

Ir. A. E. Bosman

HET WONDERE
ONDERZOEKINGSVELD
DER
VLAKKE MEETKUNDE



N. V. Uitgeverijmaatschappij Parcival / Breda / 1957

Math 5039.57

✓



INHOUD

VOORWOORD	7
INLEIDING	9

HOOFDSTUK 1

ENIGE ONDERWERPEN UIT DE SCHOOLMEETKUNDE EXEMPLARISCH BEHANDELD.

Constructie van driehoeken	14
Nader onderzoek naar de samenhang tussen de drie zijden van een driehoek .	20
Het theorema van Pythagoras en reeksontwikkeling	29
Reeksontwikkeling in de rechthoekige driehoek	34
Het theorema van Pythagoras en de ingeschreven cirkel	38
Een congruentie-opgave	40
Veranderende driehoeken	42
Onderzoek van lijnen	49

HOOFDSTUK 2

BESCHOUWING VAN HET DIDACTISCH ASPECT.

De dynamiek van het denken in de meetkunde	53
--	----

HOOFDSTUK 3

ONDERZOEK VAN ENKELE ANDERE ONDERWERPEN.

Figuren met gelijke omtrekken en gelijke oppervlakken	73
Het theorema van Pythagoras en de reeksontwikkeling (uitbreiding van hoofdstuk 1)	85
Beschouwing van één punt	90
Beschouwing van twee punten	101
Straling van punten op een cirkelomtrek	135

VOORWOORD

Met bijzonder veel genoegen voldoe ik aan de wens van de Schrijver om een kort woord toe te voegen aan zijn werk, dat neerslag gevonden heeft in dit boek.

Zijn pogen — dat mij uitermate goed geslaagd voorkomt — was en is mij sympathiek om vele redenen.

Enkele hiervan zijn:

1. Het gaat hier, ondanks de vorm, niet om een léérboek, maar om een boek dat door zijn inhoud wil opwekken tot eigen werkzaamheid.

2. Het boek heeft niet de bedoeling „kennis” bij te brengen door een bepaalde „leerstof” te verwerken. Het wil zijn lezer treffen door de schoonheid van de harmonische figuren die ontstaan als men consequent gaat „spelen” met meetkundige vormprincipes.

3. Het is niet zo zeer bedoeld voor geheel ongevormde leerlingen, maar voor liefhebbers van de wiskunde en voor de levende leraren in wie het gevoel voor de schoonheid van de meetkunde nog niet bedolven werd door eindeloze reeksen van in feite tamelijk waardeloze oefenvraagstukken, wier enige betekenis ligt in het leren hanteren van de bestudeerde „stellingen”, terwijl hierdoor slechts een minimum van creativiteit gestimuleerd wordt. Deze leraren zullen zich door dit boek aangemoedigd voelen zélf nieuwe ontdekkingen te doen op een gebied waar, oppervlakkig beschouwd, slechts platgereden paden te vinden zijn. Daardoor zullen zij er toe komen bij hun leerlingen liefde en bewondering op te wekken voor de kunstige juwelen die „als van zelf” ontstaan, wanneer men de gewezen weg volgt.

4. Maar het zijn niet alleen de meetkundige figuren en methoden die de lezer van dit boek zullen boeien. De schrijver tracht ook door het opnemen van vele aforismen op te wekken tot het doordenken van wijsgerige en didactische gedachten.

Dit laatste houdt verband met de diepste bedoelingen van de schrijver, die — zoals hij zelf zegt — in laatste instantie niet uit is op het aanbrengen van meetkundige kennis, doch als laatste ideaal heeft op te wekken om verder te gaan op de weg die hij in zijn boek toont. Om zijn eigen woorden te gebruiken: „Door al het behandelde zal misschien duidelijk geworden zijn, dat — ofschoon er mooie figuren ontstaan — het toch niet dáárom gaat: dat het er zelfs niet om gaat alle wiskundige problemen die deze figuren oproepen op te lossen; ja, dat het eigenlijk en ten slotte niet eens om de meetkunde gaat. De Indiër zou zeggen: *neti, neti, neti*: niet dit, niet dit, niet dit. Maar misschien is dit alles wél weg, alleen weg, een weg... om verder te komen.”

Ziet hier hebben wij m.i. te maken met de meest belangrijke zijde van dit werk. Het wil niet, zoals vrijwel alle andere leerboeken, rationele kennis geven, zich baserend op het beginsel: „Kennis is macht”. Het wendt zich, uitgaande boven het alleen maar rationele weten, tot geheel andere lagen van de menselijke geest, de lagen waar het weten woont dat kennis goed is — als middel — maar dat het bij werkelijke opvoeding gaat om de in ieder aanwezige kwaliteiten van Schoonheid, Goedheid en Harmonie in het bewustzijn van de leerling te doen ontwaken. De schrijver van dit boek wil niet onderrichten, hij wil de geest óp-richten. Hij heeft zijn werk niet afgestemd op de sleur van het vraagstukken maken. Hij wil helpen bij het geboorteproses van 's mensen hoogste bezit: zijn creativiteit.

Moge het boek de lezers vinden tot wie het spreekt: enthousiaste, onvermoeide strijders voor de eigenlijke taak van alle „opvoeding”, die bestaat in leiden tot inzicht en opwekken tot zelfkennis.

Zij zijn er!

Dr. H. GROOT.

INLEIDING

Misschien zijn er meer personen, of zelfs velen, die zoals ik de wiskundige opleiding van middelbaar en hoger onderwijs ontvingen zonder daar warm of koud bij te worden. Daar waren de exameneisen, waaraan je moest voldoen, maar verder heerste er op dit terrein voor jezelf alleen passiviteit. Dit veranderde echter geheel, toen ik de dissertatie van dr. Hermann von Baravalle (Wien 1921) in handen kreeg, getiteld: „Zur Pädagogik der Physik und Mathematik, dargestellt an Hand praktischer Beispiele”. Deze schrijver inspireerde mij en in mij opende zich een weg tot een jarenlange activiteit, die mij het wonder der schoonheid, ook in de schoolse vlakke meetkunde, deed ontdekken. Hiervan iets mede te delen, is de bedoeling van deze bladzijden.

De vraag, die toen vanzelf naar voren kwam, luidde: heeft dit waarde voor het onderwijs en zo ja, wat is die waarde?

Om hierop een antwoord te krijgen, zullen wij met voorbeelden de denkwijze moeten illustreren, die eraan ten grondslag ligt en trachten daaruit tot een analyse en een waardebepaling te komen. Dat is de opzet van dit boek.

Bij dit onderzoek en het vormen van ons oordeel, moeten wij echter wel in het oog houden, dat de ervaring bij het lezen van dit boek een geheel andere is dan de ervaring bij het eigen onderzoek en het onderzoek in groeps- of klasverband. *Het gaat om de laatste twee.* De ervaring bij het lezen moge in ons weerstand oproepen of vol belofte zijn, doorslaggevend zijn pas de andere. Op de waarde daarvan komt het aan.

Ik moge hier nog slechts enkele zinnen uit het nawoord van genoemde dissertatie aanhalen:

„Zum Schlusse möge betont sein, dass es beim Lehrerberuf mehr als bei irgend einem anderen darauf ankommt, dass der Lehrer mit seiner ganzen Kraft und seiner ganzen Freude dabei ist. Die besten Lehrpläne nützen nichts, wenn nicht die Initiative des Lehrers ihn bis in die einzelne Schulstunde hinein

und bis in jeden Satz, den er spricht, das Richtige finden lässt. Auf diese, aus dem eigenen besten Wollen heraus entspringende Initiative zu bauen, sollte als das Wichtigste in der Pädagogik angesehen werden. Je mehr man aber durch staatliche Vorschriften dem Lehrer an eigener Freiheit und Verantwortlichkeit nimmt, desto mehr muss gerade diese wertvolste Kraft für den Unterricht verloren gehen und Pedanterie an ihre Stelle treten."

Wordt men gepakt en begint men de schoonheid der wiskunde zelf te ontginnen, dan wordt alle arbeid daaraan vreugdevol en bevrediging schenkend. En zo is er een diepe dankbaarheid jegens dr. von Baravalle, die met zijn proefschrift een weg opende tot levensverrijking en verdieping.

Het volgende is dus in de eerste plaats bestemd voor leraren, didactici, maar verder ook voor allen, die in de vlakke meetkunde en misschien daarbuiten tot eigen onderzoek geneigd zijn.

Het scheppend bezig zijn is de grootste vreugde voor de mens, anderzijds ligt daarin zijn ware vorming.

Wat is de zin van ons meetkundeonderwijs? Is de vlakke meetkunde alleen een hulpvak, geschikt om met stellingen en constructies een arsenaal te vullen, dat door bepaalde vaklieden, zoals landmeters, technici en astronomen gebruikt moet worden? Of heeft ze een zodanige vormende waarde, dat ze ook buiten haar eigen terrein invloed uitoefent? Is ze een locale wervel in onze schoolkennis of zijn wij er zelf door aangeraakt? Misschien staat de meetkunde buiten ons, zoals onze duimstok, onze weegschaal en onze logaritmentafel, maar kan ze ook vormend en integrerend in onze persoonlijkheid werken? Kan ze de verheuging van schoonheid schenken en de mogelijkheid tot het beleven van eigen vinding en scheppend denken?

Ons normale onderwijs tracht zijn doel hoofdzakelijk te bereiken door het reproduceren van de stof van een leerboek, waaronder wij dan het volgen van gegeven stellingen en vraagstukken verstaan. Toch behoeft een dergelijke reproductie niet samen te gaan met de innerlijke ontplooiing van het reproducerende kind. Het zijn twee verschillende dingen. Zo kan een kleinigheid, die zelf ontdekt werd van meer innerlijk vormende waarde zijn dan de belangrijkste stelling, die uit het boek geleerd wordt. Leerstof krijgt „werkelijke”

waarde, wanneer het geen opgelegd denken is en blijft, maar eigen verlangen, weetgierigheid en onderzoekingsdrang voedsel geeft. Dan kan het deel van onszelf worden. Het opwekken van de eigen innerlijke activiteit, het zelf vinden van de goede denkrichting in een veld van onderzoek is belangrijker dan opgelegd denken en het opgelegde probleem, dat geen graad van vrijheid biedt, — al zal het laatste van belang en nodig blijven.

Is de meetkunde een veld van onderzoek, waarin ieder vondsten kan doen? Zo ja, dan zou doceren kunnen worden tot het goed leiden van een ontdekkingstocht, waarbij echter sporen en hulpmiddelen van vorige ontdekkers dankbaar aanvaard kunnen worden. Wat zouden wij zelf kunnen doen? Laat ons zien:

Wij kunnen trachten een veelheid te ordenen. Dit betekent ordening van ons denken, het komen van chaos tot kosmos. Is dit een scheppende activiteit?

Wij kunnen trachten door te dringen in de aard, het innerlijk van een figuur.

Wij kunnen een figuur gaan zien als een speciale, individuele, vorm en trachten de samenhang te vinden, waarin hij behoort, of het bewegende beeld te zoeken, waarvan hij een momentopname vormt.

We kunnen trachten een figuur te volgen tot in alle mogelijkheden, tot in het oneindige, ja zelfs dóór het oneindige; binnen zijn grenzen en erbuiten.

Als we dit doen, gaan we consequent dóórtrekken, dóórdenken, samenhang zien.

Door de beweeglijkheid van de figuren wordt misschien de beweeglijkheid, de soepelheid van de geest bevorderd.

Van het bijzondere, het individuele, gaan we over tot het algemene, de wet en de abstractie.

In een probleem, — dat is een veld van onderzoek, — gaan we ons de gedachtegang van een Sherlock Holmes eigen maken: verzamelen en overzien van alle mogelijkheden, het toetsend schiften daarvan en het dóórwerken van de serie gevonden mogelijkheden met volhardende consequentie.

Op deze wijze blijkt bijna elk aangepakt probleem vanzelf tot velerlei nieuwe vragen te voeren. Deze vragen, ons door de figuur, de stof zelf gesteld, animeren sterk tot zoeken en een antwoord willen vinden. Ze kunnen ons ook buiten het terrein van de meetkunde voeren, b.v. in de getallenleer, de algebra (vergelijkingen van lijnen en bundels, e.d.), de filosofie, enz., waardoor wij nieuwe samenhangen beleven. We vinden schoonheid en er komt interesse, spanning, die voert tot inspanning en vreugde.

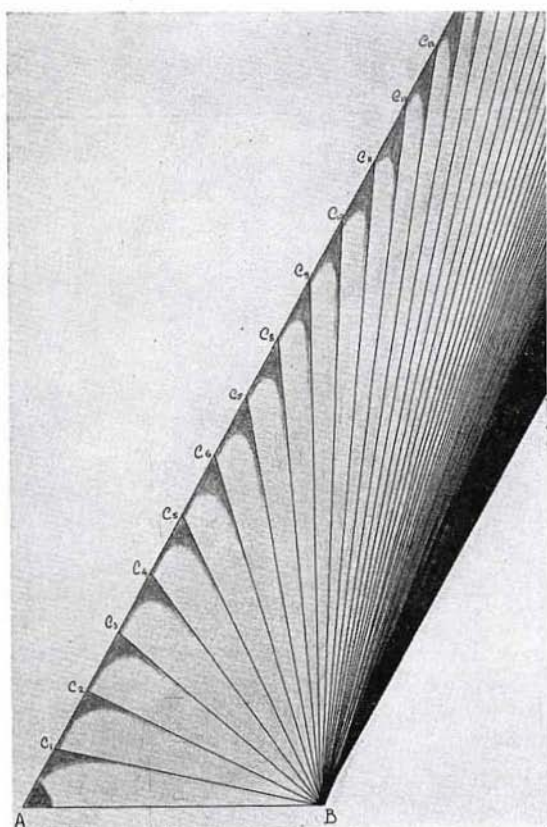
Wie zich met deze instelling tot de stof wendt, komt tot concentratie en verdieping. Het is een zoeken met innerlijke drijfkracht en gewonnen inzicht als vreugdevolle uitkomst. We ervaren, dat de meetkunde geen afgebakend en opgelegd schema van waarden is, waaraan we niets kunnen beleven, doch dat het een boeiend spel van lijnen en figuren is, waarvan vermoede samenhangen en geheimen ons lokken.

Dit boek wil met voorbeelden de denkwijze illustreren, waarmee de geïnteresseerde zelf op onderzoek en ontdekking kan uitgaan. Het gaat erom de bron te vinden, waaruit eigen ontdekkingen kunnen voortkomen. Kan ieder tot scheppend werk komen? Kan ieder de inspiratie ervoor ontvangen? Datgene wat volgt moge ertoe dienen de inspiratie vaardig te maken!

Ook gezamenlijk onderzoek in een groep of klas is mogelijk. Dit kan geschieden met een leider of leraar volgens de Socratische methode, zie b.v. het onderzoek van meetkundige lijnen.

In het onderwijs zouden reeds enkele voorbeelden invloed kunnen uitoefenen doordat zij richting en stuwkracht geven aan het denken. Niet het gehele onderwijs zou op deze wijze behoeven te verlopen. Ten slotte is al ons bezit en weten exemplarisch en komt het erop aan daardoor en daardoorheen tot inzicht en zelfwerkzaamheid te komen.

A. E. BOSMAN.



[1]

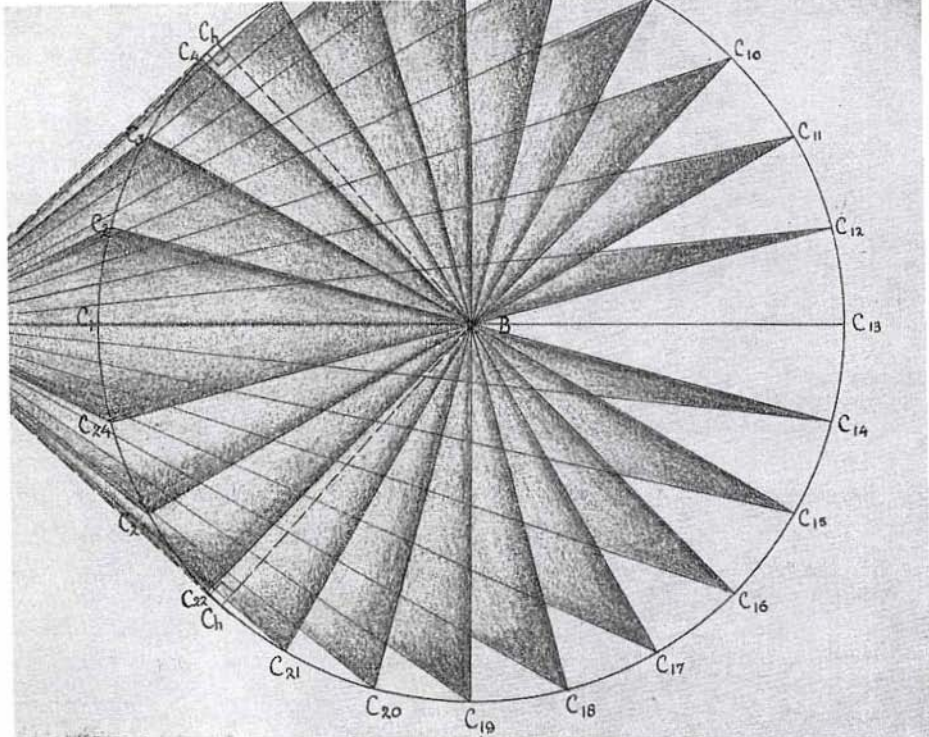
Op ieder gebied moet worden gezocht naar het wezenlijk beginsel en naar de daaruit voortvloeiende grondtrekken, welke tezamen de stijl vormen, die de gehele constructie beheerst.

Mispelblom Beijer.

HOOFDSTUK I

ENIGE ONDERWERPEN UIT DE SCHOOLMEETKUNDE EXEMPLARISCH BEHANDELD.

Datgene wat volgt, zijn maar enkele grepen uit een grote hoeveelheid mogelijkheden. Al doende, b.v. met de leerlingen van een klas, zult U zelf allerlei onderwerpen op deze manier gaan onderzoeken, wanneer U ziet, dat dit mogelijk is en dat dit mogelijkheden biedt.



[2]

CONSTRUCTIE VAN DRIEHOEKEN.

Een driehoek bestaat uit 6 elementen: 3 zijden en 3 hoeken. Om verder in het karakter van de driehoek door te dringen, zouden we willen onderzoeken of deze elementen nog meer met elkaar samenhangen, behalve dan, dat de hoeken van iedere willekeurige driehoek merkwaardigerwijs samen steeds 180° zijn, d.w.z. steeds eenzelfde eenheid vormen: de gansheid van de gestrekte hoek.

Welke en hoeveel elementen bepalen een driehoek? We weten reeds, dat 2 hoeken samen kleiner dan 180° moeten zijn. Indien 2 elementen bepaald zijn, is het derde element dan aan een voorwaarde gebonden? Zo ja, welke? Het gezamenlijk onderzoek hiernaar brengt ons er toe telkens 2 elementen

vrij te kiezen en dus vast te stellen en te zien tussen welke grenzen het derde element zich dan beweegt.

We vragen ons af welke mogelijkheden er zijn en vinden ten slotte, nadat we alles systematisch gerangschikt hebben, — hetgeen een facet op zichzelf is, — het volgende. De eerste moeilijkheid, waarop wij stuiten, is hoe we met onze gedachten tot een tekening komen. We willen alle mogelijkheden onderzoeken, maar we kunnen niet een oneindig aantal driehoeken tekenen. Daarom zullen wij daaruit een serie moeten kiezen. Deze serie wordt bepaald door een tekenregel, die voor elke tekening anders gekozen kan worden. Bij de keuze van de tekenregel laten wij ons leiden door het doel: het karakter van de figuur zo duidelijk mogelijk te laten uitkomen. Daartoe zullen wij nu eens een gelijkmatige verdeling kiezen, d.w.z. een rekenkundige reeks van waarden, dan weer een meetkundige reeks. Hierin kan een ieder naar eigen inzicht kiezen. Ook kleuren zijn belangrijk om het karakter van een figuur te laten uitkomen. Vrijwel alle tekeningen, die U in dit boek zult aantreffen, hadden oorspronkelijk kleuren. Het was echter niet mogelijk zoveel kleurenreproducties op te nemen en zo heeft zwart of een arcering hier en daar de kleuren vervangen. Ook de afmeting der tekeningen is belangrijk. Alle konden slechts verkleind weergegeven worden, maar misschien kunnen de grotere toch een vermoeden geven van de schoonheid, die ook in de kleine schuilt.

a. *Gegeven $\angle A$ en zijde c .*

In tek. 1 namen wij als tekenregel aan AC telkens een gelijk bedrag groter te nemen.

Tussen welke grenzen liggen $\angle B$, $\angle C$, a en b ?

Wij vinden:

$$0^\circ < \angle B < 180^\circ - \angle A$$

$$0^\circ < \angle C < 180^\circ - \angle A$$

$$c < a < \infty$$

$$0 < b < \infty$$

b. *Gegeven a en c . Tussen welke grenzen liggen de andere elementen?*

Hier ontstaan verschillende mogelijkheden. Zoeken wij dit uit en ordenen wij het gevondene, dan blijkt, dat wij de volgende gevallen krijgen:

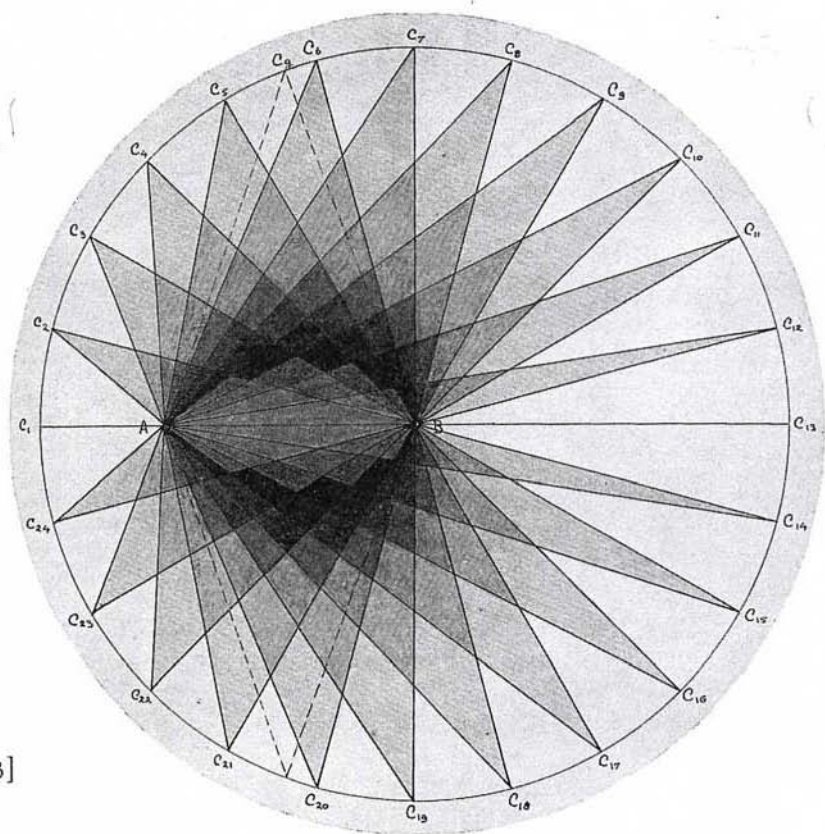
$c > a$, c staat stil, a draait. Dit geeft tek. 2

$c > a$, a „ „ „ c „ „ „ „ 3

$c < a$, c „ „ „ a „ „ „ „ 3

$c < a$, a „ „ „ c „ „ „ „ 2

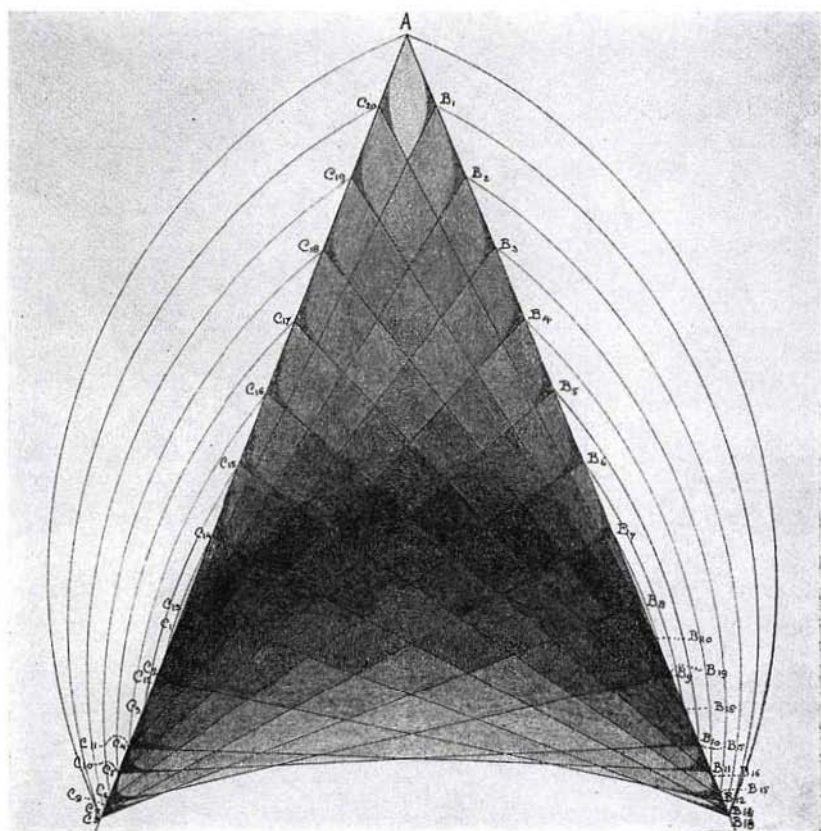
[3]



In tek. 2 nemen wij als tekenregel, dat BC telkens 15° draait. Bij tek. 3 verkozen wij eveneens de cirkel, waarop C ligt, in 24 gelijke delen te verdelen.

In tek. 2 zien wij duidelijk dat b altijd kleiner blijft dan $c+a$ en groter dan $c-a$.

Bezien wij tek. 3 dan komen verschillende vragen bij ons op, welke op school niet alle beantwoord kunnen worden. Dergelijke vragen zijn b.v.: hebben de snijpunten van de bewegende zijden in tek. 3 betekenis? Welke figuren ontstaan als de bij elkaar behorende snijpunten verbonden worden? Ontstaan er krommen, zo ja, wat is hun vergelijking? Het zal telkens blijken, dat uit



[4]

een figuur vragen tot ons komen en het zal vaak voorkomen, dat een antwoord erop niet of pas veel later gegeven kan worden, op school of later en ook, dat we er zelf pas later rijp voor worden. Wat wij ondervinden is, dat de figuur prikkelt tot verder onderzoek en verdere studie.

Wij vinden uit tek. 2:

In tek. 3 vinden wij:

$$c - a < b < c + a$$

$$a - c < b < a + c$$

$$0^\circ < \angle A < \angle BAC_h$$

$$0^\circ < \angle A < 180^\circ$$

$$0^\circ < \angle B < 180^\circ$$

$$0^\circ < \angle B < 180^\circ$$

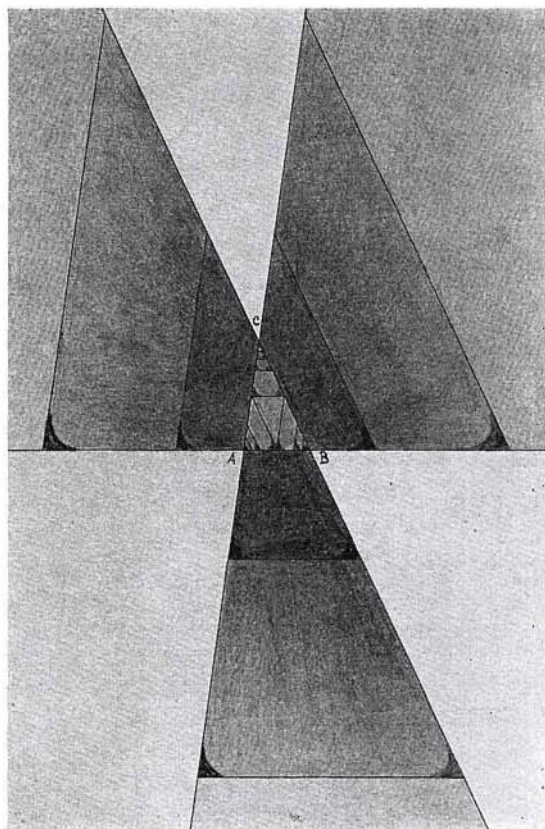
$$0^\circ < \angle C < 180^\circ$$

$$0^\circ < \angle C < \angle C_g$$

[5]

Zoals de onderzoekende wetenschappen, moet ook het onderwijs van de werkelijkheid als een te ontleden geheel (dus van het vraagstuk) uitgaan. In het klein moet het onderwijs de gang der vorsende wetenschap herhalen.

Prof. H. J. Jordan



c. *Gegeven a en $\angle A$*

Dit geeft tek. 4, waarin AB en AC telkens een gelijk bedrag groter genomen werden, voor zover dit gaat. Ook hier zijn de grenzen voor de andere elementen te vinden.

d. *Gegeven $\angle A$ en $\angle B$*

Zijde c van de oorspronkelijke driehoek ABC laten we van grootte veranderen terwijl $\angle A$ en $\angle B$ even groot blijven. Als tekenregel kiezen wij een vergroting resp. verkleining van c door vermenigvuldiging met de machten van 2. Dit geeft een eenzijdige figuur met uitbreiding naar rechts. Dan be-

denken wij, dat eenzelfde uitbreiding ook naar links mogelijk is en ook naar beneden. Dit geeft de complete tek. 5.

Deze experimenten met driehoeken kunnen reeds in de eerste klas van de U.L.O. of middelbare school samen met de leerlingen uitgevoerd worden. Zij ontvangen iets uit en door gezamenlijk onderzoek en tekenen. Zij maken een spel van veranderende driehoeken mee, waarbij alle mogelijkheden nagegaan worden. Het is niet te moeilijk en de samen vergaarde uitkomsten kunnen verheugend zijn.

NADER ONDERZOEK NAAR DE SAMENHANG TUSSEN DE

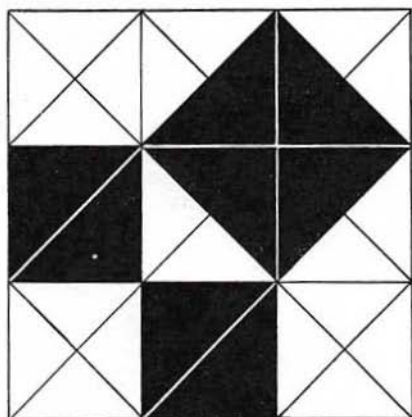
3 ZIJDEN VAN EEN DRIEHOEK.

Bij de constructie van driehoeken vonden we grenzen, waartussen de onbekende zijden en hoeken van een driehoek moeten liggen. We vonden, dat de hoeken een hechte samenhang vertonen, daar hun som steeds 180° is. Dit voert ons tot de vraag, of de 3 zijden van een driehoek ook misschien in nauwer verband tot elkaar staan. Enig verband is er, dat toonden ons de grenzen, die we vonden, maar is er een volledige samenhang tussen de lengten der 3 zijden, analoog aan het vaste verband tussen de 3 hoeken? Het is een boeiende opgave te trachten deze denklijn consequent te volgen.

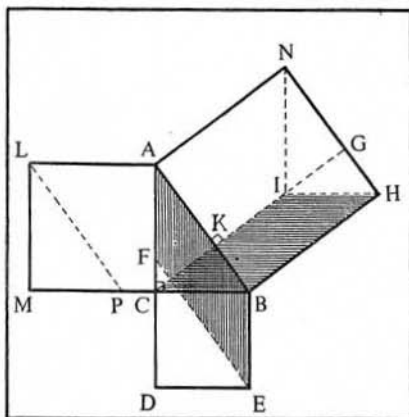
Wij zouden b.v. verder kunnen zoeken door te vragen: zou ik i.p.v. de lijnen, die de zijden van de driehoek vormen en waarmee ik niet verder kom, andere figuren of lichamen kunnen nemen, die de lengte der zijden als maatgevend in zich dragen? Ik leg drie voorwerpen van dezelfde soort zó dat ze die bijzondere figuur vormen, welks geheimen ik zo graag zou willen ontsluiten. Ik probeer. Het voert me tot moeilijkheden, die ik zo klein mogelijk wil trachten te maken. Hoe? Door de drie voorwerpen van zo eenvoudig mogelijke gedaante te nemen. Wat zijn de eenvoudigste voorwerpen? Drie-dimensionale of twee-dimensionale? De laatste. Welke zijn daarvan de eenvoudigste? Dat zijn de gelijkmatigste: de gelijkzijdige driehoek, de cirkel en het vierkant. De gelijkzijdige driehoek helpt ons niet verder. We kunnen ook niet verwachten, dat we door driehoeken, al zijn het gelijkzijdige, achter de geheimen van een driehoek zullen komen. We proberen drie cirkels, op verschillende wijze. We merken, dat de cirkels op zichzelf wel zeer bijzonder zijn, doch ook, dat deze figuren, omdat ze krom zijn, minder eenvoudig zijn dan vierkanten. Zo komen we ertoe drie vierkanten te nemen. Is er nu enig verband tussen deze vierkanten, die ik zo leg, dat hun drie verschillende zijden een driehoek vormen?

Wanneer ik drie vierkanten met zijden p , q en r heb, los van elkaar, b.v. uit carton geknipt, wier oppervlakken dus p^2 , q^2 en r^2 zijn *), dan kan ik de grootte van elk dier vierkanten willekeurig veranderen, onafhankelijk van de andere twee. Komt er samenhang, als de drie verschillende zijden der drie vierkanten een driehoek vormen, dan zal deze moeten zijn ontstaan door een

*) Verband tussen vierkant (meetkundig) en kwadraat (algebraïsch); lengte en algebr. vorm van de 1-ste graad; oppervlak en alg. vorm van de 2-de graad; lichaam en alg. vorm van de 3-de graad.



[6]



[7]

verband, dat ligt in het wezen van de driehoek. En daar gaat het ons om.

