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera $ydx + xdy + dxdy$, c'est à dire * $ydx + xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx , & xdy ; car si l'on divise par exemple ydx & $dxdy$ par dx , on trouve d'une part y , & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.

2^o. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx + xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la différence dz

DES INFINIMENT PETITS. I. Partie. 5
de la seconde z par la première xy (ce qui donne $xydz$);
& partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy$
 $+ xydz$.

3°. La différence de xyz est $xyzdx + xzdy$
 $+ xxydz + xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le
cas précédent en regardant le produit xyz comme une
seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on
forme cette règle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $ax + adx$, c'est à dire adx . Celle de $a + x \times b - y$ est $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problème.

6. PRENDRE la différence d'une fraction quelconque.

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{y^2}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est à dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette règle.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au

produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{x}{x}$ sera $\frac{-dx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{a dx}{aa + 2ax + xx}$.

PROPOSITION IV.

Problème.

7. **P**RENDRE la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.

Il est nécessaire afin de donner une règle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x , & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmétique.

Prog. geom. 1, x , xx , x^3 , x^4 , x^5 , x^6 , x^7 , &c.

Prog. arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au dessous de l'unité, & l'arithmétique au dessous de zero, les termes de celle-ci seront les exposans de ceux auxquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. x , 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c.

Prog. arith. 1, 0, -1 , -2 , -3 , -4 , &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[4]{x^4}$, $\frac{4}{4}$: $\sqrt[5]{x^5}$, $-\frac{1}{5}$: $\sqrt[5]{x^5}$, $-\frac{5}{5}$: $\sqrt[5]{x^5}$, &c. de sorte que ces expref.

sions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{x}$ & $x^{\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ & $x^{-\frac{1}{2}}$, &c. ne signifient que la même chose.

Prog. geom. x , $\sqrt{x}$, x , $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{xx}$, x , $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[4]{xx}$, $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[4]{x^4}$, x .

Prog. arith. 0 , $\frac{1}{2}$, x , 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, x , 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, x .

Prog. geom. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Prog. arith. $-x$, $-\frac{1}{2}$, -2 , $-x$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -2 , -3 , $-\frac{1}{2}$, -4 .

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ est moyenne géométrique entre x & x , de même aussi $\frac{1}{2}$ est moyenne arithmétique entre leurs exposans zero & x : & de même que $\sqrt[3]{x}$ est la première des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre x & x , de même aussi $\frac{1}{3}$ est la première des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & x : & il en est ainsi des autres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1^o. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi $x^{4+\frac{1}{2}}$ où $x^{\frac{5}{2}}$ est le produit de x^1 par $x^{\frac{1}{2}}$, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ où x^1 est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{2}}$, & $x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ où x^0 est le produit de $x^{-\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{2}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ où x^1 est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par lui-même, c'est à dire son carré, & $x^{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ où x^4 est le produit de x^2 par x^1 par x^1 , c'est à dire son cube, & $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ où x^{-2} est la quatrième puissance de $x^{-\frac{1}{2}}$, & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique est l'exposant du carré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique sera l'exposant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2^o. Que la différence des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du

quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$
 $= x^{\frac{1}{4}}$ sera l'exposant du quotient de la division de
 $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$, & $x^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{1}{2}}$ sera l'exposant du quo-
 tient de la division de $x^{-\frac{1}{4}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$, où l'on voit que c'est
 la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{4}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de di-
 viser $x^{-\frac{1}{4}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien
 entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas, lorsque la puissance est parfaite, c'est à dire
 lorsque son exposant est un nombre entier. La différence
 de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car
 le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par
 * *Art. 5.* x , sa différence * sera $xdx + xdx$, c'est à dire $2xdx$. De mê-
 me le cube de x n'étant autre chose que le produit de x
 par x par x , sa différence * sera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'est
 à dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des autres puissances
 à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un
 nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m sera
 $mx^{m-1}dx$.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence
 de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est à
 dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit pro-
 posé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ (qui exprime un
 nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en
 élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$,
 & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer
 dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$,
 & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{\frac{m}{n}-n}}$, en
 mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}$. Si l'expo-
 sant est négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$
 ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce

REGLE IV.

Pour les Puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par la différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m fera toujours $m x^{m-1} dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'est à dire de $ay - xx$, est $3 \times ay - xx^2 \times ady - 2x dx = 3a'yydy - 6aaxxydy + 3ax^2dy - 6aayyx dx + 12ayx'dx - 6x'dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $xy + yy^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times xy + yy - \frac{1}{2} \times ydx + xdy + 2ydy$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^2 + axyy}$ ou de $a^2 + axyy^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times a^2 + axyy - \frac{1}{2} \times ayydx + 2axydy$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^2 + axyy}}$.

Celle de $\sqrt[3]{ax + xx}$, est $\frac{1}{3} \times ax + xx - \frac{1}{3} \times adx + 2xdx$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{ax + xx}}$.

La différence de $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy}}$ ou de $ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy} - \frac{1}{2} \times adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^2 + axyy}}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{2ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^2 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^2 + axyy}}}$.

* Art. 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle* & celle

$$\text{des fractions } \frac{\frac{adx+xxdx}{3\sqrt{ax+xx}} \times \sqrt{xy+yy} - \frac{ydx-xdy-zydy}{2\sqrt{xy+yy}} \times \sqrt{ax+xx}}{xy+yy}$$

REMARQUE.

8. IL est à propos de bien remarquer que l'on a toujours suppose en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y , z , &c. croissoient aussi; c'est à dire que les x devenant $x+dx$, les y , z , &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'est pourquoi s'il arrive que quelques unes diminuent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminuent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminuent, c'est à dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence $xydz+xxdy+yzdx$ trouvée *, les signes des termes où dy & dz se rencontrent: ce qui donne $yzdx-xydz-xxdy$ pour la différence cherchée.

* Art. 5.



SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés Mm du polygone FIG. 2. qui compose * une ligne courbe, ce petit côté ainsi * Art. 3. prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou m .

PROPOSITION I.

Problème.

9. SOIT une ligne courbe AM telle que la relation de la courbe FIG. 3. AP à l'appliquée PM , soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné M sur cette courbe mener la tangente MT .

Ayant mené l'appliquée MP , & supposé que la droite MT qui rencontre le diamètre au point T , soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la première, avec une petite droite MR parallèle à AP . Et en nommant les données AP , x ; PM , y ; (donc Pp ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR(dy)$. $RM(dx :: MP(y)). PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy , laquelle étant multipliée par y & divisée par dy , donnera une valeur de la sous-tangente PT en termes entièrement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT .

REMARQUE.

10. LORSQUE le point T tombe du côté opposé au point A origine des x , il est clair que x croissant, y dimi- FIG. 4.

- * Art. 8. nue, & qu'il faut changer par conséquent * dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où dy se rencontre : autrement la valeur de dx en dy seroit négative ; & partant aussi celle de PT ($\frac{ydx}{dy}$). Il est mieux cependant, pour ne se point embarrasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les règles que l'on
- * Sect. 1. a prescrites * sans y rien changer, car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x , comme l'on a supposé en faisant le calcul : & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans.

E X E M P L E I.

FIG. 3. II. 1°. Soit l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM ; la courbe AM fera une parabole qui aura pour paramètre la droite donnée a , & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT ($\frac{ydx}{dy}$) = $\frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy sa valeur ax . D'où il suit que si l'on prend PT double de AP , & qu'on mene la droite MT , elle sera tangente au point M . Ce qui étoit proposé.

FIG. 4. 2°. Soit l'équation $ax = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les asymptotes. On aura en prenant les différences $x dy + y dx = 0$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) = $-x$. D'où il suit que si l'on prend $PT = PA$ du côté opposé au point A , & qu'on mene la droite MT , elle sera la tangente en M .

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorsque l'exposant m marque un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1} dy = dx$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) = $my^m = mx$ en mettant pour y^m sa valeur x .

Si $m = \frac{1}{2}$, l'équation sera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la soutangente $PT = \frac{1}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation sera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la soutangente $PT = -2x$. Il en est ainsi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x , il faut chercher quelle doit être la raison de dx à dy en ce point; car il est visible que cette raison étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diamètre sera aussi déterminé. On a dans cet exemple $dx : dy :: my^{m-1} : x$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raison de dy à dx doit y être infiniment grande lorsque m surpasse 1, & infiniment petite lorsqu'elle est moindre: c'est à dire que la tangente en A doit être parallèle aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diamètre dans le second.

EXEMPLE II.

12. SOIT une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ FIG. 5.

$(x \times a - x) \cdot PM^2 (yy) :: AB (a) \cdot AD (b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire $PT \left(\frac{ydx}{dy} \right) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & $PT = AP$ ou $AT = \frac{ax}{a - 2x}$.

Supposant à présent que $\overline{AP^3} \times \overline{PB^3} (x^3 \times a - x^3) \cdot \overline{PM^5} (y^5) :: AB (a) \cdot AD (b)$, on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a - x^3}$, & en prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a - x^3} - 2adx + 2xdx \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{y^4dx}{dy} = \frac{5x^3 \times a - x^3}{3xx \times a - x^3 - 2a + 2x \times x^3} = \frac{5x \times a - x}{3a - 3x - 2x}$ ou $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$.

Et généralement si l'on veut que m marque l'exposant de la puissance de AP , & n celui de la puissance de PB , on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times a - x^n$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est

$$\frac{m+nay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times a - nx^{n-1}dx \times x^m,$$

d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ la valeur $x^m \times a - x^n$)

$$PT \left(\frac{ydx}{dy} \right) = \frac{mx^{m-1} \times a - nx^{n-1}}{mx^{m-1} \times a - nx^{n-1} \times x^m} = \frac{m+n \times a - x}{m+n \times a - nx},$$

$$\text{ou } PT = \frac{m+n \times a - x}{m+n \times a - nx}, \text{ \& } AT = \frac{na}{m+n \times a - nx}.$$

EXEMPLE III.

FIG. 6. 13. Les mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point B tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P , on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times a + x^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles considérées par rapport à leurs diamètres. D'où l'on tirera comme ci-dessus $PT = \frac{m+n \times a + x}{m+n \times a + nx}$ & $AT = \frac{na}{m+n \times a + nx}$.

Maintenant si l'on suppose que AP soit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, c'est à dire qu'elle en deviendra l'asymptote CE ; & l'on aura en ce cas $AT \left(\frac{na}{m+n \times a + nx} \right) = \frac{n}{m+n} a = AC$; puisque a étant infiniment moindre que x , le terme ma fera nul par rapport à $m+n \times x$. Par la même raison en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainsi en faisant pour abréger $m+n = p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p , on aura $\sqrt[p]{a} = x \sqrt[p]{b}$, dont la différence est $dy \sqrt[p]{a} = dx \sqrt[p]{b}$: de sorte qu'en menant AE parallèle aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx : dy$, ou $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: AC$. $\left(\frac{a}{p} \right)$. $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{b} a^{\frac{p-1}{p}}$. Or les

valeurs de CA & AE étant ainsi déterminées, on mènera la droite indéfinie CE qui sera l'asymptote cherchée.

Si $m=1$ & $n=1$, la courbe sera l'hyperbole ordinaire, & on aura $AC=\frac{1}{2}a$, & $AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'est à dire à la moitié du diamètre conjugué, ce que l'on sçait d'ailleurs être conforme à la vérité.

EXEMPLE IV.

14. Soit l'équation $y^3 - x^3 = axy$ ($AP=x$, $PM=y$, FIG. 6. a est une ligne droite donnée) & que cette équation exprime la nature de la courbe AM , sa différence sera $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$ & $AT \left(\frac{ydx}{dy} - x \right) = \frac{3y^3 - 3x^3 - axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay}$ en mettant pour $3y^3 - 3x^3$ la valeur $3axy$.

Maintenant si l'on suppose que AP & PM soient chacune infiniment grande, la tangente TM deviendra l'asymptote CE , & les droites AT , AS deviendront AC , AE qui déterminent la position de l'asymptote. Or AT que j'appelle $t = \frac{axy}{3xx + ay}$, d'où l'on tire $y = \frac{3txx}{ax - at} = \frac{3tx}{a}$ lors que AT devient AC , parcequ'alors at est nulle par rapport à ax . Mettant donc cette valeur $\frac{3tx}{a}$ à la place de y dans $y^3 - x^3 = axy$, on aura $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^2txx$, d'où l'on tire (en effaçant le terme $3a^2txx$, parceque x étant infinie, il est nul par rapport aux deux autres $27t^3x^3$ & a^3x^3) $AC(t) = \frac{1}{3}a$. De même $AS \left(y - \frac{xat}{ax} \right)$ que j'appelle

$s = \frac{axy}{3y - ax}$, d'où l'on tire $x = \frac{3ty}{ay + as} = \frac{3y}{a}$, parceque y étant infinie par rapport à s , le terme as sera nul par rapport au terme ay ; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera $AE(s) = \frac{1}{3}a$. D'où il suit que si l'on prend les lignes AC , AE égales chacune à $\frac{1}{3}a$, & qu'on mene la droite indéfinie CE , elle sera l'asymptote de la courbe AM .

On se réglera sur ces deux derniers exemples pour trouver les asymptotes des autres lignes courbes.

PROPOSITION II.

Problème.

FIG. 7. 15. *Si l'on suppose dans la proposition précédente que les coupées AP soient des portions d'une ligne courbe dont l'on sçache mener les tangentes PT, & qu'il faille du point donné M sur la courbe AM mener la tangente MT.*

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT , & supposé que la droite MT qui la rencontre en T , soit la tangente cherchée; on imaginera une autre appliquée mp infiniment proche de la première, & une petite droite MR parallèle à PT : & en nommant les données AP, x ; PM, y ; on aura comme auparavant Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy$, & les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR(dy) \cdot RM(dx) :: MP(y) \cdot PT = \frac{ydx}{dy}$. On achevera ensuite le reste par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées $AP(x)$ aux appliquées $PM(y)$, comme l'on a vu dans les exemples qui précédent, & comme l'on verra encore dans ceux qui suivent.

EXEMPLE I.

16. *SOIT* $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence est $\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduisant cette égalité à une proportion $dy \cdot dx (MP \cdot PT)$ $:: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} \cdot \frac{2xy}{xx} = \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rapport de la donnée MP à la soutangente cherchée PT , sera exprimé en termes entièrement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

EXEM-

EXEMPLE II.

17. SOIT $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence est $dx = \frac{ady}{b}$: on aura $PT(\frac{ydx}{dy}) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on suppose que la ligne courbe APB soit un demi-cercle, & que les appliquées MP , étant prolongées en Q , soient perpendiculaires sur le diamètre AB ; la courbe AMC sera une demiroulette ou cycloïde: simple lorsque $b = a$, allongée lorsqu'elle est plus grande, & accourcie lorsqu'elle est moindre.

COROLLAIRE.

18. SI la roulette étant simple, l'on mène la corde AP ; je dis qu'elle sera parallèle à la tangente MT . Car le triangle MPT étant alors isoscele, l'angle externe TPQ sera double de l'intérieur opposé TMQ . Or l'angle APQ est égal à l'angle APT , puisque l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc AP ; & partant il est la moitié de l'angle TPQ . Les angles TMQ , APQ seront donc égaux entr'eux; & par conséquent les lignes MT , AP seront parallèles.

PROPOSITION III.

Problème.

19. SOIT une ligne courbe quelconque AP qui ait pour FIG. 7. diamètre la droite $KNAQ$, & dont l'on sçache mener les tangentes PK ; soit de plus une autre courbe AM telle que menant comme on voudra, l'appliquée MQ qui coupe la première courbe au point P , la relation de l'arc AP à l'appliquée MQ soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné M mener la tangente MN .

Ayant nommé les connues PK , t ; KQ , s ; l'arc AP , x ; MQ , y ; l'on aura (en concevant une autre appliquée mq infiniment proche de MQ , & en tirant PO , MS parallèles à AQ .) $Pp = dx$, $mS = dy$; & à cause des triangles semblables KPQ & PpO , mSM & MQN , l'on aura $PK(t)$.

$KQ(s) :: Pp(dx)$. PO ou $MS = \frac{sdx}{t}$. Et $mS(dy)$.
 $SM(\frac{sdx}{t}) :: MQ(y)$. $QN = \frac{sydx}{tdy}$. Or par le moyen de
 la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur
 de dx en termes qui seront tous affectés par dy , & partant
 si l'on substitue cette valeur à la place de dx dans $\frac{sydx}{tdy}$,
 les dy se détruiront, & la valeur de la sous-tangente cher-
 chée QN sera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il
 falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problème.

FIG. 8. 20. SOIENT deux lignes courbes AQC , BCN qui
 aient pour diamètre la droite $TEABF$, & dont l'on sçache men-
 ner les tangentes QE , NF ; soit de plus une autre ligne courbe
 MC telle que la relation des appliquées MP , QP , NP , soit ex-
 primée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné
 M sur cette dernière courbe lui mener la tangente MT .

Ayant imaginé aux points Q , M , N , les petits triangles
 QOq , MRm , NSn , & nommé les connues PE , s ; PF , t ;
 PQ , x ; PM , y ; PN , z ; l'on aura $Oq = dx$, $Rm = dy$, Sn
 * Art. 8. $= -dz$,* parceque x & y croissant, z diminue. Et à cause
 des triangles semblables QPE & qOQ , NPF & nSN ,
 MPT & mRM ; l'on aura $QO(x) \cdot PE(s) :: qO(dx)$.
 OQ ou MR ou $SN = \frac{tdx}{x}$. Et $NP(z) \cdot PF(t) :: nS$
 $(-dz)$. $SN = \frac{-tdz}{z} = \frac{sdz}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{szdx}{tx}$).
 Et $mR(dy) \cdot RM(\frac{tdx}{x}) :: MP(y)$. $PT = \frac{sydx}{x dy}$. Or si l'on
 met dans la différence de l'équation donnée, à la place de
 dz , la valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy ,
 laquelle étant substituée dans $\frac{sydx}{x dy}$, les dy se détruiront,
 & la valeur de la sous-tangente PT sera exprimée en ter-
 mes tous connus.

E X E M P L E.

21. SOIT $yy = xz$, dont la différence est $zydy = zdx + xdz = \frac{yzdx - xzdx}{t}$, en mettant pour dz la valeur négative $-\frac{zdx}{x}$, d'où l'on tire $dx = \frac{zydy}{yz - xz}$; & partant $PT\left(\frac{zydx}{x dy}\right) = \frac{zyy}{yz - xz} = \frac{zy}{t - s}$, en mettant pour yy la valeur xz .

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence est $m + ny^{m+n-1} dy = m z^n x^{m-1} dx + n x^m z^{n-1} dz = \frac{m t z^n x^{m-1} dx - n s z^n x^{m-1} dx}{t}$, en mettant pour dz la valeur $-\frac{s z dx}{x}$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{zydx}{x dy}\right) = \frac{m t + n s t y}{m t z^n x^m - n s z^n x^m} = \frac{m t + n s t}{m t - n s}$, en mettant pour y^{m+n} la valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que si les courbes AQC , BCN devenoient des lignes droites, la courbe MC seroit alors une des Sections coniques à l'infini; sçavoir une Ellipse lorsque l'appliquée CD , qui part du point de rencontre C , tombe entre les extrémités A , B ; une Hyperbole lorsqu'elle tombe de part ou d'autre; & enfin une Parabole lorsque l'une des extrémités A ou B est infiniment éloignée de l'autre, c'est à dire lorsque l'une des lignes droites CA ou CB est parallèle au diamètre AB .

P R O P O S I T I O N V.

Problème.

22. SOIT une ligne courbe APB qui ait un commencement FIG. 9. fixe & invariable au point A , & dont l'on sçache mener les tangentes PH ; soit hors de cette ligne un autre point fixe F , & une autre ligne courbe CMD telle qu'ayant mené la droite quelconque FMP , la relation de sa partie FM à la portion de courbe AP soit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propose de mener du point donné M la tangente MT .

Ayant mené sur FP la perpendiculaire FH qui rencon-

C ij

tre la tangente donnée PH au point H , & la cherchée MT au point T , imaginé une droite $FRmOp$ qui fasse avec FP un angle infiniment petit, & décrit du centre F les petits arcs du cercle PO , MR ; le petit triangle pOP sera semblable au triangle rectangle PFH ; car les angles HPP ,
 * Art. 2. HpF sont * égaux, puisqu'ils ne diffèrent entr'eux que de l'angle FPp que l'on suppose infiniment petit, & de plus l'angle pOP est droit, puisque la tangente en O (qui n'est autre chose que la continuation du petit arc PO considéré comme une droite) est perpendiculaire sur le rayon FO . Par la même raison les triangles mRM , MFT seront semblables. Or il est clair que les petits triangles ou secteurs FPO & FMR sont semblables. Si donc l'on nomme les connues PH , t ; HF , s ; FM , y ; FP , z ; & l'arc AP , x ; on aura $PH(t) \cdot HF(s) :: Pp(dx) \cdot PO = \frac{sdx}{t}$. Et $FP(z) \cdot FM(y) :: PO(\frac{sdx}{t}) \cdot MR = \frac{ydx}{tz}$. Et $mR(dy) \cdot RM(\frac{ydx}{tz}) :: FM(y) \cdot FT = \frac{yydx}{tzdy}$. Et on achevera le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée.

E X E M P L E.

FIG. 10. 23. Si l'on veut que la courbe APB soit un cercle qui ait pour centre le point fixe F ; il est clair que la tangente PH devient parallèle & égale à la soutangente FH , à cause que HP sera aussi perpendiculaire à PF ; & qu'ainsi l'on aura en ce cas $FT = \frac{yydx}{zdy} = \frac{ydx}{ady}$, en nommant la droite $FP(z)$, a ; parcequ'elle devient constante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela posé, si l'on nomme la circonférence entière, ou une de ses portions déterminées, b ; & que l'on fasse $b \cdot x :: a \cdot y$, la courbe CMD , qui est en ce cas FMD , sera la Spirale d'*Archimede*, & l'on aura $y = \frac{ax}{b}$ qui a pour sa différence $dy = \frac{adx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{bydy}{a} = xdy$ en mettant pour y sa valeur $\frac{ax}{b}$; & partant $FT(\frac{yydx}{ady}) = \frac{xy}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit décrit du centre F & du rayon FM , l'arc de cercle MQ , terminé en Q par le rayon FA qui joint les points fixes A, F ; soit pris FT égale à l'arc MQ : je dis que la droite MT sera tangente en M . Car à cause des sécateurs semblables FPA, FMQ , l'on aura $FP(a) \cdot FM(y) :: AP(x) \cdot MQ = \frac{yx}{a} = FT$.

Si l'on fait en général $b \cdot x :: a^m \cdot y^m$, (l'exposant m désigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe FMD sera une des spirales à l'infini, & l'on aura $y^m = \frac{a^m x}{b}$, qui a pour sa différence $my^{m-1} dy = \frac{a^m dx}{b}$, d'où l'on tire $y dx = \frac{mby^m dy}{a^m} = m x dy$, en mettant pour y^m sa valeur $\frac{a^m x}{b}$; & partant $FT\left(\frac{y dx}{a dy}\right) = \frac{mxy}{a} = m \times MQ$.

PROPOSITION VI.

Problème.

24. SOIT une ligne courbe APB dont l'on sçache mener FIG. 11. les tangentes PH , & un point fixe F hors de cette ligne; soit une autre ligne courbe CMD telle que menant comme on voudra, la droite FPM , la relation de FP à FM soit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné M mener la tangente MT .

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire sur FM , & imaginé comme dans la proposition précédente les petits triangles POp, MRm semblables aux triangles HFP, TFM , on nommera les connues FH, z ; FP, x ; FM, y ; & l'on aura $PF(x) \cdot FH(z) :: pO(dx) \cdot OP = \frac{z dx}{x}$. Et $FP(x) \cdot FM(y) :: OP\left(\frac{z dx}{x}\right) \cdot RM = \frac{zy dx}{xx}$. Et $mR(dy) \cdot RM\left(\frac{zy dx}{xx}\right) :: FM(y) \cdot FT = \frac{zyy dx}{xx dy}$. On achèvera ensuite le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée.

EXEMPLE.

25. Si l'on veut que la courbe APB soit une ligne droite PH , & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM soit $y - x = a$, c'est à dire que PM soit toujours égale à la même droite donnée a ; l'on aura pour différence $dy = dx$; & partant $FT \left(\frac{xyydx}{xxdy} \right) = \frac{yy}{xx}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée ME parallèle à PH , & MT parallèle à PE ; je dis qu'elle sera tangente en M .

Car $FP(x) \cdot FH(y) :: FM(y) \cdot FE = \frac{y^2}{x}$. Et $FP(x) \cdot FE \left(\frac{y}{x} \right) :: FM(y) \cdot FT = \frac{y^2}{xx}$. Il est clair que la courbe CMD est la Conchoïde de *Nicomede*, dont l'asymptote est la droite PH , & le pole est le point fixe F .

PROPOSITION VII.

Problème.

FIG. 12. 26. SOIT une ligne courbe ARM dont l'on sçache mener les tangentes MH , & qui ait pour diamètre la droite $EPAHT$, soit hors de ce diamètre un point fixe F , d'où parte une ligne droite indéfinie $FPSM$ qui coupe le diamètre en P & la courbe en M . Si l'on conçoit maintenant que la droite FPM , en tournant autour du point F , fasse mouvoir le plan PAM toujours parallèlement à soi-même le long de la ligne droite ET immobile & indéfinie, en sorte que la distance PA demeure partout la même; il est clair que l'intersection continuelle M des lignes FM , AM décrira dans ce mouvement une ligne courbe CMD . On propose de mener d'un point donné M sur cette courbe la tangente MT .

Ayant imaginé que le plan PAM soit parvenu dans la situation infiniment proche pam , & tiré la ligne mRS parallèle à AP ; il est clair par la génération que $Pp = Aa = Rm$; & partant que $RS = Sm - Pp$. Or nommant les connues FP ou Fp, x ; FM ou Fm, y ; PH, s ; MH, t ; &

la différence Pp , dz ; les triangles semblables FpP & Fsm , MPH & MSR , MHT & MRm , donneront $Fp(x) \cdot Fm(y) :: Pp(dz) \cdot Sm = \frac{ydz}{x}$ (donc $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$).

Et $PH(s) \cdot HM(t) :: SR \left(\frac{ydz - xdz}{x} \right) \cdot RM = \frac{tydz - txdz}{sx}$.

Et $MR \left(\frac{tydz - txdz}{sx} \right) \cdot Rm(dz) :: MH(t) \cdot HT = \frac{sx}{y - x}$.

Donc si l'on mene FE parallele à MH , & qu'on prenne $HT = PE$; la ligne MT sera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite; la courbe CMD seroit une Hyperbole qui auroit pour une de ses asymptotes la ligne ET . Et si elle étoit un cercle qui eût son centre au point P ; la courbe CMD seroit la Conchoïde de Nicomede, qui auroit pour asymptote la ligne ET , & pour pole le point F . Mais si elle étoit une parabole; la courbe CMD seroit la compagne de la Paraboloïde de Descartes*, qui se décriroit en même temps au dessous de la droite ET par l'intersection de FP avec l'autre moitié de la Parabole. * Geom. Liv. 3.

PROPOSITION VIII.

Problème.

27. SOIT une ligne courbe AN qui ait pour diamètre la ligne droite AP , avec un point fixe F hors de ces lignes; soit une autre ligne courbe CMD telle que menant comme l'on voudra, la droite $FMPN$, la relation de ses parties FN , FP , FM soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné M la tangente MT . FIG. 13.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN , qui rencontre en K le diamètre AP , & en H la tangente donnée NH ; soient décrits du centre F & des intervalles FN , FP , FM des petits arcs de cercle NQ , PO , MR terminés par la droite Fn que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela posé.

Si l'on nomme les connues FK , s ; FH , t ; FP , x ; FM , y ; FN , z ; les triangles semblables PFK & pOP , FMR &

$FPO \& FNQ, HFN \& NQn, mRM \& MFT$ donneront
 $PF(x) \cdot FK(z) :: pO(dx) \cdot OP = \frac{rdx}{x}$. Et $FP(x) \cdot FM$
 $(y) :: PO(\frac{rdx}{x}) \cdot MR \frac{rydx}{xx}$. Et $FP(x) \cdot FN(z) :: PO$
 $(\frac{rdx}{x}) \cdot NQ = \frac{rydx}{xx}$. Et $HF(z) \cdot FN(z) :: NQ(\frac{rydx}{xx})$.
 $Qn(-dz) = \frac{rydx}{xxx}$. Et $mR(dy) \cdot RM(\frac{rydx}{xx}) :: FM(y) \cdot$
 $FT = \frac{ryydx}{xxay}$. Or par le moyen de la différence de l'équa-
 tion donnée on trouvera une valeur de dy en dx & dz ,
 dans laquelle mettant à la place de dz sa valeur négative
 $-\frac{ryydx}{xxx}$, parceque x croissant, z diminue, tous les termes
 seront affectés par dx ; de sorte que cette valeur étant en-
 fin substituée dans $\frac{ryydx}{xxay}$, les dx se détruiront. Et partant
 la valeur de FT sera exprimée en termes connus & déli-
 vrés des différences.

Si l'on supposoit que la ligne droite AP fût une ligne
 courbe, & qu'on menât la tangente PK ; on trouveroit
 toujours pour FT la même valeur, & le raisonnement de-
 meureroit le même.

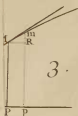
E X E M P L E.

FIG. 14. 28. SUPPOSONS que la ligne courbe AN soit un
 cercle qui passe par le point F (tellement situé à l'égard
 du diamètre AP que la ligne FB perpendiculaire à ce
 diamètre passe par le centre G de ce cercle), & que PM
 soit toujours égale à PN ; il est clair que la courbe CMD ,
 qui devient en ce cas FMA , sera la Cissoïde de *Diocles*,
 & que l'on aura pour équation $z + y = zx$, dont la dif-
 férence est $dy = zdx - dz = \frac{zxzdx + rz^2dx}{xxx}$ en mettant pour

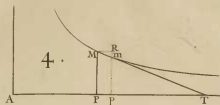
dz sa valeur $-\frac{zxzdx}{xxx}$ trouvée ci-dessus *. Et partant FT
 $(\frac{ryydx}{xxay}) = \frac{ryy}{xxx + xzx}$.

* Art. 27.

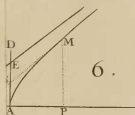
Si le point donné M tomboit sur le point A , les lignes
 FM, FN, FP seroient égales chacune à FA , comme aussi
 les



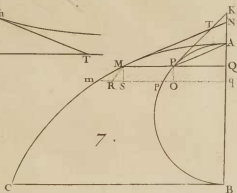
3.



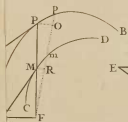
4.



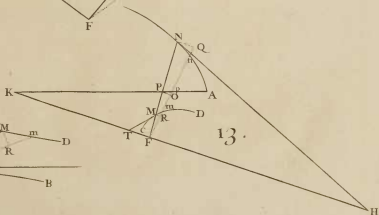
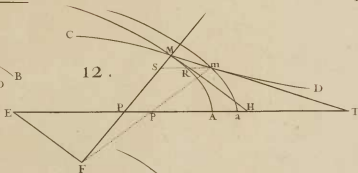
6.



7.



12.



13.

les droites FK , FH ; & partant on auroit en ce cas $FT = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{3}x$, c'est à dire que si l'on prend $FT = \frac{1}{3}AF$, & qu'on mene la ligne AT , elle sera tangente en A .

On peut encore trouver les tangentes de la Cissoïde par le moyen de la premiere Proposition, en menant les perpendiculaires NE , ML sur le diametre FB , & cherchant l'équation qui exprime le rapport de la coupée FL à l'appliquée LM ; ce qui se fait ainsi. Ayant nommé les connues FB , $2a$; FL ou BE , x ; LM , y ; les triangles semblables FEN , FLM , & la propriété du cercle donneront $FL(x) \cdot LM(y) :: FE \cdot EN :: EN(\sqrt{2ax - xx})$.

$EB(x)$. D'où l'on tire $yy = \frac{x^2}{2a - x}$, dont la difference est $2ydy = \frac{6axx dx - 1x^2 dx}{2a - x^2}$. Et partant $LO^* \left(\frac{y dx}{dy} \right) = \frac{yy \times 2a - x^2}{3axx - x^2} * Art. 9.$
 $= \frac{2ax - xx}{3a - x}$, en mettant pour yy sa valeur $\frac{x^2}{2a - x}$.

PROPOSITION IX.

Problème.

29. SOIENT deux lignes courbes ANB , CPD , & une ligne droite FKT , sur lesquelles soient marqués des points fixes A , C , F ; soit de plus une autre ligne courbe EMG telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques M la droite FMN , & MP parallèle à FK , la relation de l'arc AN à l'arc CP soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné M sur la courbe EG mener la tangente MT .

FIG. 15.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallèle à FM , & par le point donné M les droites MRK , MOH parallèles aux tangentes en P & en N , on tirera $FmOn$ infiniment proche de FMN & mRp parallèle à MP .

Cela posé, si l'on nomme les connues FM , s ; FN , t ; MK , x ; CP , x ; AN , y . (donc Pp ou $MR = dx$, $Nn = dy$) les triangles semblables FNn & FMO , MOM & MHT , MRm & MKT donneront $FN(t) \cdot FM(s) :: Nn(dy) \cdot MO = \frac{t^2}{s}$.

D

Et $MR(dx) \cdot MO\left(\frac{ydy}{x}\right) :: MK(u) \cdot MH = \frac{ydy}{x}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée l'on aura une valeur de dy en termes qui seront tous affectés par dx , laquelle étant substituée dans $\frac{ydy}{x}$, les dx se détruiront; & partant la valeur de MH sera exprimée en termes entièrement connus. Ce qui donne cette construction.

Soit mené MH parallèle à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : soit tirée HT parallèle à FM , qui rencontre en T la droite FK , par où & par le point donné M soit menée la tangente cherchée MT .

E X E M P L E.

FIG. 16. 30. SI l'on veut que la courbe ANB soit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe F , que la courbe CPD soit le rayon APF perpendiculaire sur la droite $FKGQTB$, & que l'arc $AN(y)$ soit toujours à la droite $AP(x)$ comme le quart de cercle $ANB(b)$ au rayon $AF(a)$; la courbe EMG deviendra la Quadratrice AMG de *Dinoftrate*, & l'on aura $MH\left(\frac{ydy}{x}\right) = \frac{aydy - xdy}{ax}$, puisque FP ou $MK(u) = a - x$, & $FN(s) = a$. Mais l'analogie supposée donne $ay = bx$, & $ady = bdx$. Mettant donc dans la valeur de MH à la place de x & de dy leurs valeurs $\frac{ay}{b}$ & $\frac{b dx}{a}$, on trouvera $MH = \frac{bx - y^2}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée MH perpendiculaire sur FM , & égale à l'arc MQ décrit du centre F , & soit tirée HT parallèle à FM ; je dis que la ligne MT sera tangente en M . Car à cause des secteurs semblables FNB , FMQ , l'on aura $FN(x) \cdot FM(s) :: NB(b - y) \cdot MQ = \frac{bx - y^2}{a}$.

C O R O L L A I R E.

FIG. 17. 31. SI l'on veut déterminer le point G où la quadratrice AMG rencontre le rayon FB , on imaginera un autre rayon Fgb infiniment proche de FGB ; & en menant gf parallèle à FB , la propriété de la quadratrice

& les triangles semblables FbB, gfF , rectangles en B & en f , donneront $AB : AF :: Bb : Ff :: FB$ ou Af gf ou FG . D'où l'on voit que si l'on prend une troisième proportionnelle au quart de cercle AB & au rayon AF , elle sera égale à FG , c'est à dire que $FG = \frac{aa}{b}$. Ce qui donne lieu lieu d'abrégier la construction des tangentes.

Car menant TE parallèle à MH , les triangles semblables FMK, FTE donneront $MK (a - x) : MF (s) :: ET$ ou $MH (\frac{b-s-y}{a})$. $ET = \frac{b-s-y}{a-a-x} = \frac{b-s}{a}$. en mettant pour x sa valeur $\frac{a^2}{b}$, & divisant ensuite le tout par $b - y$; d'où il est clair que la ligne FT est troisième proportionnelle à FG & à FM . FIG. 16.

PROPOSITION X.

Problème.

32. SOIT une ligne courbe AMB telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M aux foyers F, G, H , &c. les droites MF, MG, MH , &c. leur relation soit exprimée par une équation quelconque : & soit proposé de mener du point donné M la perpendiculaire MP sur la tangente en ce point. FIG. 18.

Ayant pris sur la courbe AB l'arc Mm infiniment petit, & mené les droites FRm, GmS, HmO , on décrira des centres F, G, H les petits arcs de cercles MR, MS, MO ; ensuite du centre M & d'un intervalle quelconque on décrira de même le cercle CDE qui coupe les lignes MF, MG, MH aux points C, D, E , d'où l'on abaissera sur MP les perpendiculaires CL, DK, EI . Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles rectangles MRm, MLC sont semblables; car en ôtant des angles droits LMm, RMC l'angle commun LMR , les restes RMm, LMC seront égaux, & de plus ils sont rectangles en R & L . On prouvera de même que les triangles rectangles MSm & MKD, MOM & MIE sont semblables. Partant, puisque l'hypothénuse Mm est commune aux petits triangles MRm, MSm, MOM , & que les

hypothénuses MC , MD , ME des triangles MZC , MKD , MIE sont égales entr'elles; il s'ensuit que les perpendiculaires CL , DK , EI ont le même rapport entr'elles que les différences Rm , Sm , Om .

2°. Que les lignes, qui partent des foyers situés du même côté de la perpendiculaire MP , croissent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18. FM croist de la différence Rm , pendant que les autres GM , HM diminuent des leurs Sm , Om .

Si l'on suppose à présent, pour fixer ses idées, que l'équation qui exprime la relation des droites $FM(x)$, $GM(y)$, $HM(z)$, soit $ax + xy - z^2 = 0$, dont la différence est $adx + ydx + xdy - 2zdz = 0$; Il est évident que la tangente en M (qui n'est autre chose que la continua-

* Art. 3. tion du petit côté Mm du poligone que l'on conçoit * composer la courbe AMB) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ses points quelconques m des paralleles mR , mS , mO aux droites FM , GM , HM , terminées en R , S , O par des perpendiculaires MR , MS , MO à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation $a + y \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = 0$: ou (ce qui revient au même, en mettant à la place de Rm , Sm , Om leurs proportionnelles CL , DK , EI) que la perpendiculaire MP à la courbe doit être placée en sorte que $a + y \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$. Ce qui donne cette construction.

Fig. 18. 19. Que l'on conçoive que le point C soit chargé du poids $a + y$ qui multiplie la différence dx de la droite FM sur laquelle il est situé, & de même le point D du poids x , & le point E pris de l'autre côté de M par rapport au foyer H (parceque le terme $- 2zdz$ est négatif) du poids $2z$. Je dis que la droite MP qui passe par le commun centre de pesanteur des poids supposez en C , D , E , sera la perpendiculaire requise. Car il est clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui passe par le centre de pesanteur de plusieurs poids, les sépare en sorte que les poids d'une part multipliés chacun par sa distance de cette droite, sont précisément égaux aux poids

de l'autre part multipliés aussi chacun par sa distance de cette même droite. Donc posant le cas que x croissant, y & z croissent aussi, c'est à dire que les foyers F, G, H tombent du même côté de MP , comme l'on suppose toujours en prenant la différence de l'équation donnée selon les regles prescrites; il s'ensuit que la ligne MP laissera d'une part les poids en C & D , & de l'autre le poids en E , & qu'ainsi l'on aura $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$, qui étoit l'équation à construire. FIG. 19.