Wat voor driehoek laten we de vierkanten vormen? We experimenteren met verschillende; eerst weer de meest eenvoudige en bizondere: de gelijkzijdige driehoek: 3 gelijke vierkanten. Dan een rechthoekig gelijkbenige. We trekken alle rechte en schuine verbindingslijnen: zie fig. 6. De figuur wordt daardoor verdeeld in driehoeken, die alle gelijk zijn en we ontdekken, dat het grote zwarte vierkant bestaat uit 4 driehoeken en de 2 kleinere vierkanten samen ook uit 4. Tussen deze oppervlakken blijkt dus verband te bestaan. Het oppervlak van het vierkant op de schuine zijde blijkt gelijk te zijn aan de som van de oppervlakken der vierkanten op de rechthoekszijden *). Hoe zou dit zijn bij andere rechthoekige en willekeurige driehoeken?

Wij onderzoeken de vierkanten van tek. 7. Daar in tek. 6 ons de methode geholpen heeft om in de vierkanten $\triangle ABC$ te herhalen, zouden we in tek. 7 hetzelfde kunnen proberen. Dan ontdekken we een paar parallelogrammen ABKF en HBCI, die op elkaar lijken en die congruent blijken te zijn en nog een dergelijk stel: ABPL en ANIC. Verdiepen we ons verder in de figuur, dan vinden we:

*) Schopenhauer meent, dat de tegelvloer met driehoekige tegels (tek. 6) Pythagoras het heuristische bewijs voor zijn stelling heeft gegeven, hetwelk hij dan later uitgebreid zou hebben tot alle rechthoekige driehoeken. Dit is niet onmogelijk. Ervóór spreekt het feit, dat ontdekkingen meestal gedaan worden bij de problemen in hun eenvoudigste vorm, zoals hier het geval.

opp. parall. ABEF = opp. vierkant BCDE en
opp. parall. HBCI = opp. rechthoek HBKG.
Dus opp. vierkant BCDE = opp. rechthoek HBKG.

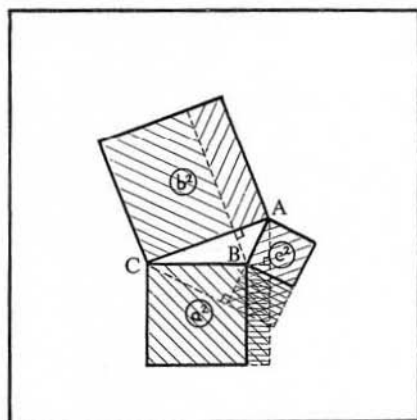
Evenzo vinden we dat opp. vierkant ACML = opp. rechthoek ANGK.

Hiermede hebben wij de stelling (liever: het theorema) van Pythagoras gevonden voor een willekeurige rechthoekige driehoek, maar dat niet alleen: we hebben ook gevonden welk deel van het vierkant op de hypothenusa correspondeert met elk vierkant op de rechthoekszijden.

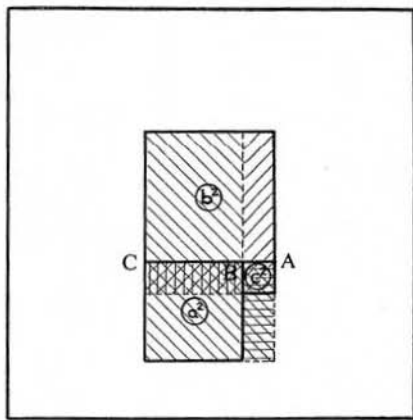
Dit moedigt ons aan ons onderzoek verder voor te zetten voor een willekeurige driehoek. In tek. 7 voerde ons onderzoek tot een doorgetrokken hoogtelijn op de schuine zijde. De willekeurige driehoek van tek 8 heeft 3 schuine zijden, dus trekken we dienovereenkomstig 3 doorgetrokken hoogtelijnen. Evenals in tek. 7 herhalen we $\triangle ABC$ in de vierkanten en precies als in tek. 7 kunnen we het oppervlak van rechthoek BSTE vervormen in parall. BASE. Dit laten we om punt B 90° wentelen, waardoor het overgaat in parall. BHIC en dit vervormen we weer tot rechthoek BHGK.

Ditzelfde procédé kan voor alle rechthoeken, waaruit de vierkanten bestaan uitgevoerd worden en hiermede hebben wij dus een zeer bijzonder verband gevonden tussen de vierkanten op de zijden van de driehoek. Dit is in tek. 9 aangegeven. De delen met gelijk oppervlak zijn op dezelfde wijze aangegeven.

Noemen wij de projectie van b op c p_{be} , die van c op b p_{cb} , enz. dan zien wij in tek. 9:



[10]



[11]

$$b.p_{cb} = c.p_{bc}$$

$$b.p_{ab} = a.p_{ba}$$

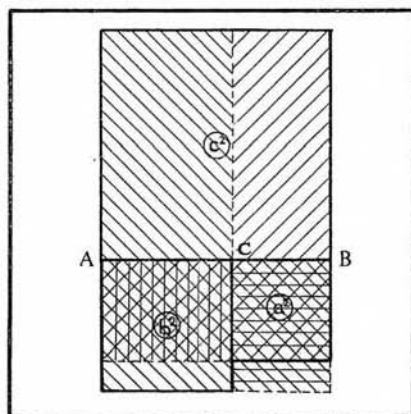
$$c.p_{ac} = a.p_{ca}$$

En zo vinden wij dus, dat er niet alleen een hecht verband is tussen de hoeken van een driehoek, maar dat er een even hecht verband bestaat tussen de zijden van een driehoek.

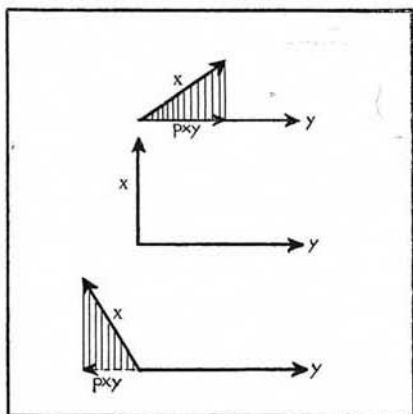
Dit wonderlijk verband, dat ontstaat tussen 3 lijnen, wanneer zij de zijden van een driehoek worden, duiden wij aan met het *theorema van Pythagoras*.

Wij ontdekken hierbij, dat dit theorema niet zo maar los en op zichzelf staat, doch dat het geheel past in ons onderzoek naar het wezenlijke van een driehoek en daarvan de uiteindelijke bekroning vormt.

Nu willen wij zien, wat het gevondene be-tekent voor allerlei driehoeken, ook de stomphoekige. Als hulpmiddel om ons dit voor te stellen, gaan onze gedachten uit naar een bewegend model of een film. Eenvoudiger is een aantal tekeningen voor een serie driehoeken, waarbij wij 2 zijden constant houden en de ingesloten hoek laten veranderen van 0° — 180° . Dit is een opgave, die een groep of klas met liefde uitvoert. Naar gelang het aantal leerlingen kunnen we de hoek telkens 6° , 9° of 10° groter laten worden. We krijgen dan resp. 30, 20 of 18 tekeningen, die bij afspraak eender opgezet, gekleurd en geheft een veranderend beeld kunnen geven, al is het primitief. Het blijkt voor de tekenaars ook niet zo gemakkelijk om de rechthoeken, die een even



[12]



[13]

groot oppervlak hebben, juist te bepalen en ze dan dezelfde kleur-arcering te geven, speciaal bij de stomphoekige driehoeken, waar ze buiten de vierkanten uitsteken en elkaar gedeeltelijk bedekken. Zie tek. 10. Hierin is:

$$c^2 = c.p_{bc} - c.p_{ac} = b.p_{cb} - a.p_{ca} =$$

$$b^2 - b.p_{ab} - (a.p_{ba} - a^2) =$$

$$a^2 + b^2 - 2a.p_{ba} \text{ of:}$$

$$= a^2 + b^2 - 2b.p_{ab}$$

Wij kunnen vinden, dat de rechthoeken steeds gevormd worden tussen de verlengde hoogtelijnen en de daarmee evenwijdige zijden van het vierkant, zowel wanneer dit verlengde binnen het vierkant valt als in het geval dit erbuiten valt. De visie op een dergelijke schone voortzetting van een regel of wet, ook over grenzen heen, zal ook later nog belangrijk blijken.

Is $\angle C = 0^\circ$ dan wordt $\angle B = 180^\circ$ en $\angle A = 0^\circ$

Wij krijgen dan tek. 11, waarin:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ap_{ba} = a^2 + b^2 - 2ab$$

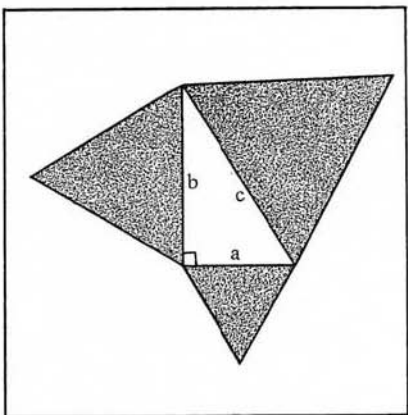
$$\text{of wel: } (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

Verrassend is het deze algebraïsche waarheid hier in dit verband te vinden.

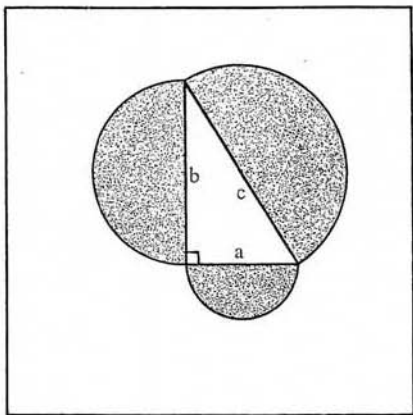
In het andere grensgeval voor $\angle C = 180^\circ$, — zie tek. 12, — wordt het: $\angle A = \angle B = 0^\circ$

$$c^2 = c.p_{ac} + c.p_{bc} = a^2 + b^2 + 2a.p_{ba} \text{ of:}$$

$$= a^2 + b^2 + 2b.p_{ab} = a^2 + b^2 + 2ab$$



[14]



[15]

en daar $c = a + b$, vinden we hier ongezoekt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Het voorgaande heeft ons gebracht op het probleem van de projectie van een zijde van een driehoek op een andere en de tekenverandering, die hierbij optreedt. Om een duidelijker inzicht hierin te krijgen, tekenen we de 2 zijden afzonderlijk en beschouwen ze in alle mogelijke standen, zie tek. 13.

1e geval: p_{xij} loopt vanuit het snijpunt van x en ij in dezelfde richting als ij : p_{xij} is positief.

$\angle(xy) = \angle a$ is $< 90^\circ$, dan is p_{xij} meestrend in dezelfde richting als ij , of wel:

$\cos a = \text{positief}$

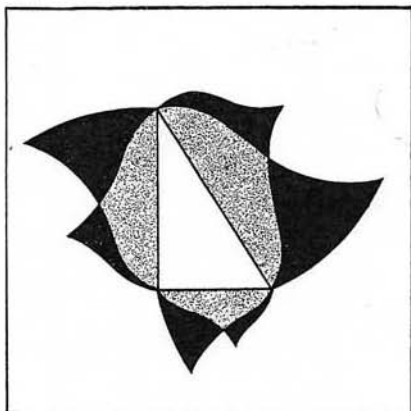
2e geval: $p_{xij} = 0$ $\angle a = 90^\circ$, $\cos a = 0$

3e geval: p_{xij} loopt vanuit het snijpunt van x en ij in tegengestelde richting met ij : p_{xij} is negatief, $\cos a$ is negatief; p_{xij} is tegenstrend. Wij komen tot deze oplossing door de omstandigheid, dat p_{xij} een 0-waarde passeert. Dan zal hij waarschijnlijk aan de ene zijde een positieve en aan de andere zijde een negatieve waarde hebben.

Belangrijk is, dat we de toepassing bij de rechthoekige driehoek nu zien als een speciaal geval van het theorema van Pythagoras voor alle driehoeken. Er is samenhang gekomen. Het theorema past in het gehele onderzoek naar

*Een vat vol geleerdheid
heeft nog niet de waarde
van een druppel wijsheid.*

Pythagoras



[16]

het wezen van de driehoek en we hebben onderzocht hoe het was voor alle soorten driehoeken.

Wanneer wij de veelheid van gestalten om ons heen eens rangschikken naar het aantal afmetingen (dimensies), die zij hebben, en ons indenken in de verschillende werelden: die van het punt, van de lijn, van het platte vlak en die van de ruimte in drie afmetingen, zoals dit zo meesterlijk is gedaan in het boek „*Platland, de roman van een vierkant*”, dan kunnen wij ons realiseren, dat elke afmeting méér een wereld van hoger orde ontsluit. Dan zien wij, dat het verband tussen de zijden (1-dimensionaal) van elke driehoek gevonden wordt in een wereld van hoger orde (2-dimensionaal), op hoger plan. Is het misschien van meer algemene geldigheid, dat het verband tussen wezens van een soort gezocht moet worden in een wereld van hoger orde?

Bij ons onderzoek naar een eventueel verband tussen de zijden van een driehoek kozen wij vierkanten, die de zijden vormden. Nu willen wij nagaan, wat wij krijgen als we andere figuren nemen en beginnen weer de eenvoudigste te nemen: de gelijkzijdige driehoek en de cirkel. Zie tek. 14, 15.

Het oppervlak van de 3 gelijkzijdige driehoeken op a , b en c is gelijk aan de halve basis maal de hoogte, dus resp.

$$\frac{1}{4}a^2V_3, \frac{1}{4}b^2V_3 \text{ en } \frac{1}{4}c^2V_3.$$

Daar we weten, dat $c^2 = a^2 + b^2$, volgt hieruit door vermenigvuldiging van beide leden met $\frac{1}{4}V_3$:

Het kan nuttig zijn wiskundige formules te kennen; men kan ze mechanisch bij technische berekeningen toepassen; een technische school zal inderdaad daarvoor moeten zorgen, dat men ertoe in staat is. Voor de beschaving is daarentegen slechts het geestelijke proces van waarde, waardoor men aan deze formules komt.

Prof. H.J. Jordan

$\frac{1}{4}c^2V_3 = \frac{1}{4}a^2V_3 + \frac{1}{4}b^2V_3$, zodat blijkt, dat het oppervlak van de gelijkzijdige driehoek op de hypothenusa gelijk is aan de som der oppervlakken van de gelijkzijdige driehoeken op de rechthoekszijden.

Evenzo vinden we voor halve cirkeloppervlakken:

$$\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$$

Wij maken hieruit de gevolgtrekking, dat we 3 oppervlakken van willekeurige vorm mogen nemen, mits zij gelijkvormig zijn, dan zal steeds het opp. van de figuur op de hypothenusa gelijk zijn aan de som der opp. op de rechthoekszijden. In formule:

$$kc^2 = ka^2 + kb^2$$

Dit kan ieder eventueel op eigen wijze illustreren. Zie tek. 16.

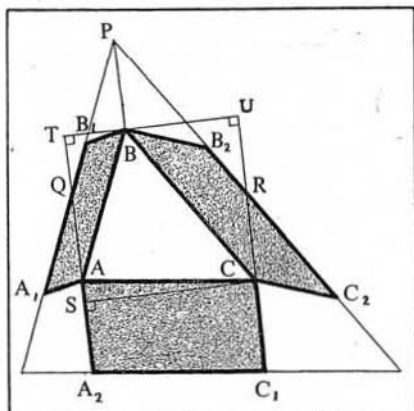
Denkende aan het begin van ons onderzoek, komt de vraag op, of het theorema van Pythagoras in de een of andere vorm geldt voor *lichamen*, die een driehoek vormen.

We kunnen in de formule $kc^2 = ka^2 + kb^2$ voor de factor k een hoogte h nemen en krijgen dan een formule, die uitdrukt, dat de som der inhoud van de balken (rechth. parallelpipeda) op de rechthoekszijden gelijk is aan de inhoud van de balk op de hypothenusa. Deze balken kunnen rechthoekig afgesneden zijn of niet. De volgende vraag, die dan opkomt is, of de gelijkheid der rechte doorsneden misschien ook doorgaat voor een willekeurige vlakke doorsnede door de 3 balken. We kunnen dit inderdaad aantonen. Bij snijding met een vlak, dat een $\angle a$ maakt met het oorspronkelijk vlak, waarin de

3 vierkanten liggen, worden de oppervlakken der doorsneden $\frac{1}{\cos a} \times$ zo groot, of $\cos a \times$ zo groot bij balken, waarvan een scheve doorsnede een vierkant is. De oorspronkelijke gelijkheid blijft hier dus bestaan. We vinden dus, dat de som van 2 dergelijke parallelogrammen op de zijden van een willekeurige rechthoekige driehoek gelijk is aan het parallogram op de 3-de

Daarmee is de taak van de school duidelijk bepaald. Het komt erop aan de productiviteit van het kind te behouden.

F. Künkel



[17]

zijde. En nu prikkelt ons de vraag, of er misschien een algemener verband tussen die parallelogrammen is aan te geven, dan dat zij de projectie van 3 vierkanten op de zijden van een rechthoekige driehoek op eenzelfde vlak moeten zijn. Of wel: hoe staat het met de parallelogrammen op de zijden van een willekeurige driehoek?

Er blijkt inderdaad een verband te bestaan. Het komt tot uitdrukking in het theorema van Pappus, dat luidt:

Tekent men op 2 zijden, AB en BC van een driehoek ABC parallelogrammen en verlengt men de zijden, die evenwijdig aan de driehoeks zijden zijn totdat ze elkander snijden in het punt P, dan zal het parallelogram op de 3-de zijde AC, getekend met 2 zijden, die gelijk aan en evenwijdig zijn met BP, gelijk zijn aan het oppervlak van de som van de andere 2 parallelogrammen.

Het bewijs van dit theorema is gemakkelijk uit tek. 17 af te leiden.

$$AA_2 = CC_1 = BP$$

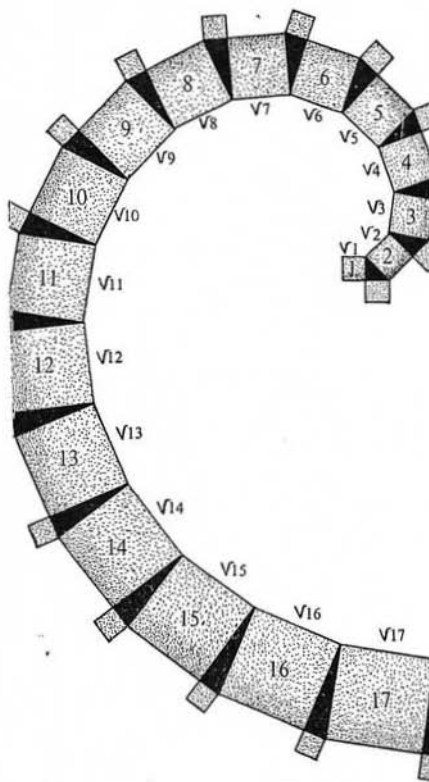
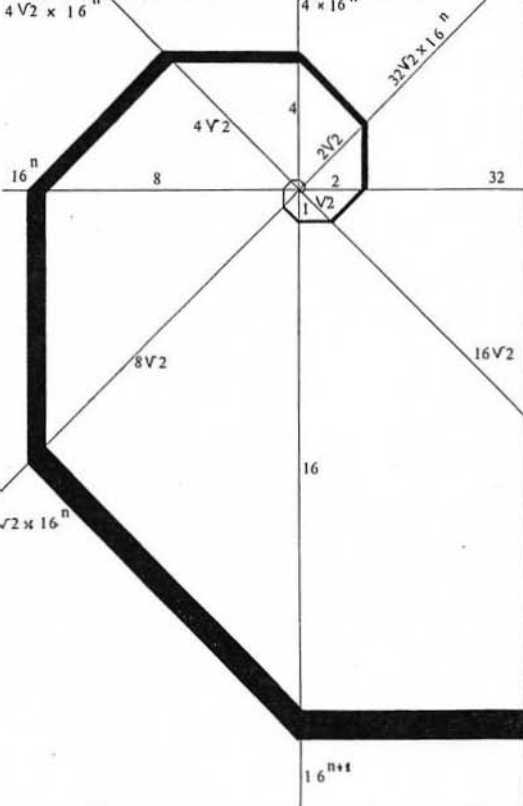
Wij moeten bewijzen, dat opp. $ABB_1A_1 + \text{opp. } BCC_2B_2 = \text{opp. } ACC_1A_2$

Nu is opp. $ABB_1A_1 = \text{opp. } ABPQ$

en opp. $BCC_2B_2 = \text{opp. } BCRP$

daar $BU + BT = SC$ is het gestelde bewezen.

Dit theorema is door zijn algemeenheid in schoonheid te vergelijken met het theorema van Pythagoras voor de willekeurige driehoek.



[19]

[18]

HET THEOREMA VAN PYTHAGORAS EN REEKSONTWIKKELING.

Bij dit theorema in zijn eenvoudigste vorm, dus voor de rechthoekige driehoek, worden steeds 2 vierkanten bij elkaar opgeteld tot een derde vierkant. Zijn 2 vierkanten van de 3 gegeven, dan kunnen we dus steeds het derde vierkant en de zijde ervan vinden door optelling of aftrekking met behulp van de rechthoekige driehoek, die we kunnen construeren als wij 2 rechthoekszijden of de hypothenusa en 1 rechthoekszijde kennen.

Wij beginnen 2 vierkanten van 1 cm^2 bij elkaar op te tellen. Hoe groot is de hypotenusa? Kunnen we bij het vierkant van 2 cm^2 weer 1 cm^2 optellen? We krijgen dan een vierkant van 3 cm^2 met zijde V_3 . Daar kunnen we weer 1 cm^2 bij optellen. Als we dit voortzetten, ontstaat *tek. 18*. Daaruit

blijkt hoe wij alle lijnen van de vorm Va kunnen construeren en alle vierkanten met een oppervlak van een willekeurig geheel aantal cm^2 .

Kunnen we dergelijke constructies ook verkorten? Inderdaad. Ten eerste kunnen we alle vierkanten uit de tekening weglaten. Ten tweede kunnen we in de constructie trappen overslaan, want we kunnen b.v. schrijven:

$$V_{14} = V(3^2 + 2^2 + 1^2) \text{ of: } V_{14} = V(4^2 - 1^2 - 1^2)$$

Met tek. 18 kunnen we dus alle vierkantswortels uit gehele getallen construeren bij een gegeven lengte eenheid, verkort of onverkort.

Tellen wij niet telkens 1 cm^2 erbij, maar willen wij de zijde van een vierkant construeren, waarvan het oppervlak telkens $2 \times$ zo groot is als van het vorige, dan ontstaat *tek.* 19. Alle vierkanten zijn weggelaten en de zijden van de driehoeken vormen de meetkundige reeks:

$V_1, V_2, V_4, V_8, V_{16}, \dots$ enz. of wel:

1, $V_2, 2, 2V_2, 4, \dots$ enz. bij 1 cm als lengte-eenheid.

Kan de reeks ook voortgezet worden voor de waarden kleiner dan 1? Van belang is, dat een dergelijke constructie door de leerling of klasse zelf gevonden wordt. De reeks wordt dan uitgebreid met:

$V_1, V_{1/2}, V_{1/4}, V_{1/8}, \dots$ enz. of wel:

$V_1, \frac{1}{2}V_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}V_2, \dots$ enz.

Uit de tekening kunnen we afleiden, dat $V_{1/2} = \frac{1}{2}V_2$ en $\frac{1}{V_2} \frac{1}{2}V_2$

Aan de andere kant worden de driehoeken hoe langer hoe groter en hun buitenste hoekpunten vallen buiten het papier.

Is er verband tussen de lengten der driehoekszijden, die vanuit het middelpunt op dezelfde lijn of straal gelegen zijn?

Zouden we toch de afstand van elk hoekpunt tot het middelpunt kunnen bepalen, ook als het buiten de tekening valt? Is er regelmaat in? Kunnen we vinden op welke afstand van het middelpunt de horizontale lijn gesneden wordt voor de eerste, voor de tweede, voor de tiende maal aan dezelfde kant?

Bestaat hetzelfde ook naar het middelpunt toe?

We vinden alle snijpunten op elke straal uitgedrukt in een meetkundige reeks. Het zelfstandig vinden van deze reeksen is het belangrijkste.

Op welke afstanden aan de rechterkant van het middelpunt wordt de horizontale lijn door de gebroken spiraal gesneden, gemeten vanaf het middelpunt? Ten slotte wordt gevonden:

Snijdingen naar het middelpunt toe:

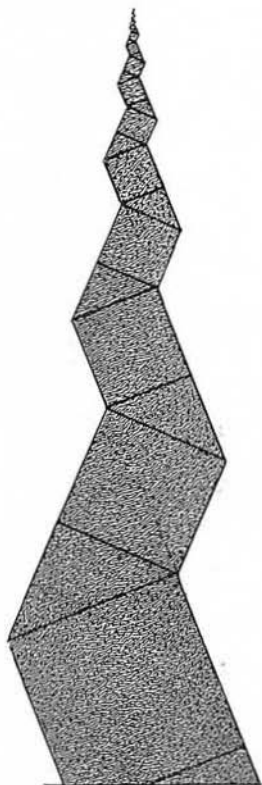
10-de	snijding op	0,000.000.000.001.8	cm	dit is ca $400 \times$ de diameter van een proton, of ca $14 \times$ de golflengte van de kosmische straling
9-de	„ „	0,000.000.000.03	„	= kortste golflengte van gamma-stralen
8-ste	„ „	0,000.000.000.47	„	= gemiddelde lengte van gamma-stralen
7-de	„ „	0,000.000.007.5	„	= ca diameter v. e. atoom
6-de	„ „	0,000.000.12	„	= ruim $2 \times$ middellijn v. e. watermolekuul
5-de	„ „	0,000.001.9	„	= ca 2 miljoenste cm
4-de	„ „	0,000.030	„	= golflengte violet licht
3-de	„ „	0,000.48	„	
2-de	„ „	0,007.8	„	
1-ste	„ „	0,125	„	
begin-	„ „	2	„	

Snijdingen van het middelpunt af:

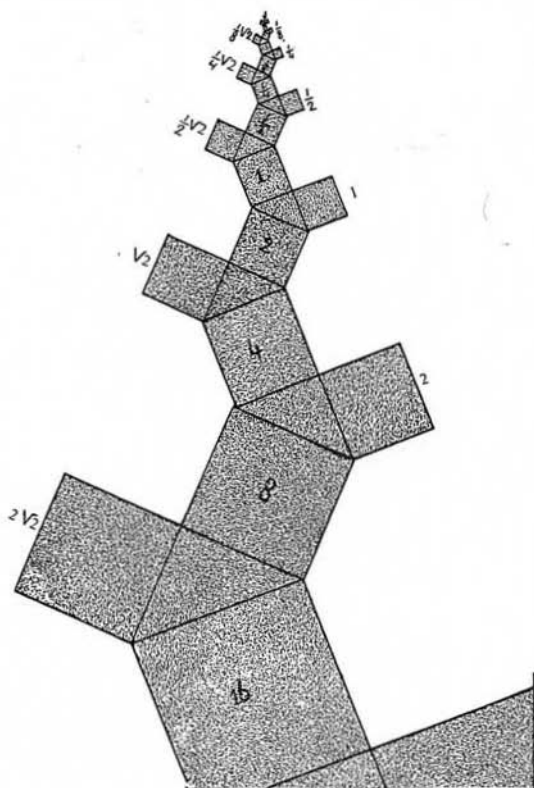
1-ste	snijding op	32	cm	
2-de	„ „	512	„ of ca	5 m.
3-de	„ „	8192	„ „ „	82 „
4-de	„ „	131072	„ „ „	1,3 km
5-de	„ „		„	21 „
6-de	„ „		„	336 „ = afst. Amsterdam-Londen
7-de	„ „		„	5360 „ ver buiten de aarde
8-ste	„ „		„	86000 „ = $7 \times$ middellijn aarde
9-de	„ „		„ 1.370.000	„ = meer dan $3 \times$ zo ver als de maan
10-de	„ „		„ 22.000.000	„ = $\frac{1}{7}$ van de afstand aarde-zon

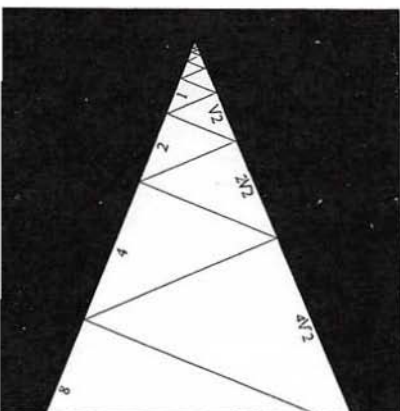
Dit geeft een kennismaking met een meetkundige reeks. Kunnen we de n-de term ook direct bepalen?

Ook andere figuren kunnen ontstaan. *Tek. 20* is ontstaan door de bouw regelmatig om en om te doen plaats hebben, evenals *tek. 21*, die echter met alle bijbehorende vierkanten getekend is. In beide tekeningen is het de kunst om de plaats van de top nauwkeurig te bepalen. Is de plaats van de top van

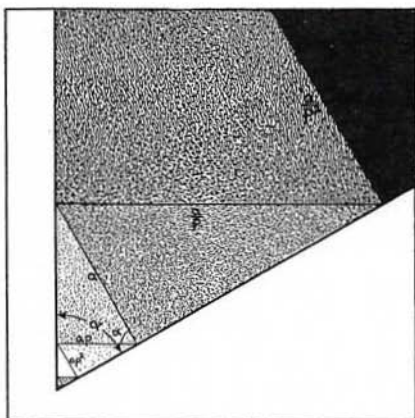


[20]





[22]



[23]

menigvuldiging van de vorige zijde of term met een bepaald getal. Het is weer een meetkundige reeks, waarbij dus de aangroeiing van een term afhangt van de grootte van die term, hetgeen bij een rekenkundige reeks niet het geval is.

Stellen we de reeks algebraïsch voor door: $a, ap, ap^2, ap^3, \dots$ en is $p < 1$, dan is p steeds te beschouwen als de cosinus van een hoek. Noemen we deze hoek b , dan is $\angle b$ gemakkelijk te construeren.

Nemen we als voorbeeld $p = \frac{1}{2}$, dan zetten we als rechthoekszijde a af en als hypothenusa $2a$. Nu beschouwen we de rechthoekszijde als hypothenusa en construeren met $\angle b$ weer een rechthoekige driehoek, enz.

Is $p > 1$, dan kunnen we altijd $\frac{1}{p}$ als cosinus van de hoek nemen.

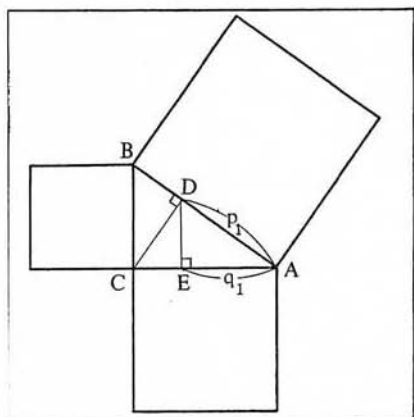
We zien, dat we dus aan elke meetkundige reeks een hoek ten grondslag kunnen leggen en daarmee een indruk van het verloop van de reeks krijgen. Hoe groot is de hoek, waarin alle termen van de reeks zo aaneensluitend passen?

Als de reden $\cos b$ is of $\frac{1}{\cos b}$ dan zien we uit de figuur, dat dit juist $\angle b$ is.

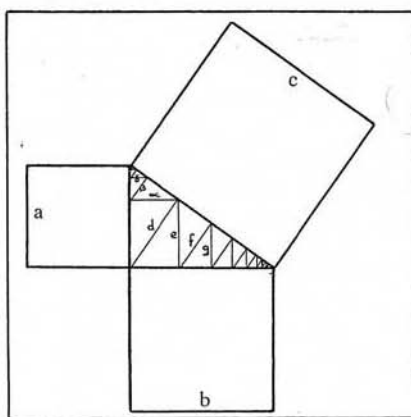
Convergentie en divergentie van een reeks worden aanschouwelijk en $\angle b$ geeft een beeld van de snelheid der convergentie of divergentie.

Hoe verhouden zich de oppervlakken van de rechthoekige driehoeken?

Hoe is dit alles voor willekeurige driehoeken?



[24]



[25]

Van de methode van aan elkaar zetten van de driehoeken hangt af, of we een hoek, een spiraal of een combinatie van beide krijgen.

REEKSONTWIKKELING IN DE RECHTHOEKIGE DRIEHOEK.

Overdenken we *tek. 24*, dan zien we, dat b^2 , het vierkant op de grootste rechthoekszijde AC, ook het vierkant is op de hypotenusa van $\triangle ADC$, en dus ontwikkeld kan worden in een vierkant op AD en een op CD. Dus:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + d^2 + p_1^2 \quad \text{Zie ook tek. 25.}$$

Nu kunnen we weer het vierkant op de grootste rechthoekszijde van $\triangle ADC$ beschouwen als het vierkant op de hypotenusa van $\triangle ADE$. Dus:

$$p_1^2 = e^2 + q_1^2$$

Verdelen we nu telkens het vierkant op de grootste rechthoekszijde aldus in 2 delen, dan wordt c^2 ontwikkeld in de oneindige reeks:

$$c^2 = a^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + \text{enz.} \dots \dots \dots (1)$$

van *tek. 25*.

Evengoed kunnen we echter a^2 op de kleinste rechthoekszijde van $\triangle ABC$ beschouwen als het vierkant op de hypotenusa van $\triangle BCD$ en dit ontwikkelen zodanig, dat we de reeks krijgen:

$$c^2 = b^2 + d^2 + a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{enz.} \dots \dots \dots (2)$$

Eigenlijk vereenzelvigd ieder groot wetenschappelijk onderzoeker zich min of meer met het voorwerp van zijn proefnemingen. Het is een eigenschap van iedere passie, wat ook haar object moge zijn, stoffelijk of geestelijk, dat zij het object omhelst of tracht erin door te dringen.

Romain Rolland

Elk vierkant is op deze wijze op 2 manieren in een oneindige reeks vierkanten te ontwikkelen. Bedenken we, dat c evengoed de hypothenusa van een andere willekeurige rechthoekige driehoek kan zijn, dan zien we, dat c^2 in oneindig veel reeksen ontwikkeld kan worden, die elk bestaan uit een oneindige convergerende reeks vierkanten.

Algebraïsch kunnen we voor (1) zetten:

$$c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{a^2b^4}{c^4} + \frac{a^2b^6}{c^6} + \dots \text{enz.}$$

$$\text{of } \frac{c^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^6 + \dots \text{enz.}$$

$$\text{en evenzo voor (2) } \frac{c^2}{b^2} = 1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^4 + \left(\frac{a}{c}\right)^6 + \dots \text{enz.}$$

Dit geldt dus voor elke rechthoekige driehoek.

Rekenkundig.