Or je dis maintenant que puisque la construction est bonne dans ce cas, elle le sera aussi dans tous les autres; car supposant par exemple que le point M change de situation dans la courbe en sorte que x croissant, y & z diminuent, c'est à dire que les foyers G, H passent de l'autre côté de MP , il s'ensuit 1^o. * Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les signes des termes affectés par dy, dz , ou par leurs proportionnelles DK, EI ; de sorte que l'équation à construire sera dans ce nouveau cas $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$. 2^o. Que les poids en D & E changeront de côté par rapport à MP , & qu'ainsi l'on aura par la propriété du centre de pesanteur $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$, qui est l'équation à construire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas possibles, il s'ensuit, &c. FIG. 18. * Art. 3.

Il est évident que le même raisonnement subsistera toujours tel que soit le nombre des foyers, & telle que puisse être l'équation donnée; de sorte que l'on peut énoncer ainsi la construction générale.

Soit prise la différence de l'équation donnée dont je suppose que l'un des membres soit zero, & soit décrit à discrétion du centre M un cercle CDE qui coupe les droites MF, MG, MH aux points C, D, E , dans lesquels soient conçus des poids qui aient entr'eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes sur lesquelles ils sont situés. Je dis que la ligne MP qui passe par leur commun centre de pesanteur, sera la perpendiculaire requise. Il est à remarquer que si l'un des

poids est négatif dans la différence de l'équation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point M par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers F, G, H soient des lignes droites ou courbes sur qui les droites MF, MG, MH tombent à angles droits, la même construction aura toujours lieu. Car menant du point m pris infiniment près de M les perpendiculaires mf, mg, mh sur les foyers, & du point M les petites perpendiculaires MR, MS, MO sur ces lignes; il est clair que Rm sera la différence de MF , puisque les droites MF, Rf étant perpendiculaires entre les parallèles Ff, MR , elles seront égales, & de même que Sm est la différence de MG , & Om celle de MH ; & on prouvera ensuite tout le reste comme ci-dessus.

FIG. 21. On peut encore concevoir que les foyers F, G, H soient tous ou en partie des lignes courbes qui aient des commencemens fixes & invariables aux points F, G, H , & que la ligne courbe AMB soit telle qu'ayant mené par exemple d'un de ses points quelconques M les tangentes MV, MX & la droite MG ; la relation des lignes mixtilignes FVM, HXM & de la droite GM soit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point m pris infiniment près de M la tangente mw , il est clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point V (puisque'elle n'est que la continuation du petit arc Vu considéré comme une petite droite), & partant que si l'on décrit du centre V le petit arc de cercle MR ; Rm sera la différence de la ligne mixtiligne FVM qui devient $FVuRm$. Et tout le reste se démontrera comme ci-devant.

M. Tschirnhaus a donné la première idée de ce Problème dans son Livre de la Médecine de l'esprit; M. Fatio en a trouvé ensuite une solution très ingénieuse qu'il a fait insérer dans les Journaux d'Hollande; mais la manière dont ils l'ont conçu, n'est qu'un cas particulier de la construction générale que je viens de donner.

EXEMPLE I.

33. SOIT $axx + byy + czz - f = 0$ (les droites a, b, c, f sont données) dont la différence est $axdx + bydy + czdz = 0$. C'est pourquoi concevant en C le poids ax , en D le poids by , & en E le poids cz , c'est à dire des poids qui soient entr'eux comme ces rectangles; la ligne MP qui passe par leur commun centre de pesanteur, sera perpendiculaire à la courbe au point M . FIG. 22.

Mais si l'on mène FO parallèle à CL , & que l'on prenne le rayon MC pour l'unité, les triangles semblables MCL, MFO donneront $FO = x \times CL$; & de même menant GR parallèle à DK , & HS parallèle à EI , on trouvera que $GR = y \times DK$ & $HS = z \times EI$: de sorte qu'en imaginant aux foyers F, G, H les poids a, b, c ; la ligne MP , qui passe par le centre de pesanteur des poids ax, by, cz supposez en C, D, E , passera aussi par le centre de pesanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre est un point fixe, puisque les poids en F, G, H , savoir a, b, c , sont des droites constantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que se trouve le point M . D'où il suit que la courbe AMB doit être telle que toutes ses perpendiculaires se coupent dans le même point, c'est à dire qu'elle sera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une propriété très remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainsi.

S'il y a sur un même plan autant de poids a, b, c , &c. que l'on voudra, situés en F, G, H , &c. & que l'on décrive de leur commun centre de pesanteur un cercle AMB ; je dis qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M , les droites MF, MG, MH , &c. la somme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond, sera toujours égale à une même quantité.

EXEMPLE II.

34. SOIT la courbe AMB telle qu'ayant mené d'un FIG. 23.
de ses points quelconques M au foyer F qui est un point

fixe la droite MF , & au foyer G qui est une ligne droite la perpendiculaire MG ; le rapport de MF à MG soit toujours le même que de la donnée a à la donnée b .

Ayant nommé FM, x ; MG, y ; on aura $x.y :: a.b$, & partant $ay = bx$ dont la différence est $ady - bdx = 0$. C'est pourquoi concevant en C pris au delà de M par rapport à F le poids b , & en D (à pareille distance de M) le poids a , & menant par leur centre commun de pesanteur la ligne MP ; elle sera la perpendiculaire requise.

Il est clair par le principe de la balance, que si l'on divise la corde CD au point P en sorte que $CP.DP :: a.b$; le point P sera le centre commun de pesanteur des poids supposés en C & D .

La courbe AMB est une section conique, sçavoir une Parabole lorsque $a=b$, une Hyperbole lorsque a surpasse b , & enfin une Ellipse lorsqu'il est moindre.

EXEMPLE III.

FIG. 24. 35. Si après avoir attaché les extrémités d'un fil $FZVMGMXYH$ en F & en H , & avoir fiche une petite pointe en G , on fait tendre également ce fil par le moyen d'un stile placé en M , en sorte que les parties FZV, HXY soient roulées autour des courbes qui ont leur origine en F & H , que la partie MG soit double, c'est à dire qu'elle soit repliée en G , & que les choses demeurant en cet état l'on fasse mouvoir le stile M ; il est clair qu'il décrira une courbe AMB . Il est question de mener d'un point donné M sur cette courbe la perpendiculaire MP , la position du fil qui sert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites MV, MX du fil sont toujours tangentes en V & X , & que si l'on nomme les lignes mixtilignes $FZVM, x$; $HXYM, z$; la droite MG, y ; & une ligne droite prise égale à la longueur du fil, a ; l'on aura toujours $x + 2y + z = a$: d'où je connois que la courbe AMB est comprise dans la construction générale. C'est pourquoi prenant la différence $dx + 2dy + dz = 0$, & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids

poids z ; je dis que la ligne MP , qui passe par le centre commun de pesanteur de ces poids, sera la perpendiculaire requise.

PROPOSITION XI.

Problème.

36. SOIENT deux lignes quelconques APB , EQF dont l'on sçache mener les tangentes PG , QH ; & soit une ligne droite PQ sur laquelle soit marqué un point M . Si l'on conçoit que les extrémités P , Q de cette droite glissent le long des lignes AB , EF , il est clair que le point M décrira dans ce mouvement une ligne courbe CD . Il est question de mener d'un point donné M sur cette courbe la tangente MT .

FIG. 25.

Ayant imaginé que la droite mobile PMQ soit parvenue dans la situation infiniment proche pmq , on tirera les petites droites PO , MR , QS perpendiculaires sur pQ , ce qui formera les petits angles rectangles pOP , mRM , qSQ ; & ayant pris PK égale à MQ , on mènera la droite HKG perpendiculaire sur pQ , & l'on prolongera OP en T , où je suppose qu'elle rencontre la tangente cherchée MT . Cela posé, il est clair que les petites droites Op , Rm , Sq seront égales entr'elles, puisque par la construction PM & MQ sont par tout les mêmes.

Ayant nommé les connues PM ou KQ , a ; MQ ou PK , b ; KG , f ; KH , g ; & la petite droite Op ou Rm ou Sq , dy ; les triangles semblables PKG & pOP , QKH & qSQ donneront $PK(b) \cdot KG(f) :: pO(dy) \cdot OP = \frac{f dy}{b}$. Et $QK(a) \cdot KH(g) :: qS(dy) \cdot SQ = \frac{g dy}{a}$. Or l'on sçait par la Geometrie commune que $MR = \frac{OP \times MQ + QS \times PM}{pQ} = \frac{f dy + g dy}{a + b}$. Ainsi les triangles semblables mRM , MPT donneront $mR(dy) \cdot RM(\frac{f dy + g dy}{a + b}) :: MP(a) \cdot PT = \frac{af + ag}{a + b}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XII.

Problème.

FIG. 26. 37. SOIENT deux lignes quelconques BN, FQ qui aient pour axes les droites BC, ED qui s'entre-coupent à angles droits au point A; & soit une ligne courbe LM telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M les droites MGQ, MPN parallèle à AB, AE, la relation des espaces EGQF, (le point E est un point fixe donné sur la droite AE, & la ligne EF est parallèle à AC) APND, & les droites AP, PM, PN, GQ, soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de mener d'un point donné M sur la courbe LM, la tangente MT.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM, x ; PM ou AG, y ; PN, u ; GQ, z ; l'espace EGQF, s ; l'espace APND, t ; & les soutangentes données PH, a ; GK, b ; l'on aura Pp ou NS ou MR = dx , Gg ou Rm ou OQ = $-dy$; $Sn = -du = \frac{udx}{a}$ à cause des triangles semblables HPN; NSn ; $Oq = dz = -\frac{zdy}{b}$, $NPpm = dt = udx$, & $QGgq = ds = -zdy$; où l'on doit observer que les valeurs de Rm & Sn sont négatives, parceque AP (x) croissant, PM (y) & PN (u) diminuent. Cela posé, on prendra la différence de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de dt , ds , du , dz leurs valeurs udx , $-zdy$, $-\frac{udx}{a}$, $-\frac{zdy}{b}$; ce qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de dy à dx , ou de MP à PT.

EXEMPLE I.

38. SOIT $s + zx = t + ux$, on aura en prenant les différences $ds + zxdz = dt + udx + xdu$, & mettant à la place de ds , dt , dz , du leurs valeurs, on trouvera $-zdy - \frac{zxdy}{b} = udx - \frac{uxdx}{a}$, d'où l'on tire $PT \left(\frac{ydx}{dy} \right) = \frac{zayz + aybz}{bux - axbz}$.

EXEMPLE II.

39. SOIT $s = t$, donc $ds = dt$, c'est à dire $-x dy = u dx$; & partant $PT \left(\frac{y dx}{dy} \right) = -\frac{yz}{u}$. Or comme cette quantité est négative, il s'ensuit* que l'on doit prendre * Art. 10. le point T du côté opposé au point A origine des x . Si l'on suppose que la ligne FQ soit une hyperbole qui ait pour asymptotes les droites AC, AE , en sorte que $GQ(z) = \frac{cz}{y}$, & que la ligne BND soit une droite parallèle à AB , de manière que $PN(u)$ soit par tout égale à la droite donnée c , il est clair que la courbe LM a pour asymptote la droite AB , & que sa sous-tangente $PT \left(-\frac{yz}{u} \right) = -c$; c'est à dire qu'elle demeure par tout la même.

La courbe LM est appelée dans ce cas *Logarithmique*.

PROPOSITION XIII.

Problème.

26. SOIENT deux lignes quelconques BN, FQ qui aient FIG. 27. pour axe la même droite BA , sur laquelle soient marqués deux points fixes A, E ; soit une troisième ligne courbe LM telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques M la droite AN , décrit du centre A l'arc de cercle MG , & tiré GQ parallèle à EF perpendiculaire sur AB ; la relation des espaces $EGQF(s), ANB(t)$, & des droites AM ou $AG(y), AN(z), GQ(u)$, soit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné M sur la courbe LM la tangente MT .

Après avoir mené la droite ATH perpendiculaire sur AMN , soit imaginé une autre droite Amn infiniment proche de AMN , un autre arc mg , une autre perpendiculaire gq , & décrit du centre A le petit arc NS : on nommera les sous-tangentes données AH, a ; GK, b ; & on aura Rm ou $Gg = dy$, $S_n = dz$; les triangles semblables HAN & NSn, KGQ

E ij

& QOq , donneront aussi $SN = \frac{adz}{z}$, $Oq = -du = \frac{udy}{z}$,
 $GQq = -ds = udy$, ANn ou $AN \times \frac{1}{2} NS = -dt = \frac{1}{2} adz$. On mettra toutes ces valeurs dans la différence de l'équation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera une valeur de dz en dy . Or à cause des sécateurs & destriangles semblables ANS & AMR , mRM & MAT , on trouve $AN(z) \cdot AM(y) :: NS\left(\frac{adz}{z}\right) \cdot MR = \frac{aydz}{zz}$.

Et $mR(dy) \cdot RM\left(\frac{aydz}{zz}\right) :: AM(y) \cdot AT = \frac{ayydz}{zzdy}$. Si donc l'on met dans cette formule à la place de dz sa valeur en dy , les différences se détruiront, & la valeur de la soutangente cherchée AT sera exprimée en termes entièrement connus. Ce qu'il falloit trouver.

E X E M P L E I.

41. S O I T $ny - s = zz - t$, dont la différence est $udy + ydu - ds = 2zdz - dt$, ce qui donne (après la substitution faite) $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$; & en mettant cette valeur dans $\frac{ayydz}{zzdy}$, on trouve $AT = \frac{4abyy - 2aay^2}{4bz + abz}$.

E X E M P L E II.

42. S O I T $s = zt$, donc $ds = zdt$, c'est à dire $-udy = -adz$, ou $dz = \frac{udy}{a}$; & partant $AT\left(\frac{ayydz}{zzdy}\right) = \frac{yy}{zz}$.

Si la ligne BN est un cercle qui ait pour centre le point A , & pour rayon la droite $AB = AN = c$, & que FQ soit une hyperbole telle que $GQ(u) = \frac{cf}{f}$; il est clair que la courbe LM fait une infinité de retours au tour du centre A avant que d'y parvenir (puisque l'espace $FEGQ$ devient infini lorsque le point G tombe en A), & que $AT = \frac{cf^2}{cc}$. D'où l'on voit que la raison de AM à AT est constante; & partant que l'angle AMT est par tout le même.

La courbe LM est appelée en ce cas *Logarithmique spirale*.

PROPOSITION XIV.

Problème.

43. SOIENT sur un même plan deux courbes quelconques *AMD*, *BMC* qui se touchent en un point *M*, & soit sur le plan de la courbe *BMC* un point fixe *L*. Si l'on conçoit à présent que la courbe *BMC* roule sur la courbe *AMD* en s'y appliquant continuellement en sorte que les parties révolues *AM*, *BM* soient toujours égales entr'elles; il est visible que le plan *BMC* emportant le point *L*, ce point décrira dans ce mouvement une espèce de roulette *ILK*. Cela posé, je dis que si l'on mène dans chaque différente position de la courbe *BMC* (du point décrivant *L* au point touchant *M*) la droite *LM*; elle sera perpendiculaire à la courbe *ILK*.

Car imaginant sur les deux courbes *AMD*, *BMC* deux parties *Mm*, *Mm* égales entr'elles & infiniment petites, on les pourra considérer * comme deux petites droites qui font au point *M* un angle infiniment petit. Or afin que le petit côté *Mm* de la courbe ou polygone *BMC* tombe sur le petit côté *Mm* du polygone *AMD*, il faut que le point *Z* décrive autour du point touchant *M* comme centre un petit arc *ZL*. Il est donc évident que ce petit arc fera partie de la courbe *ILK*; & par conséquent que la droite *ML*, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur la courbe *ILK* au point *L*. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XV.

Problème.

44. SOIT un angle rectiligne quelconque *MLN*, dont les côtés *LM*, *LN* touchent deux courbes quelconques *AM*, *BN*. Si l'on fait glisser ces côtés autour de ces courbes, en sorte qu'ils les touchent continuellement; il est clair que le sommet *L* décrira dans ce mouvement une courbe *ILK*. Il est question de mener une perpendiculaire *LC* sur cette courbe, la position de l'angle *MLN* étant donnée.

Soit décrit un cercle qui passe par le sommet Z , & par les points touchans M, N ; soit mence par le centre C de ce cercle la droite CZ : je dis qu'elle sera perpendiculaire à la courbe ILK .

Car considérant les courbes AM, BN comme des polygones d'une infinité de côtés tels que Mm, Nn ; il est évident que si l'on fait glisser les côtés LM, LN , de l'angle rectiligne MLN , qu'on suppose demeurer toujours le même, autour des points fixes M, N , (on considère les tangentes LM, LN comme la continuation des petits côtés Mf, Ng) jusqu'à ce que le côté LM de l'angle tombe sur le petit côté Mm du polygone AM , & l'autre côté LN sur le petit côté Nn du polygone BN ; le sommet L décrira une petite partie Ll de l'arc de cercle MLN , puisque par la construction cet arc est capable de l'angle donné MLN . Cette petite partie Ll sera donc commune à la courbe ILK ; & par conséquent la droite CZ , qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur cette courbe au point L . Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

Problème.

FIG. 30. 45. **SOIT** $ABCD$ une corde parfaitement flexible à laquelle soient attachés différens poids A, B, C , &c. qui aient entr'eux tels intervalles AB, BC , &c. que l'on voudra. Si l'on traine cette corde sur un plan horizontal par l'extrémité D , le long d'une courbe donnée DP ; il est clair que ces poids se disposeront en sorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront ensuite des courbes AM, BN, CO , &c. On demande la manière d'en tirer les tangentes, la position de la corde $ABCD$ étant donnée avec la grandeur des poids.

Dans le premier instant que l'extrémité D avance vers P , les poids A, B, C , décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés Aa, Bb, Cc des polygones qui composent les courbes AM, BN, CO ; & par conséquent il ne faut pour en mener les tangentes AB, BG, CK , que déterminer la

direction des poids A, B, C dans ce premier instant, c'est à dire la position des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1^o. Que le poids A est tiré dans ce premier instant suivant la direction AB , & comme il n'y a aucun obstacle qui s'oppose à cette direction, puisqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit suivre; & partant la droite AB sera la tangente en A de la courbe AM .

2^o. Que le poids B est tiré suivant la direction BC ; mais parcequ'il traîne après lui le poids A qui n'est pas dans cette direction, & qui doit par conséquent y apporter quelque changement, le poids B n'aura pas sa direction suivant BC , mais suivant une autre droite BG , dont il faut trouver la position. Ce que je fais ainsi.

Je décris sur BC comme diagonale le rectangle EF , dont le côté BF est sur AB prolongée, & supposant que la force avec laquelle le poids B est tiré suivant BC , s'exprime par BC ; il est visible par les règles de la Mécanique, que cette force BC se peut partager en deux autres BE & BF , c'est à dire que le poids B étant tiré suivant la direction BC par la force BC , c'est la même chose que s'il étoit tiré en même temps par la force BE suivant la direction BE , & par la force BF suivant la direction BF . Or le poids A ne s'oppose point à la direction BE , puisqu'elle lui est perpendiculaire; & par conséquent la force BE suivant cette direction demeure toute entière: mais il s'oppose avec toute sa pesanteur à la direction BF . Afin donc que le poids B avec la force BF vainque la résistance du poids A , il faut que cette force se distribue dans ces poids à proportion de leurs masses ou grandeurs: c'est pourquoi si l'on divise EC au point G , en sorte que CG soit à GE comme le poids A au poids B ; il est clair que EG exprimera la force restante avec laquelle le poids B tend à se mouvoir suivant la direction BF , après avoir vaincu la résistance du poids A . Il est donc évident que le poids B est tiré en même temps par la force BE suivant la direction BE , & par la force EG suivant la direction

BF ou *EC*; & partant qu'il tendra à aller par *BG* avec la force *BG*: c'est à dire que *BG* sera sa direction, & par conséquent tangente en *B* de la courbe *BN*.

3°. Pour avoir la tangente *CK*, je forme sur *CD* comme diagonale le rectangle *HI*, dont le côté *CI* est sur *BC* prolongée; & je vois que le poids *B* ne résiste point à la force *CH* avec laquelle le poids *C* est tiré suivant la direction *CH*, mais bien à la force *CI* avec laquelle il est tiré suivant la direction *CI*, & de plus que le poids *A* résiste aussi à cette force. Pour sçavoir de combien, je tire *AL* perpendiculaire sur *CB* prolongée du côté de *B*, & je remarque que si *AB* exprime la force avec laquelle le poids *A* est tiré suivant la direction *AB*, *BL* exprimera celle avec laquelle ce même poids *A* est tiré suivant la direction *BC*; de sorte que le poids *C* avec la force *CI* doit vaincre le poids entier *B*, & de plus une partie du poids *A* qui est à ce poids *A* comme *BL* est à *BA*, ou *BF* à *BC*. Si donc l'on fait $B + \frac{A \times BF}{BC}$. $C :: DK$. KH , il est clair que *CK* sera la direction du poids *C*, & par conséquent la tangente en *C* de la troisième courbe *CO*.

Si le nombre des courbes étoit plus grand, on trouveroit de la même manière la tangente de la quatrième, cinquième, &c. Et si l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids, on les trouveroit par l'art. 36.



SECTION III.

Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe MDM dont les appliquées PM , FIG. 31.
 ED , PM soient parallèles entr'elles; & qui soit telle 32.
 que la coupée AP croissant continuellement, l'appliquée 33.
 PM croisse aussi jusqu'à un certain point E , après lequel 34.
 elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un
 certain point E , après lequel elle croisse. Cela posé,

La ligne ED sera nommée la plus grande ou la moindre appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propose une quantité telle que PM , qui soit composée d'une ou de plusieurs indéterminées telles que AP , laquelle AP croissant continuellement, cette quantité PM croisse aussi jusqu'à un certain point E , après lequel elle diminue, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour AP , une valeur AE telle que la quantité ED qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité PM semblablement formée de AP . Cela s'appelle une question De maximis & minimis.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

46. LA nature de la ligne courbe MDM étant donnée; trouver pour AP une valeur AE telle que l'appliquée ED soit la plus grande ou la moindre de ses semblables PM .

Lorsque AP croissant, PM croît aussi; il est évident* que * Art. 8:
 la différence Rm sera positive par rapport à celle de AP ; 10.
 & qu'au contraire lorsque PM diminue, la coupée AP croît.

E

fant toujours, la différence sera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de positive négative, qu'elle ne passe par l'infini ou par le zero; sçavoir par le zero lorsqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorsqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il suit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe *MDM* étant donnée, on trouvera * une valeur de *Rm*, laquelle étant égale d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à découvrir la valeur cherchée de *AE* dans l'une ou l'autre de ces suppositions.

* *Sic. l. 1. om. 2.*

REMARQUE.

Fig. 31. 32. 47. LA tangente en *D* est parallèle à l'axe *AB* lorsque la différence *Rm* devient nulle dans ce point; mais lorsqu'elle devient infinie, la tangente se confond avec l'appliquée *ED*. D'où l'on voit que la raison de *mR* à *RM*, qui exprime celle de l'appliquée à la soutangente, est nulle ou infinie sous le point *D*.

Fig. 33. 34.

On conçoit aisément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de positive négative sans passer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorsqu'elle augmente, elle doive passer par l'infini. C'est pourquoi pour aider l'imagination, soient entendues des tangentes aux points *M, D, M*: il est clair dans les courbes où la tangente en *D* est parallèle à l'axe *AB*, que la soutangente *PT* augmente continuellement à mesure que les points *M, P* approchent des points *D, E*; & que le point *M* tombant en *D*, elle devient infinie; & qu'enfin lorsque *AP* surpasse *AE*, la soutangente *PT* devient * négative de positive qu'elle étoit, ou au contraire.

Fig. 31. 32.

* *Art. 10.*

EXEMPLE I.

Fig. 35. 48. SUPPOSONS que $x^3 + y^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) exprime la nature de la courbe *MDM*. On aura en prenant les différences $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$,

& $dy = \frac{axydx - yxxdx}{3yy - ax} = 0$ lorsque le point P tombe sur le point cherchée E , d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & substituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour AE une valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED sera plus grande que toutes les semblables PM .

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{1}{3}}$, l'équation qui expri. FIG. 33.
me la nature de la courbe MDM . On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égle d'abord à zero, mais parceque cette supposition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE , j'égle ensuite $-\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = 0$; d'où l'on tire $x = a$, qui est la valeur cherchée de AE .

EXEMPLE III.

50. SOIT une demie-roulette accourcie AMF , dont la FIG. 36.
base BF est moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C . Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB , en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible.

Ayant mené à discretion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N , on concevra à l'ordinaire aux points M, N , les petits triangles MRm, NSn , & nommant les indéterminées AP, x ; PN, z ; l'arc AN, u ; & les données ANB, a ; BF, b ; CA ou CN, c ; l'on aura par la propriété de la roulette $ANB (a) . BF (b) :: AN (u) . NM = \frac{bu}{a}$.

Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & sa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = 0$ lorsque le point P tombe au point cherché E . Or les triangles rectangles NSn, NPC sont semblables; car si l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS , les restes SNn, PNC seront égaux. Et partant $CN (c) . CP$

$(c - x) :: Nn(du)$. $Sn(dz) = \frac{cdx - xdx}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adx + bdu = 0$, on trouvera $\frac{acdx - axdx + bcdx}{c} = 0$, d'où l'on tirera x (qui est en ce cas AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatrième proportionnelle à la demi-circonférence ANB , à la base BF , & au rayon CB , le point E sera celui qu'on cherche.

EXEMPLE IV.

FIG. 35. 51. COUPER la ligne donnée AB en un point E , en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB , soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même manière.

Ayant nommé l'inconnue AE, x ; & la donnée AB, a ; on aura $AE \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'est pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM , telle que la relation de l'appliquée $MP(y)$ à la coupée $AP(x)$ soit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED soit la plus grande de toutes les semblables PM ; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$, d'où l'on tire $AE(x) = \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times a - x^n$ soit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit soit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times a - x^n - na - x^{n-1}dx \times x^m = 0$, d'où en divisant par $x^{m-1} \times a - x^{n-1}dx$, l'on tire $am - mx - nx = 0$, & $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $AE = 2a$, & il faudra alors énoncer le Problème ainsi.

FIG. 37. Prolonger la ligne donnée AB du côté de B en un point E , en sorte que la quantité $\frac{AE^2}{BE}$ soit un *moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM sera

$\frac{xx}{x-a} = y$, dans laquelle si l'on suppose $x = a$, l'appliquée PM qui devient BC sera $\frac{aa}{0}$, c'est à dire infinie ; & supposant x infinie, l'on aura $y = x$, c'est à dire que l'appliquée sera aussi infinie.

Si $m = x$, & $n = -2$, l'on aura $AE = -a$; d'où il suit que l'on doit énoncer le Problème alors en cette sorte.

Prolonger la droite donnée AB du côté de A en un point E , en sorte que la quantité $\frac{AE \times AB}{BE^2}$ soit plus grande que toute autre quantité semblable $\frac{AP \times AB}{BP^2}$.

EXEMPLE V.

52. LA ligne droite AB étant divisée en trois parties AC , CF , FB , il faut couper sa partie du milieu CF au point E , en sorte que le rapport du rectangle $AE \times EB$ au rectangle $CE \times EF$ soit moindre que tout autre rapport formé de la même manière. FIG. 39.

Ayant nommé les données AC , a ; CF , b ; CB , c ; & l'inconnue CE , x ; l'on aura $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, & partant le rapport de $AE \times EB$ à $CE \times EF$ sera $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ qui doit être un moindre. C'est pourquoi si l'on imagine une ligne courbe MDM , telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) soit exprimée par l'équation $y = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$, la question se réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée ED soit la moindre de toutes ses semblables PM . On formera donc (en prenant les différences, & divisant ensuite par adx) l'égalité $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, dont l'une des racines résout la question.

Si $c = a + b$, l'on aura $x = \frac{1}{2}b$.

EXEMPLE VI.

53. ENTRE tous les Cones qui peuvent être inscrits

dans un sphère, déterminer celui qui a la plus grande surface convexe.

Fig. 46. La question se réduit à déterminer sur le diamètre AB du demi-cercle AFB le point E , en sorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF , & joint AF , le rectangle $AF \times FE$ soit le plus grand de tous ses semblables $AN \times NP$. Car si l'on conçoit que le demi-cercle AFB fasse une révolution entière autour du diamètre AB , il est clair qu'il décrira une sphère, & que les triangles rectangles AEF , APN décriront des cones inscrits dans cette sphère, dont les surfaces convexes décrites par les cordes AE , AN , seront entr'elles comme les rectangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnue $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la propriété du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'est pourquoi on imaginera un ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée $PM (y)$ à la coupée $AP (x)$ soit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E , en sorte que l'appliquée ED soit plus grande que toutes ses semblables PM . On aura donc en prenant la différence $\frac{1axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, d'où l'on tire $AE (x) = \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

§4. ON demande entre tous les Parallélépipèdes égaux à un cube donné a^3 , & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b , celui qui a la moindre superficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre sera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b , x , $\frac{a^3}{bx}$ du parallélépipède, leur somme sçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ fera la moitié de sa superficie qui doit être un *moindre*. C'est pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{2} + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b} = y$, l'on trou-

vera en prenant la différence $\frac{b dx}{a} - \frac{a a dx}{xx} = 0$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^2}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^2}{b}}$; de sorte que les trois côtés du parallélépipède qui satisfait à la question, seront le premier b , le second $\sqrt{\frac{a^2}{b}}$, & le troisième $\sqrt{\frac{a^2}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, sont égaux entr'eux.

EXEMPLE VIII.

55. ON demande présentement entre tous les Parall. Fig. 41.
lepipèdes qui sont égaux à un cube donné a^3 , celui qui a la moindre superficie.

Nommant x un des côtés inconnus, il est clair par l'exemple précédent, que les deux autres côtés seront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la somme des plans alternatifs qui est la moitié de la superficie, sera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}$ qui doit être un moindre. C'est pourquoi sa différence $-\frac{a^3 dx}{xx} + \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x}}$ $= 0$, d'où l'on tire $x = a$; & par conséquent les deux autres côtés seront aussi chacun $= a$; de sorte que le cube même donné satisfait à la question.

EXEMPLE IX.

56. LA ligne AEB étant donnée de position sur un plan Fig. 41.
avec deux points fixes C, F ; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites $CP (u)$, $PF (z)$; soit donnée une quantité composée de ces indéterminées u & z , & de telles autres droites données a, b , &c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la position des droites CE, EF , afin que la quantité donnée, qui en est composée, soit plus grande ou moindre que cette même quantité lorsqu'elle est composée des droites CP, PF .

Supposons que les lignes CE, EF aient la position requise; & ayant joint CF , concevons une ligne courbe DM telle qu'ayant mené à discrétion PQM perpendiculaire sur CF , l'appliqué QM exprime la quantité donnée: il est clair

que le point P tombant au point E , l'appliquée QM qui devient OD , doit être la moindre ou la plus grande de toutes ses semblables. Il faudra donc que sa différence soit alors égale à zéro ou à l'infini : c'est pourquoi si la quantité donnée est par exemple $au + xz$, l'on aura $adu + 2zdx = 0$, & par conséquent $du : -dz :: 2z . a$. D'où l'on voit déjà que dz doit être négative par rapport à du ; c'est à dire que la position des droites CE , EF doit être telle que u croissant, z diminue.

Maintenant si l'on mène EG perpendiculaire à la ligne AEB , & d'un de ses points quelconques G les perpendiculaires GL , GI sur CE , EF ; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment près de E , les droites Cke , FeH , on décrive des centres C , F les petits arcs de cercle EK , EH : on formera les triangles rectangles ELG & Eke , EIG & EHe , qui seront semblables entr'eux ; car si l'on ôte des angles droits GEe , LEK le même angle LEe , les restes LEG , KEe seront égaux ; on prouvera de même que les angles IEG , HEe seront égaux. On aura donc $GL . GI :: Ke (du) . He (-dz) :: 2z . a$. D'où il suit que la position des droites CE , EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG sur la ligne AEB ; le sinus GL de l'angle GEC soit au sinus GI de l'angle GEF , comme les quantités qui multiplient dz sont à celles qui multiplient du . Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

57. Si l'on veut à présent que la droite CE soit donnée de position & de grandeur, que la droite EF le soit de grandeur seulement, & qu'il faille trouver sa position, il est clair que l'angle GEC étant donné, son sinus GL le sera aussi, & par conséquent le sinus GI de l'angle cherché GEF . Donc si l'on décrit un cercle du diamètre EG , & que l'on porte la valeur de GI sur sa circonférence de G en I ; la droite EF qui passe par le point I aura la position requise.

Soit $au + bz$ la quantité donnée ; on trouvera $GI = \frac{ax^{GL}}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne

ne à EC & à EF , la position de cette dernière sera toujours la même, puisqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI , qui par conséquent ne change point. Si $a = b$, il est clair que la position de EF doit être sur CE prolongée du côté de E ; puisque $GL = GI$, lorsque les points C, F tombent de part & d'autre de la ligne AEB : mais lorsqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG doit être pris égal à l'angle CEG . FIG. 42.

EXEMPLE X.

58. LE cercle AEB étant donné de position avec les points C, F hors de ce cercle; trouver sur sa circonférence le point E tel que la somme des droites CE, EF soit la moindre qu'il est possible. FIG. 43.

Supposant que le point E soit celui que l'on cherche, & menant par le centre O la ligne OEG , il est clair qu'elle sera perpendiculaire sur la circonférence AEB ; & partant * que les angles FEG, CEG seront égaux entr'eux. Si donc *Art. 57. l'on mène EH en sorte que l'angle $EH O$ soit égal à l'angle $CE O$, & de même EK en sorte que l'angle EKO soit égal à l'angle FEO , & les parallèles ED, EL à OF, OC ; on formera les triangles semblables OCE & $OE H, OFE$ & $OE K, HDE$ & KLE ; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a ; OC, b ; OF, c ; & les inconnues OD ou LE, x ; DE ou OL, y ; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}, OK = \frac{aa}{c}$, & HD $(x - \frac{aa}{b})$. $DE (y) :: KL (y - \frac{aa}{c})$. $LE (x)$. Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui est une équation à une hyperbole que l'on construira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E .

EXEMPLE XI.

59. UN voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F , doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB . On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a dans le tems c , & dans l'autre du FIG. 43.

côté de F l'espace b dans le même tems t : on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F . Si l'on fait $a \cdot CE(u) :: c \cdot \frac{cu}{a}$. Et $b \cdot EF(z) :: c \cdot \frac{cz}{b}$. Il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE , & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il employe à parcourir EF ; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ doit être un *moindre*. D'où il suit

* Art. 56. * qu'ayant mené EG perpendiculaire sur la ligne AB ; le sinus de l'angle GEC doit être au sinus de l'angle GEF , comme a est à b .

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E comme centre de l'intervalle EC le cercle CGH , & qu'on mene sur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB , & sur CE, EF les perpendiculaires GL, GI ; l'on aura $a \cdot b :: GL \cdot GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parce que les triangles rectangles GEL & $EC A$, GEI & EHD sont égaux & semblables entr'eux, comme il est facile à prouver. C'est pourquoi si l'on nomme l'inconnue AE, x ; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$; & nommant les connues AB, f ; AC, g ; BF, b ; les triangles semblables EBF, EDH donneront $EB(f-x) \cdot BF(b) :: ED(\frac{bx}{a})$, $DH = \frac{bhx}{af - ax}$. Mais à cause des triangles rectangles EDH, EAC , qui ont leurs hypoténuses EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est à dire en termes analytiques, $\frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^2 b^2 h^2 x^2}{a^2 f^2 - 2 a f x + a^2 x^2} = x^2 + g^2$: De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra $aax^4 - 2aafx^3 + aaffxx - 2aafg^2x + aaffg^2 = 0$.

$$\begin{array}{r} -bb^2 + 2bbf^2 + aag^2 \\ -bbff \\ -bbbh \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la manière qui suit, sans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f ; AC, g ; BF, b ; & l'inconnue AE, x ; on fera $a \cdot CE$
 $(\sqrt{gg + xx}) :: c \cdot \frac{c\sqrt{gg + xx}}{a} =$ au tems que le voyageur
 employe à parcourir la droite CE . Et de même $b \cdot EF$
 $(\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}) :: c \cdot \frac{c\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}}{b} =$ au
 tems que le voyageur employe à parcourir la droite EF .
 Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg + xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}}{b} =$ à un *moi-*
ndre; & partant sa différence $\frac{cdx}{a\sqrt{gg + xx}} + \frac{cdx - cfx}{b\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}}$
 $= 0$; d'où l'on tire, en divisant par cdx & en ôtant les in-

commensurables, la même égalité que ci devant, dont
 l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cher-

EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie F qui pend librement au bout Fig. 44.
 d'une corde CF attachée en C , avec un plomb D sus-
 pendu par la corde DFB qui passe au dessus de la poulie
 F , & qui est attachée en B , en sorte que les points C, B
 sont situés dans la même ligne horizontale CB . On sup-
 pose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur;
 & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie
 F doit s'arrêter.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le
 plomb D descendra le plus bas qu'il lui sera possible, au
 dessous de l'horizontale CB ; d'où il suit que la ligne à
 plomb DFE doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nom-
 mant les données CF, a ; DFB, b ; CB, c ; & l'inconnue
 CE, x ; l'on aura $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$,
 & $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ qui doit être
 un *plus grand*; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$
 $= 0$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$, &

divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = 0$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre manière que voici.

Nommant EF, y ; BF, z ; l'on aura $b - z + y =$ à un plus grand; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre; & partant si du point f pris infiniment près de F , l'on mène fR parallèle à CB , & fS perpendiculaire sur BF , l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles seront donc égales entr'elles; & par conséquent les petits triangles rectangles FRf, FSf , qui ont de plus l'hypoténuse Ff commune, seront égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf , c'est à dire que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA , que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F soient égaux entr'eux: ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux,

Cela posé, si l'on mène FH , en sorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD ; les triangles CBF, CFH seront semblables, comme aussi les triangles rectangles ECF, EFH , puisque l'angle CFE est égal à l'angle FHE , étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD ; & par conséquent on aura $CH = \frac{ac}{c}$, & $HE (x - \frac{ac}{c})$.

$EF (y) :: EF \cdot (y) \cdot EC (x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la propriété du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE XIII.

FIG. 45. 61. L'ELEVATION du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuscule.

Soit C le centre de la sphère; $APTOBHQ$ le méridien; $HDdO$ l'horizon; $QeET$ le cercle crépusculaire parallèle

à l'horison; $AMNB$ l'équateur; $FEDG$ la portion du parallèle à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuscule, renfermée entre les plans de l'horison & du cercle crépusculaire; P le pôle austral; PEM , PDN des quarts de cercles de déclinaison. L'arc HQ ou OT du méridien compris entre l'horison & le cercle crépusculaire, & l'arc OP de l'élevation du pôle sont données, & par conséquent leurs sinus droits CI ou FL ou QX , & OV . L'on cherche le sinus CK de l'arc EM ou DN de la déclinaison du Soleil lorsqu'il décrit le parallèle ED .

S'imaginant une autre portion $fedg$ d'un parallèle à l'équateur, infiniment proche de $FEDG$, avec les quarts de cercles Pem , Pdn ; il est clair que le temps que le Soleil emploie à parcourir l'arc ED , devant être un moindre, la différence de l'arc MN qui en est la mesure, & qui devient mn lorsque ED devient ed , doit être nulle; d'où il suit que les petits arcs Mm , Nn , & par conséquent les petits arcs Re , Sd , seront égaux entr'eux. Or les arcs RE , SD étant renfermés entre les mêmes parallèles ED , ed , sont aussi égaux, & les angles en S & en R sont droits. Donc les petits triangles rectangles ERe , DSd (que l'on considère comme rectilignes* à cause de l'infinie petitesse de leurs* Art. 3. côtés), seront égaux & semblables; & par conséquent les hypoténuses Ee , Dd seront aussi égales entr'elles.

Cela posé, les droites DG , EF , dg , ef communes sections des plans $FEDG$, $fedg$ parallèles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépusculaire, seront perpendiculaires sur les diamètres HO , QT , puisque les plans de tous ces cercles sont perpendiculaires chacun sur le plan du méridien; & les petites droites Gg , Ff seront égales entr'elles, puisque les droites FG , fg sont parallèles. Donc $\sqrt{Dd^2 - Gg^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{Ee^2 - Ff^2}$ ou $fe - FE$. Or il est clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que si l'on mène à discrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, sera

à leur différence, comme le rayon est à la coupée depuis le centre, ce qui donne ici (à cause des cercles HDO , QET) $CO . CG :: Dd$ ou $Ee . DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ . IF :: CO + IQ$ ou $OX . CG + IF$ ou GL . Mais à cause des triangles rectangles semblables CVO , CKG , FLG , l'on aura $CO . CG :: OV . GK$. Et $GK . GL :: CK . FL$ ou QX . Donc $OV . CK :: OX . XQ :: XQ . XH$ par la propriété du cercle : c'est à dire que si l'on prend QX pour le rayon ou sinus total dans le triangle rectangle QXH , dont l'angle HQX est de 9 degrés, parceque les Astronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le sinus total est à la tangente de 9 degrés, de même le sinus de l'elevation du pole est au sinus de la déclinaison australe du Soleil dans le temps du plus petit crépuscule. D'où il suit que si l'on ôte 0.8001875 du logarithme du sinus de l'elevation du pole; le reste sera le logarithme du sinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.



SECTION IV.

Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement.

COMME l'on se servira dans la suite des différences secondes, troisièmes, &c. il est nécessaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appelée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien la *différence seconde*. Ainsi si l'on imagine une troisième appliquée nq infiniment proche de la seconde mp , Fig. 46. & qu'on mene mS parallèle à AB , & mH parallèle à RS ; on appellera Hn la *différence de la différence* Rm , ou bien la *différence seconde* de PM .

De même si l'on imagine une quatrième appliquée *of* infiniment proche de la troisième nq , & qu'on mene nT parallèle à AB , & nL parallèle à ST ; on appellera la différence des petites droites Hn , Lo , la *différence de la différence seconde*, ou bien la *différence troisième* de PM . Et ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

On marquera dans la suite chaque différence par un nombre de d qui en exprime l'ordre ou le genre. Par exemple, on marquera par dd la différence seconde ou du second genre; par ddd , la différence troisième ou du troisième genre; par $dddd$, la différence quatrième ou du quatrième genre, & de même des autres. Ainsi ddy exprimera Hn , ddy , $Lo - Hn$ ou $Hn - Lo$, &c.

Quant aux puissances de ces différences, on les marquera par des chiffres postérieurs mis au dessus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entières. Par exemple, le quarré, ou le cube de dy sera dy^2 , ou dy^3 ; le quarré, ou le cube de ddy sera ddy^2 , ou

ddy^3 ; celui de $dddy$ sera $ddd y^3$, ou $ddd y^3$; celui de $ddddy$ sera $dddd y^3$, ou $dddd y^3$, &c.

COROLLAIRE I.

62. Si l'on nomme chacune des coupées AP, Ap, Aq, Af, x ; chacune des appliquées PM, pm, qn, fo, y ; & chacune des portions courbes AM, Am, An, Ao, u ; il est clair que dx exprimera les différences Pp, pq, qf des coupées; dy les différences Rm, Sn, To des appliquées; & du les différences Mm, mn, no des portions de la courbe AMD . Or afin de prendre, par exemple, la différence seconde Hn de la variable PM , il faut imaginer sur l'axe deux petites parties Pp, pq , & sur la courbe deux autres Mm, mn pour avoir les deux différences Rm, Sn ; & partant si l'on suppose que les petites parties Pp, pq soient égales entr'elles, il est clair que dx sera constante par rapport à dy & à du , puisque Pp qui devient pq demeure la même pendant que Rm qui devient Sn , & Mm qui devient mn , varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe Mm, mn seroient égales entr'elles, & alors du seroit constante par rapport à dx & à dy ; & enfin si l'on supposoit que Rm & Sn fussent égales, dy seroit constante par rapport à dx & à du , & la différence Hn (ddy) seroit nulle.

De même pour prendre la différence troisième de PM , ou la différence de la différence seconde Hn , il faut imaginer sur l'axe trois petites parties Pp, pq, qf ; sur la courbe trois autres Mm, mn, no ; & sur les appliquées aussi trois autres Rm, Sn, To , & alors on aura dx ou du ou dy pour constante, selon qu'on supposera que les petites parties Pp, pq, qf , ou Mm, mn, no , ou Rm, Sn, To sont égales entr'elles. Il en est de même des différences quatrièmes, cinquièmes, &c.

FIG. 47.

Tout ceci se doit aussi entendre des courbes AMD , dont les appliquées BM, Bm, Bn partent toutes d'un point fixe B ; car pour avoir, par exemple, la différence seconde de BM , il faut imaginer deux autres appliquées Bm, Bn qui fassent des angles MBm, mBn infiniment petits, & ayant décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, mS ; la différence des

des petites droites Rm, Sn , sera la différence seconde de BM ; & l'on pourra prendre pour constants les petits arcs MR, mS , ou les petites portions de la courbe Mm, mn , ou enfin les petites droites Rm, Sn . Il en va de même pour les différences troisièmes, quatrièmes, &c. de l'appliquée BM .

REMARQUE.

63. ON doit bien remarquer, 1^o. Qu'il y a différens or- Fig. 46.
dres d'infiniment petits: que Rm , par exemple, est infiniment petite par rapport à PM , & infiniment grande par rapport à Hn ; de même que l'espace $MPpm$ est infiniment petit par rapport à l'espace APM , & infiniment grand par rapport au triangle MRm .

2^o. Que la différence entière Pf est encore infiniment petite par rapport à AP ; parceque toute quantité qui est la somme d'un nombre fini de quantités infiniment petites telles que Pp, pq, qf par rapport à une autre AP , demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité: & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compose, soit infini.

COROLLAIRE II.

64. ON peut marquer en cette sorte les différences secondes dans toutes les suppositions possibles.

1^o. Dans les courbes où les appliquées mR, nS sont pa- Fig. 43.
ralleles entr'elles, on prolongera la petite droite Mm en 49.
 H où elle rencontre l'appliquée Sn ; & ayant décrit du centre m , de l'intervalle mn , l'arc nk , on tirera les petites droites nl, li, kcg paralleles à mS & à Sn . Cela posé, si l'on veut que dx soit constante, c'est à dire que MR soit égale à mS ; il est clair que le triangle mSH est semblable & égal au triangle MRm , & qu'ainsi Hn est ddy , c'est à dire la différence de Rm & Sn , & $Hk = ddu$. Mais si l'on suppose que du soit constante, c'est à dire que $Mm = mn$ ou à mk : il est évident alors que le triangle mgk est semblable & égal au triangle MRm , & qu'ainsi $kc = ddy$, &

H

Sg ou $cn = ddx$. Enfin si l'on prend dy pour constante, c'est à dire $mR = nS$, il s'enfuit que le triangle mil est égal & semblable au triangle MRm , & qu'ainsi iS ou $nl = ddx$, & $lk = ddu$.

FIG. 50. 51. 2°. Dans les courbes dont les appliquées BM, Bm, Bn partent d'un même point B , l'on décrira du centre B les arcs

* Art. 3. MR, mS , que l'on regardera* comme de petites droites perpendiculaires sur Bm, Bn ; & ayant prolongé Mm en E , & décrit du centre m , de l'intervalle mn , le petit arc nkE , on fera l'angle $EmH = mBn$, & l'on tirera les petites droites nl, li, kg parallèles à mS & à Sn . Cela posé, à cause du triangle BSm rectangle en S , l'angle $BmS + mBn$, ou $+ EmH$ vaut un droit; & partant l'angle BmE vaut un droit $+ SmH$; il vaut aussi le droit $MRm + RMm$, puisqu'il est externe au triangle RMm . Donc l'angle $SmH = RMm$.

Il suit de ceci, 1°. Que si l'on veut que dx soit constante, c'est à dire que les petits arcs MR, mS soient égaux entr'eux, le triangle SmH sera semblable & égal au triangle RMm , & qu'ainsi $Hn = ddy$, & $Hk = ddu$. 2°. Que si l'on prend du pour constante, le triangle gmk sera semblable & égal au triangle RMm , & qu'ainsi kc exprimera ddy & Sg ou cn, ddx . Enfin, 3°. Que si l'on prend dy pour constante, les triangles iml, RMm seront égaux & semblables; & qu'ainsi iS ou $ln = ddx$, & $lk = ddu$.

PROPOSITION I.

Problème.

65. **P**RENDRE la différence d'une quantité composée de différences quelconques.

On prendra pour constante la différence que l'on voudra, & traitant les autres comme des quantités variables, on se servira des regles prescrites dans la Section premiere.

La différence de $\frac{ydy}{dx}$, en prenant dx pour constante, fera $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, & $\frac{dx dy^2 - y dy dx}{dx^2}$ en prenant dy pour constante.

Celle de $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $dz\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout divisé par dx , c'est à dire $\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $dzdx\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} - zddx\sqrt{dx^2+dy^2}$, le tout divisé par dx^2 , c'est à dire $\frac{dzdx^2+dzdx dy^2 - zdy^2 ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

La différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, en prenant dx pour constante, sera $dy^2 + yddy\sqrt{dx^2+dy^2} - \frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout divisé par dx^2+dy^2 , c'est à dire $\frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $\frac{dx^2dy^2+dy^4-ydyddx}{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

La différence de $\frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dxddy}$ ou $\frac{dx^2+dy^2}{dxddy}^{\frac{1}{2}}$, en prenant dx pour constante, sera $-\frac{3dxddydy^2dx^2+dy^{\frac{5}{2}}+dxdddydx^2+dy^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Mais il faut observer que dans ce dernier cas il n'est pas libre de prendre dy pour constante, car dans cette supposition sa différence ddy seroit nulle; & par conséquent elle ne devoit pas se rencontrer dans la quantité proposée.

DEFINITION II.

Lorsqu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B ; le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appelé point d'*inflexion*, lorsque la courbe étant parvenue en F continue son chemin vers le même côté: & point de *rebroussement* lorsqu'elle rebrousse chemin du côté de son origine.

Fig. 52. 53.
54. 55.

PROPOSITION II.

Problème général.

66. **L**a nature de la ligne courbe AFK étant donnée, déterminer le point d'inflexion ou de rebroussement F .

FIG. 52. 53. Supposons en premier lieu que la ligne courbe AFK ait pour diamètre une ligne droite AB , & que ses appliquées PM , EF , &c. soient toutes parallèles entr'elles. Si l'on mène par le point F , l'appliquée FE avec la tangente FL ; & par un point quelconque M de la partie AF , une appliquée MP avec une tangente MT : il est clair,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'inflexion, que la coupée AP croissant continuellement, la partie AT du diamètre, interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente, croît aussi jusqu'à ce que le point P tombe en E , après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AT étant appliquée en P , doit devenir un *plus grand* AL lorsque le point P tombe sur le point cherché E .

2°. Dans celles qui ont un point de rebroussement, que la partie AT croissant continuellement, la coupée AP croît aussi jusqu'à ce que le point T tombe en L , après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AP étant appliquée en T doit devenir un *plus grand* AE lorsque le point T tombe en L .

Or si l'on nomme AE , x ; EF , y ; l'on aura $AL = \frac{y^2 dx}{dy} - x$, dont la différence, qui est $\frac{dy^2 dx - y^2 d^2 x}{dy^2} - dx$ (en supposant dx constante), étant divisée par dx différence de AE , doit

* Art. 47. être* nulle ou infinie; ce qui donne $-\frac{y d^2 y}{dy^2} = 0$ ou à l'infini: de sorte que multipliant par dy^2 , & divisant par $-y$, il vient $ddy = 0$ ou à l'infini; ce qui servira dans la suite de formule générale pour trouver le point d'inflexion ou de rebroussement F . Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx ; & prenant la différence de cette valeur, en supposant dx constante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2 , laquelle étant égalee d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira

dans l'une ou l'autre de ces suppositions à trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebroussement F .

L'origine A des x peut être tellement situé que $AL = x - \frac{y dx}{dy}$, au lieu de $\frac{y dx}{dy} - x$, & que AL ou AE soit un *moindre* au lieu d'être un *plus grand*: mais comme la conséquence est toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas. Il est à remarquer que AL ne peut jamais être $= x + \frac{y dx}{dy}$, car lorsque le point T tombe de l'autre côté du point P , par rapport à l'origine A des x , la valeur de $\frac{y dx}{dy}$ sera négative suivant l'article 10, & par conséquent celle de $-\frac{y dx}{dy}$ sera positive, de sorte qu'on aura encore en ce cas $AE + EL$. ou $AL = x - \frac{y dx}{dy}$.

La même chose se peut encore trouver de cette autre manière. Il est clair qu'en prenant dx pour constante, & supposant que l'appliquée y augmente, Sn est moindre que SH ou que Rm dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de $Hn (ddy)$ doit devenir de positive négative sous le point d'inflexion ou de rebroussement F ; & partant * qu'elle y doit être ou nulle ou infinie. * Art. 47.

Supposons en second lieu que la courbe AFK ait pour appliquées les droites BM, BF, BM , qui partent toutes d'un même point B . Si l'on mène telle appliquée BM qu'on voudra, avec une tangente MT qui rencontre BT perpendiculaire à BM au point T ; & qu'ayant pris le point m infiniment près de M , l'on tire l'appliquée Bm , la tangente mt , & la perpendiculaire Bt sur Bm , qui rencontre MT en O ; il est visible (en supposant que l'appliquée BM , qui devient Bm , augmente) que dans la partie concave, Bt surpasse BO , & qu'au contraire elle est moindre dans la partie convexe; de sorte que sous le point d'inflexion ou de rebroussement F , la valeur de Ot doit devenir de positive négative.

Cela posé, si l'on décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, TH , on formera les triangles semblables mRM, MBT, THO , & les petits secteurs semblables BMR, BTH . Nommant donc BM, y ; MR, dx ; l'on aura $mR (dy)$. RM

FIG. 48. 49.

FIG. 54. 55.

FIG. 56. 57.

FIG. 56.

$(dx) :: BM(y) . BT = \frac{y dx}{dy} :: MR(dx) . TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH$
 $(\frac{dx^2}{dy}) . HO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la différence de $BT (\frac{y dx}{dy})$
 en supposant dx constante, il vient $Bt - BT$ ou $Ht =$
 $\frac{dx dy^2 - y dx dy}{dy^2}$; & partant $OH + Ht$ ou $Ot = \frac{dx^2 + dx dy^2 - y dx dy}{dy^2}$.

D'où il suit en multipliant par dy^2 , & divisant par dx , que
 la valeur de $dx^2 + dy^2 - yddy$ sera nulle ou infinie sous le
 point d'inflexion ou de rebroussement F . Or la nature de
 la ligne AFK étant donnée, l'on aura des valeurs de dy en
 dx , & de ddy en dx^2 , lesquelles étant substituées dans dx^2
 $+ dy^2 - yddy$, formeront une quantité, qui étant égalee
 d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à trouver pour
 BF une valeur telle que décrivant du centre B , & de ce
 rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'in-
 flexion ou de rebroussement F . Ce qui étoit proposé.

FIG. 54. 55.

FIG. 50. 51.

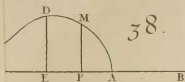
FIG. 50.

Pour trouver encore la même chose d'une autre manière,
 il faut considérer que dans la partie concave l'angle BmE
 surpasse l'angle Bmn , & qu'au contraire dans la convexe il
 est moindre; & partant que l'angle $BmE - Bmn$ ou Emn ,
 c'est à dire l'arc En qui en est la mesure, devient de positif
 négatif sous le point cherché F . Or prenant dx pour con-
 stante, les triangles rectangles semblables HmS , Hnk ,
 donneront $Hm(du) . mS(dx) :: Hn(-ddy) . nk = -\frac{dx dy}{du}$.
 ou l'on doit observer que la valeur de Hn est négative,
 parceque $Bm(y)$ croissant, $Rm(dy)$ diminue. Mais à cause
 des sécateurs semblables BmS , mEk , l'on aura $Bm(y) . mS$
 $(dx) :: mE(du) . Ek = \frac{dx du}{y}$, & partant $Ek + kn$ ou $En =$

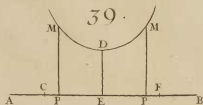
FIG. 54. 55.

$\frac{dx du^2 - y dx dy}{y du}$. D'où il suit en multipliant par $y du$, & divi-
 fant par dx , que $du^2 - yddy$ ou $dx^2 + dy^2 - yddy$ doit de-
 venir de positive, négative sous le point cherché F .

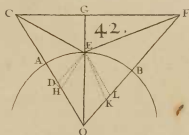
Si l'on suppose que y devienne infinie, les termes dx^2
 & dy^2 seront nuls par rapport au terme $yddy$; & par consé-
 quent la formule $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ ou à l'infini, se
 changera en cette autre $-yddy = 0$ ou à l'infini, c'est à
 dire en divisant par $-y$, $ddy = 0$ ou à l'infini, qui est la
 formule du premier cas. Ce qui doit aussi arriver, puisque



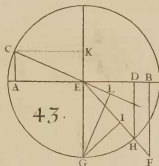
38.



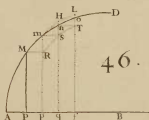
39.



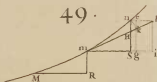
42.



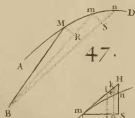
43.



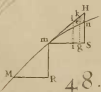
46.



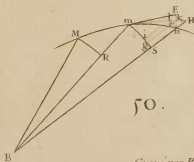
49.



47.



48.



50.

Gravé par Borey

COROLLAIRE.

67. LORSQUE $ddy = 0$, il est clair que la différence FIG. 52.
 de AL doit être nulle par rapport à celle de AE ; & par-
 tant que les deux tangentes infiniment proches FL , fL doi-
 vent tomber l'une sur l'autre, en ne faisant qu'une seule li-
 gne droite fFL . Mais lorsque $ddy =$ à l'infini, la différence FIG. 53.
 de AL doit être infiniment grande par rapport à celle de
 AE , ou (ce qui est la même chose) la différence de AE
 est infiniment petite par rapport à celle de AL ; & par con-
 séquent l'on peut mener par le même point F deux tan-
 gentes FL , Ff qui fassent entr'elles un angle infiniment
 petit LFL .

De même lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, il est visible que FIG. 56. 57.
 Or doit devenir nulle par rapport à MR ; & qu'ainsi les deux
 tangentes infiniment proches MT , mt , doivent tomber
 l'une sur l'autre, lorsque le point M devient un point d'in-
 flexion ou de rebroussement : mais au contraire lorsque
 $dx^2 + dy^2 - yddy =$ à l'infini, Or doit être infinie par rap-
 port à MR , ou (ce qui est la même chose) MR infini-
 ment petite par rapport à Or ; & par conséquent le point m
 doit tomber sur le point M , c'est à dire qu'on peut me-
 ner par le même point M deux tangentes qui fassent en-
 tr'elles un angle infiniment petit, lorsque ce point devient
 un point d'inflexion ou de rebroussement.

Il est évident que la tangente au point d'inflexion ou
 de rebroussement F , étant prolongée, touche & coupe
 la courbe AFK dans ce même point.

EXEMPLE I.

68. SOIT une ligne courbe AFK qui ait pour diame. FIG. 58.
 tre la ligne droite AB , & qui soit telle que la relation de
 la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), soit exprimée par
 l'équation $axx = xxy + aay$. Il s'agit de trouver pour AE
 une valeur telle que l'appliquée EF rencontre la courbe
 AFK au point d'inflexion F .

L'équation à la courbe est $y = \frac{axx}{xx + aa}$; & partant $dy = \frac{2axdx}{xx + aa}$, & prenant la différence de cette quantité en supposant dx constante, & l'égalant ensuite à zero, on trouve $\frac{2a^3dx^3 \times xx + aa^3 - 8a^1xxdx^3 \times \frac{axx}{xx + aa}}{xx + aa^2} = 0$; ce qui multiplié par $xx + aa^2$, & divisé par $2a^3dx^3 \times \frac{axx}{xx + aa}$, donne $xx + aa - 4xx = 0$, d'où l'on tire $AE(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on met à la place de xx sa valeur $\frac{1}{3}aa$ dans l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx + aa}$, on trouve $EF(y) = \frac{1}{4}a$; de sorte qu'on peut déterminer le point d'inflexion F sans supposer que la courbe AFK soit décrite.

Si l'on mène AC parallèle aux appliquées EF , & égale à la droite donnée a , & qu'on tire CG parallèle à AB , elle sera asymptote de la courbe AFK . Car si l'on suppose x infinie, on pourra prendre xx pour $xx + aa$; & partant l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx + aa}$ se changera en celle-ci $y = a$.

EXEMPLE II.

69. Soit $y - a = \sqrt{x - a^{\frac{1}{3}}}$. Donc $dy = \frac{1}{3}\sqrt{x - a^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{2}{3}}dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\sqrt{x - a^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{7}{3}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt{x - a^{\frac{1}{3}}}}$, en prenant dx pour constante. Or si l'on suppose cette fraction égale à zero, on trouve $-6dx^2 = 0$; ce qui ne faisant rien connaître, il la faut supposer infiniment grande; & par conséquent son dénominateur $25\sqrt{x - a^{\frac{1}{3}}}$ infiniment petit ou zero. D'où l'inconnue $AE(x) = a$.

EXEMPLE III.

Fig. 59. 70. Soit une demi roulette allongée AFK dont la base BK surpasse la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C . Il s'agit de déterminer
sur

sur le diametre AB , le point E , en sorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'inflexion F .

Ayant nommé les connues ADB , a ; BK , b ; AB , $2c$; & les inconnues AE , x ; ED , z ; l'arc AD , u ; EF , y ; l'on aura par la propriété de la roulette $y = z + \frac{bu}{a}$; & par-tant $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Or par la propriété du cercle l'on aura

$$z = \sqrt{2cx - xx}, dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}, \& du(\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}.$$

Donc mettant pour dz & du leurs valeurs, on trouve $dy = \frac{acdx - xxdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, dont la différence (en prenant dx pour constante) donne $\frac{bcx - acc - bcc \times dx}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$; d'où l'on tire $AE(x) = c + \frac{ac}{b}$, & $CE = \frac{ac}{b}$.

Il est clair qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion F , il faut que b surpasse a ; car s'il étoit moindre, CE surpasse-roit CB .

EXEMPLE IV.

71. ON demande le point d'inflexion F de la Con. FIG. 60. choïde AFK de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P , & pour asymptote la droite BC . Sa propriété est telle, qu'ayant mené du pole P à un de ses points quelconques F la droite PF , qui rencontre l'asymptote BC en D ; la partie DF est toujours égale à une même droite donnée a .

Ayant mené PA perpendiculaire, & FE parallèle à BC , on nommera les connues AB ou FD , a ; BP , b ; & les inconnues BE , x ; EF , y ; & tirant DL parallèle à BA , les triangles semblables DLE , PEF donneront $DL(x)$. $LF(\sqrt{aa - xx}) :: PE(b + x)$. $EF(y) = \frac{b + x\sqrt{aa - xx}}{x}$, dont la différence est $dy = \frac{x^2dx + aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$. Si donc on prend la différence de cette quantité, & qu'on l'égale à zero, on formera l'égalité $\frac{2a^2b - aax^2 - aabxx \times dx}{aaax - x^3 \times \sqrt{aa - xx}} = 0$,

qui se réduit à $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$, dont l'une des racines fournit pour BE la valeur cherchée.

Si $a = b$, l'équation précédente se changera en cette autre $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$, laquelle étant divisée par $x + a$, donne $xx + 2ax - 2aa = 0$; & partant $BE(x) = -a + \sqrt{3aa}$.

Autrement.

En prenant pour appliquees les lignes PF qui partent
 * Art. 66. du pole P , & en se servant de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$, dans laquelle dx a été supposée constante. Ayant imaginé une autre appliquée Pf qui fasse avec PF l'angle Fpf infiniment petit, & décrit du centre P les petits arcs FG, DH , on nommera les connues AB, a ; BP, b ; & les inconnues PF, y ; PD, z ; & l'on aura par la propriété de la conchoïde $y = z + a$, ce qui donne $dy = dz$. Or à cause du triangle rectangle DBP , $DB = \sqrt{zz - bb}$; & à cause des triangles semblables DBP & dHD , PDH & PFH , l'on aura $DB(\sqrt{zz - bb}) . BP(b) :: dH(dz) . HD$
 $= \frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}$. Et $PD(z) . PF(z + a) :: HD(\frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}) . FG(dx)$
 $= \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz - bb}}$. D'où l'on tire dz ou $dy = \frac{zdx\sqrt{zz - bb}}{bz + ab}$,
 dont la différence est (en supposant dx constante) ddy
 $= \frac{bz^2 + 2abz - ab^2 \times dx \times dx}{bz + ab^2\sqrt{zz - bb}} = \frac{bz^2 + 2abz - ab^2 \times dx^2}{bz + ab^2}$ en met-
 tant pour dz sa valeur. Donc si l'on substitue dans la
 * Art. 66. formule générale $yddy = dx^2 + dy^2$ à la place de y sa
 valeur $z + a$, & de dy & ddy les valeurs que l'on vient
 de trouver en dx & dx^2 ; on formera cette équation

$$\frac{z^4 + 2az^3 - abbz \times dx^2}{bz + ab^2} = \frac{z^4 + 2abbz + abbb \times dx^2}{bz + ab^2} \text{ qui se réduit à } 2z^3 - 3bbz - abb = 0, \text{ dont l'une des racines augmentée de } a \text{ fournit la valeur de l'inconnue } PF.$$

Si $a = b$, l'on aura $2z^3 - 3aa z - a^3 = 0$, qui étant divisée par $z + a$, donne $z z - az - \frac{a^2}{2} = 0$, dont la résolution fournit $PF(z + a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}$.

EXEMPLE V.

72. SOIT une autre espece de Conchoïde AFK , telle Fig. 60.
qu'ayant mené d'un de ses points quelconques F au pole
 P la droite PF qui coupe l'asymptote BC en D , le rectan-
gle $PD \times DF$ soit toujours égal au même rectangle $PB \times$
 BA . On demande le point d'inflexion F .

Si l'on nomme les inconnues BE, x ; EF, y , & les con-
nues AB, a ; BP, b ; on aura $PD \times DF = ab$; & les paral-
leles BD, EF donneront $PD \times DF (ab) . PB \times BE (bx)$
 $:: PE^2 (bb + 2bx + xx + yy) . PE^2 (bb + 2bx + xx)$.
Donc $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$, ou

$$yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}, \text{ \& } y = \overline{b + x\sqrt{\frac{a-x}{x}}}$$

$$= \sqrt{ax} - \frac{xx}{\sqrt{ax}} + b\sqrt{\frac{a-x}{x}}, \text{ dont la différence donne } dy$$

$$= \frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax} - xx}; \text{ \& prenant encore la différence,}$$

on forme l'égalité $\frac{1aab - axx - 4abx \times dx^2}{4axx - 4x^2 \times \sqrt{ax} - x^2} = 0$, qui se réduit
à $x = \frac{1ab}{a + 4b}$ valeur de l'inconnue BE .

Si l'on fait $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax} - xx}$ valeur de dy égal à zero,
l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = 0$, dont les deux racines
 $a + \sqrt{aa - 8ab}$ & $a - \sqrt{aa - 8ab}$ fournissent, lorsque a sur-
passe $8b$, deux valeurs de BH & BL , telles que l'appliquée Fig. 61.
 HM est moindre que ses voisines, & l'appliquée LN plus
grande, c'est à dire que les tangentes en M & N seront
paralleles à l'axe AB ; & alors le point E tombera entre
les points H & L .

Mais lorsque $a = 8b$, les lignes BH, BE, BL seront éga. Fig. 62.
les chacune à $\frac{1}{4}a$; & alors la tangente au point d'inflex-
ion F sera parallele à l'axe AB . Et enfin lorsque a est
moindre que $8b$, les deux racines seront imaginaires, &
par conséquent il n'y aura aucune tangente qui puisse être
parallele à l'axe.

FIG. 60.

On pourroit encore résoudre cette question en prenant pour appliquées les lignes PF , Pf , qui partent du pôle P , & en se servant de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

EXEMPLE VI.

FIG. 63.

73. SOIT un cercle AED qui ait pour centre le point B , avec une ligne courbe AFK telle qu'ayant mené à discription le rayon BFE , le carré de FE soit égal au rectangle de l'arc AE par une droite donnée b . Il faut déterminer dans cette courbe le point d'inflexion F .

Ayant nommé l'arc AE , z ; le rayon BA ou BE , a ; & l'appliquée BF , y ; on aura $bz = az - 2ay + yy$, & (en prenant les différences) $\frac{ydy - 2ady}{b} = dz = Ee$. Or à cause des sécateurs semblables BEE , BFG , on fera $BE(a) \cdot BF(y) :: Ee(\frac{ydy - 2ady}{b}) \cdot FG(dx) = \frac{yydy - 2aydy}{ab}$, dont la différence, en supposant dx constante, donne $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = 0$; & partant $yddy = \frac{ady^2 - yydy^2}{y - a}$.

Si donc on substitue à la place de dx^2 & $yddy$ leurs valeurs
* Art. 66. en dy^2 dans la formule générale $yddy = dx^2 + dy^2$, on formeral'équation $\frac{ady^2 - yydy^2}{y - a} = \frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 8a^2yydy^2 + 8a^3bbdy^2}{aabb}$

qui se réduit à $4y^5 - 12ay^4 + 12a^2ay^3 - 4a^3yy + 3aabbby - 2a^3bb = 0$, dont la résolution fournira pour BF la valeur cherchée.

Il est évident que la courbe AFK , que l'on peut appeler une *Spirale parabolique*, doit avoir un point d'inflexion F . Car la circonférence AED ne différant pas d'abord sensiblement de la tangente en A , il fuit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'ensuite la courbure de la circonférence autour de son centre devenant sensible, elle doit devenir concave vers ce centre.

EXEMPLE VII.

74. Soit une ligne courbe AFK qui ait pour axe la droite AB , dont la propriété soit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point B , la partie interceptée AB soit toujours à la tangente BF en raison donnée de m à n . Il est question de déterminer le point de rebroussement F .

FIG. 64.

Ayant nommé les inconnues & variables AE, x ; EF, y ;

l'on aura $EB = -\frac{y dx}{dy}$ (parce que x croissant, y diminue),

$FB = \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2}$. Or par la propriété de la courbe, AE

+ EB ou $AB \left(\frac{x dy - y dx}{dy} \right) \cdot BF \left(\frac{y \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2}}{dy} \right) :: m \cdot n$. Donc

$m y \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2} = \frac{n x dy}{y} - n dx$, & la différence donne $\frac{m dy ddy}{y \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2}}$

$= \frac{-n y dx dy + n x y ddy - n x dy^2}{y y}$ en supposant dx constante &

négative; d'où l'on tire $ddy = \frac{-n y dx dy - n x dy^2 \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2}}{m y dy - n x y \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2}}$.

Maintenant si l'on fait cette fraction égale à zero, on

trouvera $-y dx - x dy = 0$; ce qui ne fait rien connoître.

C'est pourquoi il faut supposer cette fraction égale à l'infini, c'est à dire son dénominateur égal à zero;

ce qui donne $\sqrt{y^2 dx^2 + dy^2} = \frac{m dy}{n x} = \frac{n x dy - n y dx}{m y}$ à cause de

l'équation à la courbe, d'où l'on tire $dx = \frac{n x x dy - m m y dy}{n x y}$. Or

quarrant chaque membre de l'équation $m y dy = n x \sqrt{y^2 dx^2 + dy^2}$,

on trouve encore $dx = \frac{dy \sqrt{m m y - n n x}}{n x} = \frac{n n x dy - m m y dy}{n n x y}$.

d'où l'on tire enfin $y \sqrt{m m - n n} = n x$; ce qui donne cette

construction.

Soit décrit du diametre $AD = m$, un demi-cercle AID ; & ayant pris la corde $DI = n$, soit tirée l'indéfinie AI . Je dis qu'elle rencontrera la courbe AFK au point de rebroussement F .

Car ayant mené IH perpendiculaire à AB , les triangles rectangles semblables DIA , IHA , FEA donneront $DI (n)$. $IA(\sqrt{mm} - nn) :: IH.HA :: FE (y)$. $EA (x)$. & partant $y\sqrt{mm} - nn = nx$ qui étoit le lieu à construire.

Il est clair que BF est parallèle à DI , puisque $AB.BF :: AD (m)$. $DI (n)$. d'où il suit que l'angle AFB est droit; & partant que les lignes AB, BF, BE sont en proportion continue.

On peut trouver cette même propriété sans aucun calcul, si l'on imagine * au même point de rebroussement F deux tangentes FB, Fb qui fassent entr'elles un angle BFb infiniment petit. Car décrivant du centre F le petit arc BL , on aura $m.n :: Ab.bF :: AB.BF :: Ab - AB$ ou $Bb.bF - BF$ ou $bL :: BF.BE$. à cause des triangles rectangles semblables BbL, FBE . Donc, &c.

Si $m = n$, il est évident que la droite AF deviendra perpendiculaire sur l'axe AB ; & qu'ainsi la tangente FB sera parallèle à cet axe; ce que l'on sçait d'ailleurs devoir arriver, puisqu'en ce cas la courbe AF doit être un demi-cercle qui ait son diamètre perpendiculaire sur l'axe AB . Mais si m étoit moindre que n , il est évident qu'il n'y auroit aucun point de rebroussement, parcequ'alors l'équation $y\sqrt{mm} - nn = nx$ renfermeroit une contradiction,



SECTION V.

*Usage du calcul des différences pour trouver
les Développées.*

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque BDF Fig. 65. concave vers le même côté, soit enveloppée ou entourée d'un fil $ABDF$, dont l'une des extrémités soit fixe en F , & l'autre soit tendue le long de la tangente BA , & que l'on fasse mouvoir l'extrémité A en la tenant toujours tendue & en développant continuellement la courbe BDF ; il est clair que l'extrémité A de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe AHK .

Cela posé, la courbe BDF sera nommée la *Développée* de la courbe AHK .

Les parties droites AB, HD, KF du fil $ABDF$ seront nommées les *rayons de la développée*.

COROLLAIRE I.

75. DE ce que la longueur du fil $ABDF$ demeure toujours la même, il suit que la portion de courbe BD est égale à la différence des rayons DH, BA qui partent de ses extrémités; de même la portion DF sera égale à la différence des rayons FK, DH ; & la courbe entière BDF à la différence des rayons FK, BA . D'où l'on voit que si le rayon BA de la courbe étoit nul, c'est à dire que si l'extrémité A du fil tomboit sur l'origine B de la courbe BDF , alors les rayons de la développée DH, FK seroient égaux aux portions BD, BDF de la courbe BDF .

COROLLAIRE II.

76. SI l'on considère la courbe BDF comme un polygone Fig. 66. $BCDEF$ d'une infinité de côtés, il est clair que l'extrémité A du fil $ABCDEF$ décrit le petit arc AG qui a pour

centre le point C , jusqu'à ce que le rayon CG ne fasse plus qu'une ligne droite avec le petit côté CD voisin de CB ; & de même qu'elle décrit le petit arc GH qui a pour centre le point D , jusqu'à ce que le rayon DH ne fasse plus qu'une droite avec le petit côté DE ; & ainsi de suite jusqu'à ce que la courbe $BCDEF$ soit entièrement développée. La courbe AHK peut être donc considérée comme l'assemblage d'une infinité de petits arcs de cercle AG, GH, HI, IK , &c. qui ont pour centre les points C, D, E, F , &c. D'où il suit,

1°. Que les rayons de la développée la touchent continuellement comme DH en D , KF en F , &c. Et qu'ils sont tous perpendiculaires à la courbe AHK qu'ils décrivent, comme DH en H , FK en K , &c. Car DH , par exemple, est perpendiculaire sur le petit arc GH & sur le petit arc HI , puisqu'elle passe par leurs centres D, E . D'où

FIG. 65. l'on voit, 1°. que la développée BDF termine l'espace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe AHK . 2°. Que si l'on prolonge un rayon quelconque HD qui coupe le rayon AB en R , jusqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque KF en S , l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie RS deux perpendiculaires sur la courbe AHK , excepté du point touchant D duquel on n'en peut mener qu'une seule, sçavoir DH . Car il est clair que l'intersection R des rayons AB, DH parcourt tous les points de la partie RS , pendant que le rayon AB décrit par son extrémité A la ligne AHK sur laquelle il est continuellement perpendiculaire: & que les rayons AB, HD ne se confondent que lorsque l'intersection R tombe sur le point touchant D .

FIG. 66. 2°. Que si l'on prolonge les petits arcs HG en l , IH en m , KI en n , &c. vers l'origine A du développement, chaque petit arc comme IH touchera en dehors son voisin HG , parce que les rayons CA, DG, EH, FI vont toujours en augmentant, à mesure que les petits arcs qui composent la courbe AHK , s'éloignent du point A . Par la même raison si l'on prolonge les petits arcs AG en o , GH en p ,
HI

HI en *q*, vers le côté opposé au point *A*; chaque petit arc comme *HI* touchera en dessous son voisin *IK*. Or puisqu'il y a les points *H* & *I*, *D* & *E* peuvent être considérés comme tombant l'un sur l'autre à cause de l'infinie petitesse de l'arc *HI*, que du côté *DE*; il s'ensuit que si l'on décrit d'un point quelconque moyen *D* de la développée *BDF* comme centre, & de son rayon *DH* un cercle *mHp*, il touchera en dehors la partie *HA* qui tombera toute entière au dedans de ce cercle, & en dedans de l'autre partie *HK* qui tombera toute entière au dehors de ce même cercle: c'est à dire qu'il touchera & coupera la courbe *AHK* au même point *H*, de même que la tangente au point d'inflexion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon *HD* du petit arc *HG*, ne différant des rayons *CG*, *EH* des arcs voisins *GA*, *HI*, que d'une quantité infiniment petite *CD* ou *DE*; il s'ensuit que pour peu qu'on diminue le rayon *DH*, il sera moindre que *CG*, & qu'ainsi son cercle touchera en dessous la partie *HA*; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il surpassera *HE*, & qu'ainsi son cercle touchera en dehors la partie *HK*: de sorte que le cercle *mHp* est le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie *HA*, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie *HK*: c'est à dire qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire passer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'ensuit que la courbure du petit arc *HI* sera à la courbure du petit arc *AG* réciproquement comme le rayon *BA* ou *CA* de ce dernier est à son rayon *DH* ou *EH*: c'est à dire que la courbure en *H* de la courbe *AHK* sera à sa courbure en *A* comme le rayon *BA* au rayon *DH*; & de même que la courbure en *K* est à la courbure en *H* comme le rayon *DH* est au rayon *FK*. D'où l'on voit que la courbure de la ligne *AHK* diminue continuellement à mesure que la ligne *BDF* se développe; de sorte qu'au point *A*, où commence le développement, elle est la plus grande qu'il est possible;

& au point K , où je suppose qu'il cesse, la plus petite.