Wij vullen voor a , b en c bepaalde waarden in, maar steeds zó, dat

$$c^2 = a^2 + b^2$$

b.v. voor $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$ krijgen we:

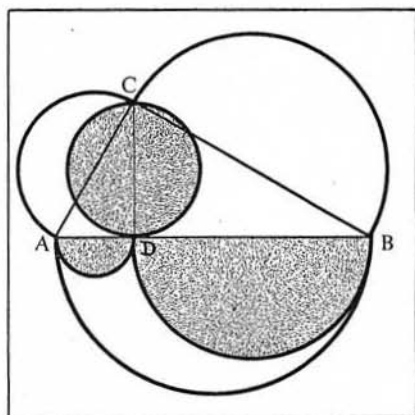
$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \text{enz.}$$

voor $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ krijgen we:

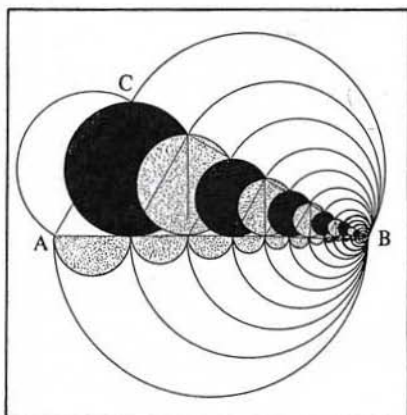
$$\frac{25}{9} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{4}{3}\right)^6 + \dots \text{enz.}$$

$$\text{en ook: } \frac{25}{16} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \dots \text{enz.}$$

Wie dit wil controleren, moet de som van de termen van een oneindige



[26]



[27]

afdalende meetkundige reeks weten of vinden. We kunnen hier al dan niet op ingaan en de formule ervoor afleiden.

Wanneer wij op de zijden van een rechthoekige driehoek halve cirkels aanbrengen, dan weten we, dat de som der oppervlakken der twee op de rechthoekszijden gelijk is aan het oppervlak van de halve cirkel op de hypotenusa, want in het algemeen is, zoals wij reeds zagen: $kc^2 = ka^2 + kb^2$

$$\text{Dit wordt hier: } \frac{\pi}{8} c^2 = \frac{\pi}{8} a^2 + \frac{\pi}{8} b^2$$

In tek. 26 is:

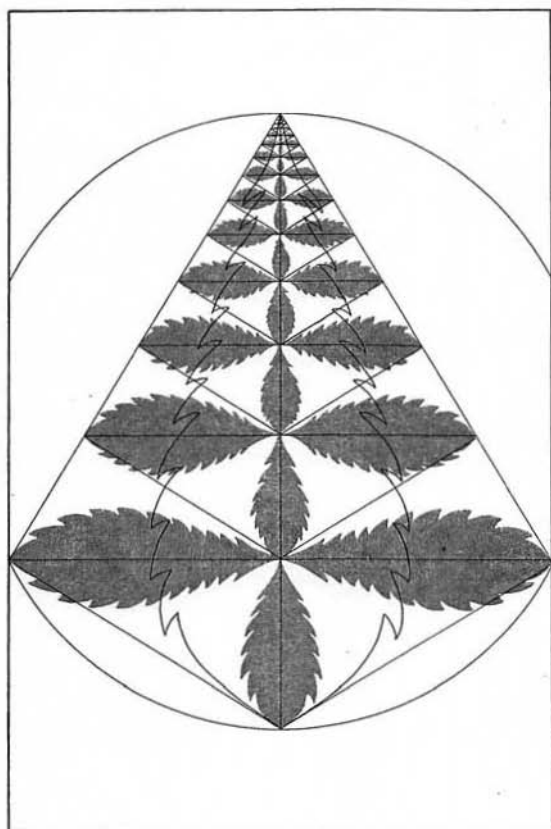
De halve cirkel op AB = halve cirkel op BC + halve cirkel op AC = halve cirkel op CD + halve cirkel op BD + halve cirkel op CD + halve cirkel op AD = hele cirkel op CD + halve cirkel op AD + halve cirkel op BD.

Nu kunnen we de halve cirkel op BD op dezelfde wijze ontwikkelen als die op AB, enz.

Er ontstaat weer een oneindige reeks, welke tek. 27 laat zien.

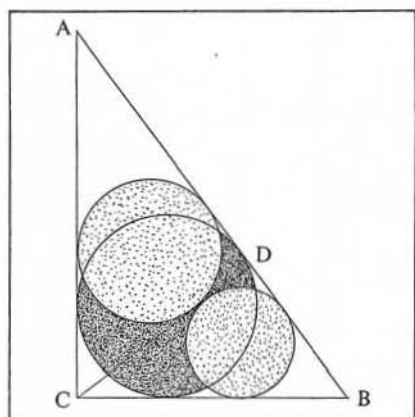
Hierin is het oppervlak van de halve cirkel op AB gelijk aan de som van de opp. van alle gehele cirkels + de opp. van de gepunteerde halve cirkels.

Als we de gehele cirkel op AB namen, zouden we dus het verrassende resultaat krijgen van 3 naar 1 punt convergerende reeksen van cirkeloppervlakken.

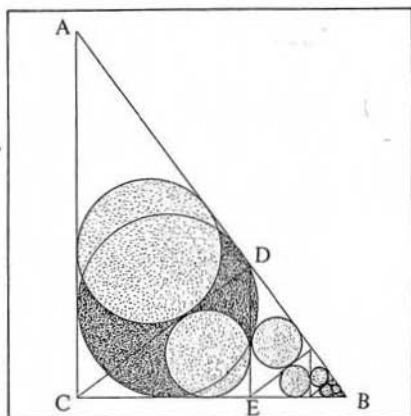


[28]

Dezelfde ontwikkeling kunnen we ook toepassen op elk anders gevormd oppervlak en zo is *tek. 28* ontstaan. Daarin is het oppervlak van het grote gekartelde blad gelijk aan de som van de oppervlakken van alle kleine gekleurde blaadjes.



[29]



[30]

HET THEOREMA VAN PYTHAGORAS EN DE INGESCHREVEN CIRKEL.

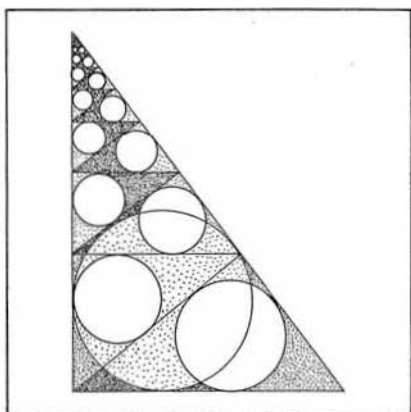
Beschouwen we de figuur van een rechthoekige driehoek met cirkeloppervlakken op de zijden, dan komt de vraag op, of er samenhang bestaat tussen deze, de aangeschreven cirkels, de ingeschreven cirkel en misschien de omgeschreven cirkel.

We ontdekken, dat de ingeschreven cirkel beschouwd zou kunnen worden als de concentratie van alle 3 aangeschreven cirkels. Hier zal dus zeker een onderlinge samenhang bestaan.

Noemen we de rechthoekszijden a en b , de hypotenusa c , de stralen der aangeschreven cirkels r_a , r_b en r_c , de straal van de ingeschreven cirkel r_i en de middellijn van de ingeschreven cirkel d_i , dan zijn de volgende zéér bijzondere, eenvoudige betrekkingen te vinden:

$$r_a r_b = r_i r_c$$

en: $d_i = a + b - c$



In de eerste plaats moet men de vraagstukken zo geven, dat ze niet beschouwd worden als een noodzakelijk kwaad, doch gezien worden als een verblijdend stukje ontwikkeling.

F. Kiinkel

[31]

Tekenen we in $\triangle ABC$ de hoogtelijn CD en de ingeschreven cirkels van de 3 driehoeken in de figuur, dan komt de vraag boven of en wat deze 3 cirkeloppervlakken met elkaar te maken hebben. *Zie tek. 29.*

$\triangle ABC \propto \triangle ACD \propto \triangle CBD$. Hun ingeschreven cirkels zijn dus overeenkomstige figuren-oppervlakken. Daar $\text{opp. } \triangle ACD + \text{opp. } \triangle CBD = \text{opp. } \triangle ABC$, zal ook $\text{opp. ingeschr. cirkel van } \triangle ACD + \text{opp. ingeschr. cirkel van } \triangle CBD = \text{opp. ingeschr. cirkel van } \triangle ABC$.

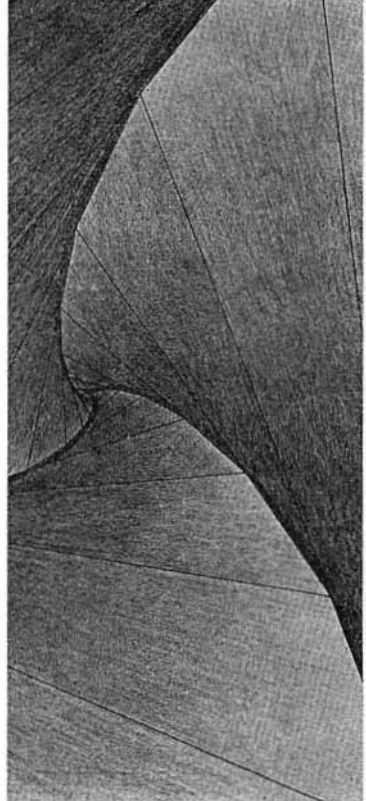
Dit is ook op andere manier te bewijzen.

Ontwikkelen wij het oppervlak van de ingeschreven cirkel van $\triangle CBD$ op dezelfde wijze verder tot in het oneindige dan ontstaat *tek. 30.*

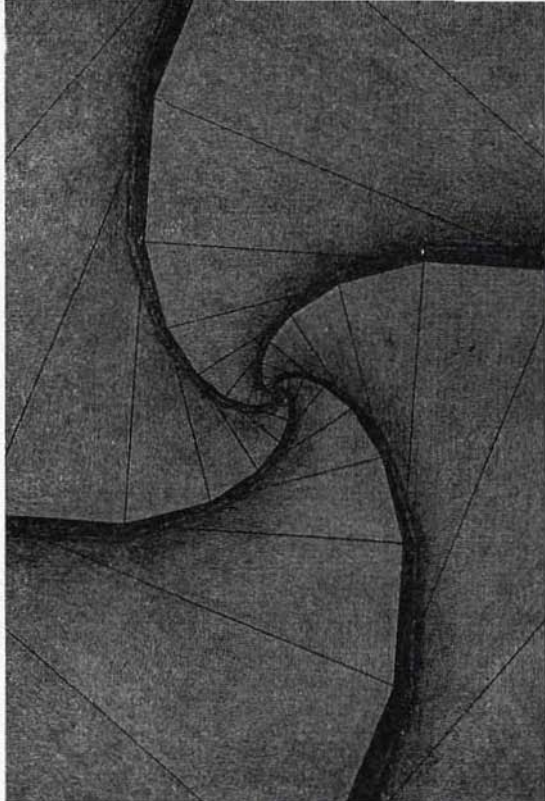
Doen wij hetzelfde met het oppervlak van de ingeschreven cirkel van $\triangle ACD$ dan krijgen wij *tek. 31.*

De som der opp. van de oneindige reeks cirkels is in beide gevallen dus gelijk aan het opp. van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Het spreekt vanzelf, dat ditzelfde ook opgaat voor andere willekeurig gevormde gelijkvormige oppervlakken.



[32]



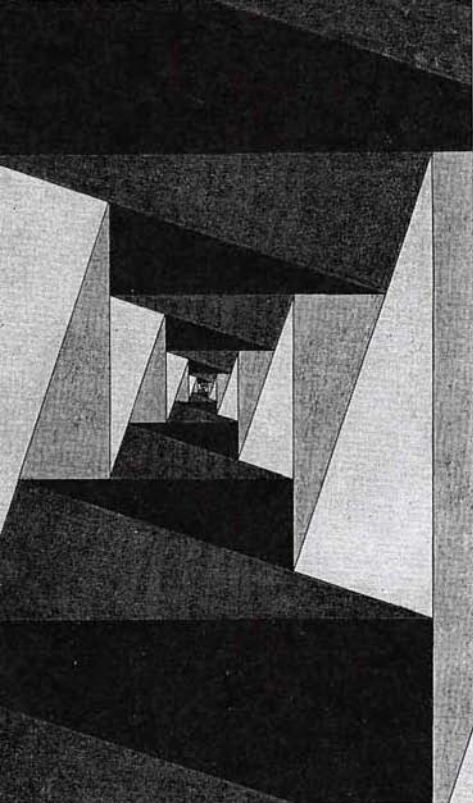
[33]

EEN CONGRUENTIE-OPGAVE.

In elk meetkundeboek voor beginners staat de opgave:

Wanneer wij de zijden van een gelijkzijdige driehoek in dezelfde draai-
richting met de helft van hun lengte verlengen, ontstaat weer een gelijkzijdige
driehoek. Bewijs.

De leerling lost het vraagstuk al dan niet op en gaat zo spoedig mogelijk
verder naar de volgende opgave om ook deze hindernis te nemen. Er is geen
enkel motief om zich verder met zulk een vraagstuk in te laten. Dat hoort er
niet bij. Toch zouden we bij beschouwing van de figuur op de gedachte
kunnen komen, dat de oorspronkelijke en de nieuwe driehoek niet op zichzelf
staan. Met de nieuwe driehoek kunnen we hetzelfde spel herhalen. We ver-
lengen de zijden weer met de helft van hun lengte en zo voort, waardoor



Belangrijker dan de dingen of verschijnselen op zichzelf te beschouwen, is het hen zien in s. menhang met het voorafgaande en het volgende. Hoofdzak is niet wat is, het geworden, maar het worden zelf en het begrijpen hiervan, - dus de wetten of tendenzen, die zich in de beweging doorzetten.

Aanhating van Hegel door
Fr. Muckele

34]

we een oneindige reeks krijgen. Kan die ook naar binnen toe voortgezet worden? Allicht wel, maar hoe? Dit is voor leerlingen, die de gelijkvormigheid nog niet gehad hebben waarschijnlijk te moeilijk om te beantwoorden. Misschien vindt een, dat de overeenkomstige hoeken gelijk blijven, maar vinden ze het niet zelf, dan kan men het afmaken van de tekening naar binnen toe rustig laten liggen tot later. Dat is beter dan hun alles maar te vertellen, waartoe wij zo gauw geneigd zijn, maar waardoor de spanning van het experiment, van de ontdekkingstocht, verdwijnt en het zelfstandig denken en vinden opgegeven wordt.

Maken wij de figuur af, dan ontstaat *tek. 32*.

Ook deze stelt ons vragen:

Wat is dit voor een reeks? Hoe wordt het voor een willekeurige driehoek? een vierkant? Kunnen we de verlenging ook afwisselend in de een en in de andere richting uitvoeren? We krijgen *tek. 33* en *34*.

Ook vragen, die moeilijker te beantwoorden zijn, komen naar boven:
Hoe verhouden zich de zijden van de opeenvolgende driehoeken?

Wanneer we de aangroeiing van de zijden eens oneindig klein zouden nemen, welke krommen krijgen we dan? Wat is hun vergelijking? Hoe is dit voor het geval van verlenging in wisselende richting?

Zoals U reeds duidelijk geworden zal zijn, is het niet de bedoeling alles voor te doen en te beantwoorden. Elke uitwerking is alleen bedoeld om op mogelijkheden te wijzen en is dus eigenlijk een concessie aan de ware bedoeling: de leermeester overbodig te maken.



VERANDERENDE DRIEHOEKEN.

Hoe kunnen driehoeken veranderen? Dat kan op honderden manieren. Maar waarom zouden wij daaraan beginnen? Heeft het nut? Misschien wel. Krijgen leerlingen de leerstof niet meestal kant en klaar opgedist? Alles staat immers in het boek; het behoeft slechts verteerd te worden. Maar dit is iets anders. Hierbij kan op niemand geleund worden. Daar staan we dan voor een onbekend gebied, hulpeloos. Heeft dit iets te maken met de axiomatische opbouw van Euclides of met de examenstof? Wellicht niet. Is er dan tijd voor? Neen, want het programma is al overladen... Toch zijn er misschien positieve kanten aan, maar dan zal men moeten gaan proberen. En daartoe zijn we pas genegen als we er enig perspectief in zien, — eigenlijk pas als we erin geloven.

Is oefenen in ordening van belang voor het vormen van begrip? Is het leren ordenen van dingen van nut voor het leren ordenen van de gedachten? Heeft men iets aan eigen aanpak, wanneer men in het leven voor of in een onbekend terrein komt te staan?

Er komt twijfel op: kan men zoiets klassikaal of groepsgewijs doen? Zou *ik* het kunnen? Wat hebben ze eraan? Is ieder er geschikt voor?

En dan weer: Zou het bij kunnen dragen aan het *samen* leren denken en werken, aan gezamenlijk overleg, kritisch denken? Kan een dergelijk gezamenlijk zoeken, vinden en opbouwen samenbindend, verheugend, stimulerend, gemeenschapsvormend zijn?

Dit moet Uzelf uitzoeken, zoals alles.

Wanneer we dan toch eens willen zien hoe driehoeken kunnen veranderen en of we daarin een systematische rangschikking kunnen opstellen, dan zouden we bij voorbeeld tot het volgende kunnen komen.

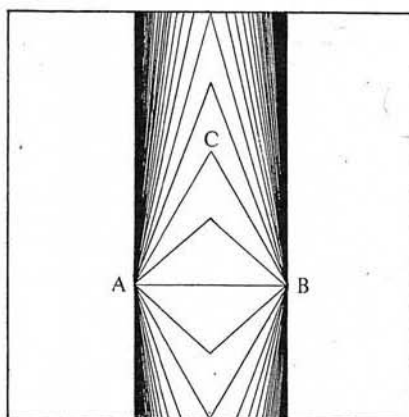
Driehoeken kunnen veranderen van ligging, van grootte, van vorm. Wij zullen ons hier alleen bezig houden met de verandering van vorm. Van welke driehoek zullen wij uitgaan? We beginnen ons onderzoek bij de meest eenvoudige, die tevens de meest bijzondere is: de gelijkzijdige driehoek.

Als resultaat van ons gezamenlijk onderzoek kunnen we vinden, dat te onderscheiden zijn:

- A *kromlijnige bewegingen*
- B *rechtlijnige bewegingen*
 - 1 *beweging van 1 hoekpunt (top)*
 - a op een zijde of haar verlengde
 - b niet op een zijde of haar verlengde
 - b₁ loodrecht op de basis
 - b₂ evenwijdig aan de basis
 - 2 *beweging van 2 (basis-)hoekpunten*
 - a langs 1 zijde (basis) van de driehoek
 - a₁ uit elkaar, resp. naar elkaar toe
 - a₂ in dezelfde richting
 - b langs 2 (opstaande) zijden van de driehoek
 - b₁ beide van de top af, resp. naar de top toe
 - b₂ een naar de top, de ander er van af
 - b₂₁ terwijl de basis evenlang blijft
 - c niet langs een der zijden van de driehoek
 - c₁ loodrecht op de basis
 - c₁₁ beide in dezelfde richting
 - c₁₂ in tegenovergestelde richting van elkaar
 - 3 *beweging van 3 hoekpunten*
 - a langs de zijden van de driehoek
 - a₁ in dezelfde draairichting

*Het doel van opvoeding
en onderwijs is het onste-
ken van een vlam, niet
het vullen van een vat.*

Socrates



[35]

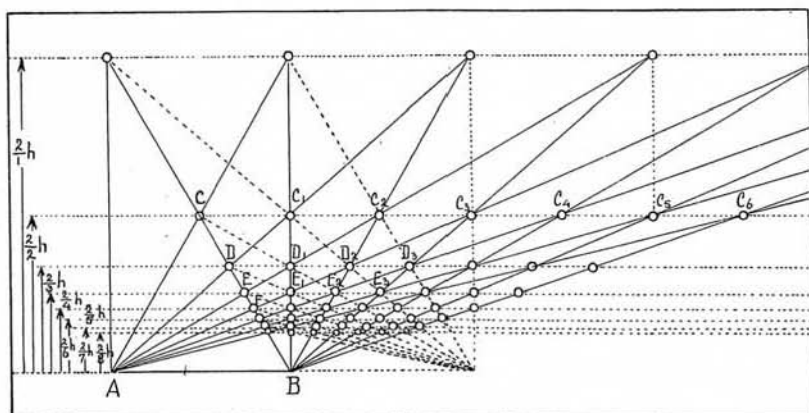
- a_2 niet in dezelfde draairichting
 - b niet langs de zijden van de driehoek
 - b_1 regelmatige inkrimping resp. uitzetting naar 1 punt
 - b_{11} op een der zijden van de driehoek
 - b_{12} binnen de driehoek
 - b_{13} buiten de driehoek
 - b_2 overgang van een driehoek in een andere gegeven driehoek
- enz.

Natuurlijk zijn er andere ordeningen mogelijk. Door de invloed van eventueel gebruikt staafjesmateriaal kan wellicht een ordening gevonden worden, waaraan de verandering der zijden ten grondslag ligt i.p.v. de beweging der hoekpunten. Het gaat erom een mogelijkheid te tonen voor eigen of groepsactiviteit.

We tekenen enkele gevallen.

$B1b_1$ *Rechtlijnige beweging van 1 hoekpunt (top) loodrecht op de basis.*
tek. 35.

Voor elke tekening moeten we een tekenregel kiezen om een oneindige hoeveelheid in beeld te brengen. We tekenen hier de stand van C telkens wanneer hij $\frac{1}{2}$ hoogte groter of kleiner is geworden. Hoever kan C zich bewegen? Hoe lopen dan AC en BC? Tot welke waarden naderen $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$? Houdt de beweging ergens op? Waar blijft C? De onderzijde wordt ontdekt. De figuur wordt volledig.



[36]

B1b2 *Rechtlijnige beweging van de top van een driehoek evenwijdig aan de basis.*

Laten wij uitgaan van een gelijkzijdige driehoek ABC. De top C verplaatst zich dus evenwijdig aan AB. Daar wij niet alle standen kunnen tekenen, nemen wij als tekenregel aan een driehoek te tekenen telkens wanneer C een afstand van $\frac{1}{2} AB$ is verplaatst. Zie tek. 36.

We krijgen $\triangle ABC$, $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, enz.

Bij de beschouwing van de tekening wil het ons voorkomen alsof de overkomstige snijpunten op lijnen liggen $// AB$. Is dit zo? Ook lijken de stukken DD_1 , D_1D_2 , D_2D_3 wel gelijk; evenzo EE_1 , E_1E_2 , E_2E_3 , enz.

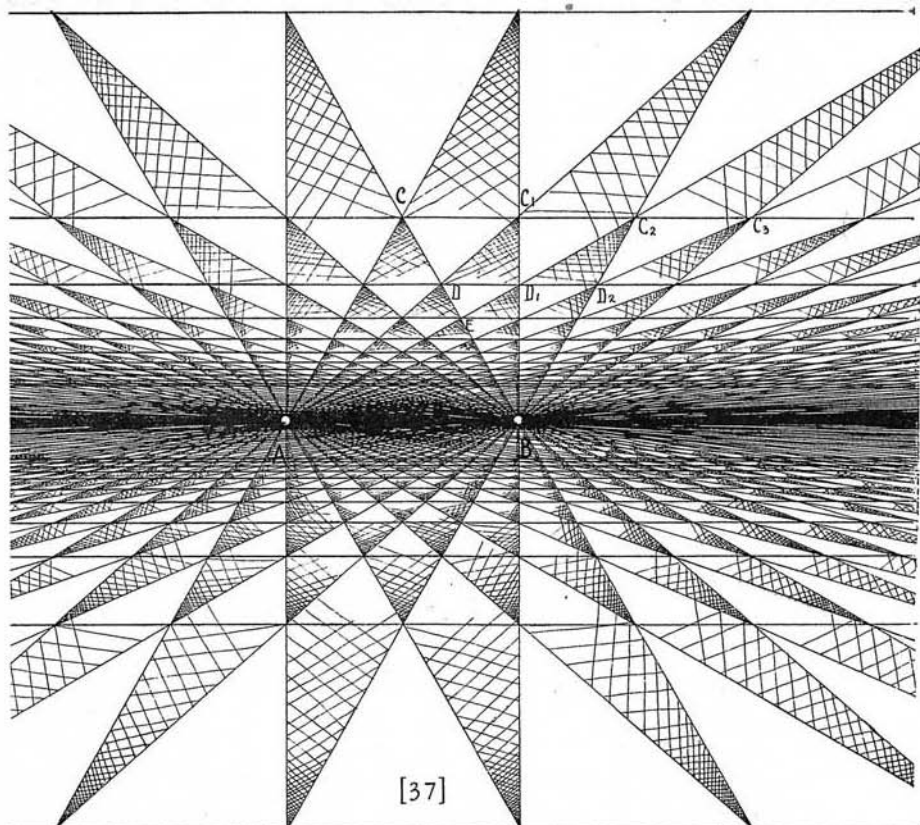
Het blijkt inderdaad niet moeilijk te zijn dit te bewijzen en tot onze vreugde vinden wij een strenge regelmatigheid.

Maar dan komen de vragen op:

Hoe groot zijn de afstanden der evenwijdige lijnen en hoe groot zijn de stukken, die van de $//$ lijnen afgesneden worden?

$\triangle CDC_1 \propto \triangle BDA$ en daar $CC_1 = \frac{1}{2} AB$, is de hoogte van $\triangle CDC_1 = \frac{1}{2} \times$ de hoogte van $\triangle ABD$.

Noemen wij de hoogte van $\triangle ABC$ h , dan is dus de hoogte van $\triangle ABD = \frac{2}{3} h$.



[37]

Op dezelfde wijze vinden wij uit ruit ABC_2C , dat de hoogte van $\triangle AEB = \frac{1}{2}h$ is.

Berekenen wij verder de hoogten van $\triangle AFB$, enz. dan komen wij voor de diverse hoogten tot de reeks:

$h, \frac{2}{3}h, \frac{1}{2}h, \frac{2}{5}h, \frac{1}{3}h, \frac{2}{7}h, \frac{1}{4}h, \frac{2}{9}h, \dots$

En hieruit vinden we de duidelijker reeks:

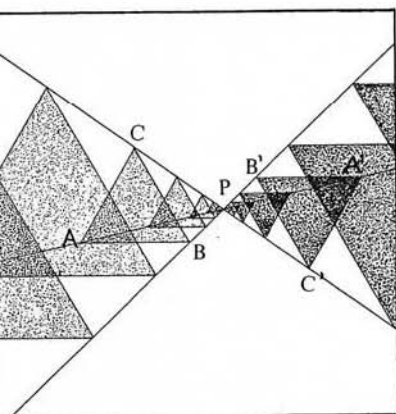
$$\frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9} \dots \frac{2}{\infty}$$

Maar waarom zou deze reeks bij $\frac{2}{2}$ beginnen? Daarvóór liggen:

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{0}, -\frac{2}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{2}{3} \dots -\frac{2}{\infty}$$

Welke betekenis hebben deze termen van de reeks, waarin zelfs het oneindige zich harmonisch rijt?

En dan ontdekken wij de totale figuur: tekening 37.



De hoofdvraag is: hoe wordt werkelijkheid weten. Het antwoord moet altijd luiden: door ervaring, dus in de ruimste zin van het woord, door inductie.

Prof. H.J. Jordan

38]

Voor de stukken, afgesneden van de // lijnen, vinden wij, als we de lengte van $AB = p$ noemen:

$$\frac{1}{2} p, \quad \frac{1}{3} p, \quad \frac{1}{4} p, \quad \frac{1}{5} p, \quad \dots \quad \frac{1}{\infty} p.$$

Maar daarvoor behoren dan natuurlijk:

$\frac{1}{1} p, \quad \frac{1}{6} p, \quad -\frac{1}{1} p, \quad -\frac{1}{2} p, \quad \dots$ enz. waardoor een schone reeks compleet wordt.

Hoe wordt het bij een andere afstandsverdeling van de // lijn door C? En met een andere hoogte h, ofwel andere lengte AB?

Hoe verplaatsen zich het hoogtepunt, het zwaartepunt, het middelpunt van de in- en omgeschreven cirkel, als het toppunt van de driehoek zich verplaatst?

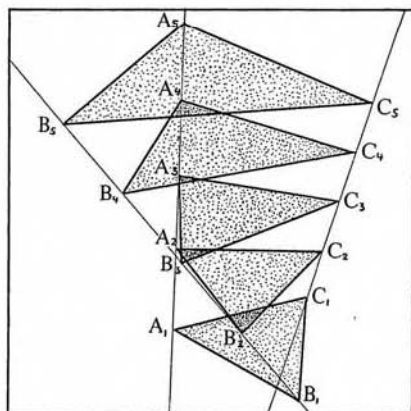
De toppunten der driehoeken liggen merkwaardigerwijze op 4 series snijdende lijnen!

Buigen we de // lijn door C tot een cirkel, dan ontstaat tek. 3 en het tetsel // lijnen door de toppunten wordt tot de vruchtvormen van tek. 119.

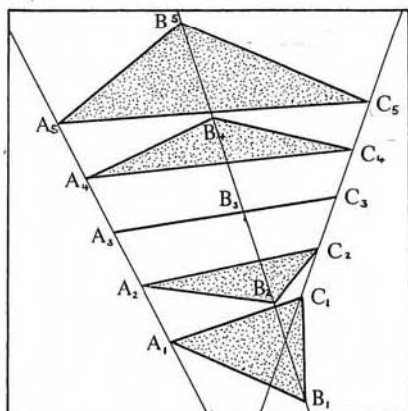
Wat krijgen we als de lijn door C niet // AB loopt?

33b₁₃ *Rechthoekige beweging van 3 hoekpunten*; regelmatige inkrimping resp. uitzetting naar een punt buiten de driehoek, tek. 38.

We verbinden de 3 hoekpunten met P en nemen aan dat, wanneer A de



[39]



[40]

helft van AP heeft afgelegd, B de helft van BP aflegde en C de helft van CP, enz. De standen, wanneer telkens de helft is afgelegd, worden getekend, ook van P af groter wordend, waardoor we zien, dat driehoek ABC deel uitmaakt van een reeks, welke tot in het oneindige kleine P nadert. Nog verder? De stralen gaan door P heen en we kunnen vinden, dat de beweging en tekening verder ontwikkeld kan worden door $PA' = PA$, $PB' = PB$ en $PC' = PC$ te maken, enz. Maar de driehoeken, die we over de grens van het oneindig kleine vinden, blijken veranderd te zijn.

B3b₂ *Rechtlijnige beweging van 3 hoekpunten; overgang van een driehoek in een andere gegeven driehoek.*

We verbinden de 3 hoekpunten van driehoek $A_1B_1C_1$ met die van de gegeven driehoek $A_5B_5C_5$. Langs deze lijnen zullen we de hoekpunten in elkaar over laten gaan. De afstanden of wegen, die de hoekpunten moeten afleggen zijn niet gelijk. Bewegen de hoekpunten zich gelijkmatig, dan zal, als A de helft van de weg A_1A_5 heeft afgelegd, B de helft van B_1B_5 hebben afgelegd en C de helft van C_1C_5 enz. Dan kunnen we de stand $A_3B_3C_3$ tekenen en op gelijke wijze andere tussenstanden. Teken we deze, dan krijgen we een beeld van de veranderende driehoek.

We overdenken, dat de begin-driehoek op verschillende manieren in de

indriedriehoek kan overgaan. Fig. 39 en 40 laten 2 manieren zien. Hoeveel manieren zijn er? De tekening kan moeilijkheden bieden.

Gaat de veranderende driehoek, al kleiner wordend, over in een punt, dan gaat dit geval over in B3b₁.

Wordt aan deze ordeningsopgave door een groep of klas gewerkt, dan kunnen de leerlingen ieder een tekening van een geval ter uitvoering kiezen. Deze kunnen dan, getekend op losse bladen van eenzelfde formaat, verzameld worden om langzamerhand een collectie te vormen, die naar believen getoond kan worden ter completering van de zelf gemaakte tekeningen en ter inspiratie.

ONDERZOEK VAN LIJNEN.

Aan de overdenking van het punt zal het onderzoek van de lijn zich aansluiten, wanneer men ontdekt dat door de beweging van een punt een lijn als baan ontstaat. Op Socratische wijze, dus d.m.v. vragen, die erop doelen dat men zich rekenschap gaat geven en dat men zich bewust wordt, is het mogelijk hierin groepsgewijs verder te komen. Een dergelijk veld van onderzoek wordt dan oefenterrein voor een denkscholing, welke ook buiten de meetkunde van belang kan zijn. Men moet zich daarbij rekenschap geven van alle mogelijkheden en ingaan op allerlei moeilijkheden. Het gaat dan om critisch schiften en ordenen, conclusies formuleren en deze ten slotte in het geheugen vast te leggen. Op dit laatste valt meestal hoofdzakelijk de aandacht. Het is echter slechts één facet in de ontwikkeling van het denken. Bij verwaarlozing der andere facetten krijgt de kennis het karakter van apartheid en vreemdheid of opgeplaktheid, dat zoveel schoolse kennis typeert en aan deze uitdrukking van schoolsheid zijn inhoud verleent.

Enkele der vragen, die hier groepsgewijs gesteld kunnen worden, zijn:

Wat is een lijn? Wat is een meetkundige lijn?

Heeft een lijn dikte?

Hoe ontstaat een lijn?

Zijn er verschillende soorten lijnen?

Welke is de eenvoudigste lijn; welke is de eenvoudigste kromme lijn?

Welk verschil in ervaring is er, als men zich als bewegend punt denkt in de baan van verschillende lijnen?

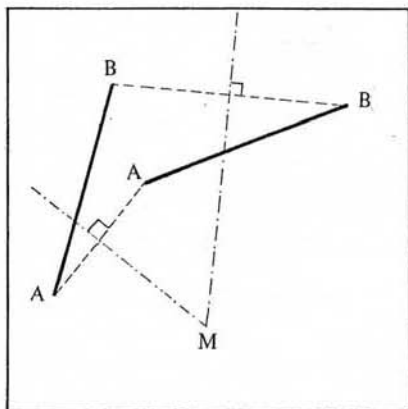
Hoe zouden zij te ordenen zijn?

Welke bewegingen kan men een lijn geven?

In de ruimte; een rechte lijn in het platte vlak?

Elke vorm was eerst beweging.

Alfred Adler



[41]

Kunnen deze bewegingen tot principieel verschillende teruggebracht worden? Zo ja, tot welke?

Het resultaat van een gezamenlijk onderzoek gaf de volgende resultaten voor een meetkundige lijn:

Een meetkundige lijn is een begrenzing.

Zij heeft slechts één afmeting: lengte.

Ze kan gedacht worden te zijn ontstaan door de beweging van een meetkundig punt, en is dan de baan van dat punt.

Er zijn eindige lijnen, die we lijnstukken noemen en oneindige lijnen.

Er zijn rechte, kromme en gebroken lijnen.

Bij beweging van een lijn wordt een vlak beschreven.

Een rechte lijn kunnen we ontstaan denken als de baan van een punt, welks richting niet verandert.

Een kromme lijn is de baan van een punt, welks bewegingsrichting gestadig verandert.

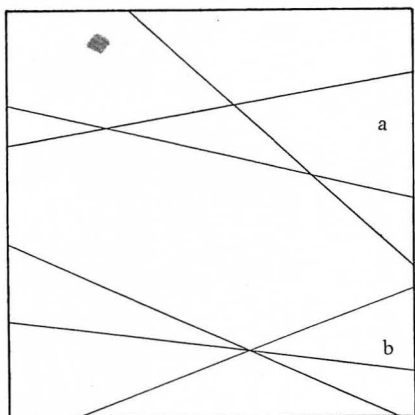
Een gebroken lijn is de baan van een punt, welks bewegingsrichting nu eens constant blijft, dan weer plotseling verandert.

Alle bewegingen van een recht lijnstuk in het platte vlak kunnen teruggebracht worden tot:

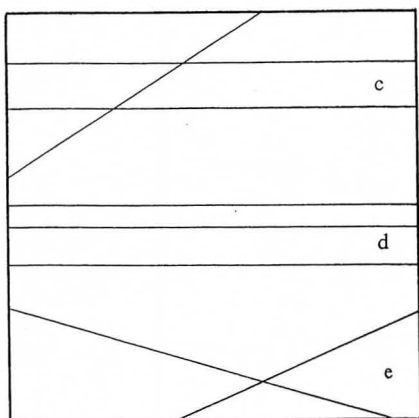
a. beweging // zichzelf = translatie;

b. draaiing = rotatie.

De rotatie kan zijn:



[42]



[43]

1. om een punt op de lijn als middelpunt;
2. om een punt buiten de lijn als middelpunt.

Elke translatie is op te vatten als een rotatie om een middelpunt op oneindig in het verlengde van de lijn. Elke verplaatsing in de eigen richting kan men beschouwen als een rotatie om een middelpunt op oneindig, gelegen in een richting loodrecht op het lijnstuk.

Elke beweging van een recht lijnstuk in het platte vlak kan dus teruggebracht worden tot één rotatie.

Een recht lijnstuk is altijd uit een beginstand in een willekeurige eindstand te brengen door een translatie en een rotatie of door een enkele rotatie om een punt op of buiten de lijn.

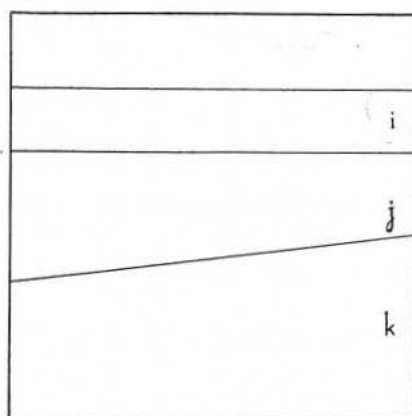
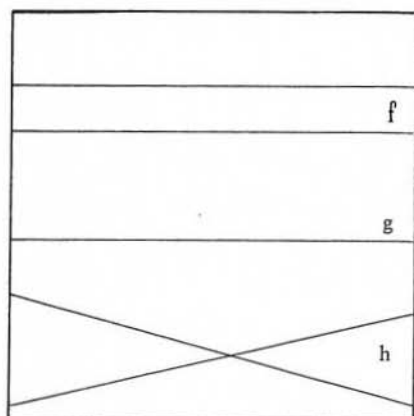
Fig. 41 geeft hiervan een voorbeeld.

Wanneer aldus één lijnstuk overdacht wordt, is onderwijl reeds lang het probleem van 2 lijnen opgedoken. Daarbij ontstaat een nieuw begrip: de hoek. Systematisch verder zoekend, kan dan het probleem van 3 oneindige rechte lijnen aan de beurt komen.

Daarbij rijzen de volgende vragen:

Welke ligging kunnen 3 lijnen t.o.v. elkaar hebben? D.w.z. welke principieel verschillende liggingen zijn te vinden, waardoor het oneindig aantal verschillende liggingen geordend kan worden?

Als hulpmiddel voor kinderen kunnen hier dunne stokjes dienen, die lijnen voorstellen en die willekeurig gelegd kunnen worden.



[44]

[45]

Het resultaat van een gezamenlijk onderzoek was:

1. 3 lijnen vormen in het algemeen een driehoek.
2. Wanneer ze alle 3 door 1 punt gaan of bij evenwijdigheid, vinden we grensgevallen, die echter geheel passen in het beeld van de veranderende driehoek.
3. In het eindige hebben 3 lijnen 0, 1, 2 of 3 snijpunten.
4. Bij 3 oneindige lijnen kunnen we de volgende 11 principieel verschillende liggingen onderscheiden:

a. algemeen geval: 3 snijdende lijnen in 't eindige, die een driehoek vormen	tek. 42
b. bijzonder geval: 3 lijnen door 1 punt in het eindige . . .	
c. bijzonder geval: 2 lijnen //	
d. bijzonder geval: 3 lijnen // door 1 punt op oneindig . . .	tek. 43
e. bijzonder geval: 2 lijnen samengevallen	
f. bijzonder geval: 2 lijnen //, 2 samengevallen	
g. bijzonder geval: 3 lijnen samengevallen	tek. 44
h. algemeen geval: 1 lijn op oneindig	
i. bijzonder geval: 2 lijnen //, 1 lijn op oneindig	
j. algemeen geval: 2 lijnen op oneindig	tek. 45
k. algemeen geval: 3 lijnen op oneindig	

Het bovenstaande is slechts een kort resumé van de resultaten van een gezamenlijk onderzoek.

HOOFDSTUK 2

BESCHOUWING VAN HET DIDACTISCH ASPECT. DE DYNAMIEK VAN HET DENKEN EN DE MEETKUNDE.

Wie zich verbaast over de tekeningen, die zo spontaan tevoorschijn komen, zal in deze verbazing wellicht de stuwkracht vinden, die hem tot eigen onderzoek drijft. Daarbij zullen allerlei vragen bij hem oprijzen en hij zal zich afvragen: Wat is de bedoeling en de waarde van deze tekeningen? Wat heb je eraan? Waar voert dit heen? Bevorderen ze het wezenlijk doel van het meetkundeonderwijs of staan ze het in de weg?

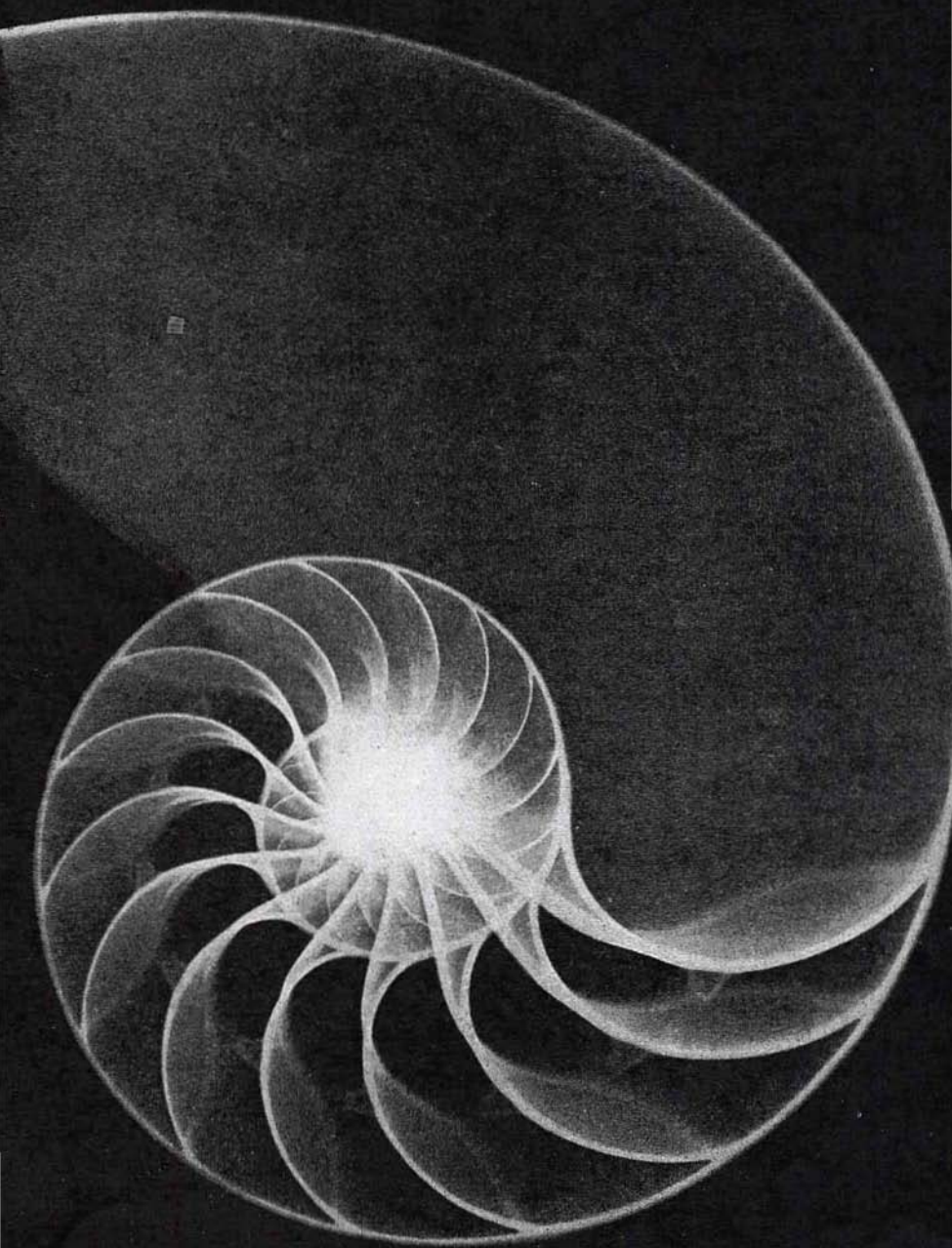
Een psycholoog rangschikte de tekeningen en wat daarbij hoort, onder de categorie spel. Hij wilde daarmee op het goed recht ervan wijzen en tevens op de betreurenswaardige omstandigheid, dat bij al onze grote ernst het spel zo in de verdrukking komt. Wat is spel? Is het niet een verheugende inspanning, die tevens ontspanning is? Het spel brengt ons dwangloos tot prestaties door een innerlijke stuwning, die ons verblijdt, omdat wij, ons eraan overgevende, erin opgaan. En betekent ergens in opgaan niet: zichzelf verliezen om door het andere meer tot je ware zelf te komen? Werkt in het spel niet een activatie, die ideaal voor het onderwijs zou zijn? Wie zou niet graag naar school of werkplaats gaan, wanneer het werken hem een spel zou zijn? Niet alleen zou er met blijdschap geleerd worden, doch het resultaat, de innerlijke ontwikkeling, zou er beter zijn. Spelenderwijs staat tegenover moeilijk, zoals de reuzenzwaai, — de gestrekte zwaai om de rekstok, tot de z.g. hoogstand, — staat tegenover het opdrukken van het lichaam totdat men, op zijn handen staande, ook de hoogstand bereikt.

Maar al zouden wij aannemen, dat deze meetkunde spel is, waar komt dan de motivatie vandaan om dit spel te gaan spelen? De normale motivaties om aan meetkunde te doen zijn ons welbekend. Zij kunnen zijn: het goede gevoel een vraagstuk te kunnen oplossen; een goed cijfer te willen behalen of over te gaan; een wedstrijd-motief; de overtuiging, dat de meetkunde een

noodzakelijke hindernis is, die genomen moet worden om tot vakkennis en een goede betrekking te komen; vrees voor straf of voor ongenoegen met de leraar, enz. — altemaal motivaties, waarvan de bronnen buiten de meetkunde liggen; — motivaties, waarin de meetkunde gebruikt wordt voor een doel buiten de meetkunde. Kan er dan geen motivatie uit de meetkunde zelf voortkomen? Zo ja, dan moet dit aangetoond kunnen worden en ervaren, beleefd. Daartoe mogen dan de beschreven voorbeelden dienen. Wij moeten daarbij echter wel bedenken, dat het beschrijven en nalezen van de resultaten van een ervaring geheel iets anders is dan de ervaring zelf. Het gevolg hiervan is, dat men, dit boek doorbladerende en lezende, de oorspronkelijke ervaringen zelf, waar het op aankomt, slechts min of meer juist vanuit de verte zal kunnen vermoeden en waarderen. Ook volgt daaruit, dat het niet gaat om de gegeven voorbeelden. Zelfs al waren deze foutief en vol gebreken, dan nog zou de hoofdzakelijk zijn, dat zij verwijzen naar de mogelijkheid van soortgelijk onderzoek of spel, dat door U of kinderen met U zelf gedaan zou kunnen worden. Het is een beschrijving van ontdekkingstochten in de meetkunde, niet de tochten zelf. En op het zelf reizen komt het aan. Het komt er ten eerste op aan te laten zien, dat er ontdekkingstochten gemaakt kunnen worden. De voorbeelden kunnen dit aantonen en het kan zijn nut hebben voor diegenen, die menen, dat er in de meetkunde geen mogelijkheden schuilen om zelf iets te doen, hetgeen alle eigen onderzoek vanzelfsprekend blokkeert. De wetenschap, dat er wel mogelijkheden zijn, kan de activiteit doen ontwaken.

Ten tweede moeten wij ons een mening vormen over de waarde of het nut van zulke tochten.

Gaan wij daartoe eerst eens na, wat in het algemeen de stuwkracht is, die ons denken beheerst, dan vinden we, dat dit het eigenbelang is. Dit vraagt: wat heb ik aan de meetkunde? De min of meer bewuste grond, waaruit deze vraag voortkomt, is — al weer in het algemeen, —: Voor mijzelf zie ik er weinig of niets in, maar ik moet, want In deze sfeer wordt het denken dus gestuwd door een noodzaak, die min of meer onaangenaam is, afhankelijk van de aanleg, of wel door een eis van anderen. Het denken wordt daardoor fragmentarisch en onze aandacht moet telkens van buitenaf dwangmatig bepaald en gestimuleerd worden, nu eens op deze, dan weer op die „som”. Het verwijlt slechts zó lang bij het vraagstuk en de figuur als strikt noodzakelijk is voor de oplossing van de opgelegde vraag. Geen enkel vraagstuk of figuur is daarbij op zichzelf van belang. Hun enig belang ligt in de



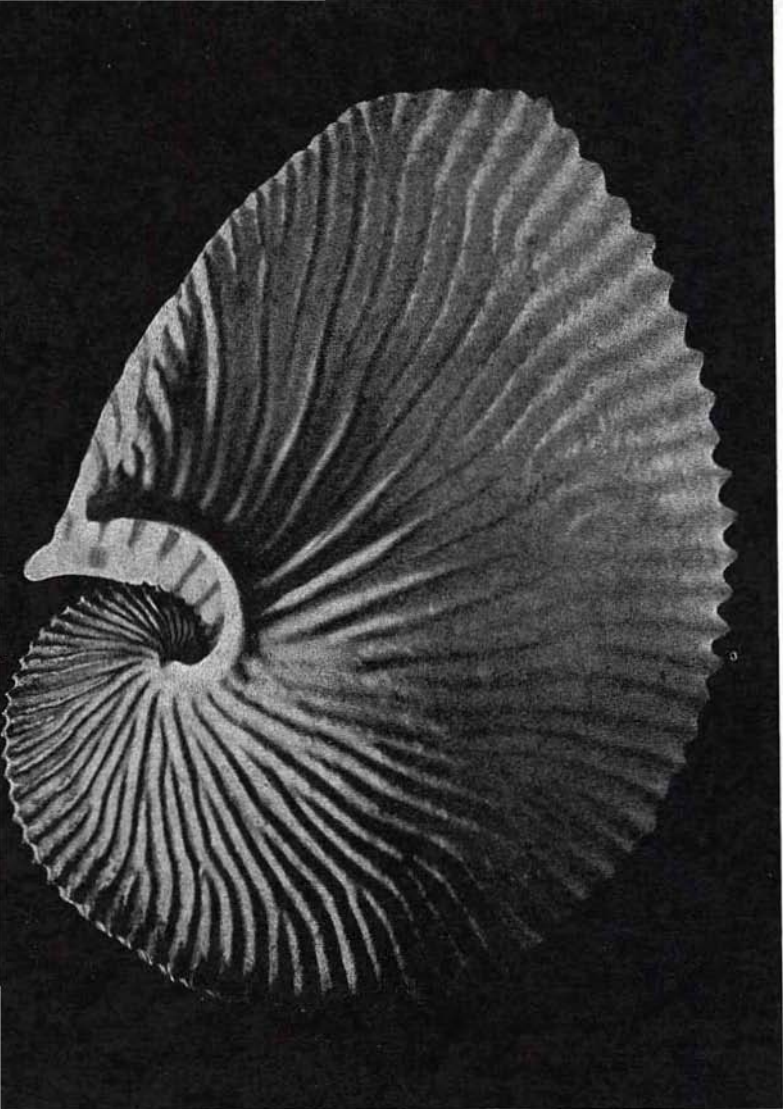
overgang of het eindexamen. Vandaar, dat dit denken zuiver pragmatisch, ongeïnteresseerd en oppervlakkig is en dat we het zo spoedig mogelijk afbreken.

Wanneer wij echter door iets gepakt worden, willen wij het gaan onderzoeken. Een onderzoek nu, begint middenin de te onderzoeken stof met een bepaald probleem, dat in het oog valt. Een levend onderwijs, dat de gang van alle onderzoek in principe wil volgen, zal ook ergens middenin de stof beginnen, aansluitend aan spontane belangstelling.

Is er geen spontane belangstelling, dan zal de stuwkracht als een eis van buitenaf moeten komen: de maatschappij eist een opleiding en een diploma; de school eist voldoende cijfers; de leraar zet er zijn persoonlijkheid achter en het kind maakt meetkunde-sommen. Euclides zorgde daarbij voor een sluitend geheel en als je nu maar het leerboek volgt, kom je waar je wezen wilt. Dat lijkt op een goed geleide autobustocht, meer dan op een ontdekkingsreis. Men kan niet verdwalen en de hele tocht is in het reisprogram beschreven. Is de autobus geen prima vervoermiddel en is de chauffeur niet betrouwbaar? Maar het kind moet leren lopen, op eigen benen staan en zijn eigen weg leren vinden.....

Bij een werkelijke autobustocht is het tenminste nodig zo nu en dan eens uit te stappen en de kinderen hun stramme benen te laten strekken, ze op die eigen benen te laten staan en te laten lopen. Dan kan het spel beginnen: al spelend maar voorzichtig kan samen de weg verkend worden en genoten worden van het landschap. Elke gevonden bloem of steen doet verder zoeken. Een uitzicht, een tekening stelt ons voor vragen en nodigt ons uit verder te denken en te zoeken.

Dan komt de motivatie niet van buitenaf, door een ander opgelegd, maar uit de meetkunde. De inspiratie komt uit het werk zelf voort. Het zoeken en vinden vormt het bekorende van de wiskunde, maar eerst recht als de motivatie uit de stof zelf komt. En dit kan. Elke tekening kan nieuwe impulsen brengen. Daaruit kan een ontvankelijkheid en overgegevenheid groeien, een instelling, die vragend en vorsend tegenover de stof staat, een instelling, die op het andere gericht is; die de noodzakelijke transformaties van zichzelf aanvaardt en daarin bevrediging en geluk vindt. Dan is het pad gevonden. De zelfwerkzaamheid van de geest is geactiveerd en gericht op het andere, — straks door overdracht misschien op de ander. Dit is het pad naar verdieping van inzicht. Uit de figuur komen vragen op en een dorst om verder te gaan,



[78]

Een voorbeeld van een a.h.w. gestolde draaiende straling vinden wij in bovenstaande schelp van de Argonauta argo Linné. Alle ribbels wijzen naar een oorspronkelijk stralend punt en geven uitdrukking aan een inwendig gebeuren, dat in een harde schelp uitkristalliseerde.

verder in het zuiver en consequent denken van de wiskunde, dat voert tot meerder waarheid en schoonheid. In elke figuur ligt het mysterie verborgen en open.

De sferen van het belang en van het spel zijn elkaar vreemd, vandaar dan ook de vragen: wat wil je ermee? en: wat heb je eraan? Ze komen uit de sfeer van de goede reisvereniging, die haar leden per bus ergens brengen wil, veilig en zo snel mogelijk. De chauffeur moet zorgen, dat het gezelschap op tijd daar en daar is. Hij kent de weg, de grenzen en de douane. Geen wonder, dat voor hem uitstappen, dwalen, bloemen en stenen zoeken hoofdzakelijk tijdverlies is. Wat heb je eraan? Straks verdwalen ze nog. Instappen!

En toch; het uitstappen is heerlijk. Dan veren we op. We gebruiken onze spieren, onze speurzin, oriëntatievermogen en eigen aanpak; de schoonheid van het landschap bloeit open en deze is anders dan van binnen uit de bus. De tekeningen nodigen ons uit in de figuren door te dringen en menigeen zal pogen er iets van het gevondene in uit te drukken.

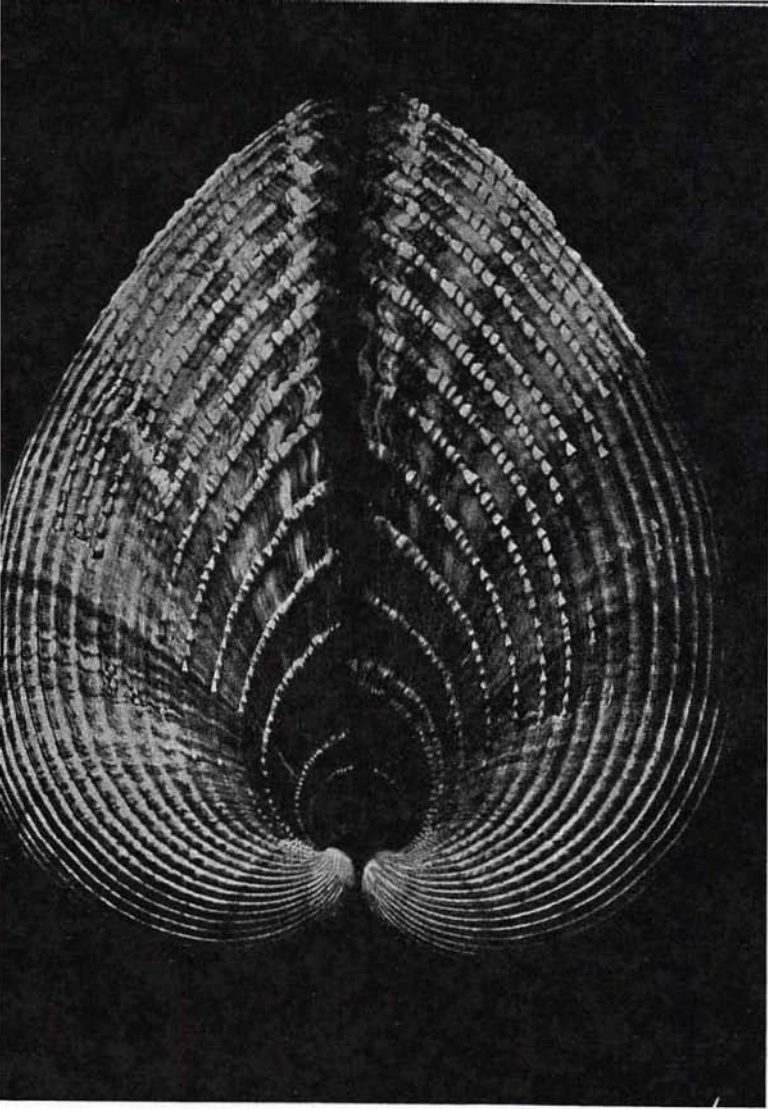
De motivatie te vinden in de stof is het pad naar verdieping. Als dit in de meetkunde gevonden wordt, kan dit wellicht ook elders, waardoor de betekenis ervan boven de meetkunde zou uitgaan.

Willen wij onderzoeken wat de dynamiek van het denken inhoudt, dan moeten wij ons afvragen wat het denken zelf is. Het eerste wat opvalt is, dat het denken niet iets stilstaands is. Het is beweging. Staat ons denken stil, dan denken we niet meer. Nu is het belangrijk na te gaan hoe de beweging, die het denken is, zich voltrekt. Zijn hier wetmatigheden te bespeuren? Welke invloeden werken op de beweging; zijn er richting-gevende invloeden en hoe is de aard van de beweging, b.v. continu of sprongsgewijs?

Wanneer wij invloeden en wetmatigheden bij de denkbeweging vinden, komt de vraag op welke invloeden wij bewust zouden kunnen aanwenden om de denkbeweging zo goed mogelijk te doen verlopen; en daarmee komen we op het gebied van de denkscholing en opvoeding en onderwijs. In elk geval is denkscholing iets anders dan feitenkennis en het kunnen reproduceren van aangeleerde dingen. Bij het denken zouden we kunnen onderscheiden:

- A. de motivatie, die het denken in beweging zet,
- B. de denkbeweging en
- C. de denkstof, dus datgene, waaraan gedacht wordt.

Wij zullen deze serie aspecten, die in het denken verbonden zijn, trachten afzonderlijk te bezien.

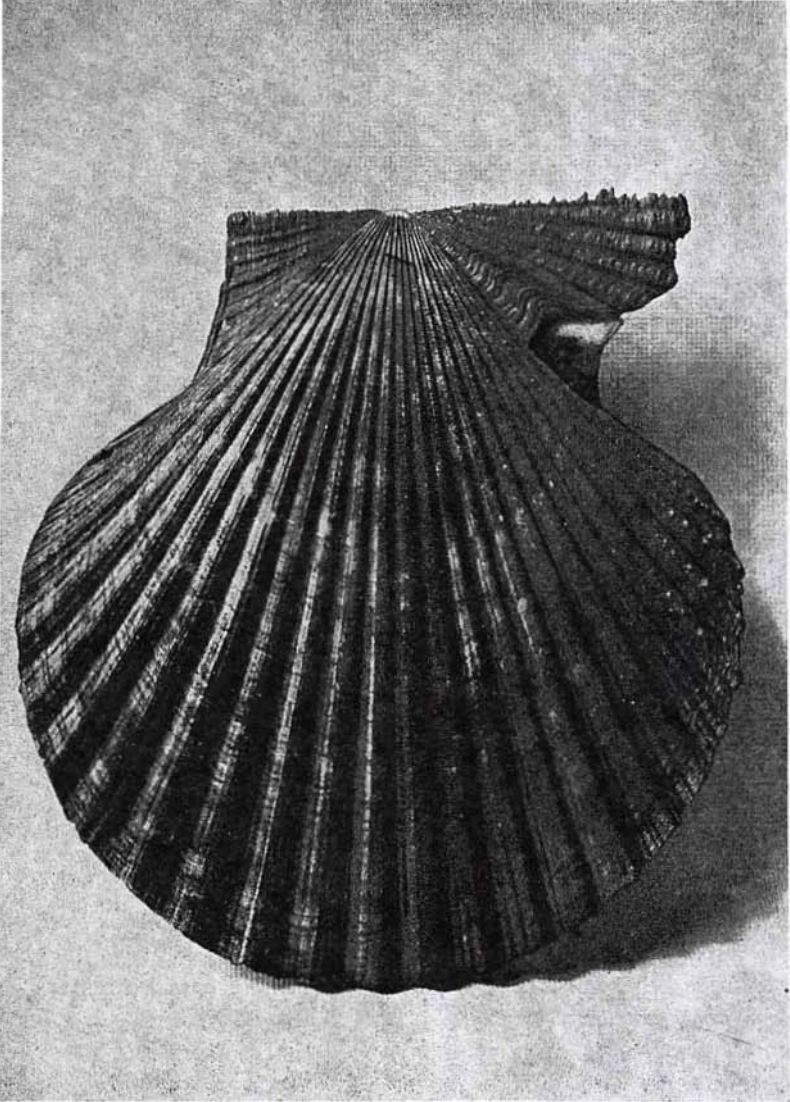


[79]

Hoe onopgemerkt van waarde voor wie deze schelp achteloos stuktrapt of de kalkoven ermee vult, - hoe wonderschoon van vorm voor wie iets van de wiskundige lijnstructuur erin ontdekt en van de rijkdom der gebogen lijnen.
Het is de *Cardium pseudolima* Lamarck.

A. De motivatie.

Wij bespraken reeds het feit, dat het denken onder de invloed staat van de motivatie. Wij kunnen ook zeggen, dat de gedachte en de gedachtegang of denkbeweging afhankelijk zijn van de bron, waaruit de gedachte voortvloeit en de stuwning, die hem draagt. Het denken aan een meetkunde-vraagstuk, dat bij voorbeeld als straf wordt opgegeven, verkeert onder een andere motivatie als het vraagstuk, waarop men stuit bij een eigen onderzoek. Zo is onze spijsvertering, behalve van het voedsel, afhankelijk van de afscheiding van maagsappen en deze weer van de geestestoestand, waarin wij verkeren. Zou er geen overeenkomst zijn tussen onze spijsvertering en het verloop van onze gedachte, onze denkstofvertering? Het beste voedsel is van geen nut, wanneer men het niet tot zich neemt of als het niet goed verteerd wordt. Zo zouden we ook kunnen zeggen, dat de wijsheid van geen nut is, wanneer de goede motivatie ontbreekt om haar te aanvaarden. Dan dringt het woord niet door en wordt de profeet verguisd. Zoals de spijsvertering staat in dienst van de wil tot leven, staat het denken in dienst van de gerichte wil of wel van de motivatie. Het denken volvoert de opdracht ervan en zal desnoods tot de slot-som komen, dat zwart wit is, indien de motivatie dit verlangt. De motivatie beperkt, blokkeert of bevrijdt het denken, al naar gelang hij dit voorschrijft. Wij kunnen in het kort zeggen, dat de motivatie het denken reguleert. Zo is het duidelijk, dat elke motivatie de tendens heeft het denken af te buigen naar het bewust of onbewust verlangde doel. Komt de motivatie als liefde of weetgierigheid uit de stof zelf voort, dan mogen we verwachten, dat er een minimum van afbuiging werkt, waardoor een grotere mate van begrip en objectiviteit kan ontstaan. De motivatie vanuit de stof, die door geen ander, dus van buitenaf, aangezet behoeft te worden, is daardoor de aangewezen weg naar zelfontwikkeling. Wanneer wij bedenken, dat onze schooljaren slechts een klein deel van ons leven uitmaken, is het duidelijk, dat het leren vinden van deze weg op school van belang geacht mag worden.



[79]

Bij deze *Chlamys gloriosus* Reeve (Edele Kamschelp) liggen de straalkrommen, zoals die van tek. 72, in vlakken loodrecht op het vlak van de tekening. Hun projectie in dit vlak vertoont geen draaiing. Het lijken daar rechte stralen. De straling in cirkeltekening vindt zijn uitdrukking in de ribbeling van het uitdijende groeifront.

B. De denkbeweging.

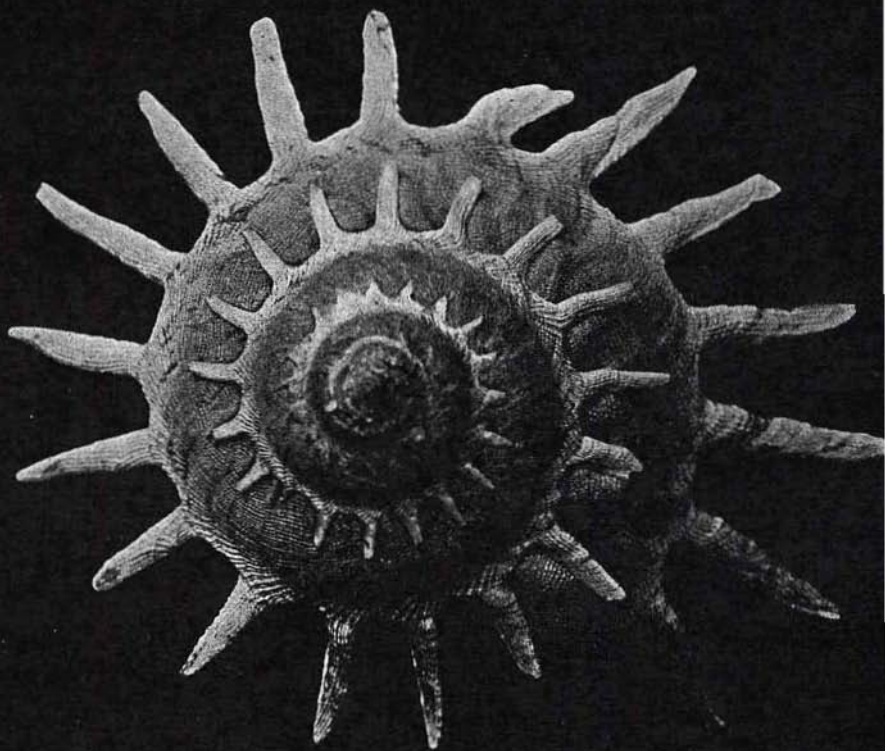
Door opgelegde denkbeweging, b.v. het „inprenten” van meetkundestellingen, kunnen wij het denken in bepaalde banen leiden. Deze banen zouden wij kunnen vergelijken met denkbeeldige groeven in onze hersenen. Als de school nu zorgt voor de motivatie (de eis) en voor het aanbrengen van deze groeven, dan kunnen er wellicht goede cijfers behaald worden, maar leert het kind daarmee zelf denken, d.w.z. een pad vinden buiten de aangebrachte groeven?

En wat zal zijn denken in beweging brengen, wanneer de opgelegde motivatie wegvalt, b.v. na de school? Het kan wellicht een kwestie van opvoeding genoemd worden, wanneer een mens in een probleem ten eerste de stuwung opbrengt om erin door te dringen en ten tweede daarin zelf een pad te vinden buiten de eventueel aanwezige schablonegroeven.