5°. Que les points de la développée ne sont autre chose que le concours des perpendiculaires menées par les extrémités des petits arcs qui composent la courbe AHK . Par exemple, le point D ou E est le concours des perpendiculaires HD , IE du petit arc HI ; de sorte que si la courbe AHK est donnée avec la position d'une de ses perpendiculaires HD , pour trouver le point D ou E , où elle touche la développée, il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches HD , IE : c'est ce qu'on va enseigner dans le Problème qui suit.

PROPOSITION I.

Problème général.

FIG. 67. 77. **L**A nature de la ligne courbe AMD étant donnée avec une de ses perpendiculaires quelconque MC ; déterminer la longueur du rayon MC de sa développée: c'est à dire le concours des perpendiculaires infiniment proches MC , mC .

Supposons en premier lieu que la ligne courbe AMD ait pour axe la ligne droite AB sur laquelle les appliquées PM soient perpendiculaires. On imaginera une autre appliquée mp , qui sera infiniment proche de MP ; puisque le point m est supposé infiniment près de M . On mènera par le point de concours C une parallèle CE à l'axe AB , laquelle rencontre les appliquées MP , mp aux points E , e . Enfin menant MR parallèle à AB , on formera les triangles rectangles semblables MRm , MEC ; car les angles EMR , CMm étant droits, & l'angle CMR leur étant commun, l'angle EMC sera égal à l'angle RMm .

Si donc l'on nomme les données AP , x ; PM , y ; l'inconnue ME , z ; l'on aura Ee ou Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy = dz$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & $MR(dx) \cdot Mm(\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: ME(z) \cdot MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Or le point C étant le centre du petit arc Mm , son rayon CM qui devient Cm lors-

que EM augmente de sa différence Rm , demeure le même. Sa différence sera donc nulle : ce qui donne (en supposant dx constante) $\frac{dz dx^2 + dz dy^2 + z dy ddy}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$; d'où l'on tire

$ME(z) = \frac{dz dx^2 + dz dy^2}{- dy ddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{- ddy}$ en mettant pour dz sa valeur dy .

Supposons en second lieu que les appliquées BM, Bm Fig. 68. partent toutes d'un même point B . Ayant mené du point

cherché C sur les appliquées, que je suppose infiniment proches, les perpendiculaires CE, Ce , & décrit du centre B le petit arc MR ; on formera les triangles rectangles semblables RMm & EMC, BMR, BEG & CeG . C'est pourquoi nommant BM, y ; ME, z ; MR, dx ; on aura $Rm = dy$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, CE ou $Ce = \frac{z dy}{dx}$, & $MC = \frac{z \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. On trouvera ensuite, comme dans le pre-

mier cas, $z = \frac{dz dx^2 + dz dy^2}{- dy ddy}$. Or $BM(y) \cdot Ce(\frac{z dy}{dx}) :: MR(dx) \cdot Ge = \frac{z dy}{y}$ & $me - ME$ ou $Rm - Ge = dz = \frac{y dy - z dy}{y}$.

Donc en mettant cette valeur à la place de dz , l'on aura

$$ME(z) = \frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y ddy}.$$

Si l'on suppose que y soit infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport à $y ddy$; & par conséquent cette dernière formule se changera en celle du cas précédent. Ce qui doit aussi arriver ; puisque les appliquées deviennent alors parallèles entr'elles, & que l'arc MR devient une droite perpendiculaire sur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe AMD étant donnée, on trouvera des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2 , ou de dx^2 & ddy en dy^2 , lesquelles étant substituées dans les formules précédentes, donneront pour ME une valeur délivrée des différences, & entièrement connue. Et menant EC perpendiculaire sur ME , elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe, au point cherché C . Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE I.

FIG. 67. 68. 78. A cause des triangles rectangles semblables MRm & MEC , l'on aura dans le premier cas $MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx dy}$, & dans le second cas $MC = \frac{y dx^2 + y dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^4 + dx dy^2 - y x x dy}$.

REMARQUE.

79. I l y a encore plusieurs autres manières de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne possèdent pas encore ce calcul.

Premier cas pour les courbes dont les appliquées sont perpendiculaires à l'axe.

FIG. 67. Première manière. Soit prolongée MR en G où elle rencontre la perpendiculaire mC . Les angles droits MRm , MmG donneront $RG = \frac{dy^2}{dx}$; & par conséquent $MG = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$. Or à cause des triangles semblables MRm , MPQ (les points Q , q marquent les intersections des perpendiculaires infiniment proches MC , mC avec l'axe AB) il vient $MQ = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, $PQ = \frac{y dy}{dx}$; & partant $AQ = x + \frac{y dy}{dx}$, dont la différence donne (en prenant dx pour constante) $Qq = dx + \frac{dy^2 + y ddy}{dx}$; & à cause des triangles semblables CMG , CQq , l'on aura $MG - Qq \left(\frac{-y ddy}{dx} \right)$. $MG \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx} \right) :: MQ \left(\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \right)$. $MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx dy}$.

Seconde manière. Ayant décrit du centre C le petit arc QO , les petits triangles rectangles QOq , MRm seront semblables, puisque Mm , QO & MR , Qq sont parallèles; & partant $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2})$. $MR (dx) :: Qq \left(\frac{dx^2 + dy^2 + y ddy}{dx} \right)$. $QO = \frac{dx^2 + dy^2 + y ddy}{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or les sécateurs semblables CMm ,

CQO donnent $Mm - QO \left(\frac{-yddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right) . Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2})$
 $:: MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \right) . MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$.

Troisième maniere. Menant les tangentes infiniment proches MT, mt , on aura $PT - AP$ ou $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence donne $Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2}$; & décrivant du centre m le petit arc TH , on formera le triangle rectangle HTt semblable à RmM , car les angles HtT , RmM ou PTM sont égaux, ne différant entr'eux que de l'angle Tmt qui est infiniment petit; ce qui donne $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2})$.
 $mR(dy) :: Tt \left(-\frac{ydxddy}{dy^2} \right) . TH = \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or les secteurs TmH, MCm sont semblables, car l'angle $Tmt + MmC$ vaut un droit, & l'angle $MmC + MCm$ vaut aussi un droit à cause du triangle CMm considéré comme rectangle en M . Donc $TH \left(-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right) . Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: Tm$
ou $TM \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} \right) . MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$.

Quatrième maniere. On marquera * les différences se- * Art. 64.
condes en prenant dx pour constante; & les triangles ré- FIG. 69.
ctangles semblables HmS, Hnk donneront Hm ou Mm
 $(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . mS$ ou $MR(dx) :: Hn (-ddy) . nk$
 $= -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or l'angle knn est égal à celui que font
entr'elles les tangentes aux points M, m ; & partant com-
me l'on vient de prouver, égal à l'angle MCm ; d'où il suit
que les secteurs nmk, MCm sont semblables, & qu'ainsi nk
 $\left(-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right) . mk$ ou * $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: Mm$ * Art. 2.
 $(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$. On prend mH
ou Mm pour mk , parcequ'elles ne différent entr'elles que
de la petite droite Hk infiniment moindre qu'elles; de
même que Hn est infiniment moindre que Rm ou Sn .

Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.

Fig. 63. Première manière. Ayant mené du point fixe B les perpendiculaires BF, Bf sur les rayons infiniment proches CM, Cm ; les triangles rectangles mMR, BMF , qui sont semblables (puisque'ajoutant aux angles mMR, BMF le même angle FMR , ils composent chacun un angle droit), donneront MF ou $MH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, & $Bf = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $Bf - BF$ ou $Hf = \frac{dx^2 dy^2 + dy^4 + ydx^2 ddy}{dx^2 + dy^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or à cause des facteurs semblables CMm, CHf , on forme cette proportion $Mm - Hf . Mm :: MH . MC$, & partant $MC = \frac{ydx^2 + ydy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 + dx dy^2 - ydx ddy}$.

* Art. 64. Seconde manière. On marquera * les différences secondes en supposant dx constante, & les facteurs semblables BmS, mEk donneront $Bm(y) . mS(dx) :: mE(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . Ek = \frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$. Or à cause des triangles rectangles semblables HmS, Hnk , l'on aura Hm ou $Mm(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . mS$ ou $MR(dx) :: Hn(-ddy) . nk = -\frac{dx ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Et partant $En = \frac{dx^2 + dx dy^2 - ydx ddy}{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & prenant une troisième proportionnelle à En, Em ou Mm , les facteurs semblables Emn, MCm donneront pour MC la même valeur qu'au paravant.

Si l'on nomme $Mm(\sqrt{dx^2 + dy^2})$, du ; & qu'on prenne dy pour constante au lieu de dx , on trouvera dans le premier cas $MC = \frac{du^3}{dy ddx}$, & dans le second $MC = \frac{y du^3}{dx du^2 + y dy ddx}$. Et enfin si l'on prend du pour constante, il vient dans le premier cas $MC = \frac{dx du}{-ddy}$ ou $\frac{dy du}{ddx}$ (parce que la différence de $dx^2 + dy^2 = du^2$ est $dx ddx$

+ $dydy = 0$, & qu'ainsi $\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx}$; & dans le second,

$$MC = \frac{y dx du}{dx^2 - y dy} \text{ ou } \frac{y dy du}{dx dy + y dx}.$$

COROLLAIRE II.

80. COMME l'on ne trouve pour ME ou MC qu'une seule valeur, il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule développée BCG .

COROLLAIRE III.

81. SI la valeur de ME ($\frac{dx^2 + dy^2}{-dy}$) ou ($\frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y dy}$) Fig. 67. 68.

est positive, il faudra prendre le point E du même côté de l'axe AB ou du point B , comme l'on a supposé en faisant le calcul, d'où l'on voit que la courbe sera alors concave vers cet axe ou ce point. Mais si la valeur de ME est négative, il faudra prendre le point E du côté opposé; d'où l'on voit que la courbe sera alors convexe. De sorte qu'au point d'inflexion ou de rebroussement qui sépare la partie concave de la convexe, la valeur de ME doit devenir de positive négative; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contigues doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne se peut faire qu'en deux manières. Car ou elles vont en croissant à mesure qu'elles approchent du point d'inflexion ou de rebroussement; & il faudra pour lors qu'elles deviennent parallèles, c'est à dire que le rayon de la développée soit infini: ou elles vont en diminuant; & il faudra nécessairement alors qu'elles tombent l'une sur l'autre, c'est à dire que le rayon de la développée soit zero. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la section précédente.

REMARQUE.

82. COMME l'on a cru jusqu'ici que le rayon de la développée étoit toujours infiniment grand au point d'in-

fléxion, il est à propos de faire voir qu'il y a, pour ainsi dire, une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'infléxion le rayon de la développée égal à zero, au lieu qu'il n'y en a qu'un seul genre dans lequel ce rayon soit infini.

FIG. 71. Soit BAC une des courbes qui ont dans leur point d'infléxion A le rayon de la développée infini. Si l'on développe les parties BA, AC , en commençant au point A ; il est clair qu'on formera une ligne courbe DAE qui aura aussi un point d'infléxion dans le même point A , mais dont le rayon de la développée en ce point, sera égal à zero. Et si l'on formoit de la même sorte une troisième courbe par le développement de la seconde DAE , & une quatrième par le développement de la troisième, & ainsi de suite à l'infini, il est clair que le rayon de la développée dans le point d'infléxion A de toutes ces courbes, seroit toujours égal à zero. Donc, &c.

PROPOSITION II.

Problème.

FIG. 72. 83. TROUVER dans les courbes AMD , où l'axe AB fait avec la tangente en A un angle droit, le point B où cet axe touche la développée BCG .

Si l'on suppose que le point M devienne infiniment près du sommet A , il est clair que la perpendiculaire MQ rencontrera l'axe au point cherché B ; d'où il suit que si l'on cherche en général la valeur de PQ ($\frac{2xy}{ax}$) en x ou en y , & qu'on fasse ensuite x ou $y = 0$, on déterminera le point P à tomber sur le point A , & le point Q sur le point cherché B ; c'est à dire que PQ deviendra alors égale à la cherchée AB . Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

FIG. 72. 84. SOIT la courbe AMD une Parabole qui ait pour para-

parametre la droite donnée a . L'équation à la parabole est $ax = yy$, dont la différence donne $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; & prenant la différence de cette dernière équation, en supposant dx constante, on trouve $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de dy & de ddy dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on aura * $ME = \frac{a + 4\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. * Art. 77. Ce qui donne cette construction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallèle à MC ; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E . Car les angles droits MPT , MTE donnent $MP(\sqrt{ax})$. $PT(2x) :: PT(2x)$. $PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; & par conséquent $MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

De plus à cause des triangles rectangles MPQ , MEC , l'on aura $PM(\sqrt{ax})$. $PQ(\frac{1}{2}a) :: ME(\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a})$. EC ou $PK = \frac{1}{2}a + 2x$. & partant $QK = 2x$. Ce qui donne cette nouvelle construction.

Soit prise QK double de AP , ou (ce qui revient au même) soit prise PK égale à TQ , & soit menée KC parallèle à PM . Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui sera à la développée BCG .

Autre manière. $yy = ax$, & $zydy = adx$ dont la différence (en supposant dx constante) donne $zdy^2 + zyddy = 0$; d'où l'on tire $-ddy = \frac{dy^2}{y}$. Et mettant cette valeur dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve * $ME = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dy^2}$; & partant * Art. 77. EC ou $PK = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dy^2} = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy} = PQ + PT$ ou TQ . Ce qui donne les mêmes constructions qu'auparavant. Car MP . $PT :: dy$. $dx :: PT(\frac{ydx}{dy})$. $PE = \frac{ydx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

Pour trouver à présent le point B où l'axe AB touche la développée BCG . On a $PQ\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}a$. Or comme cette quantité est constante, elle demeurera toujours la même en quelque endroit que se trouve le point M . Et ainsi, lorsqu'il tombe sur le sommet A , l'on aura encore PQ qui devient en ce cas $AB = \frac{1}{2}a$.

Pour trouver la nature de la développée BCG à la manière de *Descartes*. On nommera la coupée BK, u ; l'appliquée KC ou PE, t ; d'où l'on aura $CK(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{u}$ & $AP + PK - AB(u) = 3x$; mettant donc pour x sa valeur $\frac{1}{3}u$ dans l'équation $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{u}$, l'on en formera une nouvelle $27att = 16u^3$ qui exprimera la relation de BK à KC . D'où l'on voit que la développée BCG de la parabole ordinaire est une seconde parabole cubique dont le parametre est égal à $\frac{27}{16}$ du parametre de la parabole donnée.

FIG. 73. Il est visible que la développée CBC de la parabole commune entiere MAM a deux parties CB, BC qui ont leurs convexités opposées l'une à l'autre, de sorte qu'elles forment en B un point de rebroussement.

AVERTISSEMENT.

FIG. 72. On entend par courbes géométriques AMD, BCG celles dont la relation des coupées AP, BK aux appliquées PM, KC , se peut exprimer par une équation où il ne se rencontre point de différences; & on prend pour géométrique tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on suppose ici que les coupées & les appliquées soient des lignes droites.

COROLLAIRE.

85. LORSQUE la courbe donnée AMD est géométrique, il est clair que l'on pourra toujours trouver (comme dans cet exemple) une équation qui exprime la nature de

sa développée BCG ; & qu'ainsi cette développée sera aussi géométrique. Mais je dis de plus qu'elle sera rectifiable, c'est-à-dire qu'on pourra trouver géométriquement des lignes droites égales à une de ses portions quelconque BC ; car il est évident * que l'on déterminera avec le secours * Art. 75. de la ligne AMD , qui est géométrique, sur la tangente CM de la portion BC , un point M tel que la droite CM ne différerait de la portion BC que d'une droite donnée AB .

EXEMPLE II.

86. SOIT la courbe donnée MDM une hyperbole entre ses asymptotes, qui ait pour équation $aa = xy$. Fig. 74.

On aura $\frac{aa}{y} = x$, $\frac{-aady}{yy} = dx$, & supposant dx constante, * $\frac{-aayddy + 2aady}{y^2} = 0$; d'où l'on tire $ddy = \frac{2dy^2}{y}$; & * Art. 1. mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, il vient * $ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$; * Art. 77. de sorte que EC ou $PK = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Ce qui donne ces constructions.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'asymptote AB , la ligne TS parallèle à MC & qui rencontre MP prolongée en S ; soit prise ME égale à la moitié de MS de l'autre côté de l'asymptote (que l'on regarde ici comme l'axe) parce que sa valeur est négative; ou bien soit prise PK égale à la moitié de TQ du même côté du point T : je dis que si l'on mène EC parallèle ou KC perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite MC au point cherché C . Car il est clair que $MS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, & que $TQ = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy}$.

Si l'on fait quelque attention sur la figure de l'hyperbole MDM , on verra que sa développée CLC doit avoir un point de rebroussement L , de même que la développée de la parabole. Pour le déterminer je remarque que le rayon DL de la développée est plus petit que tout autre rayon

* Art. 78. MC ; d'où il suit que la différence de son expression *

* Sol. 3. $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx dy}$ ou $\frac{dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}}{-dx dy}$ sera * nulle ou infinie. Ce qui donne , en prenant toujours dx pour constante ,

$$\frac{-3dx dy dy^2 dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}} + dx ddy dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}}{dx^2 ddy^2} = 0 \text{ ou } \infty ; \text{ d'où en}$$

divisant par $dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}$, & multipliant ensuite par $dx ddy^2$, on tire cette équation $dx^2 ddy + dy^2 ddy - 3dy dy^2 = 0$ ou ∞ , qui servira à trouver pour x une valeur AH telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la développée , le point L sera le point de rebroussement cherché.

On a dans cet exemple $y = \frac{aa}{x}$, $dy = -\frac{a dx}{xx}$, $ddy = \frac{2a a dx^2}{x^3}$, $ddy = -\frac{6a a dx^2}{x^3}$. C'est pourquoi mettant ces va- leurs dans l'équation précédente , on trouve $AH(x) = a$. D'où il suit que le point D est le sommet de l'hyperbole , & que les lignes AD , DL ne font qu'une même droite AL qui en est l'axe.

EXEMPLE III.

Fig. 72. 74. 87. SOIT l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorsque l'exposant m marque un nombre positif entier ou rompu , & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif.

On aura $my^{m-1} dy = dx$ dont la différence donne , en prenant dx pour constante , $mm - my^{m-1} dy^2 + my^{m-1} ddy = 0$; & en divisant par my^{m-1} , il vient $-ddy = \frac{m-1 dy^2}{y}$;

* Art. 77. d'où mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-dx dy}$, on tirera * $ME = \frac{y dx^2 + y dy^2}{m-1 dy^2}$; & partant EC ou $PK = \frac{y dy}{m-1 dx} + \frac{y dx}{m-1 dy}$.

Ce qui donne ces constructions générales.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe AP , la ligne TS parallèle à MC & qui rencontre

MP prolongée au point S ; soit prise $ME = \frac{1}{m-1}MS$, ou bien soit prise $PK = \frac{1}{m-1}TQ$: il est clair que si l'on mène par le point E une parallèle, ou par le point K une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront MC au point cherché C .

Si m est négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de ME sera négative; & par conséquent elles seront convexes vers leur axe qui sera alors une asymptote. Mais dans les paraboles où m est positif, il peut arriver deux cas. Car ou m sera moindre que 1, & alors elles seront convexes du côté de leur axe, qui sera une tangente au sommet: ou m surpasse 1, & alors elles seront concaves vers leur axe qui sera perpendiculaire au sommet.

Pour trouver dans ce dernier cas le point B où l'axe AB touche la développée. On a $FQ \left(\frac{y dy}{dx} \right) = \frac{y^{1-m}}{m}$; ce qui donne trois différens cas. Car ou $m = 2$, ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'exposant de y étant nul, cette inconnue s'évanouit; & par conséquent $AB = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à la moitié du parametre. Ou m est moindre que 2, & alors l'exposant de y étant positif, elle se trouvera dans le numerateur, ce qui rend (en l'égalant * à zero) la fraction nulle: c'est-à-dire que le point B tombe en ce cas sur le point A comme dans la seconde parabole cubique $axx = y^2$. Ou enfin m surpasse 2, & alors l'exposant de y étant négatif, elle sera dans le dénominateur, ce qui rend (lorsqu'elle devient zero) la fraction infinie: c'est-à-dire que le point B est infiniment éloigné du point A , ou (ce qui est la même chose) que l'axe AB est asymptote de la développée comme dans la première parabole cubique $axx = y^3$. On peut remarquer dans ce dernier cas que la développée CLO de la demi-parabole ADM a un point de rebroussement L ; de sorte que par le développement de la partie LO continuée à l'infini, le point D ne décrit que la portion déterminée DA :

au lieu que par le développement de l'autre partie ZC continuée aussi à l'infini, il décrit la portion infinie DM .

On déterminera le point Z de même que dans l'hyperbole. Soit par exemple $axx = y^3$ ou $y = x^{\frac{1}{3}}$, on aura $dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, $ddy = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}dx^2$, $ddd = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}dx^3$; & ces valeurs étant substituées dans l'équation $dx^3 ddd$

* Art. 86. $+ dy^2 ddd - 3 dy ddy^2 = 0$, on trouvera $AH(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{91125}}$. Il en est ainsi des autres.

REMARQUE.

88. EN supposant que m surpasse 1, afin que les paraboles soient toujours concaves du côté de leur axe, il peut arriver différens cas. Car si le numérateur de la fraction marquée par m est pair, & le dénominateur impair; toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire. Mais si le numérateur & dénominateur sont chacun impair; elles ont une position renversée de part & d'autre de leur axe, en sorte que leur sommet A est un point d'inflexion, comme la première parabole cubique $x = y^{\frac{1}{3}}$ ou

Fig. 77. $axx = y^3$. Enfin si le numérateur étant impair, le dénominateur est pair; elles ont une position renversée du même côté de leur axe, en sorte que leur sommet A est

Fig. 76. un point de rebroussement, comme la seconde parabole cubique $x = y^{\frac{1}{2}}$ ou $axx = y^3$. Tout cela suit de ce qu'une puissance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela posé, il est évident,

Fig. 77. 1°. Que dans le point d'inflexion A , le rayon de la développée peut être infiniment grand comme dans $axx = y^3$, ou infiniment petit comme dans $axx^3 = y^3$.

Fig. 76. 2°. Que dans le point de rebroussement A , le rayon de la développée peut être ou infini comme dans $a^3xx = y^3$, ou zero comme dans $axx = y^3$.

3°. Qu'il ne s'ensuit pas de ce que le rayon de la développée est infini ou zero, que les courbes aient alors un point d'inflexion ou de rebroussement. Car dans $a^2x = y^4$ il est infini, dans $ax^3 = y^4$ il est nul; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire.

EXEMPLE IV.

89. Soit la courbe AMD une hyperbole ou une ellipse Fig. 78. 79. qui ait pour axe $AH(a)$, & pour parametre $AF(b)$.

On aura par la propriété de ces lignes $y = \sqrt{\frac{abx + bxx}{a}}$,
 $dy = \frac{abdx + 2bxdx}{2\sqrt{abx + bxx}}$, & $ddy = \frac{-abbdx^2}{4abx + 4abxx\sqrt{abx + bxx} + abxx}$. Si

donc l'on met ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2\sqrt{ax^2 + dy^2}}{dxddy}$ expression générale de MC , on trouvera dans ces deux courbes MC * Art. 78.

$$= \frac{aabb + 4abbx + 4bbxx + 4aabb + 4abxx\sqrt{aabb + 4abbx + 4bbxx} + 4aabb + 4bbxx + 4aabb + 4abxx}{2a^2bb}$$

$$= \frac{4MQ}{bb}, \text{ puisque de part \& d'autre } MQ \left(\frac{\sqrt{ax^2 + dy^2}}{dx} \right)$$

$$= \frac{4aabb + 4abbx + 4bbxx + 4aabb + 4abxx}{2a^2}. \text{ Ce qui donne}$$

cette construction qui sert aussi pour la parabole.

Soit prise MC quadruple de la quatrième continuelement proportionnelle au parametre AF & à la perpendiculaire MQ terminée par l'axe; le point C sera à la développée.

Si l'on fait $x = 0$, on aura $AB = \frac{1}{2}b$. Et si l'on fait dans * Art. 83. l'ellipse $x = \frac{1}{2}a$, on trouvera $DG = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'est-à-dire Fig. 79. égal à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipse la développée BCG se termine en un point G du petit axe DO où elle forme un point de rebroussement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini.

Si $a = b$ dans l'ellipse, il vient $MC = \frac{1}{2}a$; d'où il suit que tous les rayons de la développée sont égaux entr'eux, & qu'elle ne sera par conséquent qu'un point: c'est à-dire que l'ellipse devient en ce cas un cercle qui a pour développée son centre. Ce que l'on sçait d'ailleurs être véritable.

EXEMPLE V.

FIG. 8c. 90. SOIT la courbe AMD une logarithmique ordinaire, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconque M la perpendiculaire MP sur l'asymptote KP , & la tangente MT ; la sous-tangente PT soit toujours égale à la même droite donnée a .

On a donc $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = a$, d'où l'on tire $dy = \frac{ydx}{a}$, dont la différence donne, en prenant dx pour constante, $d^2y = \frac{dydx}{a}$

* Art. 77. $= \frac{ydx^2}{aa}$; & mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-a dy}$, on trouve *

$ME = \frac{-aa - yy}{y}$; & partant EC ou $PK = \frac{-aa - yy}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit prise PK égale à TQ du même côté de T , parce que sa valeur est négative; & soit menée KC parallèle à PM : je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire MC au point cherché C . Car $TQ = \frac{aa + yy}{a}$.

Si l'on veut que le point M soit celui de la plus grande courbure, on se servira de la formule $dx^2 d^3dy + dy^2 d^3dx$
 * Art. 86. $- 3dy d^2dy = 0$, que l'on a trouvée * dans l'exemple second; & mettant pour dy , d^2dy , d^3dy , leurs valeurs $\frac{ydx}{a}$, $\frac{ydx^2}{aa}$, $\frac{ydx^3}{a^3}$, on trouvera $PM(y) = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Il est clair, en prenant dx pour constante, que les appliquées y sont entr'elles comme leurs différences dy ou $\frac{ydx}{a}$; d'où il suit qu'elles font aussi une progression géométrique. Car si l'on conçoit que l'asymptote ou l'axe PK soit divisé en un nombre infini de petites parties égales Pp ou MR , pf ou mS , fg ou nH , &c. comprises entre les appli-

appliquées $PM, pm, fn, go, &c.$ l'on aura $PM. pm :: Rm. Sn :: PM + Rm$ ou $pm. pm + Sn$ ou Fn . On prouve de même que $pm. fn :: fn. go, &c.$ ainsi de suite. Les appliquées $PM, pm, fn, go, &c.$ feront donc entr'elles une progression géométrique.

EXEMPLE VI.

91. SOIT la courbe AMD une logarithmique spirale, FIG. 81. dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconque M au point fixe A , qui en est le centre, la droite MA & la tangente MT ; l'angle AMT soit par tout le même.

L'angle AMT ou AmM étant constant, la raison de mR (dy) à RM (dx) sera aussi constante. Il faut donc que la différence de $\frac{dy}{dx}$ soit nulle; ce qui donne (en supposant dx constante) $ddy = 0$. C'est pourquoi effaçant le terme $yddy$ dans $\frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2} - y ddy$ expression * générale de ME lorsque * *Art. 77.* les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve $ME = y$, c'est-à-dire $ME = AM$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée AC perpendiculaire sur AM , & qui rencontre en C la droite MC perpendiculaire à la courbe; le point C fera à la développée ACB .

Les angles AMT, ACM sont égaux, puisqu'étant joints l'un & l'autre au même angle AMC ils font un angle droit. La développée ACG fera donc la même logarithmique spirale que la donnée AMD , & elle n'en différera que par sa position.

Si l'on suppose que le point C de la développée ACG étant donné, il faille déterminer la longueur CM de son rayon en ce point, qui * est égal à la portion AC qui fait * *Art. 75.* une infinité de retours avant que de parvenir en A ; il est clair qu'il n'y a qu'à mener AM perpendiculaire sur AC . De sorte que si l'on mene AT perpendiculaire sur

AM , la tangente MT sera aussi égale à la portion AM de la logarithmique spirale donnée AMD .

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées AM, Am, An, Ao , &c. qui fassent entr'elles des angles infiniment petits & égaux ; il est clair que les triangles MAM, mAn, nAo , &c. seront semblables, puisque les angles en A sont égaux, & que par la propriété de la logarithmique, les angles en m, n, o , &c. le sont aussi. Et partant $AM : Am :: Am : An$. Et $Am : An :: An : Ao$. & ainsi de suite. D'où l'on voit que les appliquées AM, Am, An, Ao , &c. font une progression géométrique lorsqu'elles font entr'elles des angles égaux.

EXEMPLE VII.

FIG. 82. 92. SOIT la courbe AMD une des spirales à l'infini, formée dans le secteur BAD avec une propriété telle qu'ayant mené un rayon quelconque AMP , & ayant nommé l'arc entier BPD , b ; la partie BP , z ; le rayon AB ou AP , a ; & la partie AM , y ; on ait cette proportion $b : z :: a^m : y^n$.

L'équation à la spirale AMD est $y^m = \frac{a^m z}{b}$, dont la différence donne $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Or à cause des secteurs semblables AMR, APp , l'on aura $AM(y) : AP(a) :: MR(dx) : Pp(dz) = \frac{a dx}{y}$. Mettant donc cette valeur à la place de dz dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$; d'où en divisant par my^{m-1} , l'on tire $-yddy = mdy^2$; & partant ME^*

$$\left(\frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y ddy} \right) = \frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + m + 1 dy^2}$$

ce qui donne cette construction.

Soit menée par le centre A la droite TAQ perpendiculaire sur AM , & qui rencontre en T la tangente MT , & en Q la perpendiculaire MQ ; soit fait $TA + m + 1 AQ$.

$TQ :: MA \cdot ME$. Je dis que menant EC parallèle à TQ , elle ira rencontrer MQ en un point C qui sera à la développée.

Car à cause des parallèles MRG, TAQ , l'on aura $MR(dx) + m + 1RG\left(\frac{dy^2}{dx}\right) \cdot MG\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right) :: TA + m + 1AQ \cdot TQ$
 $:: AM(y) \cdot ME = \frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + m + 1 dy^2}$.

EXEMPLE VIII.

93. SOIT AMD une demi-roulette simple, dont la base Fig. 83.
 BD est égale à la demi-circonférence BEA du cercle générateur.

Ayant nommé AP, x ; PM, y ; l'arc AE, u ; & le diamètre $AB, 2a$; l'on aura par la propriété du cercle $PE = \sqrt{2ax - xx}$; & par celle de la roulette $y = u + \sqrt{2ax - xx}$, dont la différence donne $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$
 $= \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ou $dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; en supposant dx constante, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$;

& en mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, il vient * * Art. 78.

$MC = 2\sqrt{4aa - 2ax}$, c'est-à-dire $2BE$ ou $2MG$.

Si l'on fait $x = 0$, l'on aura $AN = 4a$ pour rayon de la développée dans le sommet A . Mais si l'on fait $x = 2a$, on trouvera que le rayon de la développée au point D devient nul ou zero; d'où l'on voit que la développée a son origine en D , & qu'elle se termine en N en sorte que $BN = BA$.

Pour sçavoir la nature de cette développée, il n'y a qu'à achever le rectangle BS , décrire le demi-cercle DIS qui a pour diamètre DS , & mener DI parallèle à MC ou à BE . Cela fait, il est clair que l'angle BDI est égal à l'angle EBD ; & par conséquent que les arcs DI, BE sont égaux entr'eux; d'où il suit que leurs cordes DI, BE ou GC sont

aussi égales. Si donc l'on fait IC , elle sera égale & parallèle à DG , qui par la génération de la roulette est égale à l'arc BE ou DI ; & partant la développée DCN est une demi-roulette qui a pour base la droite NS égale à la demi-circonférence DIS de son cercle générateur: c'est-à-dire que c'est la demi-roulette même $AMDB$ posée dans une situation renversée.

COROLLAIRE.

* Art. 75. 94. IL est clair* que la portion de roulette DC est double de sa tangente CG , ou de la corde correspondante DI . Et la demi-roulette DCN double du diamètre BN ou DS de son cercle générateur.

AUTRE SOLUTION.

95. ON peut encore trouver la longueur du rayon MC sans aucun calcul, en cette sorte. Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la première, une autre parallèle me , une autre corde Be , & décrit des centres C, B les petits arcs GH, EF , on formera les triangles rectangles GHg, EFe qui seront égaux & semblables; car $Gg = Ee$, puisque BG ou ME est égal à l'arc AE , & de même Bg ou me est égal à l'arc Ae ; de plus Hg ou $mg - MG = Fe$ ou $Be - BE$; GH sera donc égal à EF . Or les perpendiculaires MC, mC , étant parallèles aux cordes EB, eB , l'angle MCm sera égal à l'angle EBe . Donc puisque les arcs GH, EF , qui mesurent ces angles, sont égaux, il s'ensuit que leurs rayons CG, BE seront aussi égaux; & partant que MC doit être prise double de MG ou de BE .

LEMME.

96. S'IL y a un nombre quelconque de quantités $a, b, c, d, e, \&c.$ soit que ce nombre soit fini ou infini, soit que ces quantités soient des lignes, ou des surfaces, ou des solides; la somme $a - b + b - c + c - d + d - e, \&c.$ de toutes leurs différences est égale à la plus grande a , moins la plus

petite e, ou simplement à la plus grande lorsque la plus petite est zero. Ce qui est visible.

COROLLAIRE I.

97. **L**ES sécateurs CMm , CGH , étant semblables, il est clair que Mm est double de GH ou de son égale EF ; & comme cela arrive toujours en quelque endroit que l'on suppose le point M , il s'ensuit que la somme de tous les petits arcs Mm , c'est-à-dire la portion Am de la demi-roulette AMD , est double de la somme de tous les petits arcs EF . Or le petit arc EF fait partie de la corde AE perpendiculaire sur BE , & est la différence des cordes AE , Ae , parceque la petite droite eF perpendiculaire sur Ae peut être considérée comme un petit arc décrit du centre A ; & partant la somme de tous les petits arcs EF dans l'arc AZE sera la somme des différences de toutes les cordes AE , Ae , &c. dans cet arc, c'est-à-dire par le Lemme qu'elle sera égale à la corde AE . Il est donc évident que la portion AM de la demi-roulette AMD est double de la corde correspondante AE .

COROLLAIRE II.

98. **L'**ESPACE $MGgm$ * ou le trapèze $MGHm$ * *Art. 2.*
 $= \frac{1}{2} Mm + \frac{1}{2} GH \times MG = \frac{1}{2} EF \times BE$, c'est à dire qu'il est triple du triangle EBF ou EBe ; d'où il suit que l'espace $MGBA$ somme de tous ces trapèzes, est triple de l'espace circulaire $BEZA$ somme de tous ces triangles.

EXEMPLE III.

99. **N**OMMANT BP , z ; l'arc AZE ou EM ou BG , u ; & le rayon KA , a ; l'on aura le parallélogramme $MGBE$ $= uz$. Or l'espace de la roulette $MGBA$ $= 3BEZA$ $= 3EKB + \frac{1}{2} au$; & partant l'espace $AMEB$ renfermé par la portion de roulette AM , la parallèle ME , la corde BE & le diamètre AB , est $= 3EKB + \frac{1}{2} au - uz$. D'où il

suit que si l'on prend $BP(x) = \frac{1}{2}a$, l'espace $AMEB$ sera triple du triangle correspondant EKB ; & aura par conséquent sa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que M. *Hugens* a remarqué le premier. Voici encore une autre sorte d'espace qui a la même propriété.

Si l'on retranche de l'espace $AMEB$ le segment $BEZA$, il restera l'espace $AZEM = 2EKB + au - ux$; d'où l'on voit que si le point P tombe au centre K , l'espace $AZEM$ sera égal au carré du rayon. Il est évident qu'entre tous les espaces $AMEB$ & $AZEM$, il n'y a que les deux que l'on vient de déterminer qui aient leur quadrature absolue indépendante de celle du cercle.

EXEMPLE IX.

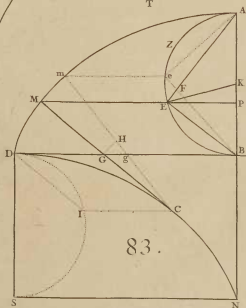
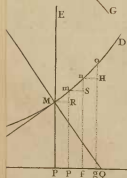
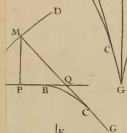
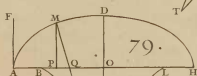
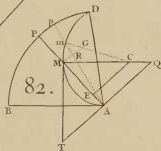
FIG. 84. 100. SOIT la demi-roulette AMD décrite par la révolution du demi-cercle AEB autour d'un autre cercle immobile BGD ; & qu'il faille déterminer sur la perpendiculaire MG donnée de position, le point où elle touche la développée.

Pour se servir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe AMD , des lignes droites perpendiculaires sur l'axe OA , & chercher ensuite une équation qui exprimât la relation des coupées aux appliquées, ou de leurs différences. Mais comme le calcul en seroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces sortes de rencontres en tenter la solution en se servant de la génération même.

Lorsque le demi-cercle AEB est parvenu dans la position MGB dans laquelle il touche en G la base BD ; & que le point décrivant A tombe sur le point M de la demi-roulette AMD : il est clair,

1°. Que l'arc GM est égal à l'arc GD , comme aussi l'arc GB du cercle mobile à l'arc GB du cercle immobile.

* Art. 43. 2°. Que MG est * perpendiculaire sur la courbe; car considérant la demi-circonférence MGB ou AEB , & la base BGD comme l'assemblage d'une infinité de petites



droites égales chacune à sa correspondante, il est manifeste que la demi-roulette *AMD* sera l'assemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centres successivement tous les points touchans *G*, & qui seront décrits chacun par le même point *M* ou *A*.

3°. Que si l'on décrit du centre *O* du cercle immobile l'arc concentrique *ME*; les arcs *MG*, *EB* du cercle mobile seront égaux entr'eux, aussi-bien que leurs cordes *MG*, *EB* & les angles *OGM*, *OBE*. Car les droites *OK*, *OK* qui joignent les centres des deux cercles sont égales, puisqu'elles passent par les points touchans *B*, *G*; c'est pourquoi menant les rayons *OM*, *OE*, & *KE*, on formera les triangles *OKM*, *OKE* égaux & semblables. L'angle *OKM* étant donc égal à l'angle *OKE*; les arcs *MG*, *BE* des demi-cercles égaux *MGB*, *BEA*, qui mesurent ces angles, seront égaux, comme aussi leurs cordes *MG*, *EB*; d'où il suit que les angles *OGM*, *OBE* le seront aussi.

Cela posé, soit entenduë une autre perpendiculaire *mC* Fig. 85. infiniment proche de la première, un autre arc concentrique *me*, & une autre corde *Be*; soient décrits des centres *C*, *B*, les petits arcs *GH*, *EF*. Les triangles rectangles *GHg*, *EFe* seront égaux & semblables; car *Gg* ou *Dg* — *DG* = *Ee* ou à l'arc *Be* — l'arc *BE*, de plus *Hg* ou *mg* — *MG* = *Fe* ou à *Be* — *BE*. Le petit arc *GH* sera donc égal au petit arc *EF*; d'où il suit que l'angle *GCH* est à l'angle *EBF*, comme *BE* est à *CG*. Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui se fait en cette sorte.