Het doel van alle scholing moet zijn mensen te vormen, die in staat zijn zichzelf steeds verder te blijven ontwikkelen, doordat zij, — gereguleerd door een innerlijke verbondenheid met de stof, — zelfstandig hebben leren denken. Deze verbondenheid, waaruit wellicht ook de intuïtie voortkomt, levert de motorische en onderrichtende kracht bij uitnemendheid, die kan voeren tot de vrije slag van het scheppend denken, tot de innerlijke discipline van de geest en tot het ontdekken van onvermoede schoonheid.

Wat is de waarde van de meetkundestelling, die het kind uit het boek leert, voor de ontwikkeling van het denken?

In het algemeen kan geconstateerd worden, dat het kind daarmee een bepaalde denkbeweging wordt opgelegd. Dit wordt herhaald en herhaald, ook met andere stellingen, met de bedoeling, dat de leerling precies dezelfde denkbeweging zelf gaat maken bij de vraagstukken, door inslijping. Dit kan dan voeren tot een hanteerbaarheid, tot vakkennis. De vraag echter is, of b.v. de logica in deze opgelegde en ingeslepen denkbeweging tot eigen denkgevoonte wordt, die in dat geval ook op ander terrein dan de meetkunde overdraagbaar wordt. Hoewel dit in de bedoeling van het meetkundeonderwijs ligt, leert de ervaring, dat dit slechts min of meer zo is en wij hebben voor het geval de overdracht niet lukt de uitdrukking: opgeplakte kennis. Daarnaast staat een andere mogelijkheid: die van het stimuleren van het eigen



[81]

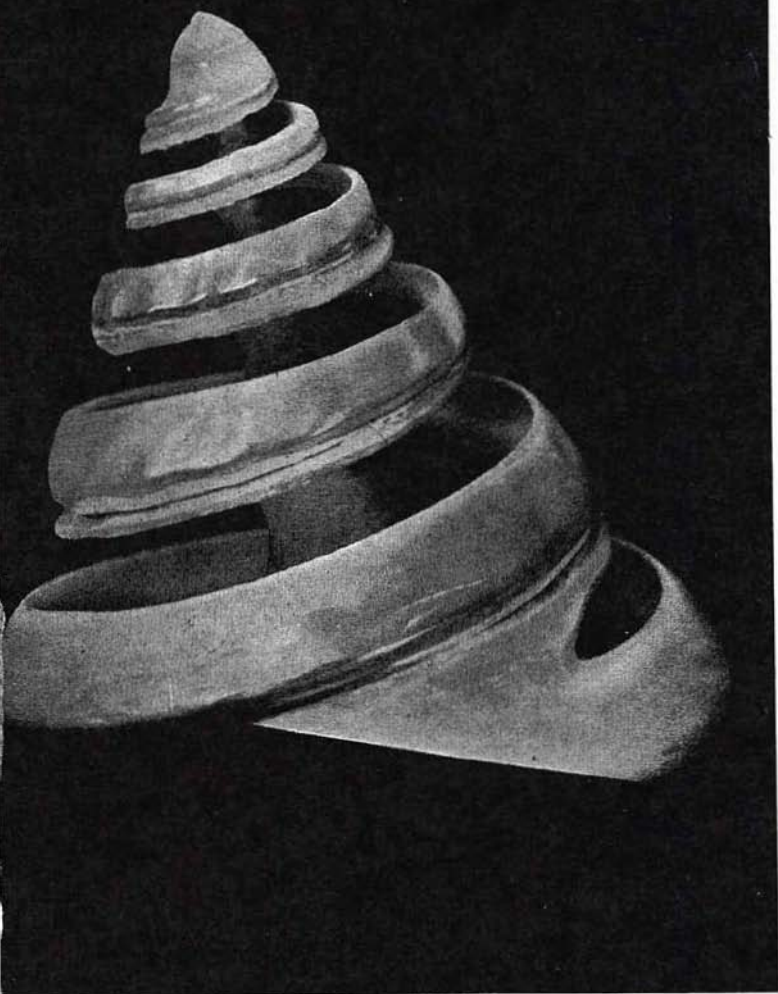
denken. Dit is mogelijk door i.p.v. een denkbeweging op te leggen, vragen te stellen, die een onderzoek aanmoedigen. Dit is de Socratische methode, waarbij echter geen sterk suggererende vragen bedoeld worden. Socrates vergeleek zijn taak bij het werk van een vroedvrouw. Nadat het denken bevrucht is, kan men helpen bij de geboorte van het inzicht door weloverwogen vragen. Ten slotte vertoont zich dan het gewonnen inzicht in gedachte en schone figuur. Een opgelegd denken zouden wij in dit verband kunnen vergelijken met een ondergeschoven kind, een vreemd element. Door een dergelijk geboren worden van inzicht lijkt de proei in het denken discontinu. Het is het „Aha-Erlebniss” van Künkel.

Wij zullen nu onze aandacht moeten richten op de bevordering van de eigen denkbeweging.

Bij een analyse van het denken komen wij tot verschillende denkbewegingen. Hiervan kunnen wij noemen het: oriënteren, analyseren, ordenen, abstraheren, combineren, concluderen en formuleren.

Belangrijker echter dan dit te weten is de vraag hoe wij kunnen bevorderen, dat elk van deze bewegingen goed verloopt, dus dat de analyse, de ordening, enz. goed wordt uitgevoerd. De factoren, die o.i. de denkbeweging ten goede kunnen beïnvloeden zijn:

- a. de aanwezigheid van goed denkmateriaal, goede gegevens, denkstof.
Dit zal onder hoofd C besproken worden;
- b. de motivatie, die door de stof opgewekt wordt, zoals onder A besproken;
- c. volgzzaamheid in het denken of wel het reproductief denken. Hiermede wordt het proces bedoeld, waardoor in de geest van de hoorder of lezer dezelfde voorstelling gewekt wordt als in die van de spreker of schrijver;
- d. eerlijkheid; op zichzelf een redelijk-zedelijke factor en motivatie, die op het gebied der rede zich uitwerkt in consequent, kritisch en logisch denken. De oefening hierin en de controle daarop zouden wij b.v. kunnen vinden in het gezamenlijk onderzoek met de Socratische vraagmethode;
- e. de voorstelling in gedachte; het in gedachte uitbreiden van getekende figuren. Dit kan wellicht geoefend worden door de samenhang in de figuren te leren zien; door te extrapoleren; door een bewegend beeld op te bouwen. Hiervan is elke tekening een voorbeeld;
- f. het alle mogelijkheden opsporen. In ons denken zitten wij dikwijls zodanig vast aan één of enkele mogelijkheden, dat wij blind zijn voor andere. Het paardje met oogkleppen is ons niet vreemd. Vandaar dat het — en niet alleen in de meetkunde — van belang is om te trachten alle mogelijkheden in een probleem te vinden. Het is ook een zaak van ordening;
- g. de beweeglijkheid van het denken. Deze wordt misschien bevorderd door de beweging der figuren en door het blijven vragen en onderzoeken der figuren;
- h. eigen onderzoek en gezamenlijk onderzoek, waaraan men actief deelneemt;
- i. samenhang van de stof. Alle figuren hangen samen en het blijkt een vreugde voor ons te zijn, wanneer wij een nieuwe samenhang ontdekken. De stof en de vraagstukken uit onze leerboeken schijnen veelal als droog zand aan elkaar te hangen. Alle hier ontwikkelde voorbeelden laten zien, dat eigen onderzoek slechts mogelijk is en uitgevoerd kan worden in samenhangen. Het zoeken naar samenhang is zich verdiepen. De mens



[82]

Deze, door de zee afgesloten schelp van de Tolhoorn (*Trochus niloticus* Linné) vertoont op zeer duidelijke wijze de draaiende straling vanuit een punt, dat wij geneigd zijn te beschouwen als het oorspronkelijk centrum, dat de groei reguleerde. Het stralend punt is daarbij niet in het platte vlak gebleven doch al stralende loodrecht daaruit gegroeid in de wereld van drie dimensies.

streeft in wetenschap, wijsheid en caritas naar steeds groter samenhang. Samenhang realiseren voert tot het vinden van wetmatigheid en abstractie, die de samenhang erkent. Het zijn de samenhangen, die ten slotte uitgroeien tot de eenheid;

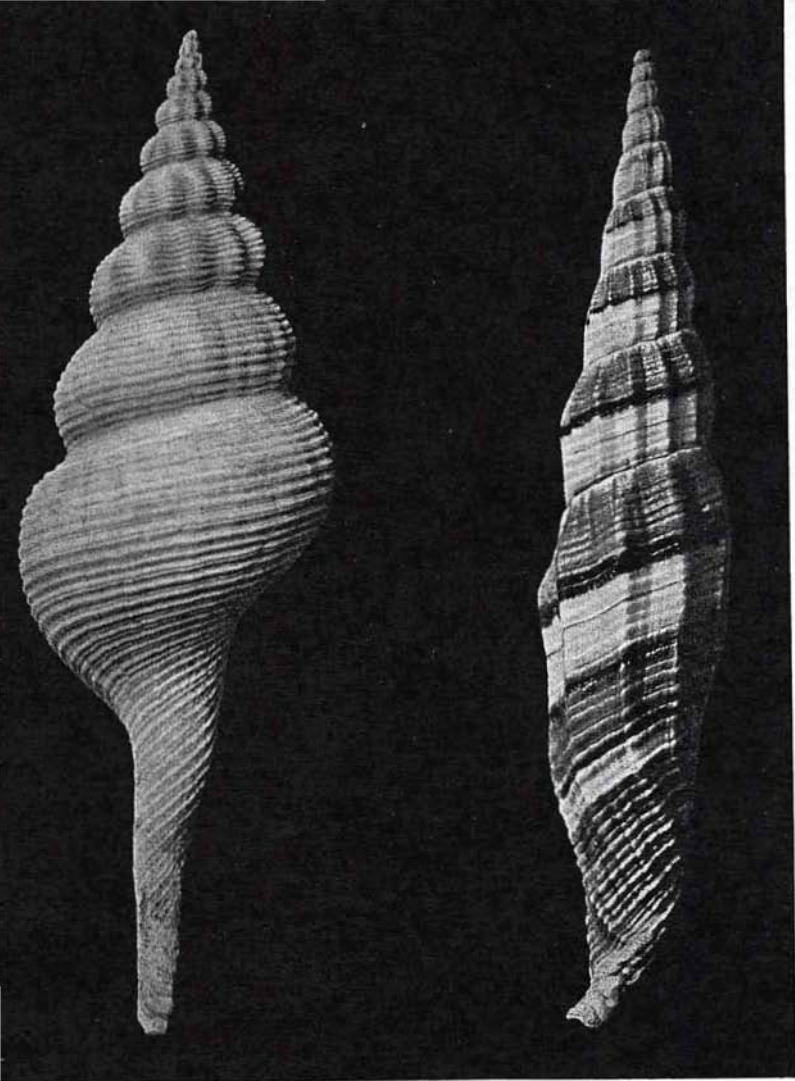
- j. de schoonheid der meetkundige figuren zien en aanvaarden. Deze schoonheid is een verheuging, die stimuleert en noopt tot inspanning. Het is de figuur, die ons telkens brengt tot nieuwe vragen. Elke figuur is verworvenheid en nieuw uitgangspunt tegelijk;
- k. concentratie. Het denken van de mens, onderhevig aan een veelheid van indrukken en impulsen, is geneigd als een aap van de hak op de tak te springen. Om tot wetenschappelijk en inzichtelijk denken te komen is het echter nodig zich te kunnen verdiepen in één probleem. Dit vergt concentratie. Concentratie wil zeggen een opgaan en zich verliezen, dat als levensvervulling, geluk, ervaren wordt. Concentratie op stof, waarin geen verband aanwezig is, kost veel inspanning. De motivatie en de samenhang van de stof kunnen de concentratie bevorderen. Ook het gezamenlijk onderzoek kan daartoe medehelpen.



C. De Denkstof.

De stof in het algemeen, dus ook de meetkunde, is te beschouwen als het medium, waaraan en waardoor zich ons denkvermogen kan ontwikkelen. Voor wetenschappelijk denken vinden wij bij Prof. dr. Ph. Kohnstamm als definitie: „Wetenschappelijk denken is het leren kennen en begrijpend hanteren van categoriale ordeningssystemen, waardoor een onsamenhangende veelheid van aanschouwelijke gegevens tot een geordend en beheersbaar geheel wordt.”

Willen wij dit denken scholen met ons meetkunde-onderwijs, dan moeten wij het kind dus een veelheid van gegevens bieden, waarin het zelf zijn ordeningssysteem moet gaan vinden.



[83]

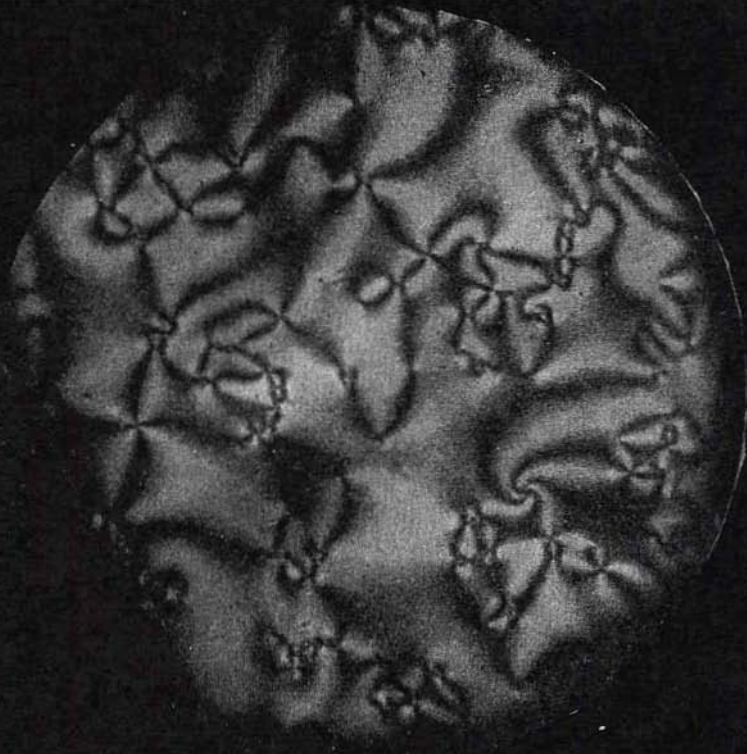
Fusus proboscideus (links) Koningsmyter (*Mitra regina* Swains), rechts.
 Ook deze schelpen laten in hun vormingsprincipe een draaiende straling zien, waarbij het centrum zich tegelijkertijd met grotere snelheid dan bij de Tolhoorn loodrecht op het vlak van draaiing verplaatste en wel, -niet zoals men misschien zou menen naar boven op de afbeelding-, doch naar beneden.

Vanuit dit gezichtspunt is het dan principieel verkeerd om de stof reeds geordend aan te bieden, zoals dit in onze schoolboeken eigenlijk steeds gebeurt, omdat hun dan de kans ontnomen wordt zich in deze denkwerkzaamheid te oefenen. Ook zal het kind de noodzaak en de belangrijkheid van deze ordening niet voelen, als het de ongeordendheid niet heeft gekend. Geven we de stof klaar geordend, dan wordt de ordening op gezag aanvaard en wellicht niet of nauwelijks opgemerkt, maar in elk geval niet als uitkomst van een innerlijke drang beleefd en genoten. We onthouden het kind de belevenis van het komen van de chaos zijner voorstellingen tot kosmos, welke ervaring we misschien het scheppende moment mogen noemen. Deze ervaring zouden we dan misschien mogen beschouwen als oefening tot scheppende activiteit, waarvan we de waarde, en speciaal de innerlijke vormende waarde niet kunnen miskennen. Scheppende activiteit is een van de wezenstrekken van de mens. Bij het beleven daarvan ondervindt hij een diepe vreugde. Als ons onderwijs plaats zou bieden voor scheppende activiteit, zouden wij, meen ik, mogen rekenen op het aanspreken van een diepgewortelde innerlijke vreugde. Hierbij moeten we natuurlijk wel in het oog houden, dat de scheppende activiteit voor individuen van verschillende aanleg ook verschillend geaard zal zijn en dus niet alleen op het terrein van de vlakke meetkunde behoeft te liggen.

De eerste vraag, waartoe ons dit brengt is dan: biedt de meetkunde mogelijkheden om scheppende activiteit wakker te roepen, voedsel te geven en te oefenen? ook bij kinderen? Hierop volgt een tweede vraag, die met de eerste correlaat is: zijn kinderen van de leeftijd van 12—18 jaar vatbaar voor de ontwikkeling van een scheppende activiteit?

Als we met de beantwoording van de tweede vraag beginnen en daarbij de mening zijn toegedaan, dat alle innerlijke ordening tot scheppende activiteit kan gerekend worden, dan zijn kinderen ook vatbaar voor de *ontwikkeling* van deze scheppende activiteit. Wanneer we, afgezien hiervan, eens allerlei eigen prestaties van kinderen in dit opzicht bezien, dan is het zelfs zeer de vraag, of zij hierin achtergesteld moeten worden bij volwassenen. Verschillende psychologen, o.a. Alfred Adler, hebben uitgesproken, dat in het kind schepende krachten aanwezig zijn.

Als antwoord op de eerste vraag dienen de gegeven voorbeelden, die kunnen laten zien, dat in de meetkunde niet alleen scheppende activiteit kan ontplooid worden, maar dat de meetkunde t.o.v. andere ontwikkelingsgebieden nog speciale gunstige kanten heeft, waarvan genoemd kunnen worden:



[84]

1. De meetkunde beschikt over visuele voorstellingen, die het abstracte denken te hulp komen.
2. Gemakkelijke hanteerbaarheid van het materiaal (potlood, passer, papier, lijnen).
3. De visuele voorstellingen kunnen bevruchtend op het denken terugwerken en het stimuleren, b.v. door hun esthetische waarde.

Verkeerde leerstof kan de ontplooiing van het denken remmen. Hoe moeten we de leerstof dan maken? Hier kunnen we naar Künkel luisteren: „Vor allem aber stelle man die Aufgaben so, dass sie nicht wie ein notwendiges Übel, sondern wie ein erfreuliches Stück der eigenen Entwicklung erscheinen.”

Dit kunnen we bereiken door van een vraag of vraagstuk uit te gaan en dat te beschouwen als een veld van onderzoek, waarin we als een ontdekkingsreiziger onze weg moeten vinden. In het algemeen zullen we dan niet bij de

grondbeginselen van de meetkunde, de axioma's, beginnen. Dit is echter niet erg en als verschijnsel bij elk onderzoek zeer normaal. Als het onderzoek dan ergens begonnen is, zal het interesse op een gegeven ogenblik ons ook misschien aansporen tot de fundamenteën van de meetkunde door te dringen. Op deze wijze zou het onderwijs in principe de gang van de vorsende wetenschap kunnen herhalen. Prof. H. J. Jordan zegt:

„Het ideaal van het onderwijs moet mitsdien zijn: de leerling van een stukje werkelijkheid uit te laten gaan, dat stukje werkelijkheid zelf te ontleden, zelf ervaringen op te doen aangaande zijn eigenschappen, zelf zijn begrippen hieruit te vormen.”

„Alleen de door opbouwend denken verkregen beelden leven: zij leven als het herinneringsbeeld van een landschap, waardoor men gewandeld en gewaand heeft. Wie slechts de inhoud van leerboeken kent, draagt in zich hoogstens zodanige beelden van de werkelijkheid, als ontstaan door de herinnering van een prent: zulke beelden zijn statisch, niet dynamisch. De thans zo snel veranderende maatschappij is echter in hoogste mate dynamisch. Onze schoolopleiding daarentegen was volstrekt statisch.”

Kunnen we deze denkbeelden in ons meetkundeonderwijs verwerklijken? Wij hopen, dat de voorbeelden in dit boek aantonen, dat dit kan.

Het zelf leren vinden van de goede denkrichting in een veld van onderzoek is niet alleen belangrijk in de meetkunde. Het is iets anders dan het oplossen van een opgelegd vraagstuk, waarbij geen graad van vrijheid bestaat. Dit betekent echter niet, dat we dit soort vraagstukken wel kunnen missen. Doch Prof. dr. Ph. Kohnstamm laat zich hierover aldus uit:

„De traditionele didactiek stelt de regel: Richt de vraag altijd zo in, dat er maar één antwoord op mogelijk is. Vandaar ook, dat de uitwerking dier gangbare didactiek eerder het afleren dan het aanleren van denken moet worden genoemd. Uit louter vrees voor remmingen door enige onbepaaldheid, laat men het kind helemaal geen keus meer en belet het dus juist tot zelfstandig denken te komen.”

De vlakke meetkunde nu is te zien als een groot veld van onderzoek, waarin ieder vondsten kan doen, al mogen die voor een ander wellicht niet nieuw zijn. Doceren kan dan worden tot het goed leiden van een ontdekkingstocht. Hierbij behoeft echter niet alles zelf gevonden te worden. Wegen en hulpmiddelen van andere ontdekkers kunnen, wanneer gewenst, dankbaar aanvaard worden. Het eigen onderzoek is, goed geleid, vanaf het begin reeds



[85]

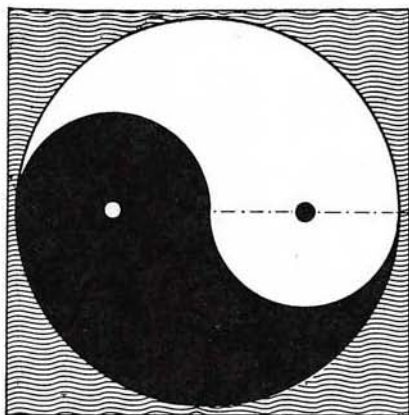
mogelijk. Daarbij zullen wellicht velerlei mogelijkheden en zijwegen gevonden worden, — voor dat geval is de leider daar, die de richting van het verdere onderzoek mede helpt bepalen. In zulk een onderzoek kan het leven tot uiting komen.

Hieruit volgt, dat we niet louter geheel bepaalde problemen opgeven, waarbij vraag noch antwoord enige mate van vrijheid laten. We kunnen daartoe geraken door te trachten door te dringen in de aard, het wezen van een figuur. We kunnen onderzoeken van welk dynamisch totaalbeeld onze figuur een speciale vorm is; m.a.w. trachten ons het bewegende beeld eigen te maken, waarvan hij een doorgangsvorm of momentopname vormt. We kunnen de samenhang doordenken, waarin de figuur behoort. We kunnen de figuur trachten te volgen tot in alle mogelijkheden, tot in het oneindig kleine of grote, — en zelfs dóór het oneindige heen.

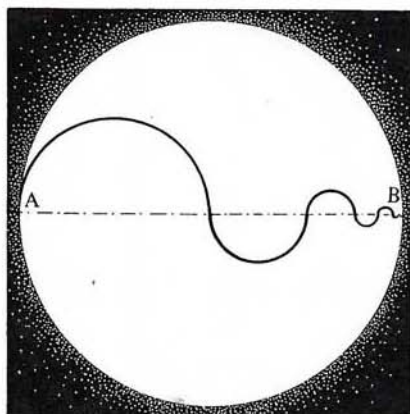
Door het leren consequent dóórtrekken, dóórdenken en samenhang zien worden wellicht denkbewegingen geoefend, waardoor ook op andere geestesgebieden consequent denken en handelen toegepast worden. De veranderende figuren kunnen misschien leiden tot beweeglijkheid van het denken en soepelheid van de geest. En het leren overgaan van de individuele figuur tot de algemene, — het vinden van deze laatste uit de bijzondere figuur, — kan leiden tot het leren vinden van de wet en de abstractie.

Op deze wijze werkend, komen wij op een andere wijze tegenover de stof te staan: het onbekende lokt; bij het voorwaarts gaan ontplooien innerlijke vermogens hun activiteit en iedere vondst kan een wonder zijn, een wonder, dat aantrekt tot verder speuren en dat nieuw uitzicht en inzicht belooft. Het aankweken van deze instelling lijkt vruchtbaar voor de ontplooiing van de geest en van waarde boven de meetkunde uit. Deze instelling is het ook, die ons de schoonheid doet ontdekken, waarvan de tekeningen slechts een nimmer bevredigende afschaduwing tonen. Op deze wijze kan de meetkunde ook leiden tot het wonder van de oervormen, die wij in het planten- en dierenrijk en in de kosmos terugvinden. Zij kan ons door de verbondenheid van haar figuren een vermoeden geven van meerdere verbondenheid, ja misschien van een al-verbondenheid en door het aanschouwen van de beweging en het ritme in de figuren doen groeien tot een inzicht, waarin al het bewegende, alle realiteit, geschouwd wordt als uiting, groeiende vorm, maja, van de Goddelijke idee.

Eén geest dicht achter alles. Schelling



[46]



[47]

HOOFDSTUK 3.

ONDERZOEK VAN ENKELE ANDERE ONDERWERPEN. FIGUREN MET GELIJKE OMTREKKEN EN GELIJKE OPPERVLAKKEN.

Figuur 46 is het bekende symbool voor Tao van de oude Chinezen. In Tao is alles. In Tao is geen tegenstelling. Daarom moet Tao zich splitsen in Yang en Yin. Dit wordt gesymboliseerd in de tekening. De cirkel is het symbool voor de volmaaktheid, Tao. Daarin zien we twee vissen: Yang (leven) en Yin (vorm). De witte vis, Yang, heeft een zwart oog, want niets is geheel leven. De zwarte vis, Yin, heeft een wit oog, want niets is geheel vorm. Tao en Yang worden dikwijls met elkaar verward, waardoor een dualisme overblijft, maar Yang en Yin zijn de tegengelden, die synthetisch opgelost zijn in Tao.

We beschouwen deze figuur. Gaan we van het ene uiteinde A van de middellijn naar het andere B, langs de buitenste halve cirkel of langs de S-vormige lijn, dan blijken deze wegen bij berekening even lang te zijn. Geldt dit alleen voor deze twee-deling van de middellijn? Bij onderzoek blijkt, dat *alle* wegen van A naar B langs halve cirkels even lang zijn, hoe men die ook kiest, zie b.v. tek. 47.

Wij kunnen de middellijn verdelen in 2, 4, 8, 16, .. 2^n delen. De weg van A naar B langs willekeurig gekozen halve cirkels blijft altijd even groot. Nemen wij de grootte van de middellijn = 1 dan kunnen wij uit tek. 47 aflezen dat: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{2^n}$ (1)

ook dat: $1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \dots \frac{3}{4^n}$ voor $n = \infty$ (2)

(2) is ook uit (1) af te leiden door telkens 2 termen van de reeks bij elkaar te nemen.

Zijn er nog meer reeksen uit af te leiden?

Hoe groot zijn de oppervlakken van de kleiner wordende cirkels in tek. 48 tezamen? Zij blijken de cirkel te verdelen in 3 stukken met gelijke omtrek en gelijk oppervlak. Uit een deling door machten van 2, resulteert een deling in 3 gelijke delen! Ook tek. 49 is een bron van onderzoek.

Hoe wordt de figuur bij deling van de middellijn in drieën?

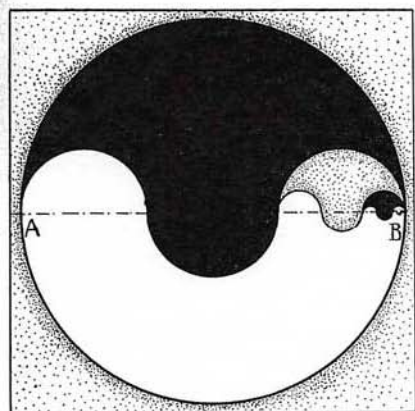
Dan krijgen we tek. 50.

De omtrekken van de twee delen, waarin de cirkel van fig. 50 oorspronkelijk verdeeld is, blijken wel gelijk te zijn, doch de oppervlakken niet. Een karakteristiek onderste deel noemde Archimedes salinon. (zoutvat).

Uit tek. 50 kunnen we gemakkelijk aflezen, dat, — de middellijn gelijk 1 stellend, —

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots + \frac{2}{3^n}$$

Combineren wij deze reeks met de hiervóór gevonden reeksen, dan komen



*Ik zie, waar dat ik ga of
kom:*

*Geen bij maakt honing
zonder blom.*

Jacob Cats

[50]

wij tot de vraag of daaruit dan ook volgt:

$$1 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \dots + \frac{4}{5^n}$$

en in het algemeen:

$$1 = \frac{m}{m+1} + \frac{m}{(m+1)^2} + \frac{m}{(m+1)^3} + \dots + \frac{m}{(m+1)^n}$$

Wij kunnen het gevondene ook als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \\ &= 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = 4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots \right) \end{aligned}$$

of ook:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 0,1 \text{ repetent.}$$

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \dots = 0,01 \text{ repetent.}$$

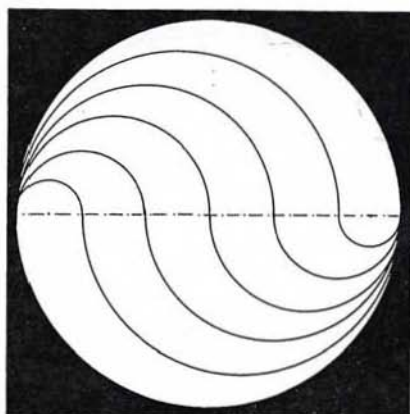
Wij vinden dus, dat de repeterende breuken deel uitmaken van een meer algemeen complex.

Het oppervlak van de meetkundige reeks van bovenste delen is:

$$\begin{aligned} O_1 &= \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{4}{9^3} + \dots \right) \times O = \frac{\text{eerste term}}{1 \text{ minus de reden}} \times O = \\ &= \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{1}{9}} O = \frac{1}{2} O. \end{aligned}$$

*Mij spreekt de lijn een tale
Mij is de figuur beleefd.
Mij groet het al temale
Dat God geschapen heeft.*

naar Guido Gezelle



[51]

wanneer wij het oppervlak van de grote cirkel O noemen. Ook bij deze deling van de middellijn in drieën vinden wij dus, dat de cirkel aldus in 2 delen verdeeld wordt met gelijke omtrek en gelijk oppervlak.

Wat krijgen wij, wanneer wij in tek. 46 de middellijn niet in 2 gelijke delen verdelen, doch in 3, 4, 5, ... n delen? De cirkel volgens hetzelfde principe verdelend vinden wij b.v. tek. 51. Zijn ook hier de oppervlakken en omtrekken der delen gelijk? Zo ja, hoe zit dit dan eigenlijk?

Uit tek. 51, waarin $n = 6$, kunnen wij afleiden, dat de 6 volgende vormen aan elkaar gelijk zijn en dat zij alle $= 2n$ zijn.

$$5^2 - 4^2 + 2^2 - 1^2$$

$$6^2 - 5^2 + 1^2 + 0^2$$

$$4^2 - 3^2 + 3^2 - 2^2$$

$$3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2$$

$$2^2 - 1^2 + 5^2 - 4^2$$

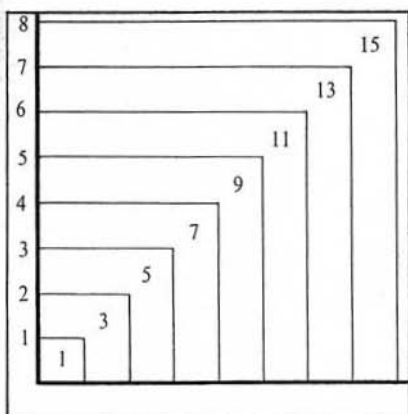
$$1^2 - 0^2 + 6^2 - 5^2$$

Wat krijgen wij, als wij deze vormen telkens 2 aan 2 aan elkaar gelijk stellen?

Dan kunnen we b.v. vinden:

$$\begin{aligned} 6^2 - 2 \times 5^2 + 4^2 &= 5^2 - 2 \times 4^2 + 3^2 = 4^2 - 2 \times 3^2 + 2^2 = \dots \\ 0^2 - 2 \times (-1)^2 + (-2)^2 &= n^2 - 2(n-1)^2 + (n-2)^2 = \text{constant} \end{aligned}$$

voor alle waarden van n .



*Hoe groter de liefde, die
naar iets uitgaat, hoe rij-
ker en dieper de echo,
waarmee het antwoordt.*

Prof. dr. Werner Speiser

[52]

Of ook:

$6^2 - 5^2 - 4^2 + 3^2 = 5^2 - 4^2 - 3^2 + 2^2 = 4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2 =$
constant voor alle opeenvolgende gehele getallen.

Men kan hieruit ook vinden, dat elk oneven getal gelijk is aan het verschil van de kwadraten van 2 opeenvolgende getallen.

Dit is anschouwelijk te maken in tek. 52.

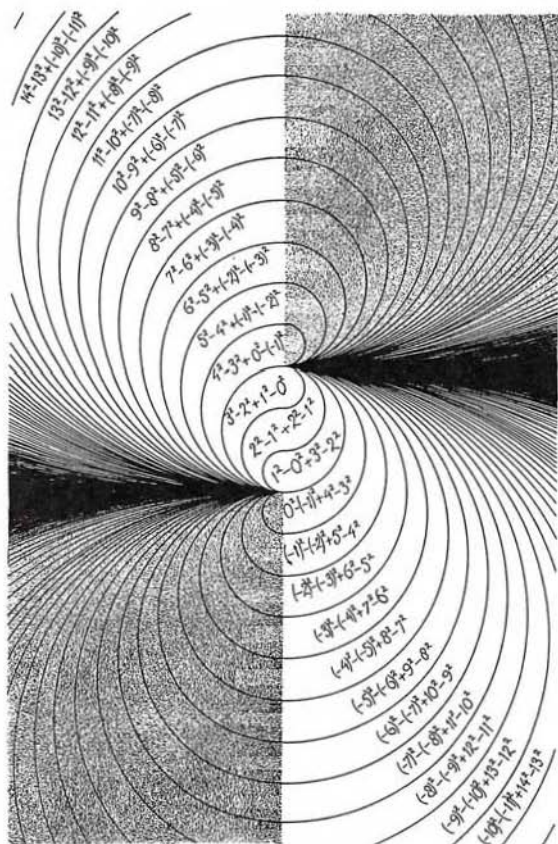
Algebraïsch volgt dit direct uit:

$$n^2 - (n-1)^2 = (n + n - 1) \times (n - n + 1) = 2n - 1$$

In tek. 52 zien wij ook, dat de som van een willekeurig aantal opeenvolgende oneven getallen, beginnend bij 1, steeds een kwadraat geeft.

Tek. 51 laat ons nog niet los. Wij zien daar de ruimte binnen de cirkel, die zich schikt tot een geheel van oppervlakken met gelijke omtrek en gelijke inhoud. Hier zit iets uitzonderlijks in. En wij vragen ons af: is het alleen de ruimte binnen de cirkel, die deze eigenschap vertoont? Hoe is het met de ruimte daarbuiten, die in het oneindige verloopt? M.a.w.: gaat de wet van tek. 51 op de een of andere wijze ook door buiten de individuele begrenzing van de cirkel? Het is misschien wel een koene gedachte als omtrekken en oppervlakken daarbuiten gelijk moeten blijven aan die binnen de cirkel, maar een dergelijke begrenzing roept deze gedachte toch op.