Ayant mené les rayons *OG*, *Og*, *KE*, *Ke*, & nommé *OG* ou *OB*, *b*; *KE* ou *KB* ou *KA*, *a*; il est clair que l'angle *EBe* = *OBe* — *OBE* = *Ogm* — *OGM* = (en menant *GL*, *GV* parallèles à *Cm*, *Og*) *LGM* — *OGV* = *GCH* — *GOg*. On aura donc l'angle *GCH* = *GOg* + *EBF*. Or les arcs *Gg*, *Ee* étant égaux, l'on aura aussi *GOg*. *EKe* ou *EBF* :: *KE(a)*. *OG(b)*; & partant l'angle *GOg* = $\frac{2a}{b}$ *EBF*, & *GCH* = $\frac{2a+b}{b}$ *EBF*. Donc *GCH*. *EBF* ou *BE*. *CG* :: $\frac{2a+b}{b}$. *r*.

& partant l'inconnue $CG = \frac{b}{2a+b} BE$ ou MG . Ce qui donne cette construction.

Fig. 86. Soit fait $OA(2a+b) \cdot OB(b) :: MG \cdot GC$; le point C sera à la développée.

Il est clair 1°. Que cette développée commence au point D , & qu'elle y touche la base BGD ; puisque l'arc GM devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle se termine au point N , en sorte que $OA \cdot OB :: AB \cdot BN :: OA - AB$ ou $OB \cdot OB - BN$ ou ON ; c'est-à-dire que OA, OB, ON sont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on décrit à présent le cercle NSQ du centre O , je dis que la développée DCN est formée par la révolution du cercle mobile GCS , qui a pour diamètre GS ou BN , autour de l'immobile NSQ : c'est à dire qu'elle est une demi-roulette semblable à la proposée, ou de même espèce (parceque les diamètres AB, BN des cercles mobiles ont entr'eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles), & posée dans une situation renversée en sorte que son sommet est en D . Pour le prouver, supposons que les diamètres des cercles mobiles se trouvent sur la droite OT menée à discrétion du centre O ; elle passera par les points touchans S, G ; & faisant AB ou $TG \cdot BN$ ou $GS :: MG \cdot GC$, le point C sera à la développée, & de plus à la circonférence du cercle GCS ; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le sera aussi. Or à cause des angles égaux MGT, CGS , l'arc TM ou GB est à l'arc CS , comme le diamètre GT au diamètre $GS :: OG \cdot OS :: GB \cdot NS$; & partant les arcs CS, SN sont égaux. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

Art. 75. 101. IL est clair que la portion de roulette DC est égale à la droite CM ; & partant que DC est à sa tangente $CG :: AB + BN \cdot BN :: OB + ON \cdot ON$; c'est à dire comme la somme des diamètres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, est au rayon du cercle immobile. Cette vérité se découvre encore de la manière

nière qui suit. A cause des triangles semblables CMm , CGH , Fig. 85, l'on aura $Mm.GH$ ou $EF :: MC.GC :: OA + OB (2a + 2b)$. $OB (b)$. D'où il suit (comme dans l'art. 97.) que la portion de roulette AM est à la corde correspondante AE , comme la somme des diamètres du cercle générateur & de la base, est au rayon de la base.

COROLLAIRE II.

102. **L**e trapèze $MGHm = \frac{1}{2} GH + \frac{1}{2} Mm \times MG$. Or Fig. 85.

$$CG(\frac{b}{1a+b} MG).CM(\frac{1a+1b}{1a+b} MG) :: GH.Mm = \frac{1a+1b}{b} GH.$$

Donc puisque $GH = EF$, & $MG = EB$, l'on aura $MGHm = \frac{1a+1b}{1b} EF \times EB$: c'est à dire que le trapèze $MGHm$ sera toujours au triangle correspondant $EBF :: 2a + 3b.b$.

D'où il suit que l'espace $MGBA$ renfermé par MG , AB perpendiculaires à la roulette, par l'arc BG & par la portion de roulette MA , est au segment de cercle correspondant $BEZA :: 2a + 3b.b$.

COROLLAIRE III.

103. **I**l est visible que la quadrature indéfinie de la rou- Fig. 87.

lette dépend de la quadrature du cercle; mais si l'on prend OQ moyenne proportionnelle entre OK , OA , & qu'on décrive de ce rayon l'arc QEM ; je dis que l'espace $ABEM$ renfermé par le diamètre AB , la corde BE , l'arc EM , & par la portion de roulette AM , est au triangle $EKB :: 2a + 3b.b$. Car nommant l'arc AE ou GB , u ; le rayon OQ , z ; l'on aura $OB (b)$. $OQ (z) :: GB (u)$.

RQ ou $ME = \frac{u}{b}$. & partant l'espace $RGBQ$ ou $MGBE$,

c'est à dire $\frac{1}{2} GB + \frac{1}{2} RQ \times BQ = \frac{2zu - bbu}{1b}$. Or * l'espace de * Art. 102.

la roulette $MGBA = \frac{1a+1b}{b} \times BEZA = \frac{1a+1b}{b} \times EKB + \frac{1a+1b}{b}$

$\times KEZA (\frac{au}{1})$. Si donc l'on retranche le précédent espace de

celui-ci, il restera $ABEM = \frac{2auu + 1ab u + 1bb u - 2zu}{1b} + \frac{1a+1b}{b} \times EKB$

$= \frac{2a+1b}{6} EKB$, puisque par la construction $zz = 2aa + 3ab + bb$. D'où l'on voit que cet espace a sa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il est le seul parmi tous ses semblables.

En voici encore un autre qui a la même propriété. Si l'on retranche de l'espace $ABEM$ le segment $BEZA$ ($\frac{1}{2}au + EKB$), il restera l'espace $AZEM = \frac{2aan + 1abu + bbu - zuu}{2b} + \frac{2a+1b}{6} EKB = \frac{2a+1b}{6} EKB$ en faisant $zz = 2aa + 2ab + bb$: c'est à dire que si l'on divise la demi-circonférence en deux également au point E , l'espace $AZEM$ sera au double du triangle EKB , c'est à dire au quarré du rayon :: $OK (a+b) \cdot OB (b)$.

COROLLAIRE IV.

FIG. 88. 104. Si le cercle mobile AEB roule au dedans de l'immobile BGD , son diamètre AB devient négatif de positif qu'il étoit auparavant; & partant il faut changer de signes les termes où il se rencontre avec une dimension impaire. D'où il suit, 1°. Que si l'on mène à discrétion la perpendiculaire MG à la roulee, & que l'on fasse OA

* Art. 100. $(b - 2a) \cdot OB (b) :: MG \cdot GC$, le point C sera* à la développée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diamètre BN , au dedans de la circonférence NS concentrique à BD . 2°. Que si l'on décrit du centre O l'arc ME ,

* Art. 101. la portion de roulette AM sera* à la corde $AE :: 2b - 2a \cdot b$.

* Art. 102. 3°. Quel'espace $MGBA$ est* au segment $BEZA :: 3b - 2a \cdot b$.

4°. Que si l'on prend $OQ = \sqrt{2aa - 3ab + bb}$, c'est à dire moyenne proportionnelle entre OK, OA ; l'espace $ABEM$ renfermé par la portion de roulette AM , l'arc ME , la corde

* Art. 103, de EB , & le diamètre AB , sera* au triangle $EKB :: 3b - 2a \cdot b$.

Mais que si l'on fait OQ ou $OE = \sqrt{2aa - 2ab + bb}$, c'est à dire que l'arc AE soit le quart de la circonférence; l'espace $AZEM$ renfermé par la portion AM de roulette &

* Ibid. par les deux arcs ME, AE , sera* au triangle EKB qui est en ce cas la moitié du quarré du rayon :: $2b - 2a \cdot b$.

COROLLAIRE V.

105. S_i l'on conçoit que le rayon OB du cercle immobile devienne infini, l'arc BGD deviendra une ligne droite, & la courbe AMD deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diamètre AB du cercle mobile est nul par rapport à celui de l'immobile, il s'ensuit, 1°. Que $MG.GC :: b.b$. Puisque $b \pm 2a = b$, c'est à dire que $MG = GC$; & partant que si l'on prend $BN = AB$, & qu'on mène la droite NS parallèle à BD , la développée DCN sera formée par la révolution du cercle, qui a pour diamètre BN , sur la base NS . 2°. Que la portion de roulette AM est à la corde correspondante $AE :: 2b.b$. 3°. Que l'espace $MGBA$ est au segment $BEZA :: 3b.b$. 4°. Puisque BQ ou $\pm OQ \mp OB$, que j'appelle x , est $= \mp b \pm \sqrt{2aa \mp 3ab + bb}$, d'où l'on tire (en ôtant les incommensurables) $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$; l'on aura $x = \frac{1}{2}a$, en effaçant les termes où b ne se rencontre point, parcequ'ils sont nuls par rapport aux autres. C'est à dire que si l'on prend dans la roulette ordinaire $BP = \frac{1}{2}AB$, & qu'on mène la droite PEM parallèle à la base BD ; l'espace $AMEB$ sera triple du triangle EKB . On trouvera en opérant de la même manière, que si le point P tombe au centre K , l'espace $AZEM$ renfermé par la portion de roulette AM , la droite ME , & l'arc AE , sera égal au quarré du rayon. Ce que l'on a déjà démontré ci devant art. 99.

FIG. 86. 88.

FIG. 85. 88.

FIG. 87. 88.

FIG. 83.

REMARQUE.

106. COMME les arcs DG , GM sont toujours égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle DOG est aussi toujours à l'angle $GKM :: GK.OG$. C'est pourquoi l'origine D de la roulette DMA , les rayons OG, GK des cercles générateurs, & le point touchant G étant donnés, si l'on veut déterminer dans cette position le point M qui décrit la roulette, il ne faut que

FIG. 84.

N ij



tirer le rayon KM en sorte que l'angle GKM soit à l'angle donné $DOG :: OG.GK$. Or je dis maintenant que cela se peut toujours faire géométriquement lorsque le rapport de ces rayons se peut exprimer par nombres, & partant que la roulette DMA est alors géométrique.

Car supposant, par exemple, que $OG.GK :: 13.5$; il est clair que l'angle MKG doit contenir deux fois l'angle donné DOG & de plus $\frac{1}{5}$ de cet angle. Toute la difficulté se réduit donc à diviser l'angle DOG en cinq parties égales. Or c'est une chose connue par les Geomètres, qu'on peut toujours diviser géométriquement un angle ou un arc donne en tant de parties égales qu'on voudra; puisqu'on arrive toujours à quelque équation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette DMA est mécanique, ou ce qui est la même chose, qu'on ne peut déterminer géométriquement ses points M lorsque la raison de OG à KG ne se peut exprimer par nombres, c'est à dire lorsqu'elle est fourde.

Car toute ligne, soit mécanique soit géométrique, où rentre en elle-même ou s'étend à l'infini, puisqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile ABC décrit par son point A dans sa première révolution la roulette ADE , cette roulette ne sera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la seconde EFG , puis la troisième GHI , & ainsi de suite jusqu'à ce que le point décrivant A retombe après plusieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors si on recommence à rouler le cercle mobile ABC , il décrira derechef la même ligne courbe, de sorte que toutes ces roulettes prises ensemble ne composent qu'une seule courbe $ADEFGHI$, &c. Or les rayons des cercles, générateurs étant incommensurables, leurs circonférences le seront aussi; & par conséquent le point décrivant A du cercle mobile ABC ne pourra jamais retomber dans le point A de l'immobile, d'où il étoit parti, si grand que

puisse être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependant qu'une même ligne courbe *ADEFGHI*, &c. Maintenant si l'on mène au travers du cercle immobile une ligne droite indéfinie, il est clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne géométrique doit avoir au moins autant de dimensions que cette ligne peut être coupée en de différens points par une droite; il s'ensuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimensions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou transcendente.

PROPOSITION III.

Problème.

107. **L**A ligne courbe *BFC* étant donnée, trouver une infinité de lignes *AM*, *BN*, *EFO*, dont elle soit la développée commune. FIG. 90.

Si l'on développe la courbe *BFC* en commençant par le point *A*, il est clair que tous les points *A*, *B*, *F*, du fil *ABFC* décriront dans ce mouvement des lignes courbes *AM*, *BN*, *FO*, qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée *BFC*. Mais il faut observer que la ligne *FO* n'ayant pour développée que la partie *FC*, son origine n'est pas en *F*; & que pour la trouver, il faut développer la partie restante *BF* en commençant au point *F* pour décrire la portion *EF* de la courbe *EFO* dont l'origine est en *E*, & qui a pour développée la courbe entière *BFC*.

Si l'on veut trouver les points *M*, *N*, *O* sans se servir du fil *ABFC*, il n'y a qu'à prendre sur une tangente quelconque *CM* autre que *BA*, les parties *CM*, *CN*, *CO* égales à *ABFC*, *BFC*, &c.

COROLLAIRE.

108. IL est évident, 1°. Que les courbes AM , BN , EFO sont d'une nature très différente entr'elles; puisque la courbe AM a dans son sommet A le rayon de sa développée égal à AB , au lieu que celui de la courbe BN est nul. Il est visible aussi par la figure même de la courbe EFO qu'elle est très différente des courbes AM , BN .

2°. Que les courbes AM , BN , EFO ne sont géométriques que lorsque la donnée BFC est géométrique & de plus rectifiable. Car si elle n'est pas géométrique, en prenant BK pour la coupée, on ne trouvera point géométriquement l'appliquée KC : & si elle n'est pas rectifiable, ayant mené la tangente CM , on ne pourra déterminer géométriquement les points M , N , O des courbes AM , BN , EFO ; puisqu'on ne peut trouver géométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe BFC , & à ses portions BF , FC .

REMARQUE.

FIG. 91. 109. SI l'on développe une ligne courbe BAC qui ait un point d'inflexion en A , en commençant par le point D autre que le point d'inflexion; on formera par le développement de la partie BAD la partie DEF ; & par celui de la partie DC , la partie restante DG : de sorte que $FEDG$ sera la courbe entière formée par le développement de BAC . Or il est visible que cette courbe rebrousse chemin aux points D & E , avec cette différence qu'au point de rebroussement D les parties DE , DG ont leur convexité opposée l'une à l'autre; au lieu qu'au point E les parties DE , EF sont concaves vers le même côté. On a enseigné dans la section précédente à trouver les points de rebroussement tels que D : il est question maintenant de déterminer les points E , qu'on peut appeller points de rebroussement de la seconde sorte, & que personne, que je sçache, n'a encore considéré.

Pour en venir à bout, on menera à discrétion sur la

partie *DE* deux perpendiculaires *MN, mn*, terminées par la développée aux points *N; n*, par lesquels on tirera deux autres perpendiculaires *NH, nH* sur les premières *NM, nm*; ce qui formera deux petits secteurs *MNm, NHn* qui seront semblables, puisque les angles *MNm, NHn* sont égaux. On aura donc *Nn. Mm :: NH. NM*. Or dans le point d'inflexion *A* le rayon *NH* devient * infini ou zero; * *Art. 81.* & le rayon *MN*, qui devient *AE*, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebroussement *E* de la seconde sorte, la raison de la différence *Nn* du rayon *MN* de la développée, à la différence *Mm* de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant

puisque * $Nn = \frac{-3dx dy ddy^2 dx^2 + dy^2 \frac{1}{2} + dx ddd dy dx^2 + dy^2 \frac{1}{2}}{dx^3 ddy^2}$, & * *Art. 86.*

$Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^3 ddd dy + dy^3 ddd dy - 3dy ddy^2}{dx ddy^2} = 0$

ou ∞ ; & multipliant par $dx ddy^2$, on trouvera la formule $dx^3 ddd dy + dy^3 ddd dy - 3dy ddy^2 = 0$ ou ∞ , qui servira à déterminer les points de rebroussement de la seconde sorte.

On peut encore concevoir qu'une rebrousante *DEF* FIG. 92. 93. ou *HDEFG* de la seconde sorte, ait pour développée une autre rebrousante *BAC* de la seconde sorte, telle que son point de rebroussement *A* réponde au point de rebroussement *E*, c'est à dire qu'il soit situé sur le rayon de la développée qui part du point *E*. Or il est clair dans cette supposition, que le rayon *EA* de la développée sera toujours un *plus petit* ou un *plus grand*; & partant que la

différence de $\frac{dx^2 + dy^2 \frac{1}{2}}{dx ddy}$ expression générale * des rayons * *Art. 78.*

de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché *E*; ce qui donne la même formule qu'auparavant: de sorte qu'elle est générale pour trouver les points de rebroussement de la seconde sorte.



SECTION VI.

Usage du calcul des différences pour trouver les
Cautiques par réflexion.

DÉFINITION.

FIG. 94. 95. **S** I l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD , qui partent d'un point lumineux B , se réfléchissent à la rencontre d'une ligne courbe AMD , en sorte que les angles de réflexion soient égaux aux angles d'incidence ; la ligne HFN , que touchent les rayons réfléchis ou leur prolongemens AH, MF, DN , est appelée *Cautique par réflexion*.

COROLLAIRE I.

FIG. 94. 110. **S** I l'on prolonge HA en I , de sorte que $AI = AB$, & que l'on développe la caustique HFN en commençant au point I ; on décrira la courbe ILK telle que la tangente FL sera * continuellement égale à la portion FH de la caustique plus à la droite HI . Et si l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi Bm, mF infiniment près de BM, MF , & qu'ayant prolongé Fm en I , on décrive des centres F, B les petits arcs MO, MR : on formera les petits triangles rectangles MOm, MRm , qui seront semblables & égaux ; car puisque l'angle $OmM = FmD = RmM$, & que de plus l'hypoténuse Mm est commune, les petits côtés Om, Rm seront égaux entr'eux. Or puisque Om est la différence de LM , & Rm celle de BM , & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point M , il

* Art. 96. s'enfuit que $ML - IA$ ou $AH + HF - MF$ somme * de toutes les différences Om dans la portion de courbe AM ,

* Art. 96. est $= BM - BA$ somme * de toutes les différences Rm dans la même portion AM . Donc la portion HF de la caustique HFN sera égale à $BM - BA + MF - AH$.

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM , & que le réfléchi

réfléchi AH développe ou enveloppe la portion HF pour parvenir en MF : mais l'on prouvera toujours, commel'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe avant que de tomber sur l'autre. Par exemple, $BM - BA = MF$ FIG. 95.
 $+ FH - AH$; d'où l'on tire $FH = BM - BA + AH - MF$.

Si l'on décrit du centre B l'arc de cercle AP ; il est clair FIG. 94. 95. que PM fera la différence des rayons incidens BM, BA . Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD ; les rayons incidens BA , FIG. 96. BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

COROLLAIRE II.

III. S; l'on conçoit que la figure $BAMD$ soit renver. FIG. 94.
 sée sur le même plan, en sorte que le point B tombe sur le point I , & qu'ainsi la tangente en A de la courbe AMD dans sa premiere situation, la touche encore dans cette nouvelle; & qu'on fasse rouler la courbe aMd sur AMD , c'est à dire sur elle-même, en sorte que les portions aM , AM soient toujours égales: je dis que le point B décrira dans ce mouvement une espece de roulette ILK qui aura pour développée la caustique HFN .

Car il suit de la génération, 1°. Que la ligne LM tirée du point décrivant L au point touchant M sera * perpen. * Art. 43.
 diculaire à la courbe ILK . 2°. Que La ou $IA = BA$, & $LM = BM$. 3°. Que les angles faits par les droites ML, BM sur la tangente commune en M sont égaux; & partant que si l'on prolonge LM en F , le rayon MF sera le réfléchi de l'incident BM . D'où l'on voit que la perpendiculaire LF touche la caustique HFN : & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point L , il s'en suit que la courbe ILK est formée par le développement de la caustique HFN , plus la droite HI .

Il suit de ceci que la portion FH ou $FL - HI = BM$

Q

+ $MF - BA - AH$. Ce que l'on vient de démontrer d'une autre manière dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

112. Si la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM ; il est clair que le point touchant N , & celui d'intersection V se confondront avec l'autre point touchant F : de sorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la caustique HFN , il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF , mF . Et en effet, si l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres, on verra naître par les intersections des réfléchis un polygone d'une infinité de côtés dont l'assemblage composera la caustique HFN .

PROPOSITION I.

Problème général.

FIG. 97. 113. LA nature de la courbe AMD , le point lumineux B , & le rayon incident BM étant donnés; trouver sur le réfléchi MF donné de position, le point F où il touche la caustique.

Ayant trouvé par la section précédente la longueur MC du rayon de la développée au point M , & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm , Cm , Fm ; on décrira des centres B , F les petits arcs MR , MO ; on menera les perpendiculaires CE , Ce , CG , Cg sur les rayons incidents & réfléchis; ensuite on nommera les données BM , y ; ME ou MG , a .

Cela posé, on prouvera, comme dans le Corollaire premier*, que les triangles MRm , MOm sont semblables & égaux; & qu'ainsi $MR = MO$. Or à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion, l'on a aussi $CE = CG$, $Ce = Cg$; & partant $CE - Ce$ ou $EQ = CG - Cg$ ou SG . Donc à cause des triangles semblables BMR & BEQ , FMO & FGS , l'on aura $BM + BE(zy - a)$. $BM(y) :: MR + EQ$

* Art. 110.

ou $MO + GS$. MR ou $MO :: MG(a) \cdot MF = \frac{ay}{2y - a}$.

Si le point lumineux B tomboit de l'autre côté du point E par rapport au point M , ou (ce qui est la même chose) si la courbe AMD étoit convexe vers le point lumineux B ; y deviendrait négative de positive qu'elle étoit, & l'on auroit par conséquent $MF = \frac{-ay}{-2y - a}$ ou $\frac{ay}{2y + a}$.

Si l'on suppose que y devienne infinie, c'est à dire que le point B soit infiniment éloigné de la courbe AMD ; les rayons incidens seront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{1}{2}a$, parceque a est nulle par rapport à $2y$. Fig. 96.

COROLLAIRE I.

114. COMME l'on ne trouve pour MF qu'une seule valeur dans laquelle entre le rayon de la développée ; il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule caustique HFN par réflexion, puisqu'elle n'a qu'une seule développée. Fig. 94. 95.

COROLLAIRE II.

115. LORSQUE AMD est géométrique, il est clair * que sa développée l'est aussi, c'est à dire que l'on trouve géométriquement tous les points C . D'où il suit que tous les points F de la caustique seront aussi déterminés géométriquement, c'est à dire que la caustique HFN sera géométrique. Mais je dis de plus, que cette caustique sera toujours rectifiable ; puisqu'il est évident * que l'on peut trouver avec le secours de la courbe AMD , qu'on suppose géométrique, des lignes droites égales à une de ses portions quelconque. * Art. 85. Fig. 97. Fig. 94. 95. * Art. 110.

COROLLAIRE III.

116. SI la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B ; la valeur de $MF \left(\frac{ay}{2y + a} \right)$ sera toujours positive ; & il faudra prendre par conséquent le point F du

O ij

côté du point C , par rapport au point M , comme l'on a supposé en faisant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches seront divergens.

Mais si la courbe AMD est concave vers le point lumineux B , la valeur de $MF \left(\frac{ay}{2y-a} \right)$ sera positive lorsque y surpassé $\frac{1}{2}a$, négative lorsqu'il est moindre, & infinie lorsqu'il est égal. D'où il suit que si l'on décrit un cercle qui ait pour diamètre la moitié du rayon MC de la développée, les rayons réfléchis infiniment proches seront convergens lorsque le point lumineux B tombe au dehors de sa circonférence, divergens lorsqu'il tombe au dedans, & enfin parallèles lorsqu'il tombe dessus.

COROLLAIRE IV.

117. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M , l'on aura $ME(a) = 0$; & partant $MF = 0$. Or comme le rayon réfléchi est alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la caustique consiste à toucher tous les rayons réfléchis, il s'ensuit qu'elle touchera aussi le rayon incident BM au point M : c'est à dire que la caustique & la donnée auront la même tangente dans le point M qui leur sera commun.

Si le rayon MC de la développée est nul, on aura encore $ME(a) = 0$; & partant $MF = 0$. D'où l'on voit que la donnée & la caustique sont entr'elles dans le point M qui leur est commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon CM de la développée est infini, le petit arc Mm deviendra une ligne droite, & l'on aura $MF = -y$; puisque $ME(a)$ étant infinie, y sera nul par rapport à a . Or comme cette valeur est négative lorsque le point B tombe du côté du point C par rapport à la ligne AMD , & positive lorsqu'il tombe du côté opposé; il s'ensuit que les rayons réfléchis infiniment proches seront toujours divergens lorsque la ligne AMD est droite.

COROLLAIRE V.

118. IL est évident que deux quelconques des trois points B, C, F , étant donnés, on trouvera facilement le troisième.

Soit, 1^o, la courbe AMD une parabole qui ait pour foyer Fig. 98.
le point lumineux B . Il est clair par les élémens des sections coniques, que tous les rayons réfléchis seront parallèles à l'axe ; & partant que MF sera toujours infinie en quelque endroit que l'on suppose le point M . On aura donc $a = 2y$: d'où il suit que si l'on prend ME double de MB , & qu'on mène la perpendiculaire EC ; elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe AMD , en un point C qui sera à la développée de cette courbe.

Soit 2^o. la courbe AMD une ellipse qui ait pour un de Fig. 99.
ses foyers le point lumineux B . Il est encore clair que tous les rayons réfléchis MF se rencontreront dans un même point F qui sera l'autre foyer. Et si l'on nomme MF, z ; l'on aura $*z = \frac{ay}{2y-a}$; d'où l'on tire la cherchée $ME(a) = \frac{2yz}{y+z}$ * Art. 113.
Mais si la courbe AMD est une hyperbole, le foyer F tom- Fig. 110.
bera de l'autre côté ; & partant $MF(z)$ deviendra négative : d'où il suit qu'on aura alors $ME(a) = \frac{-2yz}{y-z}$ ou $\frac{2yz}{z-y}$. Ce qui donne cette construction qui sert aussi pour l'ellipse.

Soit prise ME quatrième proportionnelle au demi-axe Fig. 99. 100.
traversant, & aux rayons incident & réfléchi ; soit menée la perpendiculaire EC : elle ira couper la ligne MC perpendiculaire à la section, en un point C qui sera à la développée.

EXEMPLE I.

119. SOIT la courbe AMD une parabole, dont les rayons Fig. 101.
incidens PM soient perpendiculaires sur son axe AP . Il faut trouver sur les réfléchis MF les points F où ils touchent la caustique AFK .

Il est clair que si l'on mène le rayon MC de la développée, & qu'on tire la perpendiculaire CG sur le rayon

* Art. 113. réfléchi MF , il faudra * prendre MF égale à la moitié de MG . Mais cette construction se peut abréger, en considérant que si l'on mène MN parallèle à l'axe AP , & la droite ML au foyer L ; les angles LMP , FMN seront égaux, puisque par la propriété de la parabole $LMQ = 2MN$, & par la supposition $PMQ = QMF$. Si donc l'on ajoute de part & d'autre le même angle PMF , l'angle LMF sera égal à l'angle PMN , c'est à dire droit. Or l'on vient de

* Art. 118. num. 1. démontrer * que LH perpendiculaire sur ML rencontre le rayon MC de la développée en son milieu H . Si donc l'on mène MF parallèle & égale à LH , elle fera un des rayons réfléchis, & touchera en F la caustique AFK . Ce qu'il falloit trouver.

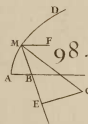
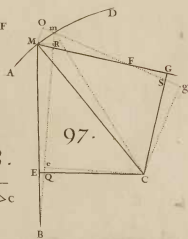
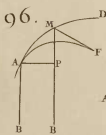
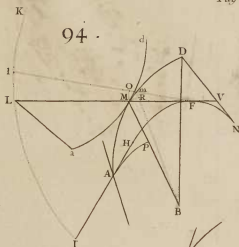
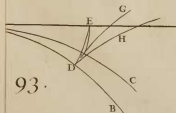
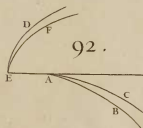
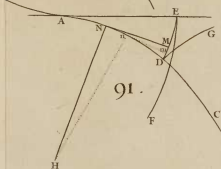
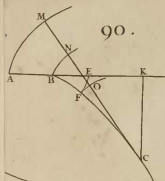
Si l'on suppose que le rayon réfléchi MF soit parallèle à l'axe AP , il est évident que le point F de la caustique sera le plus éloigné qu'il est possible de l'axe AP , puisque la tangente en ce point sera parallèle à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les caustiques, telles que AFK , formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à considérer que MP doit être alors égale à PQ . Ce qui donne $dy = dx$.

Soit $ax = yy$, on aura $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dx$, d'où l'on tire

$AP(x) = \frac{1}{2}a$: c'est à dire que si le point P tombe au foyer L , le rayon réfléchi MF sera parallèle à l'axe. Ce qui est d'ailleurs visible; puisque dans ce cas MP se confondant avec LM , il faut aussi que MF se confonde avec MN , & LH avec LQ . D'où l'on voit que MF est alors égale à ML ; & partant que si l'on mène FR perpendiculaire sur l'axe, on aura AR ou $AL + MF = \frac{3}{2}a$. On voit aussi que la portion AF de la caustique est égale en ce cas au paramètre, puis-

* Art. 110. qu'elle est toujours * égale à $PM + MF$.

Pour déterminer le point K où la caustique AFK rencontre l'axe AP , il faut chercher la valeur de MO , & l'é-



galer à celle de MF ; car il est visible que le point F tombant en K , les lignes MF , MO deviennent égales entr'elles. Nommant donc l'inconnue MO , t ; l'angle PMO coupé en deux également par MQ perpendiculaire à la courbe, donnera $MP(y) \cdot MO(t) :: P \mathcal{Q} \left(\frac{ydy}{dx} \right)$. $OQ = \frac{tdy}{dx}$. & partant $OP = \frac{tdy + ydy}{dx} = \sqrt{t^2 - yy}$, à cause du triangle rectangle MPO ; & divisant de part & d'autre par $t + y$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}}$, d'où l'on tire

$$MO(t) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2} = MF\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}, \text{ puisque } * \text{ Art. 77.}$$

$ME(a) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Ce qui donne $dy^2 - 2yddy = dx^2$, qui servira à trouver le point P tel que menant le rayon incident PM & le réfléchi MF , ce dernier touche la caustique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP .

On a dans la parabole $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$; d'où l'on tire $AP(x) = \frac{1}{4}$ du parametre.

Pour trouver la nature de la caustique AFK à la manière de *Descartes*, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée $AR(u)$, à l'appliquée $RF(z)$; ce qui se fait en cette sorte. Puisque $MO(t) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}$, l'on aura $PO\left(\frac{tdy + ydy}{dx}\right) = \frac{2yddy}{dx^2 - dy^2}$, & à cause des triangles semblables MPO , MSF , on formera ces proportions $MO\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}\right) \cdot MF\left(\frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}\right)$ ou $-2yddy \cdot dx^2 - dy^2 :: MP(y) \cdot MS(y-z) = \frac{dx^2 - dy^2}{-2ddy} :: PO\left(\frac{2yddy}{dx^2 - dy^2}\right) \cdot SF$ ou $PR(u-x) = \frac{dx dy}{-ddy}$. On aura donc ces deux

équations $z = y + \frac{dy^2 - dx^2}{2dy}$, & $u = x + \frac{xdy}{dy}$, qui serviront avec celle de la courbe donnée à en former une nouvelle où x & y ne se trouveront plus, & qui exprimera par conséquent la relation de $AR(u)$ à $FR(z)$.

Lorsque la courbe AMD est une parabole, comme l'on a supposé dans cet exemple, on trouvera $z = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$, ou (en quarrant chaque membre) $\frac{1}{4}z^2 - 6xz + 4x^3 = z^2$, & $u = 3x$; d'où l'on tire l'équation cherchée $az^2 = \frac{4}{3}u^3 - \frac{1}{3}auu + \frac{1}{3}adu$ qui exprime la nature de la caustique AFK . On peut remarquer que PR est toujours double de AP , puisque $AR(u) = 3x$; ce qui fournit encore une nouvelle manière de déterminer sur le rayon réfléchi MF le point cherché F .

EXEMPLE II.

FIG. 101. 120. Soit la courbe AMD un demi-cercle qui ait pour diamètre la ligne AD , & pour centre le point C ; soient les rayons incidens PM perpendiculaires sur AD .

Comme la développée du cercle se réunit en un seul point qui en est le centre, il s'ensuit* que si l'on coupe le rayon CM en deux également au point H , & qu'on mène HF perpendiculaire sur le rayon réfléchi MF , il coupera ce rayon en un point F , où il touche la caustique AFK . Il est clair que le rayon réfléchi MF est égal à la moitié de l'incident PM ; d'où il suit, 1°. Que le point P tombant en C , le point F tombe en K milieu de CB . 2°. Que la portion AF est triple de MF , & la caustique AFK triple de BK . On voit aussi que si l'on fait l'angle ACM demi-droit, le rayon réfléchi MF sera parallèle à AC ; & partant que le point F sera plus élevé au dessus du diamètre AD , que tout autre point de la caustique.

Le cercle qui a pour diamètre MH , passe par le point F ; puisque l'angle HFM est droit. Et si l'on décrit du centre

tre C & du rayon CK ou CH , moitié de CM , le cercle KHG ; l'arc HF sera égal à l'arc HK : car l'angle CMF étant égal à CMP ou HCK , les arcs $\frac{1}{2}HF$, HK qui mesurent ces angles dans les cercles MFH , KHG , seront entr'eux comme les rayons $\frac{1}{2}MH$, HC de ces cercles. D'où l'on voit que la caustique AFK est une roulette formée par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG , dont l'origine est en K , & le sommet en A .

EXEMPLE III.

121. SOIT la courbe AMD un cercle qui ait pour dia- FIG. 103.
mètre la ligne AD , & pour centre le point C ; soit le point lumineux A , d'où parrent tous les rayons incidents AM , l'une des extrémités de ce diamètre.

Si l'on mène du centre C sur le rayon incident AM la perpendiculaire CE : il est clair par la propriété du cercle, que le point E coupe en deux parties égales la corde AM ; & qu'ainsi $ME(a) = \frac{1}{2}y$. On aura donc $MF(\frac{ay}{2y-a}) = \frac{1}{2}y$: c'est à dire qu'il faut prendre le rayon réfléchi MF égal au tiers de l'incident AM . D'où l'on voit que $DK = \frac{1}{3}AD$, $CK = \frac{1}{3}CD$, & que * la caustique AFK * Art. 110.
 $= \frac{4}{3}AD$, de même que sa portion $AF = \frac{4}{3}AM$. Si l'on prend $AM = AC$, le rayon réfléchi MF sera parallèle au diamètre AD ; & par conséquent le point F sera le plus élevé qu'il soit possible au dessus de ce diamètre.

Si l'on prend $CH = \frac{1}{3}CM$, & qu'on tire HF perpendiculaire sur MF ; le point F sera à la caustique: car menant HL perpendiculaire sur AM , il est clair que $ML = \frac{2}{3}ME = \frac{1}{3}AM$, puisque $MH = \frac{2}{3}CM$. Le cercle qui a pour diamètre MH , passera donc par le point F de la caustique, & si l'on décrit un autre cercle KHG du centre C , & du rayon CK ou CH , il lui sera égal, & l'arc HK

P

sera égal à l'arc HF : car dans le triangle isoscele CMA l'angle externe $KCH = 2CMA = AMF$; & partant les arcs HK , HF mesures de ces angles dans des cercles égaux, seront aussi égaux. D'où il suit que la caustique AFK est encore une roulette décrite par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG , dont l'origine est en K , & le sommet en A .

On pourroit encore prouver ceci de cette autre manière. Si l'on décrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle AMD autour de celui ci, en commençant au point A ; l'on a démontré dans le Corollaire

- * Art. 111. second * qu'elle aura pour développée la caustique AFK . Or
 * Art. 100. * cette développée est une roulette de même espèce, c'est à dire que les diamètres des cercles générateurs en seront égaux ; & on déterminera le point K en prenant CK troisième proportionnelle à $CD + DA$ & à CD , c'est à dire égale à $\frac{1}{3}CD$. Donc, &c.

EXEMPLE IV.

FIG. 104. 122. SOIT la courbe AMD une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi cercle NGM sur la droite BD , dont le sommet est en A , & l'origine en D ; soient les rayons incidens KM parallèles à l'axe AB .

- * Art. 95. Puisque * MG est égale à la moitié du rayon de la développée, il s'en suit * que si l'on mène GF perpendiculaire sur le rayon réfléchi MF , le point F sera à la caustique DFB . D'où l'on voit que MF doit être prise égale à KM .

Si l'on mène du centre H du cercle générateur MGN au point touchant G , & au point décrivant M , les rayons HG , HM ; il est clair que HG sera perpendiculaire sur BD , & que l'angle $GMH = MGH = GMK$: d'où l'on voit que le rayon réfléchi MF passe par le centre H . Or le cercle qui a pour diamètre GH , passe aussi par le point F ; puisque l'angle GFH est droit. Donc les arcs GN , $\frac{1}{2}GE$, mesures du même angle GHN , seront entr'eux comme les diamètres

MN, GH de leurs cercles; & partant l'arc $GF = GN = GB$. Il est donc évident que la caustique DFB est une roulette décrite par la révolution entière du cercle GFH sur la droite BD .

EXEMPLE V.

123. SOIT encore la courbe AMD une demi roulette FIG. 105.
ordinaire, dont la base BD est égale à la demi-circonférence ANB du cercle générateur. Et soient à présent les rayons incidens PM parallèles à la base BD .

Si l'on mène GQ perpendiculaire sur PM , les triangles rectangles GQM, BPN seront égaux & semblables; & partant $MQ = PN$. D'où l'on voit * qu'il faut prendre * *Art. 95.*
 MF égale à l'appliquée correspondante PN dans le demi- 113.
cercle générateur ANB .

Afin que le point F soit le plus éloigné qu'il est possible de l'axe AB , il faut que la tangente MF en ce point soit parallèle à cet axe. L'angle PMF sera donc alors droit, sa moitié PMG ou PNB demi droit; & partant le point P tombera dans le centre du cercle AND .

C'est une chose digne de remarque, que le point P approchant ensuite continuellement de l'extrémité B , le point F approche aussi de l'axe AB jusqu'à un certain point K , après quoi il s'en éloigne jusqu'en D ; de sorte que la caustique $AFKFD$ a un point de rebroussement en K .

Pour le déterminer, je remarque * que la portion AF * *Art. 110.*
 $= PM + MF$, la portion $AFK = HL + LK$, & la portion 111.
 KF de la partie KFD , est $= HL + LK - PM - MF$: d'où l'on voit que $HL + LK$ doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant AH, x ; HI, y ; l'arc AI, u ; l'on aura $HL + LK = u + 2y$, dont la différence donne $du + 2dy$
 $= 0$, & $\frac{adx}{y} + 2dy = 0$, en mettant pour du sa valeur
 $\frac{adx}{y}$: d'où l'on tire $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$ à cause
du cercle; & partant $AH(x) = \frac{1}{2}a$.

COROLLAIRE.

124. L'ESPACE AFM ou $AFKFM$ renfermé par les portions de courbes AF ou $AFKF$, AM , & par le rayon réfléchi MF , est égal à la moitié de l'espace circulaire APN . Car la différence, qui est le secteur FMO , est égale à la moitié du rectangle $PpSN$, différence de l'espace APN ; puisque les triangles rectangles MOm , MRm étant égaux & semblables, MO sera égale à MR ou NS ou Pp , & que de plus $MF = PN$.

EXEMPLE VI.