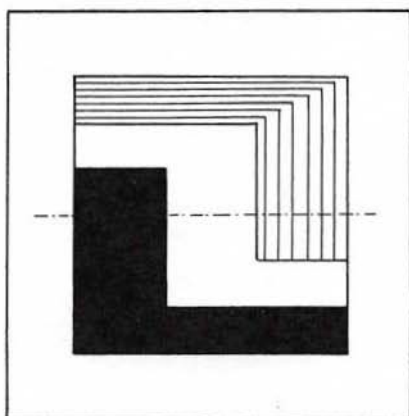
Wanneer we eens naar buiten toe op het verlengde van de middellijn dezelfde verdeling zouden toepassen als naar binnen en geheel analoog deze



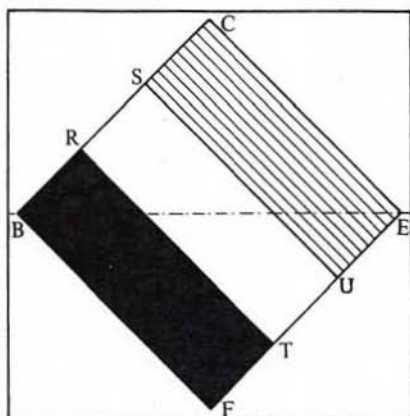
[54]

Men grijpe zo weinig mogelijk in, ook als er fouten gemaakt worden. Want alleen door negatieve ervaringen komt het kind tot positieve belevingen. Een jongen, die in zes weken na twintig mislukte pogingen een huistelefoon aanlegt, zal dertig jaar later een Edison of Marconi zijn. Een jongen echter, die onder controle en leiding van zijn vader in drie dagen een volmaakte telefoon vervaardigt, heeft op zijn best de kans een nauwgezet ambtenaar te worden, die de ontwerpen van een Edison of Marconi dienstvaardig en vlijtig uitvoert.

F. Künke



[54]



[55]

punten met halve cirkels verbinden met de uiteinden van de middellijn, dan ontstaat *tek. 53*.

In het midden ziet men de oorspronkelijke cirkel met de 3-deling.

Berekent men de oppervlakken en de omtrekken van de figuren, die ontstaan, dan blijkt, dat deze alle aan elkaar gelijk zijn en aan die van de figuren binnen de cirkel, mits men de delen, die zich in het rechter-boven en in het linker-onder kwadrant bevinden, met negatieve waarde invoert.

Teneinde er iets meer van te begrijpen, gaan we het proces voor de gelijke oppervlakken eens rekenkundig na. Noemen wij de straal van de oorspronkelijke cirkel r , dan krijgen wij b.v.:

$$\frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2}{3} r\right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{3} r\right)^2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{4}{3} r\right)^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{3} r\right)^2$$

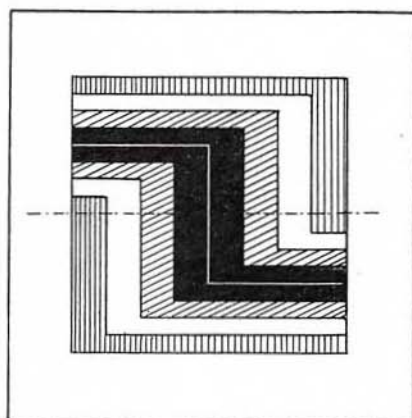
vereenvoudigen wij deze gelijkheid door vermenigvuldiging met $\frac{9}{\frac{1}{2} \pi r^2}$

dan wordt het:

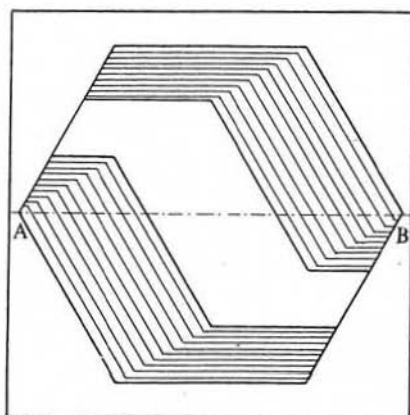
$$9 - 4 + 1 = 16 - 9 - 1$$

Beschouwen wij alle gelijkheden, die wij op deze manier krijgen, om erachter te komen welke regelmaat of wetmatigheid erin verborgen is, dan ontdekken wij het volgende:

$$\begin{array}{rclcl} 5^2 & - & 4^2 & + & (-1)^2 - (-2)^2 = \\ 4^2 & - & 3^2 & + & (0)^2 - (-1)^2 = \\ 3^2 & - & 2^2 & + & 1^2 - 0^2 = \end{array}$$



[56]



[57]

$$\begin{array}{rclcl}
 2^2 - & 1^2 + & 2^2 - & 1^2 = \\
 1^2 - & 0^2 + & 3^2 - & 2^2 = \\
 0^2 - & (-1)^2 + & 4^2 - & 3^2 = \\
 (-1)^2 - & (-2)^2 + & 5^2 - & 4^2 = \\
 (-2)^2 - & (-3)^2 + & 6^2 - & 5^2 = 6 = 2 \times 3
 \end{array}$$

Hierin zit een volmaakte regelmaat. Delen wij de cirkel-middellijn in 2, 3, 4, 5, n delen, dan krijgen wij dergelijke vormen, die dan alle resp. gelijk zijn aan 2×2 , 2×3 , 2×4 , 2×5 , en $2n$.

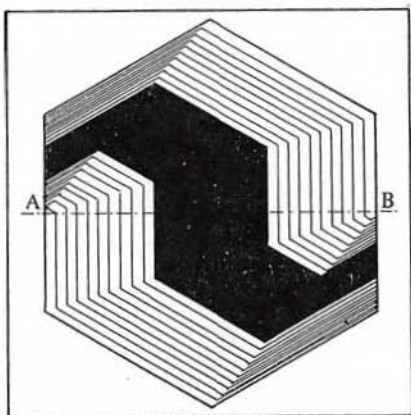
In tek. 53 zijn in de oppervlakken de bijbehorende vormen aangegeven.

Bij deze rekenkundige analyse zien wij de negatieve gebieden spontaan optreden.

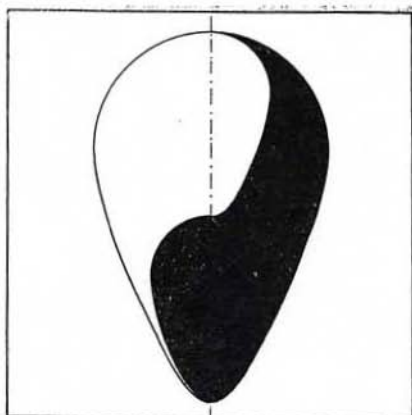
De individuele cirkel blijkt het centrum te zijn van een werveling, die zich tot in het oneindige voortzet. Het lijkt erop, alsof deze tekening de verbeelding is van de gedachte, dat het individu beschouwd kan worden als een wervel in de „aether” van de geest en het toppunt (en wellicht knelpunt) van verleden en toekomst.

De figuren van tek. 46 en 51 blijven ons bezig houden en stellen ons voor de nieuwe vraag:

Geschiedt dit ontstaan van figuren met gelijke omtrek en gelijk oppervlak alleen bij de cirkel of misschien ook bij andere figuren en zo ja bij welke en wat is dan het kenmerk van dergelijke figuren?



[58]



[59]

Om in deze gedachtegang verder te komen, realiseren wij ons, dat de cirkel de eenvoudigste kromlijnige figuur is. Laten wij dus ons verder onderzoek beginnen met de eenvoudigste rechte lijnige figuur: het vierkant. De deling van de cirkel gaat uit van 2 diametraal tegenover elkaar liggende punten en de deellijnen beschrijven figuren, gelijkvormig aan de figuur, die zich eroverheen welft.

Bij deling van de middellijn van het vierkant in drieën ontstaat tek. 54.

Bij berekening blijken de 3 delen, waarin het vierkant verdeeld wordt, eveneens gelijke omtrek en gelijk oppervlak te hebben.

Maar een diagonaal is ook als middellijn te beschouwen. Voeren wij de deling in drieën volgens hetzelfde beginsel uit, dan krijgen wij tek. 55.

$$BR + RT + TE = BS + SU + UE = BC + CE$$

En weer blijken omtrekken en oppervlakken der 3 delen gelijk te zijn.

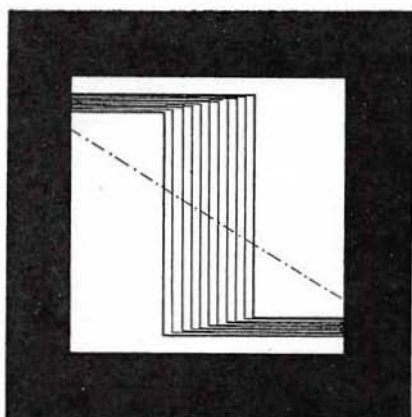
Bij deling in achten ontstaat tek. 56.

Waarom gaat het bij een regelmatige 5-hoek niet op en wel bij een regelmatige 6-hoek? Zie tek. 57 en 58.

Waarom gaat het wel op voor een ei, zie tek. 59 en niet voor een gelijkbenige driehoek en een trapezium?

Kunnen we de as bij een vierkant en b.v. bij een ovaal ook willekeurig door het middelpunt kiezen?

Zie tek. 60 en 61.



[60]

Het blijkt inderdaad te kunnen.

In tek. 53 vindt de verdeling in de cirkel ook daarbuiten zijn voortzetting. Zal hetzelfde bij de andere figuren ook het geval zijn, en zo ja, hoe zal deze daarbij worden?

Tekenen we de voortzetting van de 3-deling van het vierkant ook daarbuiten, dan ontstaat tek. 62.

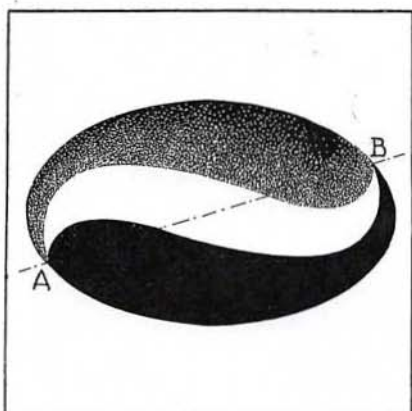
Tot onze verwondering zien wij 5 afzonderlijke banen ontstaan, die in de figuur spiraalvormig rond blijven gaan. 2 banen ontspringen in het vierkant, 2 omvatten het en de 5-de baan loopt door het vierkant naar beide zijden.

De gepunteerde gebieden zijn weer negatief. Daar tussenin bevindt zich in het centrum (natuurlijk!) het vierkant, het individu, de bron en de door-gang van het hele gebeuren.

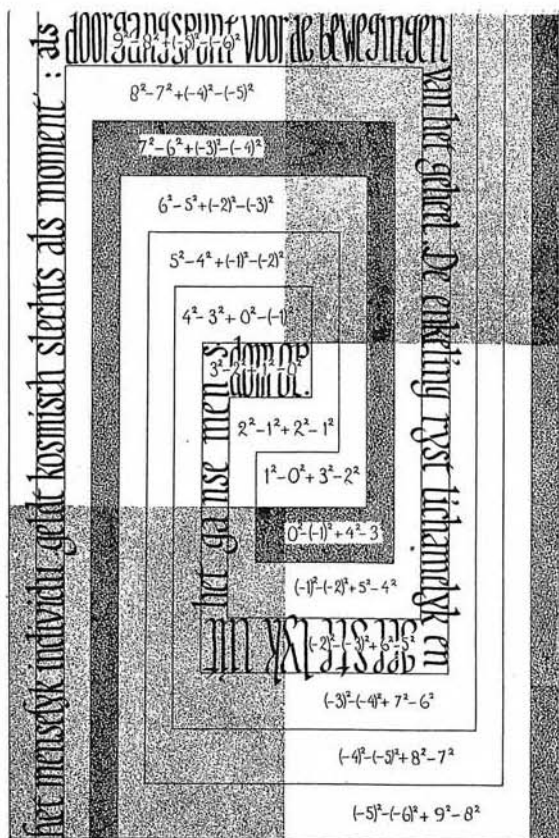
Niet alles komt in zijn innerlijk tot bewustzijn. De hemel welft zich boven hem. Het onbewuste, de levensgrond, draagt hem. Hoe meer differentiatie, hoe meer stromen door het individu gaan, hoe meer geestesstromen hij omvat, des te fijner en rijker zijn persoonlijkheid wordt.

Er zijn verschillende wijzen om de meetkundige figuren te beschouwen. Wanneer wij beseffen, dat alles elk ogenblik verandert, dat er geen stilstand is, en ook onze geest steeds bezig is te veranderen, zullen wij oo' de meetkundige figuren in hun ontwikkeling, in hun beweging moeten beschouwen om ze „werkelijk” te leren kennen.

Een andere beschouwingswijze is de statische. Dan wordt een bepaalde toestand, hier: stand, gefixeerd en de eigenschappen van een dergelijke momentopname onderzocht.



[61]



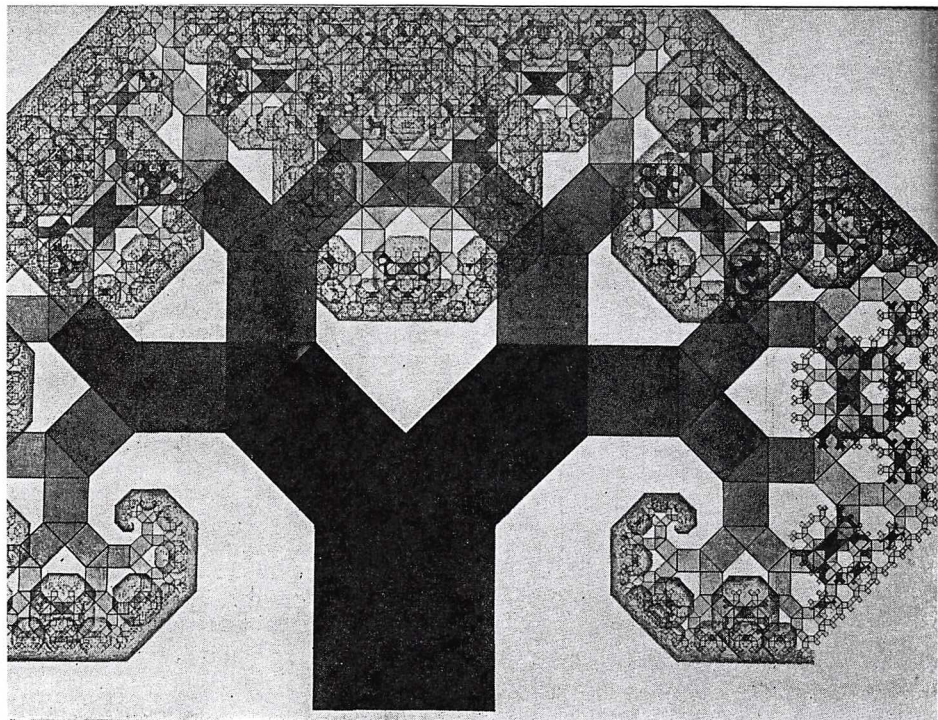
[62]

„Het menselyk individu geldt kosmisch slechts als moment: als doorgangspunt voor de bewegingen van het geheel. De enkeling rijst lichamelijk en geestelijk uit het ganse mensdom op.”

B. de Ligt.

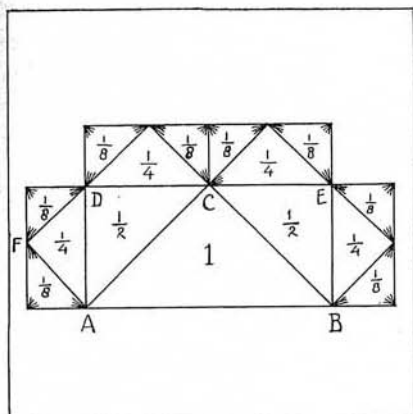
Grens en vorm zijn de kenmerken van het eindige.

Oneindig is de geest, het stramien, waaraan alles deel heeft; die ons doorstroomt en doorstraalt als een onzichtbaar fluidum.



[63]

In al die figuren en reeksen, lopend tussen oneindig klein en oneindig groot, kunnen wij de relattviteit der dingen bespeuren, en onze plaats daar tussen in. Niets is te nietig of te groot voor onze geest. Wij leven op de scheiding tussen oneindig groot en oneindig klein; we leren onze blik te richten langs de raaklijn naar het oneindige. We merken, dat we een oneindigheid kunnen sommeren en leren synthetisch denken. We beseffen wetmatigheid, bovenpersoonlijke strengheid, en beleven richting. Wij leren dieper te schouwen en het één uit het ander af te leiden. Wij leren projecteren vanuit dat, wat wij weten, tot datgene, wat we niet weten; vanuit datgene, wat we zien, tot datgene, wat we niet zien. We gaan ongekennde verten vermoeden en diepten. We leren consequent doorredeneren, consequent dóórgaan, misschien consequent handelen. We ontdekken, (welk een geluk!) en vinden de weg om ergens in door te dringen, waarbij wij vinden dat kennen oneindig uitgaat boven weten, omdat het nadert tot zijn.



*Wij lopen rakelings langs
wonderen heen.*

*Wij zijn erin onderge-
dompeld en beseffen het
niet.*

[64]

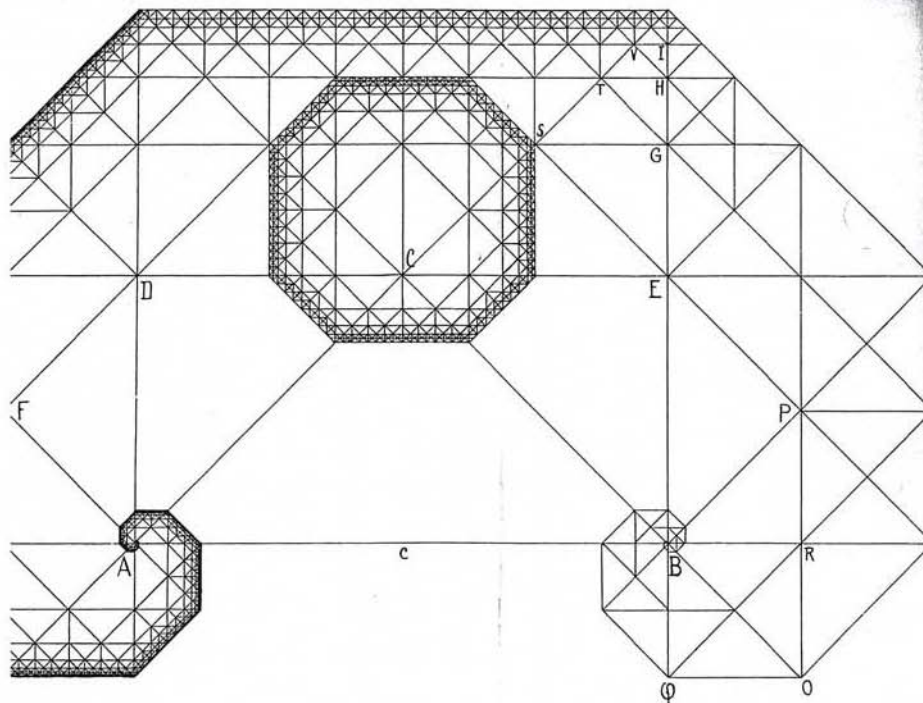
VOORTZETTING VAN HET HOOFDSTUK: HET THEOREMA VAN PYTHAGORAS EN REEKSONTWIKKELING.

In de tekeningen 18—23 gingen wij enkele mogelijkheden na van reeksontwikkeling met het theorema van Pythagoras. Er zijn er natuurlijk veel meer en beschouwen wij tek. 21, dan kan het ons opvallen, dat deze vollediger gemaakt zou kunnen worden, wanneer wij de reeksontwikkeling, die daar toegepast is telkens voor één van de 2 vierkanten op de rechthoekszijden, eens op *beide* vierkanten zouden toepassen. Hoe de tekening dan zal worden, is niet te voorzien. Willen wij het te weten komen, dan zullen wij de tekening moeten maken.

Het wordt tek. 63. Wanneer een jongen de tekening wil maken, moet hij goed uitkijken, de verschillende dooreengestrengelde figuren uit elkaar houden, bepalen waar de grenslijnen lopen, e.d.

Het oppervlak van het grootste vierkant is gelijk aan de som van de 2 kleinere daaropvolgende, ook gelijk aan die van de 4 daaropvolgende, enz.

Het aantal vierkanten met gezamenlijk gelijk oppervlak groeit: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 512, 1024, 2048, tot het wonderlijk bouwspel



[65]

van de Pythagoreïsche boom met scherpe limietlijnen en fijn kantwerk. Elk vierkant ervan kan beschouwd worden als het oorspronkelijk vierkant, waaruit de boom zich ontwikkelde, zodat deze bestaat uit een ineenvoeging van gelijkvormige, steeds kleiner wordende bomen.

De gedachten en vragen, die bij deze figuur opkomen, zullen bij ieder anders zijn. Wij kunnen ons voorstellen, dat iemand wil weten hoe hoog deze boom is, als zijn stamdikte a is; hoe breed zijn kroon aan de bovenkant en in het midden is; waar het centrum van de krulpunten gelegen is, enz.

Zouden wij ook alle vierkanten uit de figuur kunnen weglaten?

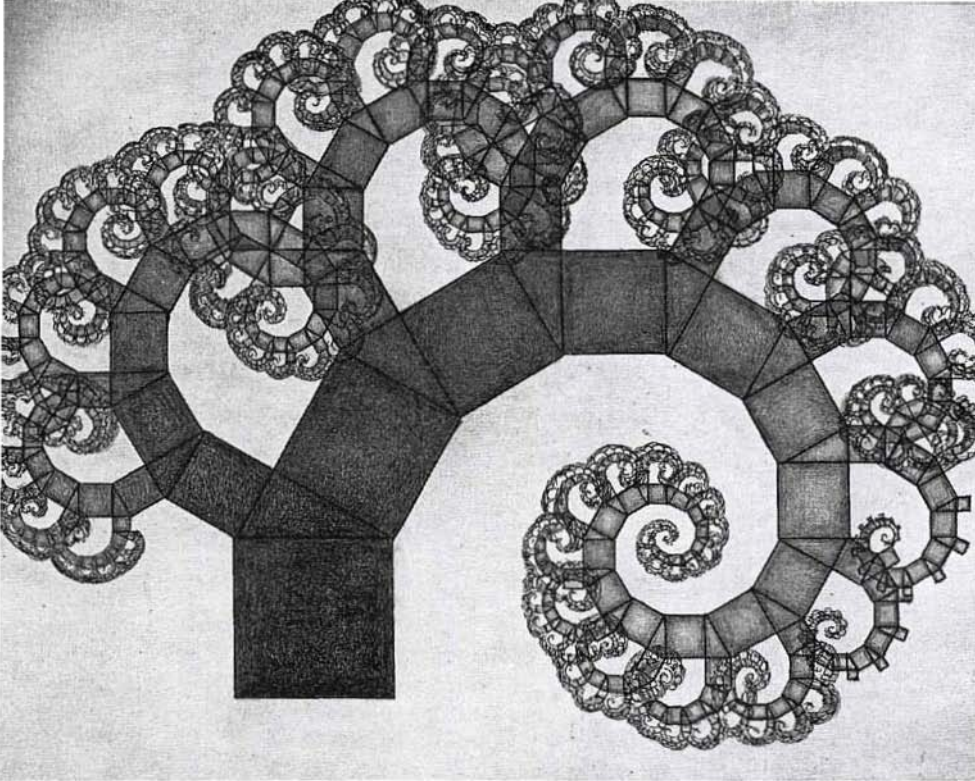
Laten wij beginnen met $\triangle ABC$ (tek. 64).

Het oppervlak van $\triangle ABC = \text{opp. } \triangle ACD + \text{opp. } \triangle BCE$

Deze oppervlakken tezamen zijn gelijk aan $4 \times \text{opp. } \triangle ADF$.

Dit kunnen we nog éénmaal doen. Dan hebben we 8 driehoeken gekregen, waarvan er 2 aan elkaar sluiten. Hun totale oppervlak $= \text{opp. } \triangle ABC$.

Gaan we toch door op dezelfde wijze, dan beginnen de driehoeken over elkaar te vallen. Hoe zal de figuur worden?



[66]

Tekening 65, die niet af is gemaakt, geeft een impressie hoe het zal worden. Daarin herhaalt zich tek. 64 tot in het oneindig kleine.

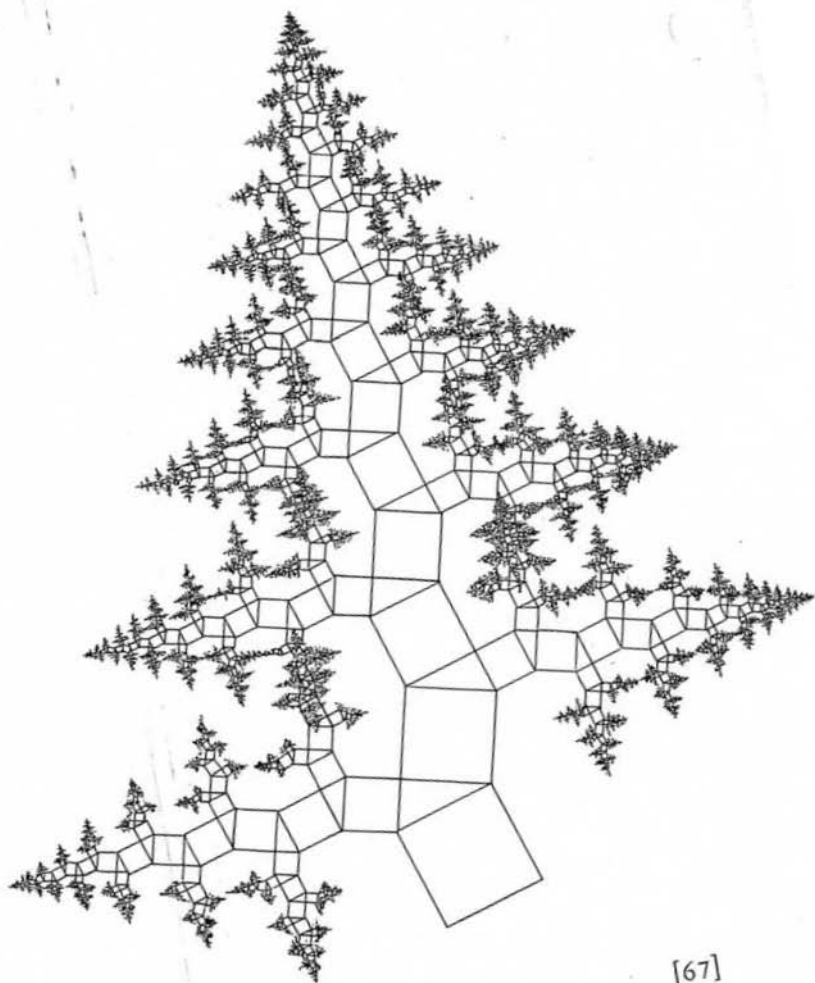
Wij kunnen de afmetingen erin nagaan. Noemen wij de lengte van $AB = c$, dan is $BE = \frac{1}{2}c$, $EG = \frac{1}{4}c$, $GH = \frac{1}{8}c$, $HJ = \frac{1}{16}c$, enz., zodat wij vinden, dat $BK = c$.

Ook is $CS = \frac{1}{2}AC$, $ST = \frac{1}{2}CS$, $TV = \frac{1}{2}ST$, enz., zodat wij in de figuur een reeks vierkanten ontdekken, die uit elkaar ontstaan en de bouw beheersen: $ABKL$, $BCKM$, $BEMN$, $BPNO$, $BROQ$, enz.

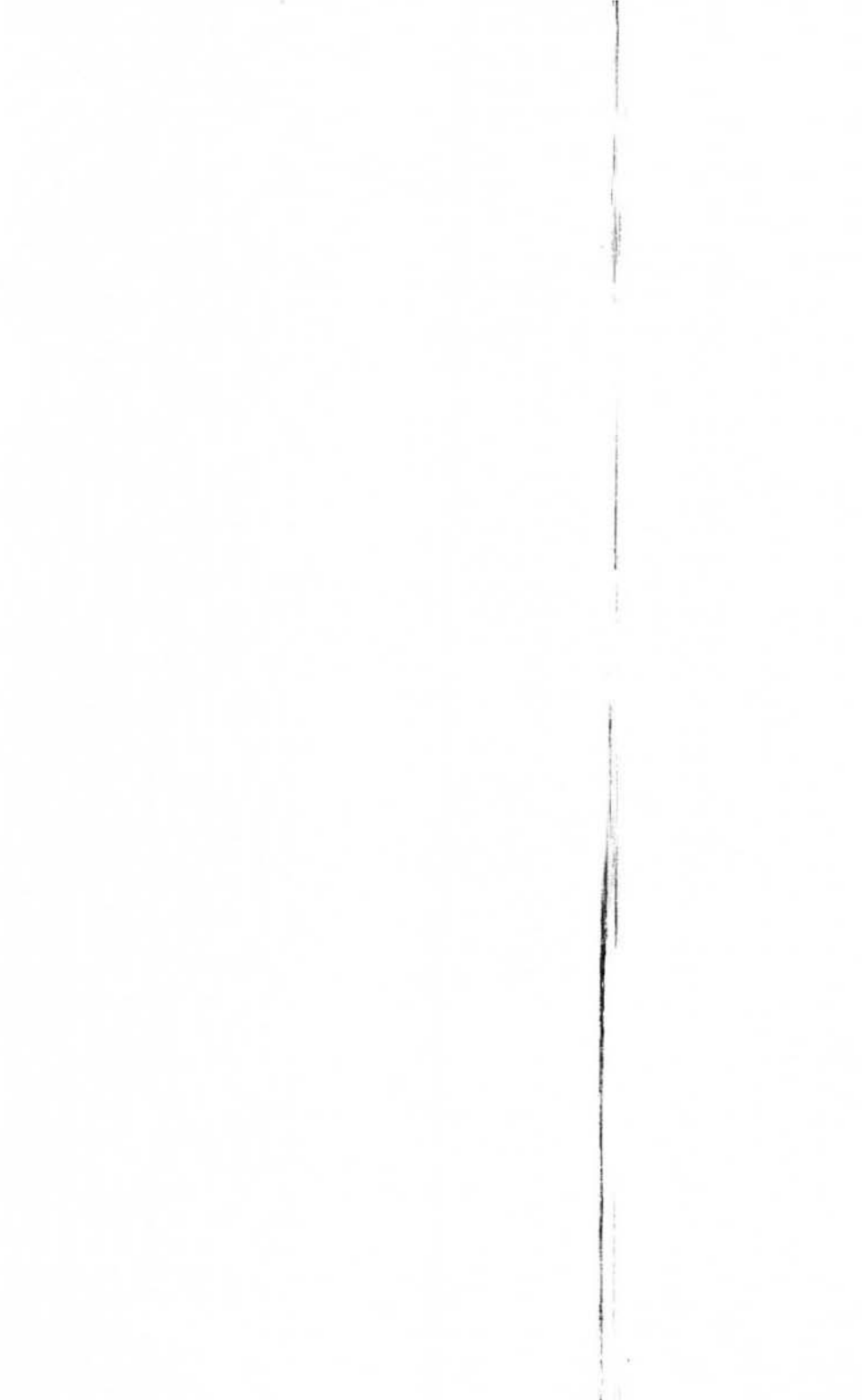
Hun oppervlakken vormen een reeks, waarvan de termen zich verhouden als $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \dots\dots$ enz.

Daarmee kunnen wij alle gewenste afmetingen in de figuur gemakkelijk bepalen.

Deze figuur blijkt veel overeenkomst te vertonen met de Pythagoreïsche boom. Hij is eenvoudiger van bouw door het ontbreken van tussenruimten,



[67]



maar dezelfde achtkantige vruchten blijken ook hierin te hangen.

Als er interesse voor bestaat, zouden verschillende leerlingen ieder een tekening kunnen maken, gebouwd op dezelfde grondmaten, zó, dat op elke tekening één generatie van driehoeken met een bepaalde kleur aangegeven zou worden. Tezamen zouden zij dan de hele ontwikkeling kunnen vertonen.

Een volgende vraag, die bij ons opkomt door de figuur van tek. 63 is, hoe deze ontwikkeling wordt voor een niet-gelijkbenig rechthoekige driehoek. Dan doemen verschillende mogelijkheden op. Een ervan toont tek. 66.

De rechthoekige driehoeken hier hebben hoeken van 60° en 30° .

Ook deze ontwikkeling is verrassend.

Er zijn allerlei mogelijkheden. Nog een andere toont ons tek. 67.

Als wij deze drie Pythagoreïsche bomen zouden willen karakteriseren, dan zou die van tek. 63 de evenwichtige genoemd kunnen worden, die van tek. 66 de eenzijdige gekromde en die van tek. 67 b.v. de zichzelf rectificerende.

Men maakt uit de leerling een volgeling van andermans ideeën inplaats van hem zelf te leren denken en hem tot een vorser in daad en gedachte te doen groeien.

Herbert Spencer

BESCHOUWING VAN EEN PUNT.

*Ik twijfel niet of de majesteit en
schoonheid der wereld zijn ver-
borgten in iedere iota der wereld.*

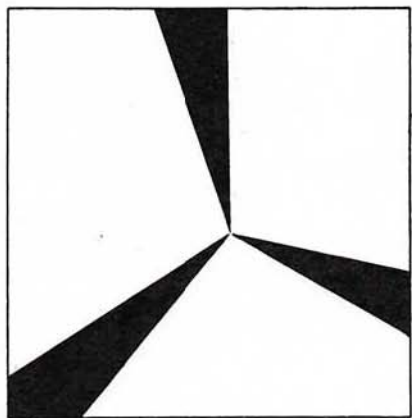
Walt Whitman.

Het voortgezet onderzoek van elk meetkundig probleem voert tot een beschouwing van de elementen, waaruit de meetkundige figuur of het meetkundig lichaam is opgebouwd. Van deze elementen noemen wij: het platte vlak, de rechte en gebogen lijn, de hoek en ten slotte als meest elementaire figuur: het meetkundige punt.