FIG. 106. 125. SOIT la courbe AMD une demi-roulette formée par la révolution du cercle MGN autour de son égal AGK , dont l'origine est en A , & le sommet en D ; soient les rayons incidens AM qui partent tous du point A . La ligne BH qui joint les centres des deux cercles générateurs, passe continuellement par le point touchant G , & les arcs GM , GA comme aussi leurs cordes, sont toujours égaux; ainsi l'angle $HGM = BGA$, & l'angle $GMA = GAM$. Or l'angle $HGM + BGA = GMA + GAM$; puisqu'ajoutant de part & d'autre le même angle AGM , on en forme deux droits. Donc l'angle HGM sera toujours égal à l'angle GMA ; & partant aussi à l'angle de réflexion GMF : d'où il suit que MF passe toujours par le centre H du cercle mobile.

Maintenant si l'on mène les perpendiculaires CE , GO sur le rayon incident AM : il est clair que $MO = OA$, & que

* Art. 100. $OE = \frac{1}{3}OM$; puisque* le point C étant à la développée, $GC = \frac{1}{3}GM$. On aura donc $ME = \frac{2}{3}AM$, c'est à dire $a = \frac{2}{3}y$; & par conséquent $MF \left(\frac{xy}{\frac{2}{3}y - a} \right) = \frac{1}{2}y$: d'où l'on voit que si l'on mène GF perpendiculaire sur MF , le point F fera à la caustique AFK .

Le cercle qui a pour diamètre GH , passe par le point F ; & les arcs GM , $\frac{1}{2}GF$, mesures du même angle GHM , étant

entr'eux comme les diamètres MN , GH de leurs cercles, l'arc GF sera égal à l'arc GM , & par conséquent à l'arc GA . D'où il est évident que la caustique AFK est une roulette décrite par la révolution du cercle mobile HFG autour de l'immobile AGK .

COROLLAIRE.

126. **S**_I l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point B , & pour rayon une droite égale à BH ou AK ; & qu'il y ait une infinité de droites parallèles à BD qui tombent sur sa circonférence: il est visible * qu'elles for- * Art. 120
meront en se réfléchissant la même caustique AFK .

EXEMPLE VII.

127. **S**_{OIT} la courbe AMD une logarithmique spirale. FIG. 107.
le, avec les rayons incidens AM qui partent tous du centre A .

Si l'on mène par l'extrémité C du rayon de la développée la droite CA perpendiculaire sur le rayon incident AM , elle le rencontrera * dans le centre A . C'est * Art. 91.

pourquoi $AM(y) = a$; & partant $MF\left(\frac{ay}{xy-a}\right) = y$. Le triangle AMF sera donc isoscele; & comme les angles d'incidence & de réflexion AMT , FMS sont égaux entre eux, il s'ensuit que l'angle AFM est égal à l'angle AMT . D'où il est clair que la caustique AFK sera une logarithmique spirale qui ne différera de la proposée AMD que par sa position.

PROPOSITION II.

Problème.

128. **L**_A caustique HF par réflexion étant donnée avec le FIG. 108.
point lumineux B ; trouver une infinité de courbes telles que AM , dont elle soit caustique par réflexion.

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA le point A pour un des points de la courbe cherchée AM ;

on décrira du centre B , de l'intervale BA l'arc de cercle AP , & d'un autre intervalle quelconque BM , un autre arc de cercle. Et ayant pris $AH + HE = BM - BA$ ou PM , on développera la caustique HF en commençant au point E ; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon

* Art. 110. BM , en un point M qui fera * à la courbe AM . Car par construction $PM + MF = AH + HF$.

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ses extrémités en B & en F , on fera rendre ce fil par le moyen d'un stile placé en M , que l'on fera mouvoir en sorte que l'on enveloppera par la partie MF de ce fil la caustique HF ; il est clair que ce stile décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA .

AUTRE SOLUTION.

129. **A**YANT tiré à discrétion une tangente FM autre que HA , on cherchera sur elle un point M , tel que $BM + MF = BA + AH + HF$. Ce qui se fera en cette sorte.

Soit prise $FK = BA + AH + HF$, & divisant BK par le milieu en G , soit tirée la perpendiculaire GM : elle rencontrera la tangente FM au point cherché M . Car $BM = MK$.

FIG. 109. Si le point B étoit infiniment éloigné de la courbe AM , c'est à dire que les rayons incidents BA , BM fussent parallèles à une ligne droite donnée de position; la première construction auroit toujours lieu, en considérant que les arcs de cercles décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires sur les rayons incidents. Mais cette dernière deviendrait inutile; c'est pourquoi il faudroit lui substituer celle qui suit.

Soit prise $FK = AH + HF$. Ayant trouvé le point M tel que MP parallèle à AB perpendiculaire sur AP , soit égale à MK : il est clair* que ce point sera à la courbe cherchée AM ; puisque $PM + MF = AH + HF$. Or cela se fait ainsi.

* Art. 110.

Soit menée KG perpendiculaire sur AP ; & ayant pris $KO = KG$, soient tirées KP parallèle à OG , & PN parallèle à GK : je dis que le point M sera celui qu'on cherche.

Car à cause des triangles semblables GKO , PMK , l'on aura $PM = MK$; puisque $GK = KO$.

Si la caustique HF se réunissoit en un point, la courbe AM deviendrait une section conique.

COROLLAIRE I.

130. IL est clair que la courbe qui passe par tous les points K , est formée par le développement de la courbe HF en commençant en A , & qu'elle change de nature à mesure que le point A change de place sur la tangente AH . Donc puisque les courbes AM naissent toutes de ces courbes par la même construction, qui est géométrique ; il s'ensuit* qu'elles sont d'une nature différente entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF est géométrique & rectifiable. * Art. 108.

COROLLAIRE II.

131. UNE ligne courbe DN étant donnée avec un point lumineux C ; trouver une infinité de lignes telles que AM , en sorte que les rayons réfléchis DA , NM se réunissent en un point donné B , après s'être réfléchis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM . FIG. 110.

Si l'on imagine que la courbe HF soit la caustique de la donnée DN , formée par le point lumineux C ; il est clair que cette ligne HF doit être aussi la caustique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B ; de sorte que $FK = BA + AH + HF$, & $NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC - CN$, puisque* $HD + DC = HF + FN + NC$. Ce qui donne cette construction. * Art. 110.

Ayant pris à discrétion sur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM , on prendra sur un autre rayon réfléchi NM tel qu'on voudra, la partie $NK = BA + AD + DC - CN$; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-dessus, art. 129.



SECTION VII.

*Usage du Calcul des différences pour trouver les
Cautiques par réfraction.*

DÉFINITION.

FIG. 111. **S**I l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD , qui partent d'un même point lumineux B , se rompent à la rencontre d'une ligne courbe AMD , en s'approchant ou s'éloignant de ses perpendiculaires MC , en sorte que les sinus CE des angles d'incidence CME , soient toujours aux sinus CG des angles de réfraction CMG , en même raison donnée de m à n ; la ligne courbe HFN que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongemens AH, MF, DN , est appelée *Cautique par réfraction*.

COROLLAIRE.

132. **S**i l'on envelope la caustique HFN en commençant au point A , l'on décrira la courbe ALK telle que la tangente LF plus la portion FH de la caustique sera continuellement égale à la même droite AH . Et si l'on conçoit une autre tangente Fml infiniment proche de FML , avec un autre rayon d'incidence Bm , & qu'on décrive des centres F, P , les petits arcs MO, MR : on formera deux petits triangles rectangles MRm, MOm qui seront semblables aux deux autres MEC, MGC , chacun à chacun; puis que si l'on ôte des angles droits RME, CMm le même angle EMm , les angles restans RMm, EMC seront égaux; & de même si l'on ôte des angles droits GMO, CMm le même angle GMM , les restans OMm, GMC seront égaux. C'est pourquoi $Rm.Om :: CE.CG :: m.n$. Or puisque Rm est la différence de BM , & Om celle de LM ; il s'ensuit* que $BM - BA$ somme de toutes les différences Rm dans la portion de courbe AM , est à ML ou $AH - MF - FH$ somme de toutes les différences Om dans la même portion.

* Art. 96.

tion AM , comme m est à n ; & partant que la portion

$$FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM.$$

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM , & que le rompu AH envelope ou dévelope la portion HF : mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est à la différence des rayons rompus (en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il dévelope avant que de tomber sur l'autre) comme m est à n . Par exemple, $BA - BM : AH - MF = FH$ FIG. 112.

$$:: m : n. \text{ d'où l'on tire } FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA.$$

Si l'on décrit du centre B l'arc du cercle AP ; il est clair FIG. 111. que PM sera la différence des rayons incidens BM, BA . Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD , les rayons incidens BA, BM deviendront parallèles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

PROPOSITION I.

Problème général.

133. LA nature de la courbe AMD , le point lumineux B , FIG. 111. & le rayon incident BM étant donnés; trouver sur le rayon rompu MF donné de position, le point F où il touche la caustique par réfraction.

Ayant trouvé * la longueur MC du rayon de la développée au point donné M , & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm ; on décrira des centres B, F , les petits arcs MR, MO ; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg sur les rayons incidens & rompus; & l'on nommera les données BM, y ; ME, a ; MG, b ; & le petit arc MR, dx . Cela posé,

Les triangles rectangles semblables MEC & MRm , MGC & MOm , BMR & BQe , donneront $ME (a) . MG (b) :: MR (dx) . MO = \frac{b dx}{a}$. Et $BM (y) . BQ$ ou BE

Q

* Secl. 5.

$(y + a) :: MR(dx). Qe = \frac{adx + ydx}{y}$. Or par la propriété de la réfraction $Ce.Cg :: CE.CG :: m.n$. Et partant $m.n :: Ce - CE$ ou $Qe(\frac{adx + ydx}{y}). Cg - CG$ ou $Sg = \frac{andx + nydx}{ny}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables FMO & ESg , l'on aura $MO - Sg(\frac{bm dx - anydx - aandx}{any})$. $MO(\frac{b dx}{a}) :: MS$ ou $MG(b)$. $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$. Ce qui donne cette construction.

FIG. 113. Soit fait vers CM l'angle $ECH = GCM$, & soit prise vers B , $MK = \frac{aa}{y}$. Je dis que si l'on fait $HK.HE :: MG.MF$, le point F sera à la caustique par réfraction.

Car à cause des triangles semblables CGM, CEH , l'on aura $CG.CE :: n.m :: MG(b).EH = \frac{bm}{n}$. D'où l'on tire $HE - ME$ ou $HM = \frac{bm - an}{n}$, $HM - MK$ ou $HK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; & partant $HK(\frac{bmy - any - aan}{ny}). HE(\frac{bm}{n}) :: MG(b).$ $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$.

Il est clair que si la valeur de HK est négative, celle de MF le sera aussi; d'où il suit que le point M tombe entre les points G, F , lorsque le point H se trouve entre les points K, E .

FIG. III. 113. Si le point lumineux B tomboit du côté du point E , ou (ce qui est la même chose) si la courbe AMD étoit concave du côté du point lumineux B ; y deviendroit négative de positive qu'elle étoit auparavant, & l'on auroit par conséquent $MF = \frac{-bbmy}{bmy + any - aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. Et la construction demeureroit la même.

Si l'on suppose que y devienne infinie: c'est à dire que le point lumineux B soit infiniment éloigné de la courbe AMD ; les rayons incidens seront parallèles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{bbm}{bm - an}$, parceque le terme aan sera nul

par rapport aux deux autres bmy , any ; & comme $MK \left(\frac{aa}{y} \right)$ s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire $HM.HE::MG.MF$.

COROLLAIRE I.

134. ON démontrera, de même que dans les caustiques par réflexion*, qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une * Art. 114. seule caustique par réfraction, la raison de m à n étant 115. donnée; laquelle caustique est toujours géométrique & réctifiable, lorsque la courbe proposée AMD est géométrique.

COROLLAIRE II.

135. SI le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G , & que CE soit égale à CG ; il est clair que la caustique par réfraction se changera en caustique par réflexion. En effet on aura $MF \left(\frac{bbmy}{bmy - any + aan} \right) = \frac{ay}{zy + a}$; puisque $m=n$, & que a devient négative de positive qu'elle étoit, & de plus égale à b . Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la section précédente.

Si m est infinie par rapport à n ; il est clair que le rayon rompu MF tombera sur la perpendiculaire CM : de sorte que la caustique par réfraction deviendra la développée. En effet on aura $MF=b$, qui devient en ce cas MC : c'est-à-dire que le point F tombera sur le point C , qui est à la développée.

COROLLAIRE III.

136. SI la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B , & que la valeur de $MF \left(\frac{bbmy}{bmy - any - aan} \right)$ soit positive; il est clair qu'il faudra prendre le point F du même côté du point G , par rapport au point M , comme on l'a supposé en faisant le calcul: & qu'au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Il en est de même lorsque la courbe AMD est concave vers le point B ; mais il faut observer qu'on aura pour lors

$MF = \frac{bmy}{bmy - my + an}$. D'où il suit que les rayons rompus infiniment proches sont convergens lorsque la valeur de MF est positive dans le premier cas, & négative dans le second : & qu'au contraire ils sont divergens lorsqu'elle est négative dans le premier cas, & positive dans le second. Cela posé ; il est évident ,

1°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B , & que m soit moindre que n ; ou que si elle est concave vers ce point, & que m surpasse n : les rayons rompus infiniment proches seront toujours divergens.

2°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B , & que m surpasse n ; ou que si elle est concave vers ce point, & que m soit moindre que n : les rayons rompus infiniment proches seront convergens, lorsque $MK \left(\frac{an}{j} \right)$ est moindre que $MH \left(\frac{bm}{n} - a \text{ ou } a - \frac{bm}{n} \right)$; divergens, lorsqu'elle est plus grande ; & parallèles, lorsqu'elle est égale. Or comme $MK = 0$, lorsque les rayons incidens sont parallèles, il s'en suit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches seront toujours convergens.

COROLLAIRE IV.

137. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M , l'on aura $ME(a) = 0$; & partant $MF = b$. Ce qui fait voir que le point F tombe alors sur le point G .

Si le rayon incident BM est perpendiculaire à la courbe AMD , les droites $ME(a)$ & $MG(b)$ deviendront égales chacune au rayon CM de la développée ; puisqu'elles se confondent avec lui. On aura donc $MF = \frac{bmy}{my - ny + bn}$, qui devient $\frac{bm}{m - n}$ lorsque les rayons incidens sont parallèles entr'eux.

Si le rayon rompu MF touche la courbe AMD au point M , l'on aura $MG(b) = 0$. D'où l'on voit que la caustique touche alors la courbe donnée au point M .

Si le rayon CM de la développée est nul ; les droites $ME(a)$, $MG(b)$ seront aussi égales à zéro ; & par conséquent les termes aan , $bbmy$ sont nuls par rapport aux autres bmy , any . D'où il suit que $MF=0$; & qu'ainsi la caustique a le point M commun avec la courbe donnée.

Si le rayon CM de la développée est infini ; les droites $ME(a)$, $MG(b)$ seront aussi infinies ; & par conséquent les termes bmy , any seront nuls par rapport aux autres aan , $bbmy$: de sorte qu'on aura $MF = \frac{bbmy}{+aan}$. Or* com* * Art. 133.

me cette quantité est négative lorsque l'on suppose que le point F tombe de l'autre côté du point B par rapport à la ligne AMD , & qu'au contraire elle est positive lorsqu'on suppose qu'il tombe du même côté ; il s'ensuit* que * Art. 136. l'on doit prendre le point F du même côté du point B , c'est-à-dire que les rayons rompus infiniment proches sont divergens. Il est évident que le petit arc Mm devient alors une ligne droite, & que la construction précédente n'a plus de lieu. On peut lui substituer celle ci, qui servira à déterminer les points des caustiques par réfraction lorsque la ligne AMD est droite.

Ayant mené BO perpendiculaire sur le rayon incident FIG. 114.
 BM , & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire sur AD ; on tirera OL perpendiculaire sur le rayon rompu MG , & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle ZOM , on fera $BM \cdot BH :: ML \cdot MF$. Je dis que le point F sera à la caustique par réfraction.

Car les triangles rectangles MEC & MBO , MGC & MLO seront toujours semblables de quelque grandeur que l'on suppose CM ; & partant lorsqu'elle devient infinie, l'on aura encore $ME(a) \cdot MG(b) :: BM(y) \cdot ML = \frac{by}{a}$. Et à cause des triangles semblables OLM , OBH , l'on aura aussi $OL \cdot OB(n \cdot m) :: ML(\frac{by}{a}) \cdot BH = \frac{bmy}{an}$. D'où l'on voit que $BM(y) \cdot BH(\frac{bmy}{an}) :: ML(\frac{by}{a}) \cdot MF(\frac{bbmy}{aan})$.

COROLLAIRE V.

138. IL est clair que deux quelconques des trois points B, C, F , étant donnés, on peut facilement trouver le troisième.

EXEMPLE I.

FIG. 115. 139. SOIT la courbe AMD un quart de cercle qui ait pour centre le point C ; soient les rayons incidens BA, BM, BD parallèles entr'eux, & perpendiculaires sur CD ; soit enfin la raison de m à n , comme 3 à 2, qui est celle que souffrent les rayons de lumière en passant de l'air dans le verre. Puisque la développée du cercle AMD se réunit en un point C qui en est le centre, il s'ensuit que si l'on décrit une demi-circonférence MEC qui ait pour diamètre le rayon CM , & qu'on prenne la corde $CG = \frac{2}{3}CE$; la ligne MG sera le rayon rompu, sur lequel on déterminera le point F , comme l'on a enseigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point H où le rayon incident BA perpendiculaire sur AMD touche la caustique par réfraction,

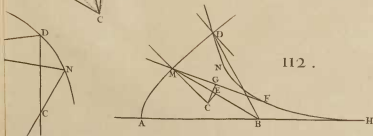
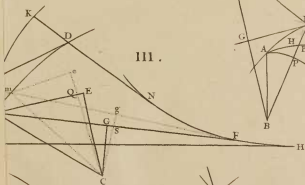
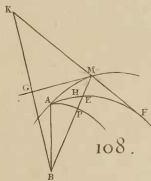
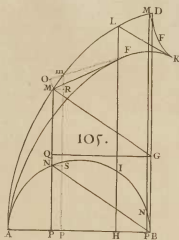
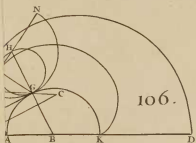
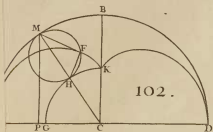
* Art. 137. on l'on aura $*AH(\frac{bm}{m-n}) = 3b = 3CA$. Et si l'on décrit

une demi-circonférence CND qui ait pour diamètre le rayon CD , & qu'on prenne la corde $CN = \frac{2}{3}CD$; il est

* Art. 137. clair * que le point N sera à la caustique par réfraction, puisque le rayon incident BD touche le cercle AMD au point D .

* Art. 132. Si l'on mène AP parallèle à CD ; il est visible * que la portion $FH = AH - MF - \frac{2}{3}PM$: de sorte que la caustique entière $HFN = \frac{7}{3}CA - DN = \frac{7-\sqrt{2}}{3}CA$.

FIG. 116. Si le quart de cercle AMD est concave vers les rayons incidens BM , & que la raison de m à n soit de 2 à 3; on prendra sur la demi-circonférence CEM qui a pour diamètre le rayon CM , la corde $CG = \frac{1}{2}CE$, & on tirera le rayon rompu MG sur lequel on déterminera le point F par la construction générale art. 133.



On aura $^*AH \left(\frac{bm}{m-n} \right) = -2b$, c'est à dire que *AH sera $^*Art. 137$.

du côté * de la convexité du quart de cercle AMD , & $^*Art. 136$. double du rayon AC . Et si l'on suppose que CG ou $\frac{3}{2} CE$ soit égale à CM ; il est manifeste que le rayon rompu MF touchera le cercle AMD en M , puisqu'alors le point G se confondra avec le point M . D'où il suit que si l'on prend $CE = \frac{2}{3} CD$, le point M tombera au point N où la caustique *HFN touche le quart de cercle AMD . Mais lorsque CE surpasse $\frac{2}{3} CD$, les rayons incidens BM ne pourront plus se rompre, c'est à dire passer du verre dans l'air; puisqu'il est impossible que CG perpendiculaire sur le rayon rompu MG , soit plus grande que CM : de sorte que tous les rayons qui tomberont sur la partie ND se réfléchiront.

Si l'on mène AP parallèle à CD ; il est clair * que la $^*Art. 132$. portion $FH = AH - MF + \frac{1}{2} PM$: de sorte que menant NK parallèle à CD , la caustique entière $HFN = 2CA + \frac{1}{2} AK = \frac{7-19}{2} CA$.

EXEMPLE II.

140. SOIT la courbe AMD une logarithmique spirale FIG. 117. qui ait pour centre le point A , duquel partent tous les rayons incidens AM .

Il est clair * que le point E tombe sur le point A , c'est $^*Art. 91$. à dire que $a = y$. Si donc l'on met à la place de a sa va-

leur y dans $\frac{bbmy}{bmy - amy + aab}$ valeur * de MF lorsque la courbe $^*Art. 133$. est concave du côté du point lumineux; on aura $MF = b$; d'où l'on voit que le point F tombe sur le point G .

Si l'on mène la droite AG , & la tangente MT ; l'angle AGO complément à deux droits de l'angle AGM , sera égal à l'angle AMT . Car le cercle qui a pour diamètre la ligne CM , passant par les points A & G , les angles AGO , AMT ont chacun pour mesure la moitié du même arc AM . Il est donc évident que la caustique AGN est la même lo-

arithmétique spirale que la donnée AMD , & qu'elle n'en diffère que par sa position.

PROPOSITION II.

Problème.

FIG. 118. 141. **L**A caustique HF par réfraction étant donnée avec son point lumineux B , & la raison de m à n , trouver une infinité de courbes telles que AM , dont elle soit caustique par réfraction.

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA , le point A pour un des points de la courbe AM , on décrira du centre B & de l'intervalle BA l'arc de cercle AP , & d'un autre intervalle quelconque BM un autre arc de cercle; & ayant pris $AE = \frac{n}{m} PM$, on décrira en envelopant la caustique HF une ligne courbe EM , qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervalle BM , en un point

* Art. 132. M qui sera à la courbe cherchée. Car $*PM \cdot AE$ ou $ML :: m \cdot n$.

AUTRE SOLUTION.

142. **O**N cherchera sur une tangente quelconque FM , autre que HA , le point M tel que $HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA$. C'est pourquoi si l'on prend $FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$, & qu'on trouve sur FK un point M tel que

* Art. 132. $MK = \frac{n}{m} BM$, il sera * celui qu'on cherche. Or cela se

FIG. 119. peut faire en décrivant une ligne courbe GM telle que menant d'un de ses points quelconque M aux points donnés B, K , les droites MB, MK , elles aient toujours entr'elles un même rapport que m à n . Il n'est donc question que de trouver la nature de ce lieu.

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire sur BK , & nommée la donnée BK , a ; & les indéterminées BR , x ; RM , y . Les triangles rectangles BRM, KRM donneront $BM = \sqrt{xx + yy}$, & $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$:
de

de sorte que pour remplir la condition du Problème, l'on aura $\sqrt{xx + yy} \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} :: m.n$. D'où l'on tire $yy = \frac{1.ammx - a.amm}{mm - nn} - xx$, qui est un lieu au cercle que l'on construira ainsi.

Soit prise $BG = \frac{am}{m+n}$, & $BQ = \frac{am}{m-n}$, & soit décrit du diametre GQ la demi-circonférence GMQ ; je dis qu'elle sera le lieu requis. Car ayant QR ou $BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$, & RG ou $BR - BG = x - \frac{am}{m+n}$; la propriété du cercle, qui donne $QR \times RG = \overline{RM}^2$, donnera en termes analytiques $yy = \frac{1.ammx - a.amm}{mm - nn} - xx$.

Si les rayons incidens BA, BM sont parallèles à une droite donnée de position, la premiere solution aura toujours lieu; mais celle ci deviendra inutile, & on pourra lui substituer la suivante. FIG. 110

Soit prise $FL = AH - HF$; & ayant mené LG parallèle à AB & perpendiculaire sur AP , on prendra $LO = \frac{n}{m} LG$, & on tirera LP parallèle à GO , & PM parallèle à GL . Il est clair* que le point M sera celui qu'on cherche; car puisque $LO = \frac{n}{m} LG$, $ML = \frac{n}{m} PM$. * Art. 132.

Si la caustique FH par réfraction, se réunit en un point; les courbes AM deviennent les Ovals de *Descartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Geometres.

COROLLAIRE I.

143. ON démontre de même que dans les caustiques par réflexion*, que les courbes AM sont de nature différente* entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF par réfraction est géométrique & réduisible. * Art. 130.

COROLLAIRE II.

144. UNE ligne courbe AM étant donnée avec le point lumineux B , & la raison de m à n ; trouver une infi-

R

rité de lignes telles que DN , en sorte que les rayons rompus MN se rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes DN pour se réunir en un point donné C .

Si l'on imagine que la ligne courbe HF soit la caustique par réfraction de la courbe donnée AM , formée par le point lumineux B ; il est clair que cette même ligne HF doit être aussi la caustique par réfraction de la courbe cherchée DN , ayant pour point lumineux le point donné C .

* Art. 132. C'est pourquoi $\frac{n}{m}BA + AH = \frac{n}{m}BM + MF + FH$, & $NF + FH - \frac{n}{m}NC = HD - \frac{n}{m}DC$; & partant $\frac{n}{m}BA + AH = \frac{n}{m}BM + MN + HD - \frac{n}{m}DC + \frac{n}{m}NC$; & transposant à l'ordinaire, $\frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD = MN + \frac{n}{m}NC$. Ce qui donne cette construction.

Ayant pris à discrétion sur un rayon rompu quelconque AH le point D pour un de ceux de la courbe cherchée DN , on prendra sur un autre rayon rompu quelconque MF la partie $MK = \frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD$;

* Art. 142. & ayant trouvé, comme ci-dessus*, le point N tel que

* Art. 132. $NK = \frac{n}{m}NC$, il est clair* qu'il sera à la courbe DN .

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

Pour les trois Sections précédentes.

* Art. 80. 145. IL est manifeste* qu'une ligne courbe n'a qu'une seule développée, qu'une seule caustique par réflexion, & qu'une seule par réfraction, le point lumineux & le rapport des sinus étant donnés, lesquelles lignes sont toujours géométriques & rectifiables lorsque cette courbe est géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la développée, & l'une & l'autre caustique dans le même rapport des sinus, & dans la même position du point lumineux, commune à une infinité de lignes très différentes entr'elles, & qui ne sont géométriques que lorsque cette courbe est géométrique & rectifiable.



SECTION VIII.

Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

Problème.

146. SOIT donnée une ligne quelconque AMB , qui ait Fig. 122. pour axe la droite AP ; soient de plus entendues une infinité de paraboles AMC, AmC , qui passent toutes par le point A , & qui aient pour axes les appliquées PM, pm . Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.

Il est clair que le point touchant de chaque parabole AMC est le point d'intersection C où la parabole AmC , qui en est infiniment proche, la coupe. Cela posé, & ayant mené CK parallèle à MP , soient nommées les données AP, x ; PM, y ; & les inconnues AK, u ; KC, z . On aura par la propriété de la parabole, $\overline{AP}^2 (xx) \cdot \overline{PK}^2 (uu - 2ux + xx) :: MP(y) \cdot MP - CK(y - z)$. Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui est l'équation commune à toutes les paraboles telles que AMC . Or je remarque que les inconnues $AK(u)$ & $KC(z)$ demeurent les mêmes, pendant que les données $AP(x)$ & $PM(y)$ varient en devenant Ap & pm ; & qu'il n'arrive que $KC(z)$ demeure la même, que lorsque le point C est celui d'intersection: car il est visible que par tout ailleurs la droite KC coupera les deux paraboles AMC, AmC en deux différens points, & qu'elle aura par conséquent deux valeurs qui répondront à la même de AK . C'est pourquoi si l'on traite u & z comme constantes, en prenant la différence de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point C à être celui d'intersection. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$: d'où l'on tire l'inconnue

R ij

$AK(u) = \frac{1xxdy - 2yxdx}{x^2y - 2ydx}$ en mettant pour z la valeur $\frac{10xy - 10uy}{xx}$; & la nature de la courbe AMB étant donnée,

on trouvera une valeur de dy en dx , laquelle étant substituée dans la valeur de AK , cette inconnue sera enfin exprimée en termes entièrement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

Si au lieu des paraboles AMC , on proposoit d'autres lignes droites ou courbes dont la position fût déterminée, on résoudroit toujours le Problème à peu près de la même manière: & c'est ce que l'on verra dans les Propositions suivantes.

EXEMPLE.

147. QUE l'équation $xx = 4ay - 4yy$ exprime la nature de la courbe AMB : elle sera une demi-ellipse qui aura pour petit axe, la droite $AB = a$ perpendiculaire sur AP , & dont le grand axe sera double du petit.

On trouve $xdx = 2ady - 4ydy$; & partant AK $\left(\frac{1xxdy - 2yxdx}{x^2y - 2ydx}\right) = \frac{ax}{y} = u$. D'où il suit que si l'on prend AK quatrième proportionnelle à MP , PA , AB , & qu'on mène KC perpendiculaire sur AK ; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C .

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui passe par tous les points C ainsi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la relation de $AK(u)$ à $KC(\zeta)$ en cette sorte. Mettant à la place de u la valeur $\frac{ax}{y}$ dans $zxx = 2uxy - uuy$, l'on en tire $y = \frac{ax}{2z - z}$; & partant x ou $\frac{uy}{a} = \frac{ax}{2z - z}$. Si donc l'on met ces valeurs à la place de x & y dans $xx = 4ay - 4yy$, on formera l'équation $uu = 4aa - 4az$ où x & y ne se rencontrent plus, & qui exprime la relation de AK à KC . D'où l'on voit que la courbe cherchée est une parabole qui a pour axe la ligne BA , pour sommet le point B , pour foyer le point A , & dont le paramètre par conséquent est quadruple de AB .

On vient de trouver $y = \frac{ax}{2a - x}$, d'où l'on tire $KC (x) = \frac{2ay - ax}{y}$. Or comme cette valeur est positive lorsque

$2y$ surpasse a , négative lorsqu'il est moindre, & nulle lorsqu'il lui est égal; il s'ensuit que le point touchant C tombe au dessus de AP dans le premier cas, comme l'on avoit supposé en faisant le calcul; au dessous dans le second, & enfin sur AP dans le troisième.

Si l'on mène la droite AC qui coupe MP en G ; je dis que $MG = BQ$, & que le point G est le foyer de la parabole AMC . Car, 1^o. $AK (\frac{ax}{y})$. $KC (\frac{2ay - ax}{y}) :: AP (x)$.

$PG = 2y - a$. & partant $MG = a - y = BQ$. 2^o. Le parametre de la parabole AMC , est $= 4a - 4y$ en mettant pour xx sa valeur $4xy - 4yy$; & partant $MG (a - y)$ est la quatrième partie du parametre: d'où l'on voit que le point G est le foyer de la parabole; & qu'ainsi l'angle BAC doit être divisé en deux également par la tangente en A .

Il suit de ce que le parametre de la parabole AMC est quadruple de BQ , que le sommet M tombant en A , le parametre sera quadruple de AB , & qu'ainsi la parabole, qui a pour sommet le point A , est asymptotique de celle qui passe par tous les points C .

Comme la parabole BC touche toutes les paraboles telles que AMC ; il est clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée AC en des points qui seront plus proches du point A que le point C . Or l'on démontre dans la Balistique (en supposant que AK soit horizontale) que toutes les paraboles telles que AMC marquent le chemin que décrivent en l'air des Bombes qui seroient jettées par un Mortier placé en A dans toutes les élévations possibles avec la même force. D'où il suit que si l'on mène une droite qui divise par le milieu l'angle BAC ; elle marquera la position que doit avoir le Mortier, afin que la Bombe qu'il jette, tombe sur le plan AC donné de position, en un point C plus éloigné du Mortier, qu'en toute autre élévation.

PROPOSITION II.

Problème.

FIG. 113. 148. *SOIT* donnée une courbe quelconque AM , qui ait pour axe la droite AP ; trouver une autre courbe BC telle qu'ayant mené à discrétion l'appliquée PM , & la perpendiculaire PC à cette courbe, ces deux lignes PM, PC soient toujours égales entr'elles.

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p , & des rayons PC, pC égaux à PM, pm ; il est clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle est le point d'intersection où le cercle qui en est infiniment proche, le coupe. Cela posé, soit mené CK perpendiculaire sur AP ; soient nommées les données & variables AP, x ; PM ou PC, y ; les inconnues & constantes AK, u ; KC, z ; & l'on aura par la propriété du cercle $\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = xx - 2ux + uu + zz$, qui est l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence est $zydy = xxdx - 2udx$: d'où l'on tire $PK (x - u = \frac{ydy}{dx}$; ce qui donne cette construction générale.

Soit menée MQ perpendiculaire à la courbe AM ; & ayant pris $PK = PQ$, soit tirée KC parallèle à PM : je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre P & du rayon $PC = PM$ au point C , où il touche la courbe cherchée BC . Ce qui est évident; puisque $PQ = \frac{ydy}{dx}$.

On peut encore trouver la valeur de PK de cette autre manière.

Ayant mené PO perpendiculaire sur Cp , les triangles rectangles POP, PKC seront semblables; & partant $Pp(dx).Op(dy) :: PC(y).PK = \frac{ydy}{dx}$.

Lorsque $PQ = PM$, il est clair que le cercle décrit du rayon PC , touchera KC au point K : de sorte que le point

touchant C se confondra avec le point K , & tombera par conséquent sur l'axe.

Mais lorsque PQ surpassera PM , le cercle décrit du rayon PC ne pourra toucher la courbe BC ; puisqu'il ne pourra rencontrer la droite KC en aucun point.

E X E M P L E.

149. SOIT la courbe donnée AM , une parabole qui FIG. 123.
ait pour équation $ax = yy$. On aura PQ ou $PK(x - u)$
 $= \frac{1}{2}a$; & par conséquent $x = \frac{1}{2}a + u$, & $yy = \frac{1}{4}aa + zu$
à cause du triangle rectangle PKC . Or si l'on met ces va-
leurs dans $ax = yy$, on formera l'équation $\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa$
 $+ zu$ ou $\frac{1}{4}aa + au = zu$, qui exprime la nature de la
courbe BC . D'où il est clair que cette courbe est la mê-
me parabole que AM ; puisqu'elles ont l'une & l'autre le
même paramètre a , & que son sommet B est éloigné du
sommet A de la distance $BA = \frac{1}{4}a$.

P R O P O S I T I O N III.

Problème.

150. SOIT donnée une ligne courbe quelconque AM , qui FIG. 124.
ait pour diamètre la droite AP , & dont les appliquées PM ,
 pm soient parallèles à la droite AQ donnée de position; &
ayant mené MQ , mq parallèles à AP , soient tirées les
droites PQC , pqC . On demande la courbe AC qui a pour
tangentes toutes ces droites: ou, ce qui est la même chose,
il s'agit de déterminer sur chaque droite PQC le point tou-
chant C .

Ayant imaginé une autre tangente pqC infiniment pro-
che de PQC , & mené CK parallèle à AQ , on nommera
les données & variables AP , x ; PM ou AQ , y ; les in-
connues & constantes AK , u ; KC , z ; & les triangles
semblables PAQ , PKC donneront $AP(x) \cdot AQ(y)$
 $:: PK(x + u) \cdot KC(z) = y + \frac{uy}{z}$. qui est l'équation

commune à toutes les droites telles que KC . Sa différence est $dy + \frac{uxdy - ydx}{xx} = 0$, d'où l'on tire $AK(u) = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$. Ce qui donne cette construction générale.

Soit menée la tangente MT , & soit prise AK troisième proportionnelle à AT , AP : je dis que si l'on mène KC parallèle à AQ , elle ira couper la droite PQC au point cherché C .

$$\text{Car } AT \left(\frac{ydx - xdy}{dy} \right) . AP(x) :: AP(x) . AK = \frac{xxdy}{ydx - xdy}.$$

EXEMPLE I.

FIG. 124. 151. SOIT la courbe donnée AM , une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura $AT = AP$; d'où il suit que $AK(u) = x$, c'est à dire que le point K tombe sur le point T . Si l'on veut à présent avoir une équation qui exprime la relation de $AK(u)$ à $KC(z)$; on trouvera $KC(z) = 2y$, puisque l'on vient de trouver que PK est double de AP . Mettant donc à la place de x & y leurs valeurs u & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = z^2$: d'où l'on voit que la courbe AC est une parabole qui a pour sommet le point A , & pour paramètre une ligne quadruple du paramètre de la parabole AM .

EXEMPLE II.

FIG. 125. 152. SOIT la courbe donnée AM , un quart de cercle BMD qui ait pour centre le point A , & pour rayon la ligne AB ou AD , que j'appelle a . Il est clair que PQ est toujours égale au rayon AM ou AB , c'est à dire qu'elle est par tout la même: de sorte que l'on peut concevoir que les extrémités P, Q glissent le long des côtés BA, AD de l'angle droit BAD . On aura $AK(u) = \frac{x^2}{aa}$, puisque $AT = \frac{aa}{x}$; & les parallèles KC, AQ donneront $AP(x).PQ(a) :: AK\left(\frac{x^2}{aa}\right).QC = \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant C , il n'y a qu'à prendre QC troisième propor-

DES INFINIMENT PETITS. I. Partie. 137
proportionnelle à PQ & AP . Si l'on cherche l'équation
qui exprime la nature de la courbe BCD , on trouvera
celle-ci, $u^4 - 3aau^3 + 3a^2uu - a^6 = 0$.

$$\begin{array}{r} + 3xz + 21aaxz + 3a^2zz \\ + \quad \quad \quad 3z^4 - 3aaz^3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + \quad \quad \quad z^6 \end{array}$$

COROLLAIRE I.

153. Si l'on veut chercher le rapport de la portion DC
de la courbe BCD à sa tangente CP , l'on imaginera une
autre tangente cp infiniment proche de CP ; & ayant dé-
crit du centre C le petit arc PO , l'on aura $cp - CP$ ou Op
 $- Cc = -\frac{2xdx}{a}$, pour la différence de $CP = \frac{aa - xx}{a}$:
d'où l'on tire $Cc = Op + \frac{2xdx}{a}$. Or à cause des triangles ré-
ctangles semblables QPA , PpO , l'on aura $PQ (a)$. $AP (x)$
 $:: Pp (dx)$. $Op = \frac{xdx}{a}$. & partant $Cc = \frac{3xdx}{a} = DC - Dc$. Il
est donc manifeste qu'en quelque endroit que l'on prenne
le point C , l'on aura toujours $DC - Dc (\frac{3xdx}{a})$. $CP - cp$
 $(\frac{2xdx}{a}) :: 3 . 2$. D'où il suit que la somme de toutes les
différences $DC - Dc$ qui répondent à la droite PD , c'est
à dire * la portion DC de la courbe BCD , est à la somme * *Art. 96.*
de toutes les différences $CP - cp$ qui répondent à la même
droite PD , c'est à dire * à la tangente $CP :: 3 . 2$. Et de mê- * *Art. 96.*
me que la courbe entière BCD est à sa tangente $BA :: 3 . 2$.

COROLLAIRE II.

154. Si l'on développe la courbe BCD en commençant
par le point D , on formera la ligne courbe DNF telle que
 CN . $CP :: 3 . 2$, puisque CN est toujours égale à la portion
 DC de la courbe BCD . D'où il suit que les sécateurs sem-
blables CNn , CPO sont entr'eux :: 9 . 4. & partant que l'es-
pace DCN renfermé par les courbes DC , DN , & par la
droite CN qui est tangente en C , & perpendiculaire en

N , est à l'espace DCP renfermé par la courbe DC , & par les deux tangentes DP , CP , comme 9. à 4.

COROLLAIRE III.

155. **L** centre de pesanteur du secteur CNn doit être situé sur l'arc PO ; puisque $CP = \frac{2}{3}CN$. Et comme cet arc est infiniment petit, il s'ensuit que ce centre doit être sur la droite AD ; & partant que le centre de pesanteur des espaces DCN , BDF , qui sont composés de tous ces secteurs, doit être sur cette droite AD : de sorte que si l'on décriroit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF , le centre de pesanteur de la figure entière seroit au point A .

COROLLAIRE IV.

156. **A** cause des triangles rectangles semblables PQA , pPO , l'on aura $PQ(a) \cdot AQ$ ou $PM(\sqrt{aa - xx}) :: Pp(dx)$.

$PO = \frac{dx\sqrt{aa - xx}}{a}$. Et à cause des secteurs semblables CPO ,

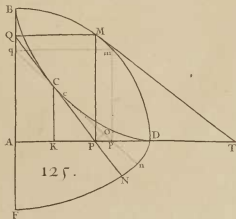
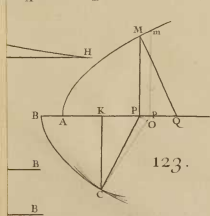
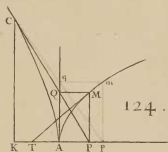
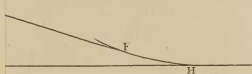
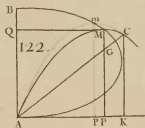
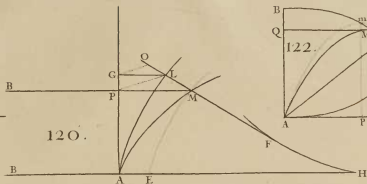
CNn , l'on aura aussi $CP \cdot CN$, ou 2. 3 :: $PO \left(\frac{dx\sqrt{aa - xx}}{a} \right) \cdot Nn$

* Art. 2. $= \frac{3dx\sqrt{aa - xx}}{2a}$. Or le rectangle $MP \times Pp$, c'est à dire * le petit espace circulaire $MPpm = dx\sqrt{aa - xx}$. On aura donc $AB \times Nn = \frac{1}{2}MPpm$: d'où il suit que la portion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB , est sesquialtère du segment circulaire DMP , & que la courbe entière DNF est égale aux trois quarts de BMD quatrième partie de la circonférence du cercle.

PROPOSITION IV.

Problème.

FIG. 126. 157. **S**oit donnée une courbe quelconque AM , qui ait pour axe la droite AP ; & soient entendues une infinité de perpendiculaires MC , mC à cette courbe. On demande la courbe



qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou ce qui est la même chose, il faut trouver sur chaque perpendiculaire MC le point touchant C .

Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de MC , avec une appliquee MP , l'on mène par le point d'intersection C les droites CK perpendiculaire & CE parallèle à l'axe : ayant ensuite nommé les données & variables AP, x ; PM, y ; les inconnues & constantes AK, u ; KC, z ; l'on aura $PQ = \frac{ydy}{dx}$, PK ou $CE = u - x$, $ME = y + z$; & les triangles rectangles semblables MPQ, MEC donneront $MP(y) \cdot PQ(\frac{ydy}{dx}) :: ME(y+z) \cdot EC(u-x) = \frac{ydy + zdy}{dx}$, qui est une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que MC , & dont la différence (en supposant dx constante) donne $-dx = \frac{yddy + dy^2 + zddy}{dx}$: d'où l'on tire $ME(z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Or la nature de la courbe AM étant donnée, l'on aura des valeurs de dy & ddy en dx^2 , lesquelles étant substituées dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, donneront pour ME une valeur entièrement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

Il est évident que la courbe qui passe par tous les points C , est la développée de la courbe AM ; & comme l'on en a traité exprès dans la Section cinquième, il seroit inutile d'en donner ici des exemples nouveaux.

PROPOSITION V.

Problème.

158. DEUX lignes quelconques AM, BN étant données Fig. 117. avec une ligne droite MN qui demeure toujours la même ; on suppose que les extrémités M, N de cette ligne glissent continuellement le long des deux autres, & l'on demande la courbe quelle touche toujours dans ce mouvement.

Ayant mené les tangentes MT, NT , & imaginé une au-
Sij

tre droite mn infiniment proche de MN , & qui la coupe par conséquent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de déterminer les points. Il est clair que la droite MN , pour parvenir en mn , a parcouru par les extrémités les petites portions Mm , Nn des lignes AM , BN , lesquelles sont communes à cause de leur infinie petitesse, aux tangentes TM , TN : de sorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la situation infiniment proche mn , ait glissé le long des droites TM , TN données de position.

Cela bien entendu, soient menées sur NT les perpendiculaires MP , CK ; soient nommées les données & variables TP , x ; PM , y ; les inconnues & constantes TK , u ; KC , z ; & la donnée MN qui demeure par tout la même, a . Le triangle rectangle MPN donnera $PN = \sqrt{aa - yy}$, & à cause des triangles semblables NPM , NKC , l'on aura $NP (\sqrt{aa - yy}) . PM (y) :: NK (u - x - \sqrt{aa - yy}) . KC (z) = \frac{uy - xy}{\sqrt{aa - yy}} y$. dont la différence donne $aady - aaxy - aaydx + y^2dx = aady - yydy\sqrt{aa - yy}$: d'où en faisant $\sqrt{aa - yy} = m$ pour abrégér, l'on tire $PK (u - x) = \frac{m^2dy + mmydx}{aady} = \frac{m^2 + mmx}{aa}$ en mettrant pour ydx sa valeur xdy , à cause des triangles semblables mRM , MPT ; & partant $MC = \frac{mm + mx}{a}$: ce qui donne cette construction.

Soit menée TE perpendiculaire sur MN , & soit prise $MC = NE$: je dis que le point C sera celui qu'on cherche. Car à cause des triangles rectangles semblables MNP , TNE , l'on aura $MN (a) . NP (m) :: NT (m + x) . NE$ ou $MC = \frac{mm + mx}{a}$.

Autre manière. Ayant mené TE perpendiculaire sur MN , & décrit du centre C les petits arcs MS , NO , on nommera les données NE , r ; ET , s ; MN , a ; & l'inconnue CM , t . On aura Sm ou $On = dt$; & les triangles rectangles sem-

blables $MET \& mSM$, $NET \& nON$, $CMS \& CNO$ donneront $ME(r-a)$. $ET(s) :: mS(dt)$. $SM = \frac{sdt}{r-a}$. Et $NE(r)$. $ET(s) :: nO(dt)$. $ON = \frac{sdt}{r}$. Et $MS - NO(\frac{a:dt}{r-a})$. $MS(\frac{sdt}{r-a}) :: MN(a)$. $MC(t) = r$. Ce qui donne la même construction que ci-dessus.

Si l'on suppose que les lignes AM , BN soient des droites qui fassent entr'elles un angle droit, il est visible que la courbe cherchée est la même que celle de l'article 152.

PROPOSITION VI.

Problème.

159. SOIENT données trois lignes quelconques L , M , N ; FIG. 128. & soient entendues de chacun des points L , l de la ligne L deux tangentes LM & LN , lm & ln , aux deux courbes M & N , une à chacune. On demande la quatrième courbe C , qui ait pour tangentes toutes les droites MN , mn qui joignent les points touchans des courbes M , N .

Ayant tiré la tangente LE , & mené par un de ses points quelconque E les perpendiculaires EF , EG sur les deux autres tangentes ML , NL , on concevra que le point l soit infiniment près du point L ; on tirera les petites droites LH , LK perpendiculaires sur ml , nl ; comme aussi les perpendiculaires MP , mP , NQ , nQ sur les tangentes ML , ml , NL , nl , lesquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points P & Q . Tout cela formera les triangles rectangles semblables EFL & LHl , EGL & LKl ; comme aussi les triangles LMH & MPm , LnK & NQn rectangles en H & m , K & N , qui seront semblables entr'eux, puisque les angles LMH , MPm étant joints l'un ou l'autre au même angle PMm , font un droit. On prouvera de même, que les angles LnK , NQn sont égaux entr'eux.

Cela posé, on nommera le petit côté Mm du polygone qui compose la courbe M , du ; & les données EF , m ; EG , n ; MN ou mn , a ; ML ou ml , b ; NL ou nl , c ; MP ou

$mP, f; NQ$ ou nQ, g (je prens ici les droites MP, NQ pour données, parceque la nature des courbes M, N étant donnée par la supposition, on les pourra toujours trou-

*Art. 78. ver); & l'on aura, 1^o, $MP(f). ML(b) :: Mm(du) LH = \frac{bdu}{f}$. 2^o. $EF(m). EG(n) :: LH(\frac{bdu}{f}). LK = \frac{bndu}{mf}$. 3^o. LN ou $Ln(c). nQ(g) :: LK(\frac{bndu}{mf}). nN = \frac{bgndu}{cfm}$. 4^o. (menant MR parallele à NL ou nl) $ml(b). ln(c) :: mM(du). MR = \frac{cdn}{b}$. 5^o. $MR + nN(\frac{cdn}{b} + \frac{bgndu}{cfm})$. $MR(\frac{cdn}{b}) :: MN(a). MC = \frac{acefm}{cfm + bgna}$. Ce qu'il fal-

loit trouver.
Si la tangente EL tomboit sur la tangente ML , il est clair que $EF(m)$ deviendrait nulle ou zero; & partant que le point cherché C tomberoit sur le point M . De même si la tangente EL se confondoit avec la tangente LN ; alors $EG(n)$ deviendrait nulle, & l'on auroit par conséquent $MC=a$: d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit aussi sur le point N . Et enfin si la tangente EL tomboit dans l'angle GLI ; en ce cas $EG(n)$ deviendrait négative: ce qui donneroit alors $MC = \frac{acefm}{cfm - bgna}$; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N , mais de part ou d'autre.

EXEMPLE I.

FIG. 129. 160. SUPPOSONS que les courbes M & N ne fassent qu'un cercle. Il est clair en ce cas que $b=c$, & $f=g$; ce qui donne $MC = \frac{am}{m+n}$, d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raison donnée de m à n pour avoir le point cherché C ; c'est à dire en sorte que $MC.NC :: m.n$.

EXEMPLE II.

161. SUPPOSONS que les courbes M & N soient une

Sécion conique quelconque. La construction générale se peut changer en cette autre qui est beaucoup plus simple, si l'on fait attention à une propriété des Sécions coniques, que l'on trouve démontrée dans les Livres qui en traitent : sçavoir que si l'on mene de chacun des points L , l d'une ligne droite EL deux tangentes LM & LN , lm & ln à une Sécion conique ; toutes les droites MN , mn qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point C , par lequel passe le diametre AC , dont les ordonnées sont paralleles à la droite EL . Car il suit de là, que pour avoir le point C , il ne faut que mener un diametre qui ait ses ordonnées paralleles à la tangente EL .

Il est évident que dans le cercle, le diametre doit être perpendiculaire sur la tangente EL ; c'est à dire qu'en menant de son centre A une perpendiculaire AB sur cette tangente, elle coupera la droite MN au point cherché C .

REMARQUE.

162. ON peut par le moyen de ce Problème résoudre FIG. 128. celui ci qui dépend de la Méthode des Tangentes.

Les trois courbes C , M , N , étant données, on fera rouler une ligne droite MN autour de la courbe C , en sorte qu'elle la touche continuellement ; on tirera par les points M , N , où elle coupe les courbes M & N , les tangentes ML , NL qui s'entrecoupent en un point L , lequel décrit dans ce mouvement une quatrième courbe LL . Il s'agit de tirer la tangente LE de cette courbe, la position des droites MN , ML , NL étant donnée avec le point touchant C .

Car il est visible que ce Problème n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici MC est donnée : ce qu'on cherche, c'est la raison de EF , EG , qui détermine la position de la tangente EL . C'est pourquoi si l'on nomme la donnée MC , h ;

l'on aura $\frac{acefm}{cfm + bbgm} = h$: d'où l'on tire $m = \frac{bbghn}{acef - ccfh}$; & par conséquent la tangente LE doit être tellement située dans l'angle donné MLG , que si l'on mene d'un de

ses points quelconque E les perpendiculaires EF , EG sur les côtés de cet angle, elles soient toujours entr'elles en raison donnée de $b\phi gh$ à $ac\phi f - c\phi h$. Or cela se fait en menant MD parallèle à NL , & égale à $\frac{b'gh}{ac\phi f - c\phi h}$.

FIG. 129. Il est évident * que si les deux courbes M & N ne font qu'une Section conique, il ne faudra que tirer la tangente LE parallèle aux ordonnées du diamètre qui passe par le point C .

* Art. 161.



SECTION IX.

Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problème.

163. SOIT une ligne courbe AMD ($AP = x$, $PM = y$, FIG. 130. $AB = a$) telle que la valeur de l'appliquée y soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque $x = a$, c'est à dire lorsque le point P tombe sur le point donné B . On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée BD .

Soient entendues deux lignes courbes ANB , COB , qui aient pour axe commun la ligne AB , & qui soient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM : de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point B ; puisque par la supposition PN & PO deviennent chacune zero lorsque le point P tombe en B . Cela posé, si l'on imagine une appliquée bd infiniment proche de BD , & qui rencontre les lignes courbes ANB , COB aux points f , g ; on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne diffère pas de BD . * Art. 2.

Il n'est donc question que de trouver le rapport de bg à bf . Or il est visible que la coupée AP devenant AB , les appliquées PN , PO deviennent nulles, & que AP devenant Ab , elles deviennent bf , bg . D'où il suit que ces appliquées, elles mêmes bf , bg , sont la différence des appliquées en B & b par rapport aux courbes ANB , COB ; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, après

T

avoir fait $x=a=Ab$ ou AB , l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD . Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

164. *Soit* $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a^2/\sqrt{axx}}{a - \sqrt{axx}}$. Il est clair que lorsque $x=a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2dx}{\sqrt{axx}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3a^2dx}{4\sqrt{axx}}$ du dénominateur, après avoir fait $x=a$, c'est à dire qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD .

EXEMPLE II.

165. *Soit* $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{axx}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^2y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & substituant a pour x , il vient comme auparavant $y = 2a$.

LEMM E.

FIG. 131. 166. *Soit* une ligne courbe quelconque BCG , avec une ligne droite AE qui la touche au point B , & sur laquelle soient marqués à discrétion deux points fixes A , E . Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, en sorte qu'elle la touche continuellement; il est clair que les point fixes A , E décriront dans ce mouvement deux courbes AMD , ENH . Si l'on mène à présent DL parallèle à AB , & qui fasse par conséquent avec DK (sur laquelle je suppose la droite AE lorsqu'elle

touché la courbe BCG en G l'angle KDL égal à l'angle AOD fait par les tangentes en B, G ; & que l'on décrive comme on voudra, du centre D l'arc KFL :

Je dis que $DK \cdot KFL :: AE \cdot AMD \pm ENH$. sçavoir + lorsque le point touchant tombe toujours entre les points décrivant, & — lorsqu'il les laisse toujours du même côté.

Car supposant que la droite AE en roulant autour de la courbe BCG soit parvenue dans les positions MCN , mCn infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons DF, Df parallèles à CM, Cm : il est clair que les sécateurs DFf, CMm, CNn seront semblables; & qu'ainsi $DF \cdot Ff :: CM \cdot Mm :: CN \cdot Nn :: CM \pm CN$ ou $AE \cdot Mm \pm Nn$. Or comme cela arrivera toujours en quelque endroit que se trouve le point touchant C , il s'ensuit que le rayon DK est à l'arc KFL comme la somme de tous les petits arcs Ff est à $AE \cdot AMD \pm ENH$ somme de tous les petits arcs $Mm \pm Nn$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. IL est visible que les courbes AMD, ENH sont formées par le développement de la même courbe BCG ; & qu'ainsi la droite AE est toujours perpendiculaire sur ces deux courbes dans toutes les positions où elle se rencontre: de sorte que leur distance est par tout la même; ce qui est la propriété des lignes parallèles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe AMD étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe ENH sans avoir besoin de sa développée BCG , en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite AE .

COROLLAIRE II.

168. SI la courbe BCG a ses deux moitiés BC, CG entièrement semblables & égales, & que l'on prenne les droites BA, GH égales entr'elles, il est clair que les courbes AMD, ENH seront semblables & égales, en sorte

qu'elles ne différeront que par leur position. D'où il suit que la courbe AMD fera à l'arc de cercle $KFL :: \frac{1}{2} AE$. DK , c'est à dire en raison donnée.

PROPOSITION II.

Problème.

FIG. 132. 169. SOIENT deux courbes quelconques AEV , BCG , avec une troisième AMD telle qu'ayant décrit par le développement de la courbe BCG une portion de courbe EM , la relation des portions de courbes AE , EM , & des rayons de la développée EC , MG soit exprimée par une équation quelconque donnée. On propose de mener d'un point donné M sur la courbe AMD la tangente MT .

Ayant imaginé une autre portion de courbe em infiniment proche de EM , & les rayons de la développée CeF , GmR ; Soit, 1°. CH perpendiculaire sur CE , & qui rencontre en H la tangente EH de la courbe AEV . 2°. ML parallèle à CE , & qui rencontre en L l'arc GL décrit du centre M & du rayon MG . 3°. GT perpendiculaire sur MG , & qui rencontre en T la tangente cherchée MT .

On nommera ensuite les données AE , x ; EM , y ; CE , u ; GM , z ; CH , s ; EH , t ; l'arc GL , r : d'où l'on aura $Ee = dx$, Fe ou $Rm = du = dz$; & les triangles rectangles semblables eFE , ECH donneront $CE(u) \cdot CH(s) :: Fe(dx) \cdot FE = \frac{sdz}{u}$. Et $CE(u) \cdot EH(t) :: Fe(dz) \cdot Ee(dx) = \frac{rdz}{u}$.

* Art. 166. Or par le Lemme* $RF - me = \frac{rdz}{z}$; & partant $RM(RF - me + me - ME + ME - MF) = \frac{rdz}{z} + dy + \frac{sdz}{u}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables mRM , MGT , l'on aura $mR(dz) \cdot RM(\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy) :: MG(z) \cdot GT = r + \frac{sx}{u} + \frac{zdy}{dx}$. Mais si l'on met dans la différence de l'équation donnée à la place de du & dx leurs valeurs dz & $\frac{sdz}{u}$, l'on trouvera une valeur de dy en dz , laquelle étant

substituée dans $\frac{zdy}{dz}$, il viendra pour la sous-tangente cherchée GT une valeur entièrement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

Si l'on suppose que la courbe BCG se réunisse en un point O ; il est visible que la portion de courbe ME (y) se change en un arc de cercle égal à l'arc GL (r), & que les rayons CE (u), GM (z) de la développée deviennent égaux entr'eux: de sorte que GT , qui devient en ce cas OT , se trouvera $= y + s + \frac{zdy}{dz}$. FIG. 133.

E X E M P L E.

170. S O I T $y = \frac{xz}{a}$; les différences donneront dy FIG. 133.
 $= \frac{zdx - xdz}{a}$ (on prend $- xdz$ au lieu de $+ xdz$; *Art. 8.*
 parceque x & y croissant, z diminue) $= \frac{zdx - xdz}{a}$, en
 mettant pour dx sa valeur $\frac{tdz}{z}$; & partant OT ($y + s$
 $+ \frac{zdy}{dz}$) $= y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{az + tz}{a}$, en mettant pour $\frac{xz}{a}$
 sa valeur y .

R E M A R Q U E.

171. S I le point O tombe sur l'axe AB , & que la courbe FIG. 134.
 AEV soit un demi-cercle; la courbe AMD sera une demi-
 roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle BSN
 autour d'un arc égal BGN d'un cercle décrit du centre O ,
 & dont le point générateur A tombera dehors, dedans, ou
 sur la circonférence du demi-cercle mobile BSN , selon
 que la donnée a sera plus grande, moindre, ou égale à OV .
 Pour le prouver, & déterminer en même temps le point B .

Je suppose ce qui est en question, sçavoir que la courbe AMD est une demi-roulette, formée par la révolution du demi-cercle BSN , qui a pour centre le point K centre du demi-cercle AEV , autour de l'arc BGN décrit du centre O ; & concevant que ce demi-cercle BSN s'arrête dans la situation BGN telle que le point décrivant A

tombe sur le point M , je mene par les centres des cercles générateurs la droite OK qui passe par conséquent par le point touchant G ; & tirant KSE , j'observe que les triangles OKE , OKM sont égaux & semblables, puisque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun. D'où il suit 1°. Que les angles extrêmes MOK , EOK sont égaux; & qu'ainsi les angles MOE , GOB le sont aussi: ce qui donne $GB.ME :: OB.OE$. 2°. Que les angles MKO , EKO sont encore égaux; & qu'ainsi les arcs GN , BS , qui les mesurent, le sont aussi: la même chose se doit dire de leurs compléments GB , SN , à deux droits; puisqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or par la génération de la roulette, l'arc GB du cercle mobile est égal à l'arc GB de l'immobile. J'aurai donc $SN.ME :: OB.OE$. Cela posé,

Je nomme les données OV , b ; KV ou KA , c ; & l'inconnue KB , u . J'ai $OB = b + c - u$; & les secteurs semblables KEA , KSN me donnent $KE (c) . KS (u) :: AE (x) . SN = \frac{ux}{c}$. Et partant $OB (b + c - u) . OE (z) :: SN (\frac{ux}{c}) . EM (y) = \frac{uxz}{bc + cc - cu} = \frac{xz}{a}$. D'où je tire $KB (u) = \frac{bc + cc}{a + c}$. Il est donc évident que si l'on prend $KB = \frac{bc + cc}{a + c}$, & qu'on décrive des centres K & O le demi-cercle BSN & l'arc BGN ; la courbe AMD fera une demi-roulette décrite par la révolution du demi-cercle BSN autour de l'arc BGN , & dont le point décrivant A tombe dehors, dedans, ou sur la circonférence de ce cercle, selon que $KV (c)$ est plus grand, moindre, ou égal à $KB (\frac{bc + cc}{a + c})$, c'est à dire selon que a est plus grand, moindre, ou égal à $OV (b)$.

COROLLAIRE I.

172. IL est clair que $EM (y) . AE (x) :: KB \times OE (uz) . OB \times KV (bc + cc - uc)$. Or si l'on suppose que OB devienne infinie; la droite OE le sera aussi, & deviendra parallèle à OB , puisqu'elle ne la rencontrera jamais; les

arcs concentriques BGN , EM deviendront des droites parallèles entr'elles, & perpendiculaires sur OB , OE : & alors la droite EM sera à l'arc AE :: KB . KV , parceque les droites infinies OE , OB ne differant entr'elles que d'une grandeur finie, doivent être regardées comme égales.

COROLLAIRE II.

173. DE ce que les angles MKO , EKO sont égaux, il suit que les triangles MKG , EKB seront égaux & semblables ; & qu'ainsi les droites MG , EB sont égales entr'elles. D'où l'on voit * que pour mener d'un point donné M sur la rou- * Art. 43.
lette, la perpendiculaire MG , il n'y a qu'à décrire du centre O l'arc ME , & du centre M de l'intervalle EB un arc de cercle qui coupera la base BGN en un point G , par où & par le point donné M l'on tirera la perpendiculaire requise.

COROLLAIRE III.

174. UN point G étant donné sur la circonférence du demi-cercle mobile BGN ; si l'on veut trouver le point M de la roulette sur lequel tombe le point décrivant A lorsque le point donné G touche la base, il ne faut que prendre l'arc SN égal à l'arc BG , & ayant tiré le rayon KS qui rencontre en E la circonférence AEV , décrire du centre O l'arc EM . Car il est évident que cet arc coupera la roulette au point cherché M .

PROPOSITION III.

Problème.

175. SOIT une demi-roulette AMD décrite par la révolution du demi-cercle BGN autour d'un arc égal BGN d'un autre cercle, en sorte que les parties révolues BG , BG soient toujours égales entr'elles ; soit le point décrivant M pris sur le diamètre BN dehors, dedans, ou sur la circonférence mobile BGN . On demande le point M de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à son axe OA . Fig. 135. 136.

Supposant que le point M soit celui qu'on cherche, il

* Art. 47.

est clair * que la tangente en M doit être parallèle à l'axe OA , & qu'ainsi la perpendiculaire MG à la roulette, doit être aussi perpendiculaire sur l'axe qu'elle rencontre au point P . Cela posé, si l'on mène OK par les centres des cercles générateurs, elle passera par le point touchant G ; & si l'on tire KL perpendiculaire sur MG , on formera les angles égaux GKL , GOB ; & partant l'arc IG qui est le double de la mesure de l'angle GKL , sera à l'arc GB mesure de l'angle GOB , comme le diamètre BN est au rayon OB . D'où il suit que pour déterminer sur le demi-cercle BGN le point G , où il touche l'arc qui lui sert de base lorsque le point décrivant M tombe sur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle BGN en un point G , en sorte qu'ayant tiré par le point donné M la corde IG , l'arc IG soit à l'arc BG en raison donnée de BN à OB . La question se réduit donc à un Problème de la géométrie commune qui se peut toujours résoudre géométriquement lorsque la raison donnée est de nombre à nombre; mais avec le secours des lignes dont l'équation est plus ou moins élevée, selon que la raison est plus ou moins composée.

Si l'on suppose que le rayon OB devienne infini, comme il arrive lorsque la base BGN devient une ligne droite; il s'ensuit que l'arc IG sera infiniment petit par rapport à l'arc GB . D'où l'on voit que la sécante MIG devient alors la tangente MT , lorsque le point décrivant M tombe au dehors du cercle mobile; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur lorsqu'il tombe au dedans.

Lorsque le point M tombe sur la circonférence en N , il ne faut que diviser la demi-circonférence BGN en raison donnée de BN à OB au point G . Car le point G ainsi trouvé, sera celui où le cercle mobile BGN touche la base, lorsque le point décrivant tombe sur le point cherché.

LEMME

LEMME II.

176. **E**N tout triangle BAC , dont les angles ABC , ACB , Fig. 137.
 & CAD complément à deux droits de l'angle obtus BAC ,
 sont infiniment petits ; je dis que ces angles ont même rapport
 entr'eux que les côtés AC , AB , BC , auxquels ils sont oppoſez.

Car ſi l'on circonſcrit un cercle au tour du triangle BAC ,
 les arcs AC , AB , BAC , qui meſurent les doubles de ces
 angles, ſeront infiniment petits, & ne différeront * point * Art. 3.
 par conſéquent de leurs cordes ou ſoutendantes.

Si les côtés AC , AB , BC du triangle BAC , ne ſont pas
 infiniment petits, mais qu'ils ayent une grandeur finie : il
 ſ'enſuit que le cercle circonſcrit doit être infiniment
 grand ; puifque les arcs AC , AB , BAC , qui ont une gran-
 deur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce
 cercle, étant les meſures d'angles infiniment petits.

PROPOSITION IV.

Problème.

177. **L**ES mêmes choſes étant poſées ; il faut déterminer ſur Fig. 135.
 chaque perpendiculaire MG , le point C où elle touche la dé- 136.
 velopée de la roulette.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire mg infini-
 ment proche de MG , & qui la coupe par conſéquent au
 point cherché C , on tirera la droite Gm ; & ayant pris ſur
 la circonſérence du cercle mobile le petit arc Gg égal à
 l'arc Gg de l'immobile, on menera les droites Mg , Ig , Kg ,
 Og . Cela poſé, ſi l'on regarde les petits arcs Gg , Gg comme
 de petites droites perpendiculaires ſur les rayons Kg , Og , il
 eſt clair que le petit arc Gg du cercle mobile tombant ſur
 l'arc Gg de l'immobile, le point décrivant M tombera ſur
 m , en ſorte que le triangle GMg ſe confondra avec le
 triangle Gmg . D'où l'on voit que l'angle MGm eſt égal à
 l'angle $gGg = GKg + GOg$; puifqu'ajoûtant de part & d'autre
 les mêmes angles KGg , OGg , l'on en compoſe deux droits.

Or nommant les données OG , b ; KG , a ; GM ou Gm , m ;

- * *Art.* 176. GI ou Ig , n ; l'on trouve, 1^o, * $OG.KG :: GKg.GOg$. Et $OG(b).OG + GK$ ou $OK(b+a) :: GKg.GKg + GOg$
- * *Ibid.* ou $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$. 2^o, * $Ig.MI :: GMg.MgI$. Et $Ig \pm MI$ ou $MG(m).Ig(n) :: GMg \pm MgI$ ou GIg ou $\frac{1}{2} GKg.GMg$
- * *Ibid.* ou $Gmg = \frac{n}{2m} GKg$. 3^o, * L'angle MCm ou $MGm - Gmg$
 $(\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg) . Gmg (\frac{n}{2m} GKg) :: Gm(m) . GC$
 $= \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}$. Et par conséquent le rayon cherché MC
 de la développée sera $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

Si l'on suppose que le rayon $OG(b)$ du cercle immobile devienne infini, sa circonférence deviendra une ligne droite; & en effaçant les termes $2amm$, $2am$, parcequ'ils sont nuls par rapport aux autres $2bmm$, $2bm - bn$, l'on aura $MC = \frac{2mm}{2m - n}$.

COROLLAIRE I.

178. DE ce que l'angle $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$, & de ce que les arcs de différens cercles sont entr'eux en raison composée des rayons & des angles qu'ils mesurent; il suit que $Gg.Mm :: KG \times GKg . MG \times \frac{a+b}{b} GKg$. Et par conséquent aussi que $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$; ou (ce qu'est la même chose) que $KG \times Mm . MG \times Gg :: OK(a+b).OG(b)$, qui est une raison constante. D'où l'on voit que la dimension de la portion AM de la demi roulette AMD , dépend de la somme des $MG \times Gg$ dans l'arc GB ; & c'est ce que M. *Pascal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour bases des lignes droites.

M. *Varignon* est tombé dans cette même propriété par une voye très différente de celle-ci.

COROLLAIRE II.

FIG. 135. 179. LORSQUE le point décrivant M tombe hors de

la circonférence du cercle mobile, il arrive nécessairement l'un des trois cas suivans. Car menant la tangente MT , le point touchant G tombera 1°. Sur l'arc TB , comme l'on a supposé dans la figure en faisant le calcul; & alors $MC \left(\frac{2amm + bmm}{2am + bm - bn} \right)$ surpassera toujours $MG(m)$. 2°. Sur le point touchant T ; & l'on aura pour lors $MC \left(\frac{2am + bmm}{2amm + 2bm - bn} \right) = m$, puisque $IG(n)$ s'évanouit. 3°. Sur l'arc TN ; & alors la valeur de $GI(n)$ devenant négative de positive qu'elle étoit, l'on aura $MC = \frac{2amm + bmm}{2am + 2bm + bn}$: de sorte que MC sera moindre que $MG(m)$, & toujours positif. D'où il est évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon MC de la développée est toujours positive.

COROLLAIRE III.

180. LORSQUE le point décrivant M tombe au de- FIG. 136.
dans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours

$MC = \frac{2amm + bmm}{2am + 2bm - bn}$; & il peut arriver que bn surpassé $2am + 2bm$, & qu'ainsi la valeur du rayon MC de la développée soit négative: d'où l'on voit que lorsqu'elle cesse d'être positive pour devenir négative, comme il arrive * lorsque le point M devient un point d'inflexion, il faut * Art. 81. nécessairement alors que $bn = 2am + 2bm$; & partant que $MI \times MG(mn - mm) = \frac{2amm + bmm}{b}$. Or si l'on nomme la donnée KM , c ; l'on aura par la propriété du cercle $MI \times MG \left(\frac{2amm + bmm}{b} \right) = BM \times MN(aa - cc)$ ce qui donne l'inconnue $MG(m) = \sqrt{\frac{aab + bcc}{2a + b}}$. Donc si l'on décrit du point donné M comme centre, & de l'intervalle $MG = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ un cercle; il coupera le cercle mobile en un point G , où il touchera le cercle immobile qui lui sert de base, lorsque le point décrivant M tombera sur le point d'inflexion F .

Si l'on mène MR perpendiculaire sur BN , il est clair que cette $MG(\sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}})$ sera moindre que $MR(\sqrt{aa-cc})$, & qu'elle lui doit être égale lorsque b devient infinie, c'est à dire lorsque la base de la roulette devient une ligne droite.

Il est à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon MG coupe le cercle mobile, il faut que MG surpasse MN , c'est à dire que $\sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}$ surpasse $a-c$; & qu'ainsi $KM(c)$ surpasse $\frac{aa}{a+b}$. D'où il est manifeste qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette AMD , il faut que KM soit moindre que KN , & plus grande que $\frac{aa}{a+b}$.

LEMME III.

FIG. 138. 181. **S**OIENT deux triangles ABb , CDd qui aient chacun un de leurs côtés Bb , Dd infiniment petit par rapport aux autres : je dis que le triangle ABb est au triangle CDd en raison composée de l'angle BAb à l'angle DCd , & du carré du côté AB ou Ab au carré du côté CD ou Cd .

* Art. 2. Car si l'on décrit des centres A , C , & des intervalles AB , CD , les arcs de cercles BE , DF ; il est clair * que les triangles ABb , CDd ne différeront point des secteurs de cercles ABE , CDF . Donc, &c.

Si les côtés AB , CD sont égaux, les triangles ABb , CDd seront entr'eux comme leurs angles BAb , DCd .

PROPOSITION V.

Problème.

FIG. 135. 182. **L**ES mêmes choses étant toujours posées; on demande la quadrature de l'espace $MGBA$, renfermé par les perpendiculaires MG , BA à la roulette, par l'arc GB , & par la portion AM de la demi-roulette AMD , en supposant la quadrature du cercle.

L'angle $GMMg(\frac{n}{2m}GKg)$ est à l'angle $MGMm(\frac{a+b}{b}GKg)$,

comme * le petit triangle MGg qui a pour base l'arc Gg du * Art. 187.
cercle mobile, au petit triangle ou secteur GMm ; & par-

tant le secteur $GMm = \frac{2m}{n} MGg \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b} MGg$
+ $\frac{2ap+2bp}{bn} MGg$ en nommant MI , p , & mettant pour m

sa valeur $p+n$. Or * le petit triangle ou secteur KGg * Art. 181.
est au petit triangle MGg en raison composée du quarré

de KG au quarré de MG , & de l'angle GKg à l'angle
 GMg ; c'est à dire :: $aa \times GKg . mm \times \frac{n}{2m} GKg$. & par-

tant le petit triangle $MGg = \frac{mn}{2aa} KGg$. Mettant donc cer-

te valeur à la place du triangle MGg dans $\frac{2ap+2bp}{bn} MGg$,

l'on aura le secteur $GMm = \frac{2a+2b}{b} MGg + \frac{a+b \times pm}{aab} KGg$.

Mais à cause du cercle, $GM \times MI (pn) = BM \times MN$
($cc - aa$), qui est une quantité constante, & qui demeure

toujours la même en quelqu'endroit que se trouve le
point décrivant M ; & par conséquent $GMm + MGg$ ou

mGg , c'est à dire le petit espace de la roulette $GMmg$

$= \frac{2a+2b}{b} MGg + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGg$. Donc puisque $GMmg$

est la différence de l'espace de la roulette $MGBA$, & MGg

celle de l'espace circulaire MGB , renfermé par les droites

MG , MB , & par l'arc GB , & que de plus le petit secteur KGg

est la différence du secteur KGB ; il s'en suit * que l'espace de

la roulette $MGBA = \frac{2a+2b}{b} MGB + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGB$.

Ce qu'il falloit trouver.

Lorsque le point décrivant M tombe hors la circonfé-

rence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G

tombe sur l'arc NT ; il est visible * que les perpendiculaires * Art. 180.

MG , mg s'entrecoupent en un point C , & qu'on a pour

lors $m = p - n$. D'où il suit que le petit secteur GMm

$= - \frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{2ap+2bp}{bn} MGg = - \frac{2a-2b}{b} MGg$
+ $\frac{amp+bp}{aab} KGg$, en mettant comme auparavant pour le

petit triangle MGg la valeur $\frac{mn}{2aa} K G g$; & partant que $G M m$ — MGg ou $m G g$, c'est à dire $MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b} MGg$ + $\frac{a+b \times cc - aa}{aab} K G g$, en mettant pour pm la valeur $cc - aa$.

Or supposant que TH soit la position de la tangente TM du cercle mobile, lorsque son point T touche la base au point T ; il est clair que $MCm - GCg = MGT H - mgTH$, c'est à dire la différence de l'espace $MGT H$, & que MGg est celle de MGT , de même que $K G g$ celle de KGT . Donc l'espace $MGT H = -\frac{2a-3b}{b} MGT + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGT$. Mais, comme l'on vient de prouver, l'espace $HTBA = \frac{2a+3b}{b} MTB + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KTB$. Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'espace $MGBA (MGT H + HTBA) = \frac{2a+3b}{b} MTB - MGT$ ou $MGB + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGT + KTB$ ou KGB .

FIG. 135. Donc l'espace entier $DNBA$ renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette DN , BA , par l'arc de cercle BGN , & par la demi roulette AMD , est

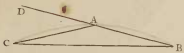
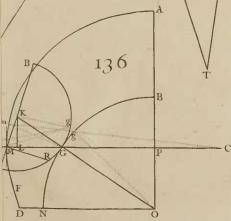
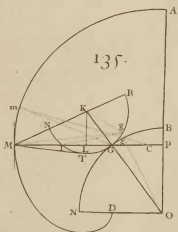
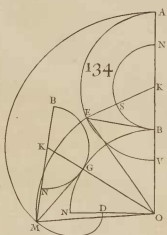
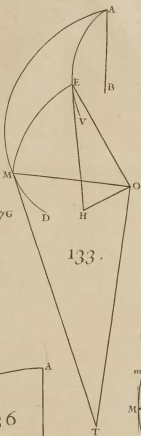
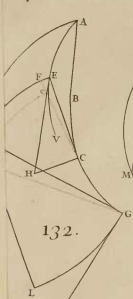
$= \frac{2a+3b}{b} + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} \times K NGB$; puisque le secteur KGB & l'espace circulaire MGB deviennent chacun le demi-cercle $K NGB$, lorsque le point touchant G tombe au point N .

FIG. 136. Lorsque le point décrivant M tombe au dedans du cercle mobile, il faut mettre $aa - cc$ à la place de $cc - aa$ dans les formules précédentes; parcequ'alors $BM \times MN = aa - cc$.

Si l'on fait $c = a$, l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant sur la circonférence du cercle mobile; & si l'on suppose b infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour bases des lignes droites.

AUTRE SOLUTION.

FIG. 140. 183. ON décrit du rayon OD l'arc DV , & des diamètres AV , BN les demi-cercles AEV , BSN ; & ayant décrit



à discrétion du centre O l'arc EM renfermé entre le demi-cercle AEV & la demi-roulette AMD , l'on mene l'appliquée EP . Il s'agit de trouver la quadrature de l'espace AEM compris entre les arcs AE , EM , & la portion AM de la demi-roulette AMD .