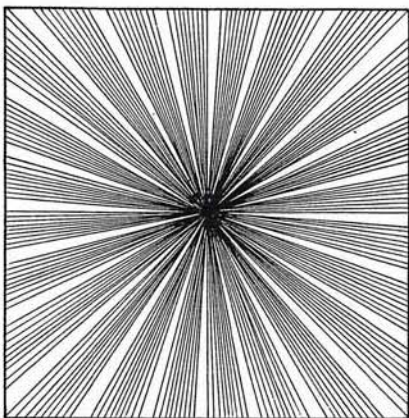
Om het karakter daarvan nader te komen, vragen wij ons allereerst af wat de betekenis van een punt is in het dagelijks spraakgebruik. Zien wij af van de betekenis van punt = spits, dan is een punt een plaatsbepaling. Wij spreken af elkaar op een bepaald punt te ontmoeten, b.v. in Amsterdam, op den Dam, en wel voor het Paleis; nog nader gepreciseerd: voor de hoofdingang. Wij kunnen de precisering nog verder voortzetten en in een bepaalde ruimte of vlak een plaats aanwijzen d.m.v. afstanden t.o.v. twee of drie assen, zodat wij het punt aangeven als het snijpunt van 2 of 3 lijnen *). Daar men aan meetkundige lijnen geen dikte toekent, kan de precisering van het punt tot in het oneindig kleine doorgaan, tussen de moleculen, protonen en bewegende electronen, waarbij wij naderen tot het ongrijpbare, het onzichtbare, het niets. Wij drukken dit uit in de bepaling: een meetkundig punt heeft geen afmetingen.

Laten wij thans onder de sterrenhemel gaan staan en naar een ster kijken, een z.g. vaste ster. Hij doet zich aan ons voor als een lichtend punt, en inderdaad, hoe groot de kijker ook is, die wij zouden nemen, zijn afmetingen zijn en blijven oneindig klein, of volgens het gewone spraakgebruik: nul. Toch weten wij, dat wat zich aan ons als een punt zonder afmetingen voordoet, in werkelijkheid een ganse zon is, en kijken we naar een punt in de duisternis naast die ster, dan zou zich daar een planeet kunnen bevinden als de aarde. Als wij ons in gedachte ergens in de Melkweg verplaatsen en van daar in de diepte der ruimte schouwen, dan zou zich in één donker onzichtbaar punt vlak bij onze zon de gehele aarde bevinden, met alles wat er op, erboven en erin is, met al haar wel en wee. Dit voert ons tot de erkenning van de

*) Hieruit zou de gevolgtrekking gemaakt kunnen worden, dat de definitie: „Een punt is een hoek, die je beide benen uitgetrokken hebt”, nog zo gek niet is.



[68]

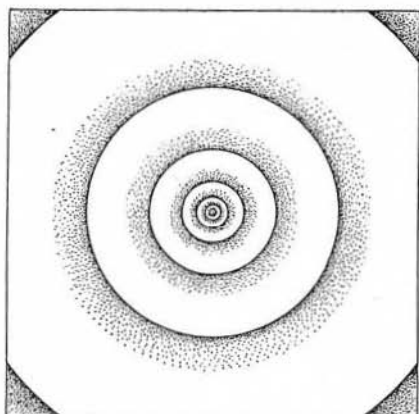


[69]

relativiteit van de inhoud van het punt zonder afmetingen en tot de vraag hoe wij dieper in zijn karakter kunnen doordringen. Dat wat ons eerst niets toescheen, kan veel zijn, ja een ganse wereld bevatten.

Geven wij de plaats van een punt op de lijn AB aan door een afstand van b.v. V_2 cm van A, dan ligt dat punt steeds tussen twee andere, wier afstanden tot A we met getallen in oneindig veel decimalen kunnen aangeven. Denken we ons dit in, dan benaderen we wellicht het beste het steeds terugwijkende, het ongrijpbare van een punt en we komen tot de slotsom, dat het eigenlijk slechts in onze gedachte bestaat, als een centrum, waarop onze aandacht zich concentreert. Hierin komt het dan overeen met iedere andere gedachte en elk onstoffelijk iets, of het de cholera is, of de temperatuur van een ster of het ik van een individu. Alle kunnen zij een centrum van aandacht vormen, waarheen wij trachten door te dringen door een onderzoek, dat wij zouden kunnen uitbeelden door convergerende stralen. Wij kunnen dus zeggen, dat *een punt een centrum van convergente straling is*.

Evenzeer als een bepaald punt convergerende stralen tot zich trekt, zendt het ook divergerende uit. Het trekt de attentie tot zich door zelf iets uit te zenden, waardoor we erop opmerkzaam worden. Datgene wat uitgezonden wordt, kunnen we verschijnsel noemen en meetkundig door divergerende stralen aanduiden. Zo is elk verschijnsel, en een punt, ook te beschouwen als *centrum van divergente straling*.



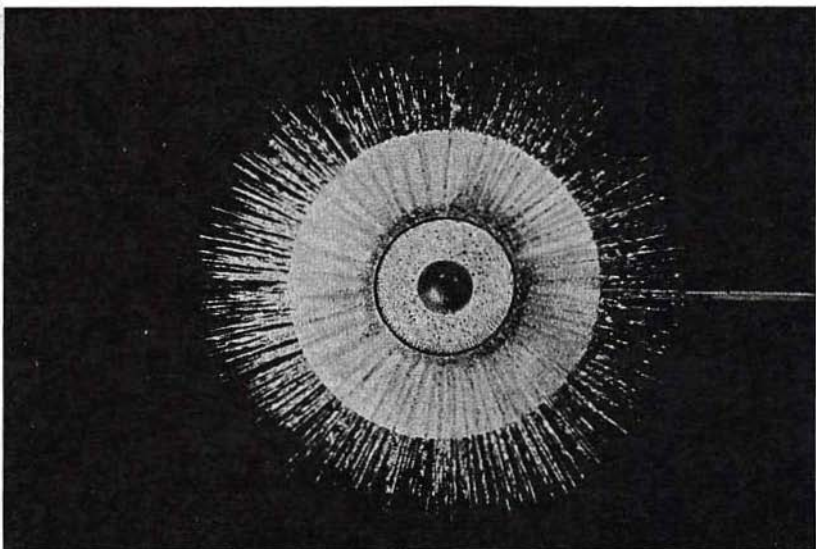
[70]

*Wiskunde kan de
gevaarlijkste hartstocht
zijn; je krijgt er honger
naar waarheid van.*

Bernard Shaw

De figuren 68 en 69 zijn evenzeer op te vatten als uitbeelding van een convergente als van een divergente straling. Dit begrijpen we, wanneer we bedenken, dat elk verschijnsel tegelijkertijd uitschijnt (divergent) en de aandacht tot zich trekt (convergent). De straling in fig. 68 en 69 aangeduid, is dus tegelijkertijd zowel convergent als divergent. Wij kunnen deze beide aspecten wel onderscheiden, doch bij elk verschijnsel treden zij ongescheiden op, evenals in de figuur.

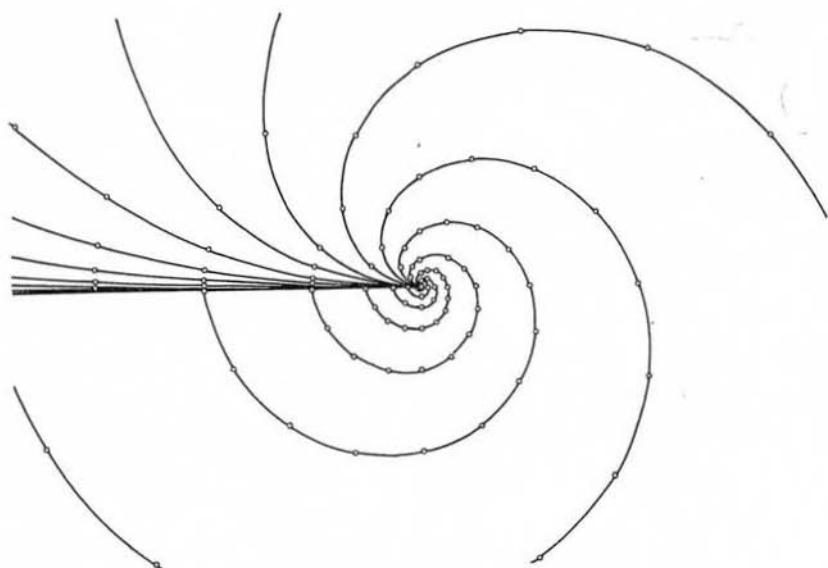
In de fig. 68 en 69 zijn slechts enkele stralen getekend. Bij allerlei verschijnselen, zoals b.v. bij licht en geluid, is het aantal stralen echter oneindig groot. De straling gaat naar alle zijden, en ook in het vlak van tekening. Hoe moeten we deze in tekening brengen of aanduiden? We kunnen dit doen als in fig. 68 en 69, maar ook door concentrische cirkels te trekken, die aangeven waar de straling angekommen is op een bepaald ogenblik. De concentrische cirkels geven dan het oppervlak of de vlakke doorsnede van stralingsfronten aan (fig. 70). Ook deze figuur is slechts een zeer onvolkomen aanduiding, want het aantal cirkels zou oneindig moeten zijn. Bovendien zijn de fig. 68, 69 en 70 statisch, zoals iedere momentopname, terwijl de straling een verlopend gebeuren is, welks uitbeelding een oneindig aantal uitdijende of inkrimpande cirkels zou moeten bevatten. De beide wijzen van tekening zijn dus een afbeelding van hetzelfde gebeuren, waarbij elke wijze een apart karakter ervan weergeeft. Voor een goede voorstelling moeten we dus de fig. 69 en 70 gecombineerd denken in één gebeuren. Wij zien dit in de natuur



[71]

voorkomen, o.a. bij een micro-organisme, de *Actina Princeps*. Fig. 71 geeft er een afbeelding van. Het is een naar de natuur door Herman Muller vervaardigd model in glas op miljoenen maal de ware grootte.

Als voorbeeld van een convergente straling zouden we de werking der zwaartekracht kunnen afbeelden, die zich b.v. naar het middelpunt van een pool richt. De aandacht, de geest of de ogen van mensen kunnen convergerend gericht zijn naar wat op één plaats gebeurt. En gebeurt er iets in een punt, dan worden uit dat punt zichtbare of onzichtbare stralen uitgezonden. Dat is de tegengestelde stralingsbeweging, de divergentie. Als voorbeelden hiervan denken we b.v. aan het licht van een ster, dat naar alle richtingen uitgestraald wordt; aan het nieuws van een gebeurtenis, dat zich verspreidt; de invloed, die er van een mens uitgaat. Convergentie beleven we in ons oor, dat geluiden opvangt van allerlei kant en in ons oog, dat de lichtstralen convergerend opvangt. Beleven we ook een divergentie? Ja, in datgene, wat van iemand uitgaat, in de invloed, die er van zijn wezen uitstraalt: vriendelijkheid, boosheid of liefde. Wij symboliseren dat in uitdrukkingen zoals een stralend oog, een stralende goedheid of: hij stráálde.



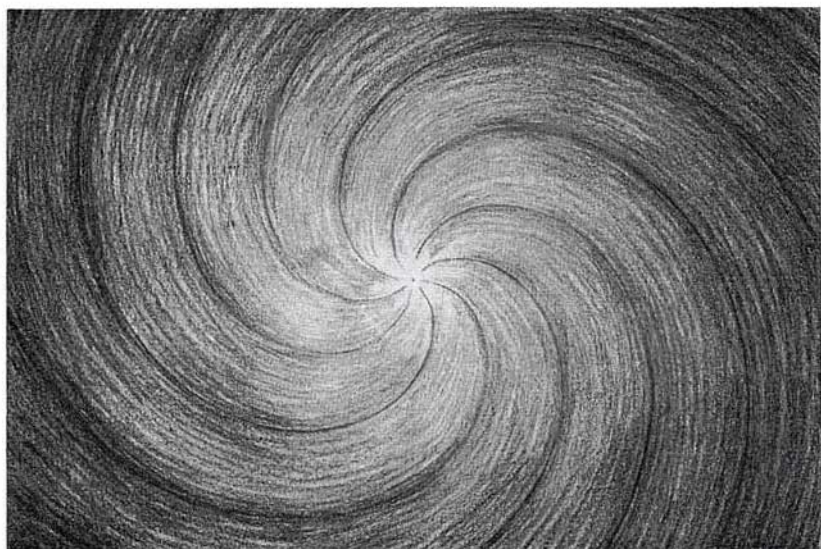
[72]

Is er bij een punt nog iets anders mogelijk dan convergentie en divergentie? Wij komen tot de slotsom, dat er niets anders mogelijk is. Zij behoeven echter niet constant te zijn, zoals wij tot nu toe aannamen. Ze kunnen toe of afnemen of pulseren.

Wèl kan een punt bewegen en daardoor een lijn beschrijven, maar dat is dan steeds t.o.v. iets anders.

Het verbaast ons, dat de straling van een punt door twee zó verschillende figuren als de straal- en de cirkeltekening uitgedrukt wordt. Hoe zit dit? Is er dan geen enkel verband tussen deze, zo uiterst verschillende figuren?

Daar wij op deze vraag geen antwoord kunnen vinden, gaan wij verder met ons onderzoek van het punt en wij vinden, dat er voor het punt t.o.v. zichzelf en zijn straling of wel t.o.v. de omgevende oneindigheid nog één ding mogelijk is: draaiing.

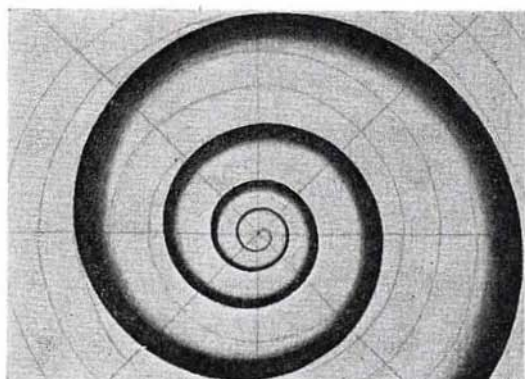


[73]

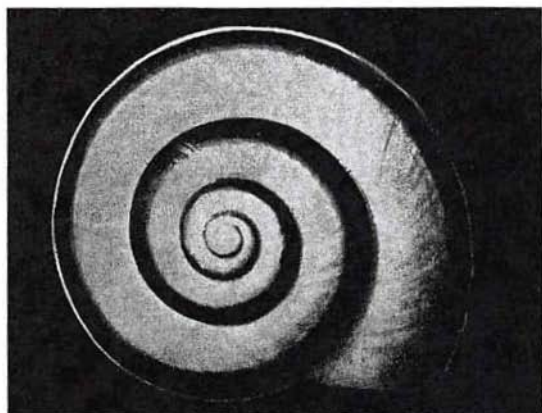
Hoe is het stralingsveld voor een draaiend punt bij convergentie of divergentie? Dit hangt natuurlijk van de snelheid van draaiing af t.o.v. de stralingsnelheid. Is de snelheid van draaiing t.o.v. die der straling oneindig klein, dan krijgen wij de rechtlijnige straling van fig. 69, aangeduid door de rechte in fig. 72.

Hoe sneller de draaiing t.o.v. de straling is, des te meer gekromd zullen de stralingslijnen zijn. Is de stralingssnelheid t.o.v. de draaisnelheid oneindig klein, dan ontstaan concentrische cirkels. Tussen deze twee uitersten liggen de gevallen van fig. 72, waarin elke kromme een bepaalde verhouding tussen draaiings- en stralingssnelheid aanduidt. Hierin vinden wij dus het te voren zo gezochte verband tussen de stralen- en de cirkeltekening. Het blijken de uitersten van een vloeiend verloopend verband tussen straalnelheid en draaisnelheid te zijn!

[74]



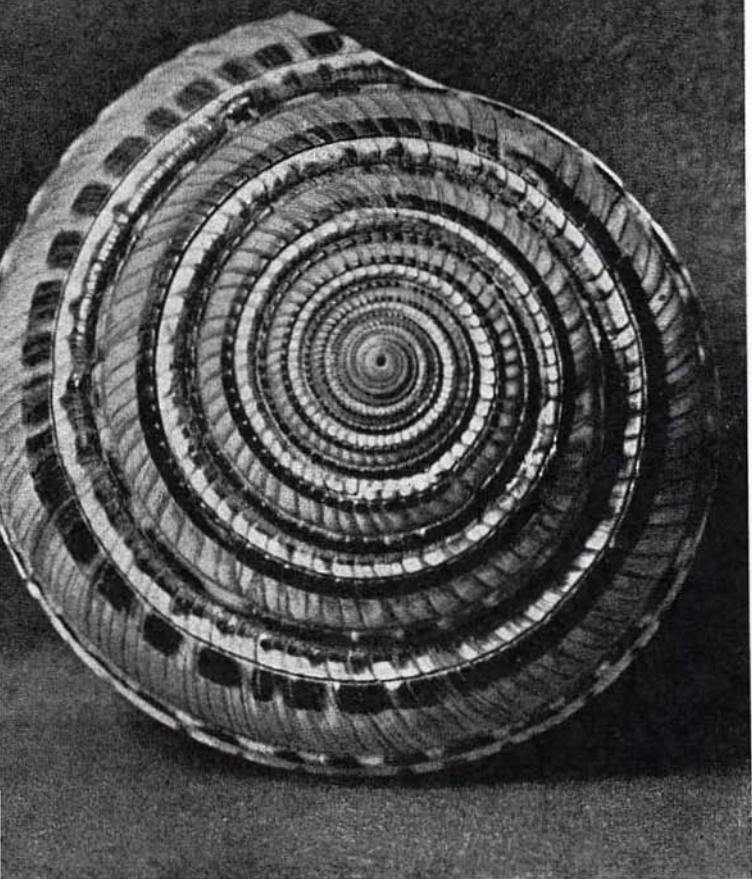
[75]



Overdenken wij deze tekening, dan komen wij tot de slotsom dat al deze lijnen door vermenigvuldiging t.o.v. het centrum uit elkaar ontstaan. Elke kromme is ontstaan door vermenigvuldiging van de vorige, meer gekromde, met 2. Zo stellen zij, alle tezamen dus één kromme voor op verschillende schaal!

De figuren 73 en 74 geven ieder op hun wijze een beeld van het stralingsveld bij een bepaalde verhouding tussen de snelheden van draaiing en straling.

Vergelijken wij fig. 74 met de schelp, afgebeeld in fig. 75, dan wil het ons voorkomen, dat de stralingsregel van fig. 74 bij de vorming van deze schelp een rol heeft gespeeld. Het is de *Nanina citrina* Linné.



[76]

Bij onderzoek ontmoeten wij in de natuur overal wetmatigheid, ook in de vormen. Bij de meest primitieve diersoorten, dus in de oudere tijdperken der aarde, zullen de vormen waarschijnlijk aan de eenvoudigste wetten bij de vormgeving uitdrukking geven. Daar bij de oerdiereen, zullen wij dus de bolvorm, de straalsgewijze symmetrie, de straling, de draaiende straling e.d. mogen verwachten.

Bovenstaande schelp is van de *Solarium perspectivum* Linné. De draaisnelheid der straling is groter dan bij de *Nanina citrina*.

De vorm van de schelp van fig. 76, de *Solarium perspectivum* Linné, duidt op een grotere snelheid van draaiing. Bij de spiraal van fig. 77 is de draaisnelheid relatief weer kleiner. De schoepenvormige bouw van de schotten der schelp herinnert aan een centrifugaalpomp en doet weer het vermoeden rijzen, dat bij de wet, die de vorming beheerste een draaiing in het spel was. De tussenschotten zijn naar het centrum toe rechter van vorm; blijkbaar overwoog daar de stralingssnelheid.

Het is een Röntgenopname van de bekende Nautilusschelp (fig. 77). *)

Bij de *Argonauta argo* Linné van fig. 78 ziet men de straling van het middelpunt uitgebeeld in de straalsgewijs verlopende groeven.

De schelp van fig. 79 *) , de *Cardium pseudolima* Lamarck vertoont een aantal krommen met verschillende draaisnelheid. Deze verandert regelmatig tussen enige krommen van fig. 72 als uitersten. De binnenste hebben een relatief grotere draaisnelheid. In deze schelp herkennen we de vorm onzer meest voorkomende strandschelpen.

Bij de schelp van fig. 80 *) , de *Chlamys gloriosus* Reeve, die in het Nederlands Edele Kamschelp heet, zien we hoe de krommen zich waaivormig uitspreiden, terwijl ze ieder in een vrijwel plat vlak liggen.

Als laatste van deze serie: fig. 81 *) , de *Astrarium solaris* Linné. Hierbij vindt men in de stekels de straling van het middelpunt uitgedrukt. Deze schelp vertoont echter nog een ander aspect. De straling, die we tot nu toe in de schelpvorm uitgedrukt zagen, werkte in een of een aantal platte vlakken. Bij de *Astrarium solaris* treedt ook een kleine beweging van het stralend punt op, loodrecht op het vlak van straling. Hierdoor krijgen we de slakkenhuisvorm, welke in de afgesleten schelp van de Tolhoren (*Trochus niloticus* Linné) in fig. 82 *) duidelijk optreedt.

De snelheid dezer beweging kan ook weer verschillend zijn. Wordt hij relatief nog groter, dan krijgen we allengs spitse schelpvormen, waarvan de *Fusus probosciferus* (links) en de *Koningsmyter* (*Mitra regina* Swains), rechts van fig. 83 *) typische voorbeelden zijn.

We zagen hoe in de wereld der schelpdieren vele vormen voorkomen, bij welker ontstaan het principe van een draaiende straling uit een punt blijkbaar een rol heeft gespeeld. Bij al deze schelpen draait echter slechts één straal of

*) De op deze en de volgende bladzijde besproken afbeeldingen zijn te vinden op de bladzijden 55 t/m 71.



[86]

stralenbundel. Wanneer meerdere stralen draaien, krijgen we vormen, die bij de meervoudig symmetrische dieren, zoals zeesterren, kwallen e.d. optreden.

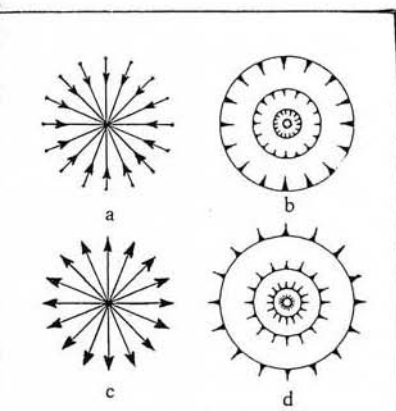
Ook op ander gebied vinden we de vormen van het stralend en draaiend centrum, zo b.v. in fig. 84 *). Dit is een microscopische vergroting van azoxyphenetol in mesomorfe toestand. Deze toestand ligt tussen de geheel vaste, periodieke structuur van de stof bij lagere temp., die we kristallijn noemen, en de amorfe toestand bij hogere temp. in. Lehmann ontdekte twee zulke toestanden en noemde ze vloeiende en vloeibare kristallen. Zepen bij gewone temp. behoren ertoe. Men herkent hele kernen met 4 takken en halve met 2 takken en donkere banden, die ze onderling verbinden. (Annales de Physique IXe série T XVIII Nov. Dec. 1922 v. G. Friedel).

De relatieve draaisnelheid van de kernen is blijkbaar verschillend; we zien kernen vrijwel zonder en andere met draaiing.

Ook aan de hemel, in de makrokosmos, vinden we voorbeelden van stralende en draaiende centra. Wij zouden kunnen zeggen, dat het er een der meest voorkomende figuren is: alle spiraalnevels vertonen deze figuur, zoals b.v. de Draaikolknevel in de Jachthond M 51 (afstand 1,1 miljoen lichtjaren) van fig. 85 en de nevel NGC 1300 van fig. 86. Daarbij komt nog, dat de meeste nevels een spiraalstructuur hebben. Deze nevels hebben voor één omwenteling miljoenen jaren nodig. Recente onderzoeken met de radio-astronomische spiegel in Kootwijk op de 21 cm kortegolf hebben aangetoond, dat ook wij met ons zonnestelsel en de hele melkweg deel uitmaken van een spiraalnevel, die als een enorm vuurwerk met ons in de ronde tolt, waarbij wij meedoen met een snelheid van 220 km per seconde in een baan met een omlooptijd van 220.000.000 jaar. De kern van ons melkwegstelsel, die in het sterrebeeld de Schutter ligt, is echter geheel verscholen achter zeer dichte absorberende wolken, zodat wij geen enkele aanduiding hebben, dat de zon en wij met haar een beweging zouden hebben, die systematisch van een cirkelbeweging rondom die kern zou afwijken. Van de maan is echter wel een spiraalvormige beweging aangetoond. Bij haar draaiing om de aarde verwijderd zij zich tevens van ons, al is deze verwijdering niet groot: enige centimeters, laten wij zeggen ca. 6 cm, per jaar. Maar dit heeft ten gevolge, dat over 1500 miljoen jaar de maan, die thans 60 aardstralen van ons afstaat, dan 75 aardstralen van ons verwijderd zal zijn en onze dag van 24 uur dan 47 etmalen lang zal worden, even lang als de omlooptijd van de maan.

*So sind wohl manchen Sachen,
Die wir getrost belachen
Weil uns're Augen sie nicht seh'n*

*Abendlied von
Matthias Claudius. 1778*



De leerstof moet tevens in ware zin opvoedend zijn d.w.z. naast intellectueel ook geestelijk, dus religieus, moreel en aesthetisch vormend.!

Prof. Stellwag

[87]

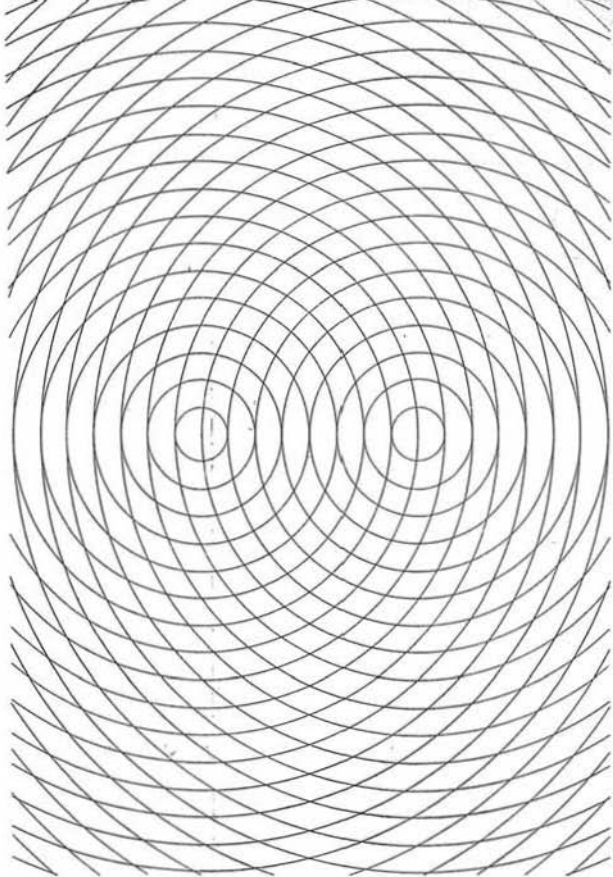
BESCHOUWING VAN TWEE PUNTEN.

Na de beschouwing van één punt is de volgende stap de beschouwing van 2 punten. Bij 2 punten verschijnen verschillende mogelijkheden en tekeningen. Uit het voorafgaande kunnen wij de volgende gevallen afleiden.

1. *a.* 2 punten, die divergent stralen, in cirkeltekening.
- b.* 2 punten, die convergent stralen, in cirkeltekening.
- c.* 1 punt, dat convergent, en 1 punt, dat divergent straalt, in cirkeltekening.
2. *a.* 2 punten, die divergent stralen, in stralentekening.
- b.* 2 punten, die convergent stralen, in stralentekening.
- c.* 1 punt, dat convergent, en 1 punt, dat divergent straalt, in stralentekening.

De divergente en convergente straling kunnen we uitbeelden op de wijzen van tek. 87.

Volgens het schema, achteraf gevonden, onderzoeken wij thans eerst:

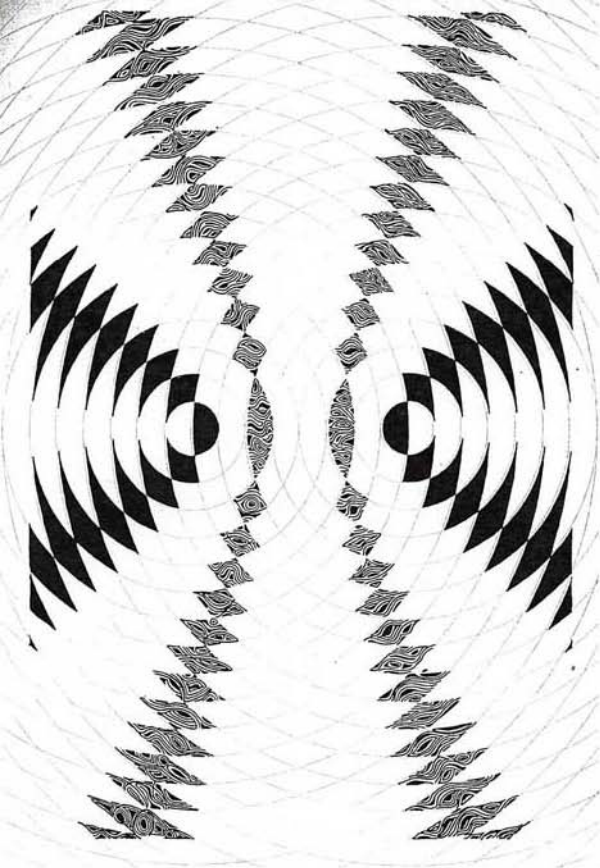


In iedere tekening ligt iets verscholen. Wat heeft tek. 88 te zeggen? Opeen der schutbladen staat dezelfde tekening in de oorspronkelijke grootte.

1a. Twee divergent stralende punten in cirkeltekening.

We kiezen twee punten willekeurig en geven de straling dus aan door concentrische cirkels volgens de een of andere bepaalde tekenregel. Wij kiezen daarvoor cirkels, welker stralen telkens 1 cm groter worden, en krijgen zo tek. 88.

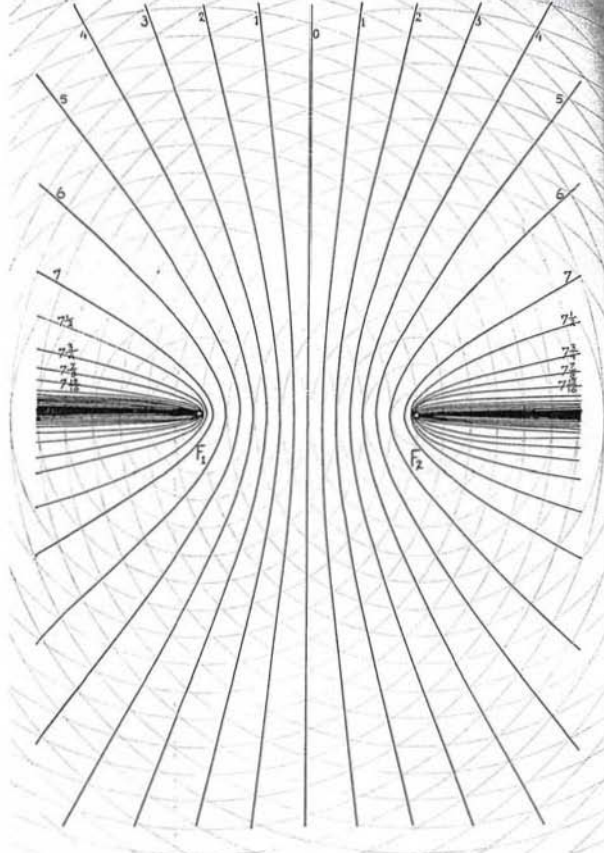
Beschouwen we deze figuur aandachtig, dan komt er tekening in. We ontdekken figuren, zoals de aangegevene in tek. 89. Deze nagaande, zien we, dat



Tek. 89 is het eerste tekenexperiment, dat we uitvoerden met No. 88 en ziet, het werd iets vreugdevols, dat dat nodigde tot verder zoeken.

deze figuur optreedt, wanneer we, bij een bepaald punt ervan beginnende, daarop de divergente straling van de beide stralende punten laten werken. In elk punt heeft dit een stralingsbeweging ten gevolge, die van de stralende punten af gericht is. De baan ervan kunnen we gemakkelijk vervolgen door de snijpunten te bepalen van de twee series concentrische cirkels, en wel zó, dat we, van een willekeurig snijpunt uitgaande, het volgende vinden door de stralen der snijdende cirkels ieder 1 cm groter te nemen. We vinden dan een serie bijeenhorende punten. Bedenken we, dat de stralen ook met $\frac{1}{2}$ cm kunnen aangroeien, of met een willekeurig klein bedrag, dan beseffen we de banen gevonden te hebben, waarlangs de divergente straling der twee punten samenwerkt. Deze straling werkt in elk punt van de ruimte of wel van het stralingsveld. In een goede tekening zou door elk punt dus een kromme getrokken moeten worden, die de richting der samengestelde straling aangeeft.

[90]



Nu is in tek. 90 het spel der stralende punten, de structuur van het veld, openbaar geworden en in onze fantasie zien wij het oneindig aantal hyperbolen, dat het gehele platte vlak vult en tussen F_1 en F_2 gebundeld wordt.

Tekenen we slechts een beperkt aantal lijnen, behorende bij de bovengenoemde tekenregel, dan komen we tot tek. 90, die een beeld geeft van het verloop voor het gehele platte vlak.

Deze figuur blijkt nu echter evenzeer te gelden voor twee convergente stralingen als voor twee divergente! De tekening voor geval 1b is dus dezelfde, alleen is de beweging erin tegengesteld.

Wat zijn dit voor lijnen in de figuur? Voor elk snijpunt kunnen we de stralen der cirkels bepalen. Doen we dit voor alle snijpunten op één kromme gelegen, dan vinden we, dat *het verschil van de twee stralen naar elk punt van die kromme constant is*. Daar dit een kenmerkende eigenschap van de hyperbool is, blijken alle krommen *hyperbolen* te zijn. Het stralingsveld van twee divergent of twee convergent stralende punten blijkt dus een hyperbolische structuur te bezitten. Het optreden hiervan blijkt dus inhaerent te zijn

aan twee punten met gelijksoortige straling, die we nu met recht *brandpunten* mogen noemen.

Wat is de vergelijking van het stelsel confocale hyperbolen?