Pour cela, soit un autre arc em concentrique & infiniment proche de EM , une autre appliquée ep , une autre Oe qui rencontre l'arc ME prolongé (s'il est nécessaire) au point F . Soient nommées les variables Oe , z ; VP , u ; l'arc AE , x ; & comme auparavant les constantes OB , b ; KB ou KN , a ; KV ou KA , c : l'on aura $Fe = dz$, $Pp = du$, $OP = a + b - c + u$, $\overline{PE} = zcu - uu$, l'arc $EM^* = \frac{axz}{bc}$; & par-^{*} Art. 171. tant le rectangle fait de l'arc EM par la petite droite Fe , c'est à dire ^{*} le petit espace $EMme = \frac{axzdz}{bc}$. Or à cause^{*} Art. 2. du triangle rectangle OPE ; $zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$, dont la différence donne $zdz = adu + bdu$. Mettant donc cette valeur à la place de zdz dans $\frac{axzdz}{bc}$, l'on aura le petit espace $EMme = \frac{aaxdu + abxdu}{bc}$.

Maintenant si l'on décrit la demi-roulette AHT par la révolution du demi-cercle AEV sur la droite VT perpendiculaire à VA , & qu'on prolonge les appliquées PE , pe jusqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points H , h : il est clair ^{*} que $EH \times Pp$, c'est à dire le petit espace $EHhe$ ^{*} Art. 172. $= xdu$; & qu'ainsi $EMme (\frac{aaxdu + abxdu}{bc}) \cdot EHhe (xdu) :: aa + ab \cdot bc$. qui est une raison constante. Or puisque cela arrive toujours en quelqu'endroit que se trouve l'arc EM , il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces $EMme$, c'est à dire l'espace AEM , est à la somme de tous les petits espaces $EHhe$, c'est à dire à l'espace $AEH :: aa + ab \cdot bc$. Mais l'on a ^{*} la quadrature de l'espace AEH dépendamment de celle du cercle; & partant aussi celle de l'espace cherché AEM .

Ceci se peut aussi démontrer sans aucun calcul, comme j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Aoust de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'espace AEH sans avoir recours à l'art. 99. Car si l'on achève les rectangles PQ, pq , l'on aura Qq ou HR, Pp ou $Rh :: EP, PA$ ou HQ , puisque * la tangente en H est parallèle à la corde AE ; & partant $HQ \times Qq = EP \times Pp$, c'est à dire que les petits espaces $HQqb, EPpe$ sont toujours égaux entr'eux. D'où il suit que l'espace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH , & par la portion AH de la demi-roulette AHT , est égal à l'espace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE , & par l'arc AE . L'espace AEH sera donc égal au rectangle PQ moins le double de l'espace circulaire APE ; c'est à dire au rectangle fait de PE par KA plus ou moins le rectangle fait de KP par l'arc AE , selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du centre. Et par conséquent l'espace cherché AEM

$$= \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA \pm KP \times AE.$$

COROLLAIRE I.

184. LORSQUE le point P tombe en K , le rectangle $KP \times AE$ s'évanouit, & le rectangle $PE \times KA$ devient égal au carré de KA : d'où l'on voit que l'espace AEM est alors $= \frac{aac + abc}{b}$; & par conséquent il est quarrable absolument & indépendamment de la quadrature du cercle.

COROLLAIRE II.

185. SI l'on ajoute à l'espace AEM le secteur AKE , l'espace $AKEM$ renfermé par les rayons AK, KE , par l'arc EM , & par la portion AM de la demi-roulette AMD , se trouve (lorsque le point P tombe au dessus du centre K)

$$= \frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aan - 2abu}{2bc} AE + \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA; \&$$

partant si l'on prend $VP(n) \frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab}$ (ce qui rend nul le la valeur de $\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aan - 2abu}{2bc} AE$), l'on aura l'espace

l'espace $AKEM = \frac{aa+ab}{bc} PE \times KA$. D'où l'on voit que la quadrature est encore indépendante de celle du cercle.

Il est visible qu'entre tous les espaces AEM & $AKEM$, il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature soit absolue.

AVERTISSEMENT.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures se doit aussi entendre des intérieures, c'est à dire de celles dont le cercle mobile roule au dedans de l'immobile ; en observant que les rayons KB (a), KV (c) deviennent négatifs de positifs qu'ils étoient. C'est pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes, les signes des termes où a & c se rencontrent avec une dimension impaire.

REMARQUE.

186. IL y a certaines courbes qui paroissent avoir un point d'inflexion, & qui cependant n'en ont point ; ce que je crois à propos d'expliquer par un exemple, car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géométrique NDN , dont la nature est FIG. 141.

exprimée par l'équation $z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$ ($AP = x$, $PN = z$), dans laquelle il est clair 1°. Que x étant égale à a ; PN (z) s'évanouit. 2°. Que x surpassant a , la valeur de z est positive ; & qu'au contraire lorsqu'il est moindre, elle est négative. 3°. Que lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, la valeur de PN est infinie. D'où l'on voit que la courbe NDN passe de part & d'autre de son axe en le coupant en un point D tel que $AD = a$; & qu'elle a pour asymptote la perpendiculaire BG menée par le point B tel que $AB = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$.

Si l'on décrit à présent une autre courbe EDF , en sorte qu'ayant mené à discrétion la perpendiculaire MPN , le rectangle fait de l'appliquée PM par la constante AD ,

soit toujours égal à l'espace correspondant DPN ; il est visible qu'en nommant PM, y ; & prenant les différences, l'on aura $AD \times Rm(dy) = NPpn$ ou $NP \times Pp$ ($\frac{xxdx - aadx}{yxx - aa}$); & partant $Rm(dy) \cdot Pp$ ou $RM(dx) :: PN \cdot AD$. D'où il suit que la courbe EDF touche l'asymptote AG prolongée de l'autre côté de B en un point E , & l'axe AP au point D ; & qu'ainsi elle doit avoir un point

- * Art. 78. d'inflexion en D . Cependant on trouve $-\frac{x^3}{2aa}$ pour la valeur du rayon de sa développée, laquelle est toujours négative, & devient égale à $-\frac{1}{2}a$ lorsque le point M
- * Art. 81. tombe en D : d'où l'on doit conclure* que la courbe qui passe par tous les points M est toujours convexe vers l'axe AP , & qu'elle n'a pas de point d'inflexion en D . Comment donc accorder tout cela? En voici le dénouement.

Si l'on prend PM du même côté que PN , on formera une autre courbe GDH qui sera toute pareille à EDF , & qui en doit faire partie; puitque sa génération est la même. Cela étant ainsi, l'on doit penser que les parties qui composent la courbe entière ne sont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui se touchent au point D ; car tout s'accorde parfaitement dans cette dernière supposition. Ceci se confirme encore par cet exemple.

- FIG. 142. Soit la courbe DMG , qui ait pour équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x, PM = y$). Il suit de cette équation que la courbe entière a deux parties EDH, GDF opposées l'une à l'autre comme l'hyperbole ordinaire, en sorte que leur distance DD ou $2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

- FIG. 143. Si l'on suppose que b s'évanouisse, la distance DD s'évanouira aussi; & partant les deux parties EDH, GDF se toucheront au point D : de sorte qu'on pourroit penser à présent que cette courbe a un point d'inflexion ou de rebroussement en D , selon qu'on imagineroit que ses par-

ties seroient EDF , GDH ou EDG , HDF . Mais l'on se dé-
tromperoit aisément, en cherchant le rayon de la déve-
lopée; car l'on trouveroit qu'il seroit toujours positif, &
qu'il deviendrait égal à $\frac{1}{2}a$ dans le point D .

On peut remarquer en passant, que la quadrature de FIG. 141.
l'espace DPN dépend de celle de l'hyperbole : ou (ce
qui revient au même) de la réctification de la parabole;
& que la portion de courbe DMF satisfait au Problème
proposé par M. *Bernoulli* dans le Tome second des Sup-
plémens des Actes de *Leypsic*, page 291.



SECTION X.

Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de M^{rs} Delcartes & Hudde.

DÉFINITION I.

FIG. 144. 145. 146. **S**OIT une ligne courbe ADB telle que les parallèles $SKMN$ à son diamètre AB la rencontrent en deux points M, N ; & soit entendue la partie interceptée MN ou PQ devenir infiniment petite. Elle sera nommée alors la *Différence* de la coupée AP , ou KM .

COROLLAIRE I.

187. **L**ORSQUE la partie MN ou PQ devient infiniment petite; il est clair que les coupées AP, AQ deviennent égales chacune à AE , & que les points M, N se réunissent en un point D ; en sorte que l'appliquée ED est la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables PM, NQ .

COROLLAIRE II.

188. **I**L est clair qu'entre toutes les coupées AP , il n'y a que AE qui ait une différence; parcequ'il n'y a qu'en ce cas où PQ devienne infiniment petite.

COROLLAIRE III.

189. **S**I l'on nomme les indéterminées AP ou KM , x ; PM ou AK , y ; il est évident que AK (y) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de x , sçavoir KM, KN ou AP, AQ . C'est pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe ADB soit délivrée d'incommensurables, afin que la même inconnue x qui en marque les racines (car on regarde y comme connue) puisse avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut observer dans la suite.

PROPOSITION I.

Problème.

190. LA nature de la courbe géométrique ADB étant donnée; déterminer la plus grande ou la moindre de ses appliquées ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant y comme constante, & x comme variable; il est clair* qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ses racines x , une valeur AE , telle que l'appliquée ED sera la plus grande ou la moindre de toutes les semblables. * Art. 188.

Soit, par exemple, $x^3 + y^3 = axy$, dont la différence, en traitant x comme variable, & y comme constante, donne $3xxdx = aydx$; & partant $y = \frac{3xx}{a}$. Si l'on substitue cette valeur à la place de y dans l'équation à la courbe $x^3 + y^3 = axy$; l'on aura pour x une valeur $AE = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, telle que l'appliquée ED sera la plus grande de toutes les semblables, de même qu'on l'a déjà trouvé art. 48.

Il est évident que l'on détermine de même non seulement les points D , lorsque les appliquées ED sont perpendiculaires ou tangentes de la courbe ADB ; mais aussi lorsqu'elles sont obliques sur la courbe, c'est à dire lorsque les points D sont des points de rebroussement de la première ou seconde sorte. D'où l'on voit que cette nouvelle manière de considérer les différences dans les courbes géométriques est plus simple & moins embarrassante en quelques rencontres, que la * première. * Sect. 3.

REMARQUE.

191. ON peut remarquer dans les courbes rebroussantes, que les PM parallèles à AK , les rencontrent en deux points M, O , de même que les KM parallèles à AP , font en M, N : de sorte que $AP(x)$ demeurant la même, y a deux

différentes valeurs PM , PO . C'est pourquoi l'on peut traiter x comme constante, & y comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que si l'on traite x & y comme variables, en prenant cette différence, il faudra que tous les termes qui multiplient dx d'une part, & tous ceux qui multiplient dy d'une autre part, soient égaux à zéro. Mais il faut bien prendre garde que dx & dy marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

COROLLAIRE.

192. Si après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue x de variable, l'on en prend la différence; il est clair 1°. Qu'on ne fait autre chose que de multiplier chaque terme par l'exposant de la puissance de x , & par la différence dx , & le diviser ensuite par x . 2°. Que cette division par x , aussi-bien que la multiplication par dx , peut être négligée, parcequ'elle est la même dans tous les termes. 3°. Que les exposans des puissances de x font une progression arithmétique, dont le premier terme est l'exposant de sa plus grande puissance, & le dernier est zéro; car on suppose qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit par exemple $x^3 * - ayx + y^3 = 0$. Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0; l'on formera l'équation nouvelle $3x^3 * - ayx * = 0$.

$$x^3 * - ayx + y^3 = 0.$$

$$\begin{array}{cccc} 3, & 2, & 1, & 0. \\ \hline 3x^3 * & - ayx & * & = 0. \end{array}$$

D'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$, de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la manière accoutumée.

Cela supposé, je dis qu'au lieu de la progression arith-

métique $3, 2, 1, 0$, l'on peut se servir de telle autre progression arithmétique qu'on voudra : $m+3, m+2, m+1, m+0$, ou m (l'on de signe par m un nombre quelconque entier ou rompu, positif, ou négatif). Car multipliant $x^3 - ayx + y^3 = 0$ par x^m , l'on aura $x^{m+3} - ayx^{m+1} + y^3x^m = 0$, dont les termes doivent être multipliés par ceux de la progression $m+3, m+2, m+1, m$. chacun par son correspondant pour en avoir la différence.

$$\begin{array}{ccccccc} x^{m+3} & & * & - & ayx^{m+1} & & + & y^3x^m & = & 0. \\ m+3, & m+2 & & m+1, & & & m. & & & \\ \hline m+3x^{m+3} & & * & - & m+1ayx^{m+1} & & + & my^3x^m & = & 0. \end{array}$$

Ce qui donnera $m+3x^{m+3} - m+1ayx^{m+1} + my^3x^m = 0$; & en divisant par x^m , il viendra $m+3x^3 - m+1ayx + my^3 = 0$, comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant simplement l'égalité proposée par la progression $m+3, m+2, m+1, m$.

Si $m = -3$, la progression sera $0, -1, -2, -3$; & l'équation sera $2yx - 3y^3 = 0$. Si $m = -1$, la progression sera $2, 1, 0, -1$; & l'équation $2x^3 - y^3 = 0$.

On peut changer de signes tous les termes de la progression, c'est à dire qu'au lieu de $0, -1, -2, -3$, & $2, 1, 0, -1$, l'on peut prendre $0, 1, 2, 3$, & $-2, -1, 0, 1$; parcequ'on ne fait par là que changer de signes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être égalée à zéro. Et en effet, au lieu de $2ayx - 3y^3 = 0$, $2x^3 - y^3 = 0$, l'on auroit $-2ayx + 3y^3 = 0$, $-2x^3 + y^3 = 0$; ce qui est la même chose.

Or il est visible que ce que l'on vient de démontrer à l'égard de cet exemple, s'appliquera de même manière à tous les autres. D'où il suit que si après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines égales entr'elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progression arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui renfermera entre ses racines une des deux égales de la première. Par la même raison, si cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progression arith-

métique, l'on en formera une troisième qui aura entre ses racines une des deux égales de la seconde, & ainsi de suite. De sorte que si l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progressions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ses racines une des trois égales de la première; & de même si l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progressions arithmétiques; si cinq, par le produit de quatre, &c.

C'est là précisément en quoi consiste la Méthode de *M. Hudde*.

PROPOSITION II.

Problème.

FIG. 147. 193. D'UN point donné *T* sur le diamètre *AB*, ou du point donné *H* sur *AH* parallèle aux appliquées; mener la tangente *THM*.

Ayant mené par le point touchant *M* l'appliquée *MP*, & nommé *AT*, *s*; *AH*, *t*; dont l'une ou l'autre est donnée, & les inconnues *AP*, *x*; *PM*, *y*: les triangles semblables *TAH*, *TPM* donneront $y = \frac{st + tx}{t}$, $x = \frac{ty - st}{t}$; & mettant ces valeurs à la place de *y* ou de *x* dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe *AMD*, l'on en formera une nouvelle dans laquelle *y* ou *x* ne se rencontrera plus.

Si l'on mène à présent une ligne droite *TD* qui coupe la droite *AH* en *G*, & la courbe *AMD* en deux points *N*, *D*, desquels l'on abaisse les appliquées *NQ*, *DB*; il est évident que *t* exprimant *AG* dans l'équation précédente, *x* ou *y* aura deux valeurs *AQ*, *AB*, ou *NQ*, *DB*, lesquelles deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée *AP* ou *PM* lorsque *t* exprime *AH*, c'est à dire lorsque la sécante *TDN* devient la tangente *TM*. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par une progression arithmétique arbitraire;

bitraire ; ce que l'on réitérera , s'il est nécessaire , en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progression arithmétique quelconque , afin que par la comparaison des équations qui en résultent , l'on en puisse trouver une qui ne renferme que l'inconnue x ou y , avec la donnée s ou t . L'exemple qui suit éclaircira suffisamment cette Méthode.

E X E M P L E.

194. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMN . Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, l'on aura tyy , &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$tyy - asy + ast = 0.$$

$$t, \quad 0, \quad -t.$$

$$tyy \quad * \quad - ast = 0.$$

C'est pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progression arithmétique $t, 0, -t$, l'on trouvera $as = yy = ax$; & partant $AP(x) = s$. D'où l'on voit qu'en prenant $AP = AT$; & menant l'appliquée PM , la ligne TM sera tangente en M . Mais si au lieu de $AT(s)$, c'est $AH(t)$ qui est donnée, l'on multipliera la même équation tyy , &c. par cette autre progression $0, t, 2$, & l'on aura la cherchée $PM(y) = st$.

On auroit trouvé la même construction en mettant pour y sa valeur $\frac{tx + tx}{t}$ dans $ax = yy$. Car il vient txx , &c. dont les termes multipliés par $t, 0, -t$, donnent $xx = ss$; & par conséquent $AP(x) = s$.

C O R O L L A I R E.

195. SI l'on veut à présent que le point touchant M soit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H , dans lequel la tangente MT rencontre le diamètre AB ou la parallèle AH aux appliquées, il n'y a qu'à regarder dans la dernière équation qui exprime la valeur de l'inconnue x ou y par rapport à la donnée s ou t , cette dernière comme l'inconnue, & x ou y comme connue.

PROPOSITION III.

Problème.

FIG. 148. 196. LA nature de la courbe géométrique AFD étant donnée ; déterminer son point d'inflexion F .

Ayant mené le point cherché F l'appliquée FE avec la tangente FL , par le point A (origine des x) la parallèle AK aux appliquées, & nommé les inconnues LA, s ; AK, t ; AE, x ; EF, y : les triangles semblables LAK, LEF donneront encore $y = \frac{st + tx}{s}$, & $x = \frac{ty}{t}$; de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus, de même que dans la proposition précédente.

Si l'on mène à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AK en H , qui touche la courbe AFD en M , & la coupe en D , d'où l'on abaisse les appliquées MP, DB : il est évident 1^o. Que s exprimant AT ; & t, AH ; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines

* Art. 193. égales, sçavoir* chacune à AP ou à PM selon qu'on a fait évanouir y ou x , & une autre AB , ou BD . 2^o. Que s exprimant AL ; & t, AK ; le point touchant M se réunit avec le point d'intersection D dans le point cherché F :

* Art. 67. puisque* la tangente LF doit toucher & couper la courbe dans le point d'inflexion F ; & qu'ainsi les valeurs AP, AB de x ou PM, BD de y deviennent égales entr'elles, sçavoir l'une & l'autre à la cherchée AE ou EF . D'où il suit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par le produit de deux progressions arithmétiques arbitraires ; ce que l'on réitérera, s'il est nécessaire, en la multipliant de même par un autre produit de deux progressions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on puisse faire évanouir les inconnues s & t .

EXEMPLE.

197. **S**oit $ayy = xyy + aax$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AFD . Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{yy - at}{t}$, on formera l'équation $sy^3 - styy - atyy$, &c.

$$sy^3 - styy + aasy - aast = 0.$$

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad -2.$$

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

$$3sy^3 \quad * \quad - aasy \quad * \quad = 0.$$

qui étant multipliée par $3, 0, -1, 0$, produit des deux progressions arithmétiques $1, 0, -1, -2$, & $3, 2, 1, 0$, donne $yy = \frac{1}{3}aa$; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue $AE (x) = \frac{1}{3}a$. Ce qui revient à l'art. 68.

AUTRE SOLUTION.

198. **O**n peut encore résoudre ce Problème en re- FIG. 149.
marquant que du même point L ou K on ne peut me- 150.
ner qu'une seule tangente LF ou KF ; parcequ'elle tou-
che en dehors la partie concave AF , & en dedans le con-
vexe FD ; au lieu que de tout autre point T ou H , pris sur
 AL ou AK entre A & L ou A & K , l'on peut mener deux
tangentes TM, TD ou HM, HD , l'une de la partie con-
cave, & l'autre de la convexe: de sorte qu'on peut consi-
dérer le point d'inflexion F comme la réunion des deux
points touchans M & D . Si donc l'on suppose que $AT (s)$
ou $AH (t)$ soit donnée, & qu'on cherche* la valeur de x * Art. 194.
ou y par rapport à s ou t ; l'on aura une équation qui
aura deux racines AP, AB ou PM, BD qui deviennent
égales chacune à la cherchée AE ou EF , lorsque s expri-
me AL & t, AK . C'est pourquoi l'on multipliera cette
équation par une progression arithmétique arbitraire, &c.

EXEMPLE.

199. SOIT comme ci-dessus, $ayy = xyy + aax$; l'on aura encore $yy^3 - sty - atyy + aasy - aast = 0$, qui étant multipliée par la progression arithmétique $1, 0, -1, -2$, donne $y^3 - ayy - aat = 0$, dans laquelle s ne se rencontre plus, & qui a deux racines inégales, sçavoir PM, BD , lorsque t exprime AH , & deux égales chacune à la cherchée EF lorsque t exprime AK . C'est pourquoi multipliant de nouveau cette dernière équation par la progression arithmétique $3, 2, 1, 0$, l'on aura $3yy - aa = 0$; & partant EF (y) $= \sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problème.

FIG. 151. 200. MENER d'un point donné C hors une ligne courbe AMD une perpendiculaire CM à cette courbe.

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur le diamètre AB , & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il est clair qu'il touchera la courbe AMD au point M . Nommant ensuite les inconnues AP, x ; PM, y ; CM, r ; & les connues AK, s ; KC, t : l'on aura PK ou $CE = s - x$, $ME = y + t$; & à cause du triangle rectangle MEC , $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$, $x = s - \sqrt{rr - tt - zty - yy}$: de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on décrit à présent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D , d'où l'on abaisse les perpendiculaires NQ, DB ; il est évident que r exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM lorsque r exprime le rayon CM . D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera, &c.

EXEMPLE.

201. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD , dans laquelle mettant pour x la valeur $s - \sqrt{rr - ts - 2ty - yy}$, l'on aura $as - yy = a\sqrt{rr - ts - 2ty - yy}$ de sorte qu'en quarrant chaque membre, & ordonnant ensuite l'équation, l'on trouvera y^4 , &c. qui doit avoir deux racines égales lorsque y exprime la cherchée PM .

$$\begin{array}{r}
 y^4 \quad * - 2asyy + 2aaty + aass = 0. \\
 \quad \quad + aa \quad \quad \quad - aarr \\
 \hline
 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0. \\
 4y^4 * - 4asyy + 2aaty \quad * = 0. \\
 \quad \quad + 2aa
 \end{array}$$

C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique 4, 3, 2, 1, 0, ce qui donnera $4y^4 - 4asy + 2aay + 2aat = 0$, dont la résolution fournira pour y la valeur cherchée MP .

Si le point donné C tomboit sur le diamètre AB ; l'on FIG. 152. auroit alors $t = 0$, & il faudroit effacer par conséquent tous les termes où t se rencontre; ce qui donneroit $4as - 2aa = 4yy = 4ax$, en mettant pour yy la valeur ax . D'où l'on tireroit $x = s - \frac{1}{2}a$; c'est à dire que si l'on prend CP égale à la moitié du paramètre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire sur AB , l'on mene la droite CM , elle sera perpendiculaire sur la courbe AMD .

COROLLAIRE.

202. SI l'on veut à présent que le point M soit donné, FIG. 152. & que le point C soit celui qu'on cherche; il faudra dans la dernière équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP (x) ou PM (y), regarder ces dernières comme connues, & l'autre comme l'inconnue.

DÉFINITION II.

Si d'un rayon quelconque de la développée l'on décrit un cercle, il sera nommé *cercle baissant*.

Le point où ce cercle touche ou baise la courbe, est appelée *point baissant*.

PROPOSITION V.

Problème.

FIG. 153. 203. **L**A nature de la courbe AMD étant donnée avec un de ses points quelconque M; trouver le centre C du cercle qui la baise en ce point M.

Ayant mené les perpendiculaires *MP*, *CK* sur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problème précédent, l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut observer que la lettre *x* ou *y*, que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée; & qu'au contraire *s*, *t*, que l'on y regarde comme connues, sont en effet ici les inconnues aussi bien que *r*.

Cela posé, il est clair 1°. Que le point cherché C fera situé sur la perpendiculaire *MG* à la courbe. 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en M, & la coupera au moins en deux points (dont je suppose que le plus proche est D, d'où l'on abaissera la perpendiculaire *DB*); puisque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant M n'équivaut qu'à deux intersections. 3°. Que plus son centre G approche du point cherché C, plus aussi le point d'intersection D approche du point touchant M; de sorte que le point G tombant sur le point

* Art. 76. C, le point D se réunit avec le point M; puisque* le cercle décrit du rayon *CM*, doit toucher & couper la courbe au même point M. D'où l'on voit que *s* exprimant *AF*, & *t*, *FG*, l'équation doit avoir deux racines

* Art. 200. égales, sçavoir* chacune à *AP* ou *PM* selon qu'on a fait

évanouir y ou x , & une autre AB ou BD qui devient aussi égale à AP ou PM lorsque s & t expriment les cherchées AK , KC ; & qu'ainsi cette équation doit avoir trois racines égales.

E X E M P L E.

204. Soit $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD , & l'on trouvera y^3 , &c. qui étant multipliée par $3, 3, 0, -1, 0$, produit des deux progressions arithmétiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $2, 1, 0, -1, -2$ donne δy^4
 $= 24aty$. * Art. 201.

$$y^4 \quad * - 2asyy + 2aaty + aass = 0.$$

$$\quad \quad \quad + aa \quad \quad \quad - aarr$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad + aatt$$

$$4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

$$2, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad -2.$$

$$\delta y^4 \quad * \quad * \quad - 2aaty \quad * = 0.$$

D'où l'on tire la cherchée KC ou $PE(t) = \frac{4y^1}{a^2}$.

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui passe par tous les points C , l'on multipliera encore y^4 , &c. par $0, 3, 4, 3, 0$, produit des deux progressions $4, 3, 2, 1, 0$, & $0, 1, 2, 3, 4$; & l'on trouvera $8asy - 4aat$
 $= 6aat$: d'où, en supposant pour abréger $s - \frac{1}{2}a = u$, l'on tirera $y = \frac{3as}{4u}$, & $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat$; & partant
 $16u^3 = 27aat$. D'où il suit que la courbe qui passe par tous les points C , est une seconde parabole cubique, dont le paramètre $= \frac{27a}{16}$, & dont le sommet est éloigné de celui de la parabole proposée de $\frac{1}{2}a$; parceque $u = s - \frac{1}{2}a$.

Lorsque la position des parties de la courbe, voisines du point donné M , est entièrement semblable de part & d'autre de ce point, comme il arrive lorsque la courbure y est la plus grande ou la moindre; il s'ensuit que l'une des intersections du cercle touchant ne peut se réunir avec le point touchant, que l'autre ne s'y réunisse en

même temps : de sorte que l'équation doit avoir alors quatre racines égales. En effet si l'on multiplie y^4 , &c. par $2, 4, 6, 0, 0, 0$, produit des trois progressions arithmétiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $3, 2, 1, 0, -1$, & $2, 1, 0, -1, -2$; l'on aura $24y^4 = 0$: ce qui fait voir que le point M doit tomber sur le sommet A de la parabole, afin que la position des parties voisines de la courbe soit semblable de part & d'autre.

AUTRE SOLUTION.

FIG. 154. 205. ON peut encore résoudre ce Problème en se souvenant que l'on a démontré dans l'article 76 qu'on ne peut mener du point cherché C qu'une seule perpendiculaire CM à la courbe AMD ; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points G sur cette perpendiculaire MC , d'où l'on peut mener deux perpendiculaires MG, GD à la courbe. Si donc on suppose que le point G soit donné, & que l'on cherche * la valeur de x ou y par rapport aux données s & t ; il est visible que cette équation doit avoir deux racines inégales, sçavoir AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales entr'elles lorsque le point G tombe sur le point cherché C . C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique quelconque, &c.

* Art. 100.

EXEMPLE.

* Art. 101. 206. SOIT comme ci-dessus $ax = yy$, & l'on aura * $4y^3$, &c.

$$\begin{array}{r}
 4y^3 * - 4asy + 2aat = 0. \\
 \quad \quad \quad + 2aat \\
 2, \quad 1, \quad 0, \quad -1. \\
 \hline
 8y^3 * \quad \quad * - 2aat = 0.
 \end{array}$$

qui étant multipliée par la progression arithmétique $2, 1, 0$,

* Art. 104. — 1, donne comme * auparavant $t = \frac{4y^3}{aa}$.

COROL.

207. IL est évident qu'on peut considérer le point FIG. 153. 154. baissant comme * la réunion d'un point touchant avec un * Art. 203. point d'interfection du même cercle, ou bien comme * la * Art. 205. réunion de deux points touchans de deux cercles différens & concentriques : de même que le point d'inflexion peut être regardé * comme la réunion d'un point touchant * Art. 196. avec un point d'interfection de la même droite, ou * com- * Art. 198. me la réunion de deux points touchans de deux différen-tes droites qui partent d'un même point.

PROPOSITION VI.

Problème.

208. TROUVER une équation qui exprime la nature de FIG. 155. la caustique AFGK, formée dans le quart de cercle CAMNB, par les rayons réfléchis MH, NL, &c. dont les incidens PM, QN, &c. sont parallèles à CB.

Je remarque, 1°. Que si l'on prolonge les rayons réfléchis *MF*, *NG*, qui touchent la caustique en *F*, *G*, jusqu'à ce qu'ils rencontrent le rayon *CB* aux points *H*, *L*; l'on aura *MH* égale à *CH*, & *NL* égale à *CL*. Car l'angle *CMH* = *CMP* = *MCH*; & de même l'angle *CNL* = *CNQ* = *NCL*.

2°. Que d'un point donné *F* sur la caustique *AFK*, l'on ne peut mener qu'une seule droite *MH* qui soit égale à *CH*; au lieu que d'un point donné *D* entre le quart de cercle *AMB* & la caustique *AFK*, l'on peut mener deux lignes *MH*, *NL* telles que *MH* = *CH* & *NL* = *CL*. Car on ne peut mener du point *F* qu'une seule tangente *MH*; au lieu que du point *D*, on en peut mener deux *MH*, *NL*. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener d'un point donné *D* la droite *MH*, en sorte qu'elle soit égale à la partie *CH*, qu'elle détermine sur le rayon *CB*.

Ayant mené *MP*, *DO* parallèles à *CB*, & *MS* parallèle à *CA*, soient nommées les données *CO* ou *RS*, *; *OD*, *z*; *AC*
Z

ou CB , a ; & les inconnues CP ou MS , x ; PM ou CS , y ; CH ou MH , z . Le triangle rectangle MSH donnera $m = r - 2xy + yy + xx$: d'où l'on tire CH (z) $= \frac{xy + m}{z}$. De plus les triangles semblables MRD , MSH donneront MR ($x - m$). MS (x) :: RD ($z - y$). $SH = \frac{zx - my}{x - m}$. & partant $CS + SH$ ou $CH = \frac{zx - my}{x - m} = \frac{xy + m}{z} = \frac{aa}{zy}$ en mettant pour $xx + yy$ la valeur aa . D'où l'on forme (en multipliant en croix) l'équation $aa x - aa y = 2xyz - 2yzy$; & mettant pour yy la valeur $aa - xx$, il vient $2xyz - 2yzy = aa x + aa y - 2yxx$: quarrant ensuite chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant encore pour yy sa valeur $aa - xx$, l'on aura enfin $4yxx^2 - 4aaux^2 - 4aauxx + 2a^2ux + a^2uu = 0$.

$$\begin{array}{r} 4xz \\ - 4aa\bar{z} \\ + a^2 \end{array}$$

Or il est clair que u exprimant CO ; & z , OD ; cette égalité doit avoir deux racines inégales, à savoir CP , CQ ; & qu'au contraire u exprimant CE ; & z , EF ; CQ devient égale à CP , de sorte qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi si l'on multiplie les termes par ceux des deux progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 0, 1, 2, 3, 4, l'on formera deux égalités nouvelles par le moyen desquelles on trouvera, après avoir fait évanouir l'inconnue x , cette équation.

$$\begin{array}{r} 64z^6 - 48aa\bar{z}^4 + 12a^2\bar{z}^2 - a^6 = 0, \\ + 192uu - 96aa\bar{u}u - 15a^2\bar{u}u \\ + 192u^2 - 48aa\bar{u}^2 \\ + 64u^3 \end{array}$$

qui exprime la relation de la coupée CE (u) à l'appliquée EF (z). Ce qu'il falloit trouver.

On peut déterminer le point touchant F en se servant de la Méthode expliquée dans la huitième Section. Car si l'on imagine un autre rayon incident pm infiniment proche de PM ; il est clair que le réfléchi mb coupera MH au point cherché F , par lequel ayant tiré FE parah

lele à PM , l'on nommera CE, u ; EF, z ; CP, x ; PM, y ; CM, a : & l'on trouvera comme ci-dessus $\frac{axx + aay - 2ux}{xy} = 2z$. Or il est visible que CM, CE, EF demeurent les mêmes pendant que CP & PM varient. C'est pourquoi l'on prendra la différence de cette équation en traitant a, u, z , comme constantes, & x, y comme variables; ce qui donnera $2uyxxdx + aayydx - aaxxdy - aauxdy + 2ux^2dy = 0$, dans laquelle mettant pour dx sa valeur $-\frac{ydy}{x}$ (que l'on trouve en prenant la différence de $yy = aa - xx$), & ensuite pour yy sa valeur $aa - xx$, il vient enfin $CE (u) = \frac{x^2}{aa}$.

Si l'on suppose que la courbe AMB ne soit plus un quart de cercle, mais une autre courbe quelconque qui ait pour rayon de sa développée au point M la droite MC ; il est clair * que sa petite portion Mm peut être regardée comme un arc de cercle décrit du centre C . D'où il suit que si l'on mène par ce centre la perpendiculaire CP sur le rayon incident PM , & qu'ayant pris $CE = \frac{x^2}{aa}$ ($CP = x$, $CM = a$), l'on tire EF parallèle à PM ; elle ira couper le rayon réfléchi MH au point F , où il touche la caustique AFK .

* Art. 76.

Sil'on tire par tous les points M, m d'une ligne courbe quelconque AMB , des lignes droites MC, mC à un point fixe C de son axe AC , & d'autres droites MH, mh terminées par la perpendiculaire CB à l'axe, en sorte que l'angle $CMH = MCH$, & $Cmb = mCh$; & qu'il faille trouver sur chaque MH le point F où elle touche la courbe AFK , formée par les intersections continuelles de ces droites MH, mh . On trouvera comme auparavant $CH = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{xx - uy}{x - u}$: d'où l'on tire $\frac{x^2 + uyy + xyy - uxx}{xy} = 2z$, dont

la différence (en traitant u, z comme constantes, & x, y comme variables) donne $2x^2ydx - uxx ydx - x^2dy + ux^2dy + xxyydy + uxyydy - uy^2dx = 0$: & partant la cherchée

$CE(u) = \frac{2xydx - x^2dy + xxydy}{xxydx - x^2dy + y^2dx - xyydy}$. Or la nature de la ligne AMB étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx , laquelle étant substituée dans l'expression de CE , cette expression sera délivrée des différences & entièrement connue.

PROPOSITION VII.

Problème.

FIG. 156. 209. *Soit une ligne droite indéfinie AO qui ait un commencement fixe au point A ; soit entendue une infinité de paraboles BFD , CDG qui aient pour axe commun la droite AO , & pour paramètres les droites AB , AC interceptées entre le point fixe A , & leurs sommets B , C . On demande la nature de la ligne AFG qui touche toutes ces paraboles.*

Je remarque d'abord que deux quelconques de ces paraboles BFD , CDG se couperont en un point D situé entre la ligne AFG & l'axe AO ; que AC devenant égal à AB , le point d'intersection D tombe sur le point touchant F . Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener par le point donné D une parabole qui ait la propriété marquée. Si l'on mène l'appliquée DO , & qu'on nomme les données AO , u ; OD , z ; & l'inconnue AB , x ; la propriété de la parabole donnera $AB \times BO (ux - xx) = DO^2 (zz)$; & ordonnant l'égalité, l'on aura $xx - ux + zz = 0$. Or il est évident que u exprimant AO ; & z , OD ; cette égalité a deux racines inégales, sçavoir AB , CA ; & qu'au contraire u exprimant AE ; & z , EF ; AC devient égale à AB , c'est à dire qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique x , 0 , -1 : ce qui donne $x = z$; & substituant cette valeur à la place de x , il vient l'équation $u = 2z$ qui doit exprimer la nature de la ligne AFG . D'où l'on voit que AFG est une ligne droite faisant avec AO l'angle FAO tel que AE est est double de EF .

Si l'on veut résoudre cette question en général, de quelque degré que puissent être les paraboles BFD, CDG ; on se servira de la Méthode expliquée dans la Section huitième, en cette sorte. Nommant AE, u ; EF, z ; AB, x ; l'on aura $u = x^m \times n^n = z^{m+n}$ qui exprime en général la nature de la parabole BF , dont la différence donne (en traitant u & z comme constantes, & x comme variables) $-m \times u = -x^{m-1} dx \times x^n + nx^{n-1} dx \times u = 0$; & divisant par $u = x^{m-1} dx \times x^{n-1}$, il vient $-mx + nu = nx$ $= 0$: d'où l'on tire $x = \frac{n}{m+n} u$; & partant $u - x = \frac{m}{m+n} u$. Mettant donc ces valeurs à la place de $u - x$, & de x dans l'équation générale; & faisant (pour abrégér) $\frac{m}{m+n} = p$, $\frac{n}{m+n} = q$, $m+n = r$, l'on aura $z = \sqrt[r]{p^m q^n}$. D'où l'on voit que la ligne AFG est toujours droite, si composées que puissent être les paraboles, n'y ayant que la raison de AE à EF qui change.

On voit clairement par ce que l'on vient d'expliquer dans cette Section, de quelle manière l'on doit se servir de la Méthode de M^{rs} Descartes & Hudde pour résoudre ces sortes de questions lorsque les Courbes sont Géométriques. Mais l'on voit aussi en même temps qu'elle n'est pas comparable à celle de M. Leibnits, que j'ai tâché d'expliquer à fond dans ce Traité: puisque cette dernière donne des résolutions générales où l'autre n'en fournit que de particulières, qu'elle s'étend aux lignes transcendantes, & qu'il n'est point nécessaire d'ôter les incommensurables: ce qui seroit très souvent impraticable.

F I N.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre : A nos amez & feaux Confeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé FRANÇOIS MONTALANT, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il avoit acquis un Ouvrage intitulé : *Analyse des Infiniment Petits*, lequel il désireroit faire imprimer & donner au Public; mais comme il ne le peut faire sans s'engager à une très grande dépense, il Nous auroit en conséquence fait très humblement supplier de lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce necessaires; A ces causes voulant favorablement traiter ledit Exposant, & reconnoître son zele à Nous procurer un Ouvrage aussi utile pour le Public; & voulant le dédommager des grands frais qu'il est obligé de faire pour l'impression dudit Ouvrage, Nous lui, avons permis & permettons par ces Presentes de faire imprimer ledit *Analyse des Infiniment Petits* en tels Volumes, forme, marge, caractère, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de douze années consecutives, à compter du jour de la date desdites Presentes: Faisons défenses à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; & à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit *Analyse des Infiniment Petits* en tout ni en partie, d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titres ou autrement, sans le consentement par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Presentes seront enregistrees tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs Libraires de Paris; & ce dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier, & en beaux caractères, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de l'exposer en vente il en sera mis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Voyfin, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes: Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant, ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Confeillers & Secretaires foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & autres Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donnée à Versailles le douzième jour du mois de Décembre, l'an de grace mil sept cens quatorze, & de notre Regne le soixante-douzième, Par le Roy en son Conseil, FOUQUET.

Registré sur le Registre n. 3. de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris page 900, n. 1134. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du 13 Aoust 1703. Fait à Paris le 25 Janvier 1715. ROBUSTEL, Syndic.