Het verschil der stralen blijkt in de figuur te variëren tussen 0 en 8. Bij een verschil 0 ontaarden de twee takken van de hyperbool tot één rechte, en bij een verschil 8 ontaarden ze tot twee rechten, die uit elkaar gaan vanuit F_1 en F_2 , en die evenals de hyperbolen zich in het oneindige sluiten tot één lijn. Het maximum verschil, dat hier 8 is, is gelijk aan de afstand F_1-F_2 .

In de laatste wereldoorlog gebruikten Engelse piloten instrumenten om hun positie te bepalen, welke op de interferentie van de straling uit 2 punten berustten. Dat ging als volgt. In Engeland waren twee zendstations A en B op een gegeven afstand van elkaar. Wanneer zij beide gelijktijdig 500 radioimpulsen per seconde uitzenden, zullen deze in een willekeurig punt P interfereren. Zijn de impulsen gelijk in fase, dan zullen zij elkaar versterken, zijn ze gelijk, doch tegengesteld in fase, dan zullen zij elkaar uitdoven, enz. De interferentie is afhankelijk van het verschil in tijd, die de stralen uit A en B nodig hebben om P te bereiken. Daar de snelheden der straling uit A en B gelijk zijn, kunnen we ook zeggen, dat de interferentie afhankelijk is van het verschil tussen de afstanden PA en PB. Blijft dit verschil constant, dan is ook de interferentie constant en dus liggen de punten met gelijke, b.v. maximum werking, op hyperbolen, die tussen A en B verlopen zoals op tekening 90.

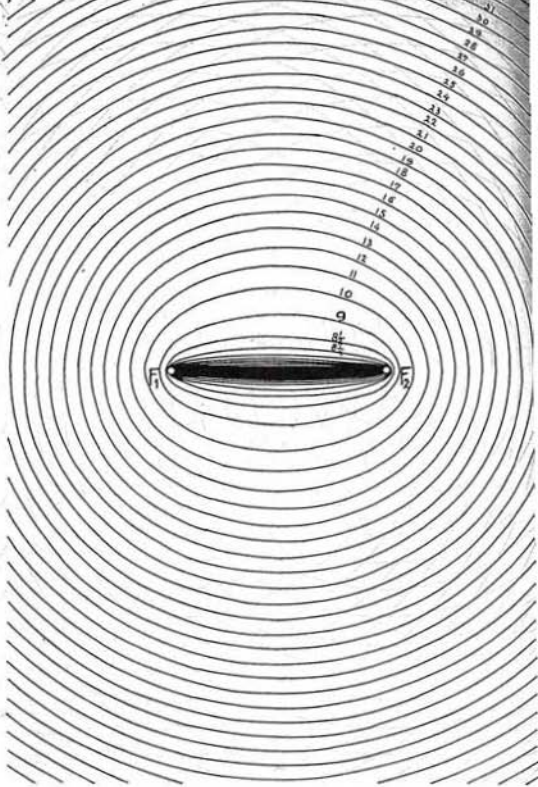
Dit geeft echter wel een laan (een strook langs een hyperbool) aan, doch nog geen plaatsbepaling. Daarom was er nog een derde station C in Engeland, dat eveneens impulsen uitzond. Deze impulsen interfereren ook met die uit A, waardoor een tweede stelsel hyperbolen optreedt, dat het eerste snijdt. Dit maakt de plaatsbepaling mogelijk, zodat de piloot ten allen tijde, dus ook b.v. bij nacht, kon bepalen waar hij zich bevond.

Dit principe is technisch in het z.g. Gee systeem toegepast. Een ander, het z.g. Decca systeem vertoont overeenkomsten met het Gee systeem. De plaatsbepaling daarbij is zeer nauwkeurig en wel van 10—120 meter, terwijl de reikwijdte ervan overdag tot ca 800 km bedraagt.

Tekent men een stel concentrische cirkels en maakt men daarvan twee precies gelijke diapositieven, dan kan men door deze beide achter elkaar te plaatsen en er evenwijdig licht doorheen te laten gaan een prachtig bewegend interferentiebeeld verkrijgen door de twee diapositieven t.o.v. elkaar te verschuiven.



[92]

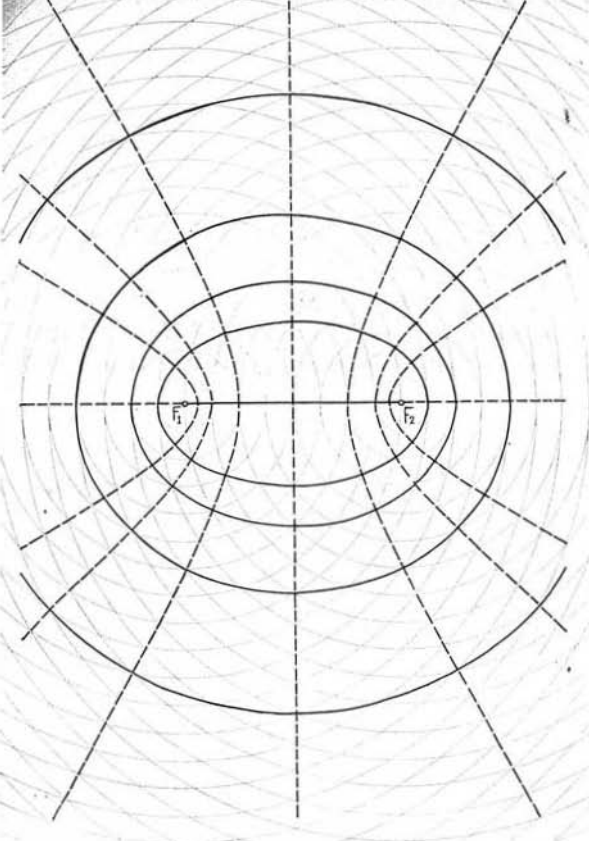


[91]

1c. Een convergent stralend en een divergent stralend punt in cirkeltekening.

In de aanvankelijke tekening 88 ontdekken we nog een andere figuur, n.l. die, waarvan tek. 91 een voorbeeld is. Gaan we hierin de lengte der stralen uit elk der twee stralende punten naar alle snijpunten na, dan blijkt voor een aantal snijpunten de som dezer stralen constant te zijn. Verbinden we alle punten waarin de som der stralen constant is, dan krijgen we fig. 92.

Voor elke kromme daarvan is de som der stralen constant. Het zijn dus *ellipsen*, waarvan F_1 en F_2 de brandpunten zijn. Wanneer van twee punten het ene convergent en het andere divergent straalt, blijkt er dus spontaan een stralingsveld op te treden, dat ellipsvormig van structuur is. De gehele ruimte om F_1 en F_2 schikt zich dus door deze straling in confocale ellipsen, of in

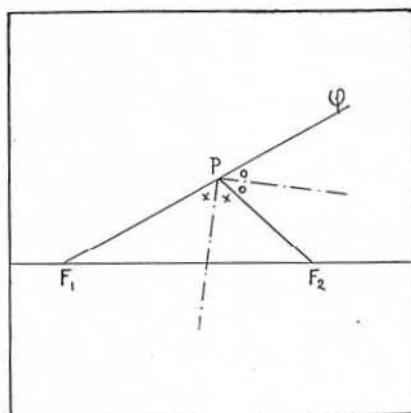


Hebben deze ellipsen en hyperbolen van tek. 93 iets met elkaar te maken? Beide zijn uit de 2 stralende punten spontaan tevoorschijn gekomen, zodat ze in elk geval een innerlijk verband hebben.

de ruimte tot omwentelingsellipsoïden. Naar F_1 en F_2 toe ontaardt de ellips tenslotte tot de rechte F_1F_2 , die de directe verbinding van de brandpunten vormt.

Algemeen gezien, blijken dus twee centra met verschillende straling door een sfeer van gesloten krommen, van binding, omhuld te worden, terwijl bij twee centra, die gelijke straling hebben, een sfeer van uiteenwijkende hyperbolen ontstaat, die alle de twee centra van elkaar scheiden, tenminste in het eindige, maar die ze wél door het oneindige heen met elkaar verenigen.

Men is geneigd deze figuren en structuren, die zo elementair met het optreden van twee stralende centra samenhangen, te beschouwen als afbeeldingen, meetkundige symbolen, van fundamentele waarheden. En voorzover in ons het besef aanwezig is van een eenheid aller dingen in de kosmos, zullen wij deze eenheid ook gaan ontwaren. Zij zal ons aanvankelijk misschien ver-



Een rad is gemaakt van dertig tastbare spaken, maar dank zij de ontastbare centrale holte van de naaf kan zij draaien.

Lao-tse

[94]

wonderen, wanneer wij haar in meetkundige figuren uitgedrukt en weerspiegeld zien, maar door een innerlijk besef van algemene wezenseenheid, zal ook het innerlijk verband, dat wij hier bespeuren, ons uitteraard redelijk voorkomen en een bron van zinnebeeldig schouwen en vreugde kunnen zijn.

Daar onze beschouwingen over 1 en 2 punten zo primair zijn, zullen zij in de grondvormen van de wereld der verschijnselen, stoffelijk en geestelijk, weergevonden moeten kunnen worden.

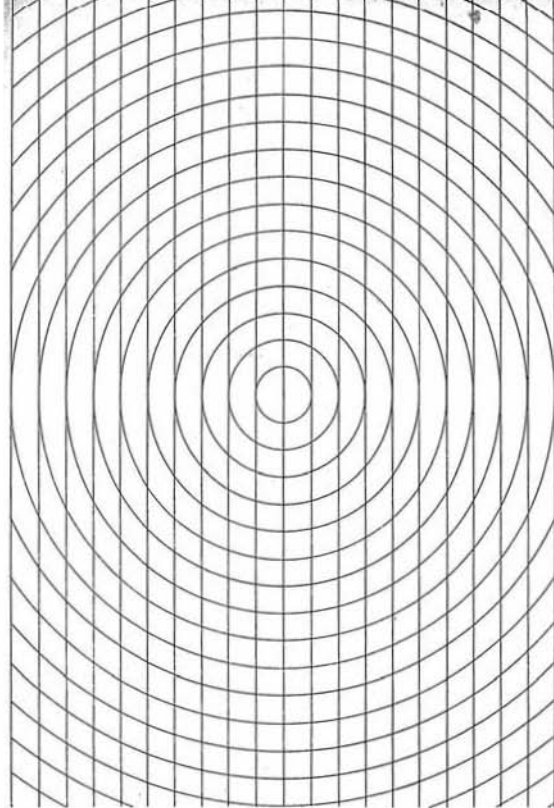
Zo denken wij bij een convergent en een divergent stralend centrum aan fundamentele andersgeaardheid, aan tegengelden, zoals mannelijk en vrouwelijk, God en wereld, licht en oog.

Eén gebeuren verenigt hen: de ellipssfeer.

Gelijke delen daarentegen zijn in hun essentiële gebeuren van elkaar gescheiden, — de hyperboolsfeer, — maar vinden hun eenheid door het oneindige heen, dus in het allesomvattende kosmische of Goddelijke.

Ook de figuren en structuren, die wij vonden bij een enkel stralend punt, zullen in de grondvormen van de kosmos moeten optreden, daar zij primair zijn. Wij zagen, dat dit inderdaad het geval is en vonden ze in de vormen van oerdieren, schelpdieren, enz. en in de vorm van de kosmische levels.

Ons onderzoek bestaat eigenlijk in het trachten antwoord te vinden op de vragen, die de figuren ons stellen. Zo rijst bij fig. 93, waarin de stralingsvelden van ellipsen en hyperbolen tezamen voorkomen, de vraag of deze beide structuren elkaar wellicht loodrecht snijden. Daartoe bezien we tek. 94.



*Wanneer wij tek. 88 na-
gaan voor alle mogelijk-
heden, wat betreft de lig-
ging van F_1 en F_2 t.o.v.
elkaar, dan vinden wij de
geleidelijke overgang tot
tek. 95 met F_2 op onein-
dig als enige andere mo-
gelijkheid, die we afzon-
derlijk kunnen beschou-
wen.*

P stelt een willekeurig punt van tek. 93 voor. Dit stelt dus het snijpunt van een ellips en een hyperbool voor, van tek. 93. Nu is bekend, dat de raaklijn, door P aan de ellips getrokken, $\angle QPF_2$ middendoor deelt. Eveneens deelt de raaklijn door P aan de hyperbool getrokken, $\angle F_1PF_2$ middendoor. Daar de bissectrices van twee nevenhoeken loodrecht op elkaar staan, snijden de raaklijnen van de ellips en de hyperbool in een bepaald punt elkaar dus recht-hoekig. *In elk punt staan de elliptische en hyperbolische tendenties dus loodrecht op elkaar.*

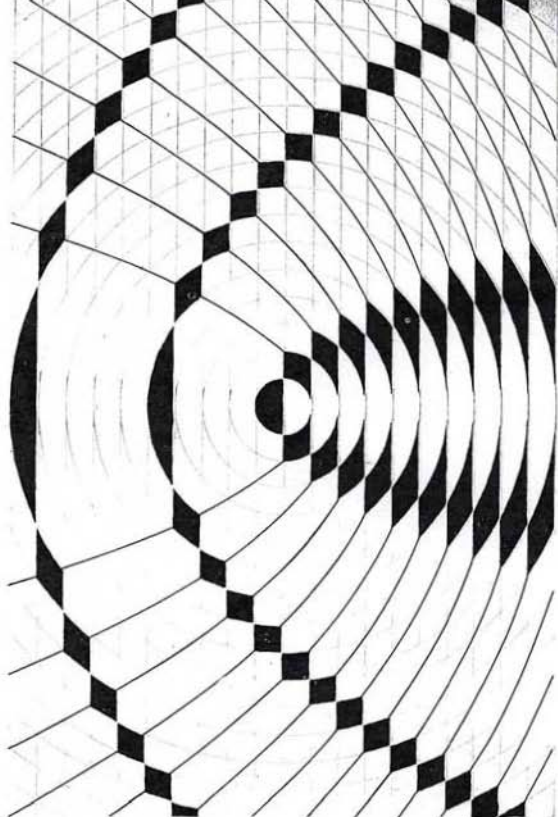
Zij horen bij elkaar en vullen elkaar als tegendelen volledig aan.

In tek. 93 zien we F_1 en F_2 enerzijds verbonden door de ellips, die tot rechte lijn werd, anderzijds door het oneindige heen door de hyperbool, die tot één rechte met 2 einden werd. Door beide samen wordt de ring tussen 2 punten of individuen door het eindige en oneindige heen volledig gesloten.

Welke invloed heeft de keuze van de afstand F_1F_2 op de vorm der figuur?



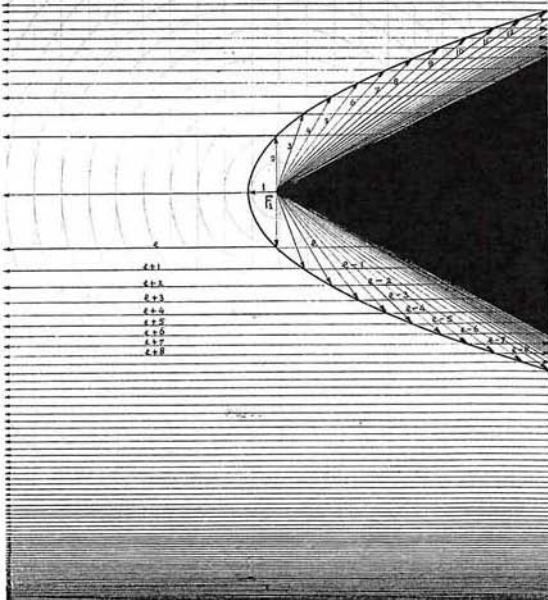
Evenals tek. 89 en 91, tekenen wij no. 96 en onderzoeken zijn structuur. De ellipsen zijn er in gelijk geworden aan de hyperbolen! Zij hebben elkaar gevonden in de twee stelsels parabolen, die elkaar waarschijnlijk evenzeer loodrecht snijden.



Maken we deze afstand eens de helft, dan blijkt de gehele figuur $\frac{1}{2} \times$ verkleind te zijn, maar overigens hetzelfde te zijn gebleven. Hoe kleiner we F_1F_2 maken, hoe meer krommen zien we in het vlak er om heen, maar de figuur van de tek. 90 en 92 en alle andere blijven onveranderd. Een vergroting van F_1F_2 geeft een detailtekening van onze figuren, zodat we bemerken, dat deze figuren in zekere zin *absoluut* zijn.

Wordt F_1F_2 echter $= 0$, dan veranderen de ellipsen in *cirkels* (de tweeheid wordt eenheid, Identiteit) en de hyperbolen, als scheidingen in beeld verdwijnen natuurlijk. Dit is het beeld van het ellipsveld, gezien vanuit het oneindige.

Wordt F_1F_2 oneindig groot, en wel zo dat F_1 en F_2 beide in het oneindige liggen, dan worden alle ellipsen horizontale rechte lijnen en alle hyperbolen verticale rechte lijnen, welke samen een *kruis*structuur vormen in het stralingsveld. Zo vormen cirkel en kruis de grensvormen bij de betrekking tussen 2 punten, individuen, eenheden of entiteiten.



Bij ons onderzoek blijkt het van belang te zijn de situatie zoveel mogelijk uit te tekenen en daarmee ons schouwen te hulp te komen. Daaruit kunnen figuren tevoorschijn komen, die een afschaduw van schoonheid geven, zoals tek. 97,

Ten slotte moeten we het geval bekijken, waarbij F_1 in het eindige blijft en F_2 naar het oneindige gaat.

Dan ontstaat tek. 95, waarin de cirkels met F_2 als centrum rechte verticale lijnen zijn geworden. We ontdekken hierin de figuur van tek. 96. Er treden twee series krommen op, een naar links en een naar rechts gaande, die echter beide gelijk zijn, en uitdrukking zijn van de eenheid van het oneindige naar links en het oneindige naar rechts.

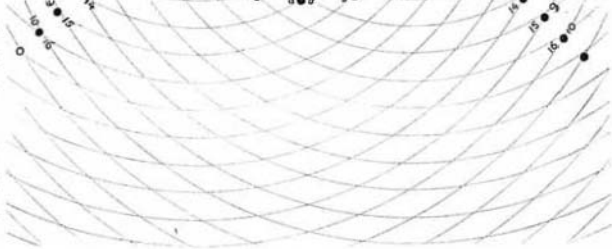
Evenals bij de tek. 90 en 92 kunnen wij beredeneren, dat ook hier het stralingsveld een lijnstructuur vertoont.

In tek. 97 is een dezer lijnen getekend met alle voerstralen naar F_1 en F_2 .

Nemen wij aan, dat F_2 naar rechts in het oneindige is verdwenen, en noemen we de afstand $F_1F_2 = e$. Stel dat F_1 divergent stralend is en F_2 convergent. De som der voerstralen vanuit alle punten der getekende kromme blijkt dan

Hoe zijn de samenhangen
in de figuur (98), de na-
tuur, in het leven der
mensen?

Nergens kunnen we ze
beter in tekening brengen
dan in de vlakke meetkun-
de.



$e + 2$ en dus constant te zijn! De kromme is dus een ellips met een brandpunt op oneindig.

De afstand F_1F_2 is naar links of naar rechts gemeten beide $= e$. Nemen we nu F_1 en F_2 beide divergent of beide convergent stralend aan en meten we de voerstralen naar F_2 naar links, dan blijkt, dat voor elk punt der getekende kromme het *verschil* der voerstralen $e - 2$ is, en dus constant! De kromme is dus ter zelfder tijd een hyperbool met een der brandpunten op oneindig.

Blijkbaar hebben we hier dus met de overgang van ellips naar hyperbool te maken. Dit is de *parabool*. Een parabool is de meetkundige plaats van alle punten, die evenver van een bepaald punt als van een bepaalde lijn, de z.g. richtlijn, af liggen. Klopt dit met de gevonden kromme? Ja; de verticale lijn

op een afstand 2 links van F_1 blijkt dan de richtlijn te zijn van deze kromme. In de ontwikkeling van twee stralende punten, zoals wij die volgden, is deze richtlijn echter een kunstmatig iets, terwijl wij door het vorige de samenhang der verschillende krommen eerst recht verstaan.

De vraag, die thans bij ons opkomt is: zijn ellips, parabool en hyperbool dan misschien diverse vormen van één kromme, en slechts verschillend in brandpuntsafstand?

Indien dit zo is, moeten we verklaren hoe het komt, dat bij een ellips de som der voerstralen constant is, terwijl bij een hyperbool hun verschil constant is. We bekijken nu tek. 98.

Het verschil van de voerstralen voor de aangegeven punten van de hyperbool is steeds 6. Wat is de som van de voerstralen echter van een punt van de rechter tak van de hyperbool naar F_2 en ook naar F_1 , maar nu naar F_1 , gemeten door het oneindige heen, dus naar rechts in het oneindige en van daar aan de linkerkant van de figuur terugkomende naar F_1 ? Noemen we de afstand $F_2 - \text{oneindig} = e$, en $\text{oneindig} - F_1$ ook $= e$, dan is de afstand $F_2 - F_1$ door het oneindige heen $= 2e$.

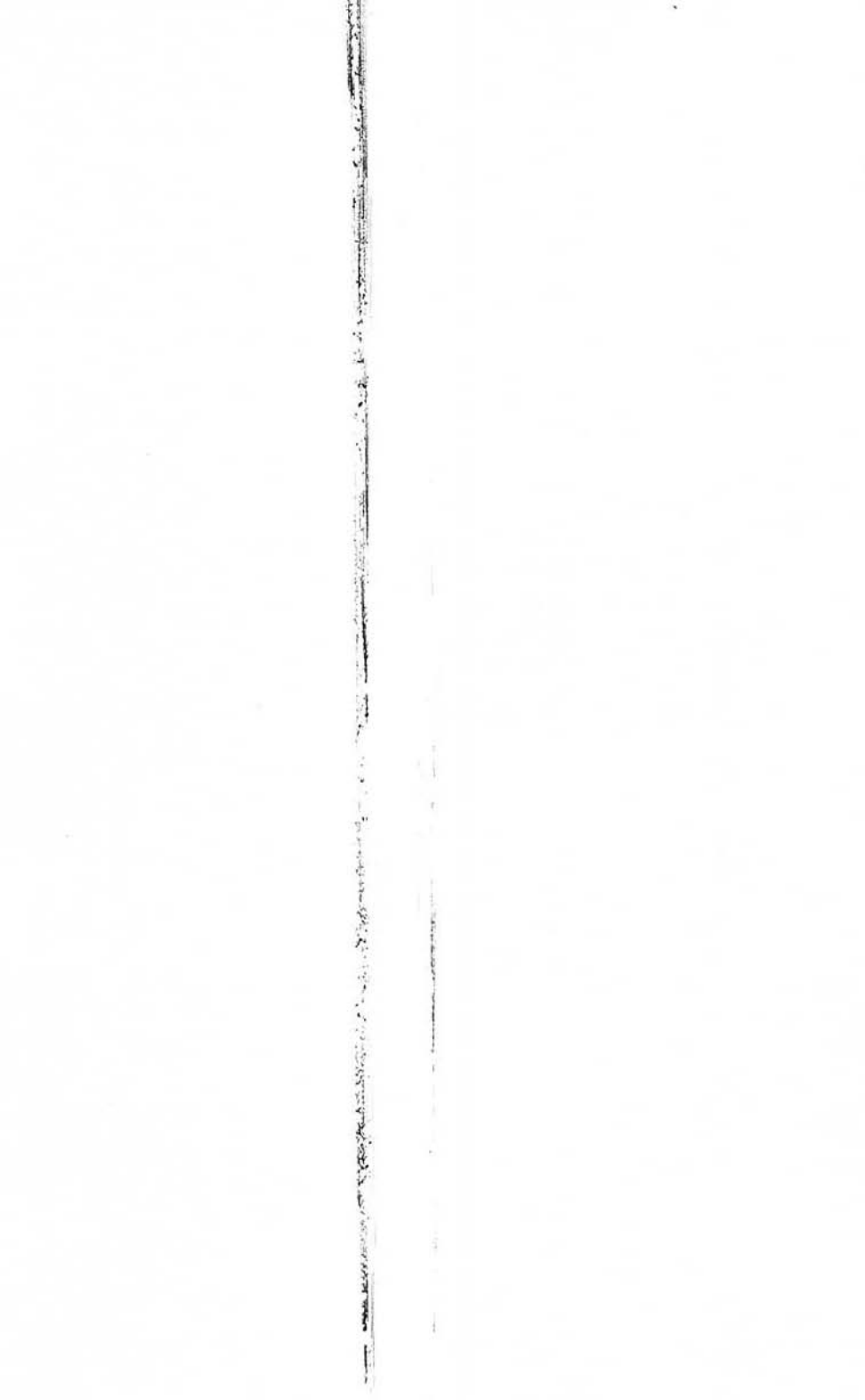
De som der voerstralen, gemeten binnen de hyperbooltakken, dus binnen de ruimten, waarin F_1 en F_2 liggen, is nu voor

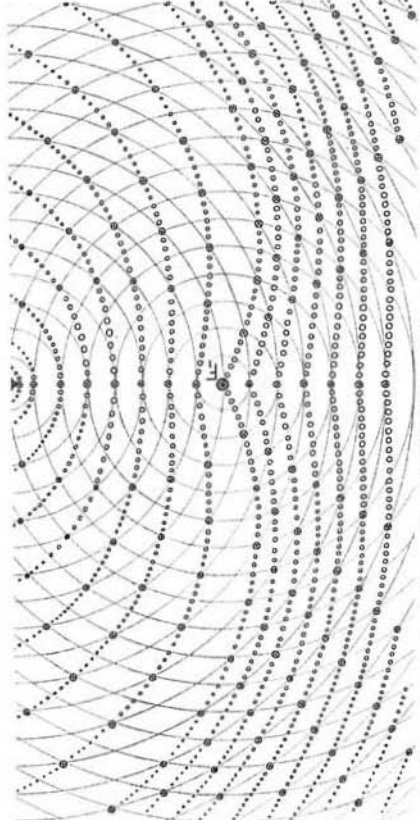
punt (7—1)	$1 + 1 + 2e = 2e + 2$
punt (8—2)	$2 + 2e + 0 = 2e + 2$
punt (9—3)	$3 + 2e - 1 = 2e + 2$
punt (10—4)	$4 + 2e - 2 = 2e + 2$

enz.

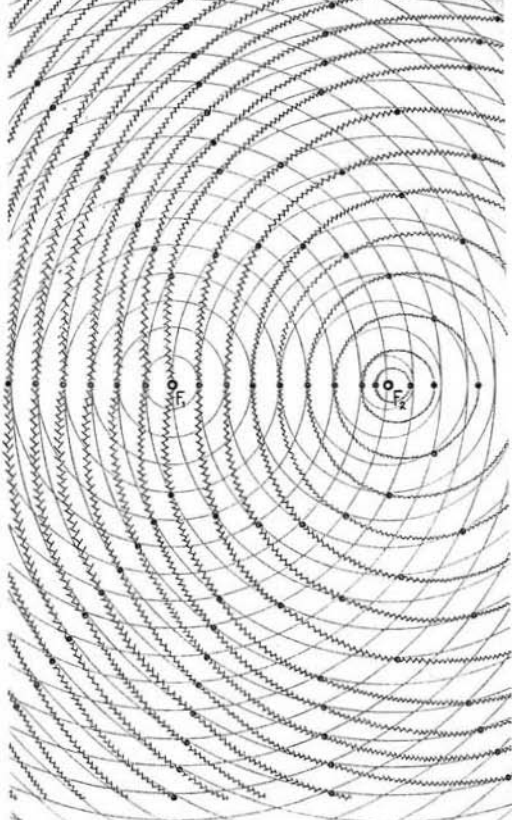
De afstand van b.v. punt (10—4) (zie tek. 98) door oneindig naar F_1 bepalen we aldus: de afstand $F_1 - (10—4)$ in het eindige is 10 cm. Dat is 2 cm meer dan F_1F_2 , die 8 cm is. De afstand van F_2 door oneindig naar F_1 is $2e$, dus de afstand (10—4) door oneindig naar $F_1 = 2e - 2$. De voerstraal naar $F_2 = 4$ cm. De som der voerstralen is dus $2e + 2$.

Hiermede hebben wij gevonden, dat de som der voerstralen naar een punt van een ellips, parabool en hyperbool, mits op overeenkomstige wijze gemeten, constant is. Deze eerst zo verschillend lijkende krommen zijn dus inderdaad verschillende uitingsvormen van één wet. Ook de cirkel, waarbij de brandpunten nog één zijn, behoort dan hierbij. Hun eigenschappen zullen dus ook overeen moeten komen, al is het dan in een vorm, die afhankelijk is van de brandpuntsafstand.





[99]



[100]

Wat de straling der brandpunten betreft, merken wij op, dat de ellips één convergent en één divergent stralend brandpunt heeft, terwijl de hyperbool twee convergente of twee divergente brandpunten heeft. Dit zou in strijd zijn met hun gelijke aard. We bedenken echter, dat, uitgaande van een bepaald punt op de rechter tak van een hyperbool, een verwijdering van het linker brandpunt overeenkomt met een nadering tot het linker brandpunt door het oneindige. Welbeschouwd kunnen we dus ook bij een hyperbool van een convergent en een divergent stralend brandpunt spreken, wanneer we afzien van de stralen, die de hyperbooltakken snijden, en die blijkbaar het karakter van kortsluitingen hebben.

* * *

Tot nu toe hebben wij de straling uit de brandpunten even sterk of even snel aangenomen. Wat krijgen we, wanneer de divergentie uit F_1 b.v. $2 \times$ zo snel is als de divergentie uit F_2 ? De hyperbolen van tek. 90 veranderen dan in de gesloten krommen van tek. 99. Dat deze krommen werkelijk gesloten zijn, kunnen we nagaan door van een bepaald punt, b.v. op de lijn F_1F_2 en tussen F_1 en F_2 gelegen uit te gaan. Noem de afstand ervan tot $F_1 = a$ en het aantal malen, dat de straal uit F_1 met 1 cm aangroeit tot hij de straal uit F_2 ontmoet op het verlengde van $F_1F_2 = n$. De straal uit F_2 is dan met $\frac{1}{2}n$ aangegroeid. Voor het ontmoetingspunt kunnen we dan de vergelijking opschrijven:

$$a + n - (4 - a + \frac{1}{2}n) = 4$$

Hierin is $F_1F_2 = 4$ cm genomen.

$$2a + \frac{1}{2}n = 8$$

Dit is een eerste-graads vergelijking met 2 variabelen. Bij elke a behoort een n , zodat we een stelsel van gesloten krommen krijgen. B.v.

Voor $a = 0$ is $n = 16$. De kromme door F_1 snijdt dus het verlengde van F_1F_2 op een afstand van 16 cm van F_1 .

Voor $a = 1$ is $n = 12$, enz.

Voor de krommen, die buiten F_1 en F_2 lopen, kunnen we voor het snijpunt op het verlengde van F_1F_2 opschrijven:

$$a + n - (4 + a + \frac{1}{2}n) = 4 \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}n = 8, \quad n = 16$$

Hierin wordt a gemeten vanuit F_1 naar links op F_1F_2 . Dit wil dus zeggen, dat voor elke afstand a er een aangroeiing van 16 cm van de straal uit F_1 nodig is, opdat de stralen uit F_1 en F_2 elkaar op het verlengde van F_1F_2 ontmoeten.

Is de divergentie uit F_1 $4 \times$ zo groot als die uit F_2 , dan krijgen we tek. 100. Hiervoor wordt de voorgaande vergelijking:

$$a + 2n - (4 - a + \frac{1}{2}n) = 4$$

$$2a + \frac{1}{2}n = 8$$

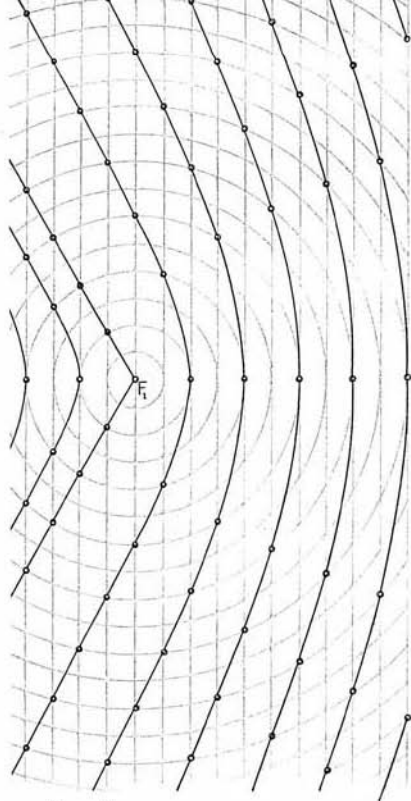
Voor $a = 0$ is $n = 5\frac{1}{3}$. De kromme door F_1 snijdt het verlengde van F_1F_2 op een afstand van $5\frac{1}{3} \times 2 = 10\frac{2}{3}$ cm van F_1 .

Voor de grotere krommen links van F_1 is

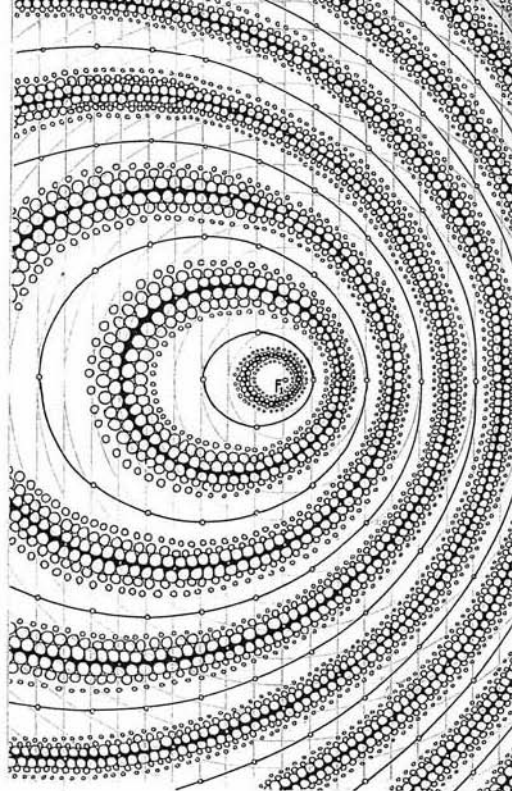
$$a + 2n - (4 + a + \frac{1}{2}n) = 4$$

$$n = 5\frac{1}{3}$$

Deze krommen snijden F_1F_2 dus links van F_1 op afstand a en rechts van F_1 op afstand $a + 2 \times 5\frac{1}{3}$ cm



[101]



[102]

Hoe worden de krommen bij relatief toenemende stralingssnelheid van F_1 , tot oneindig toe?

De krommen zullen hoe langer hoe meer tot cirkels naderen met F_2 als middelpunt.

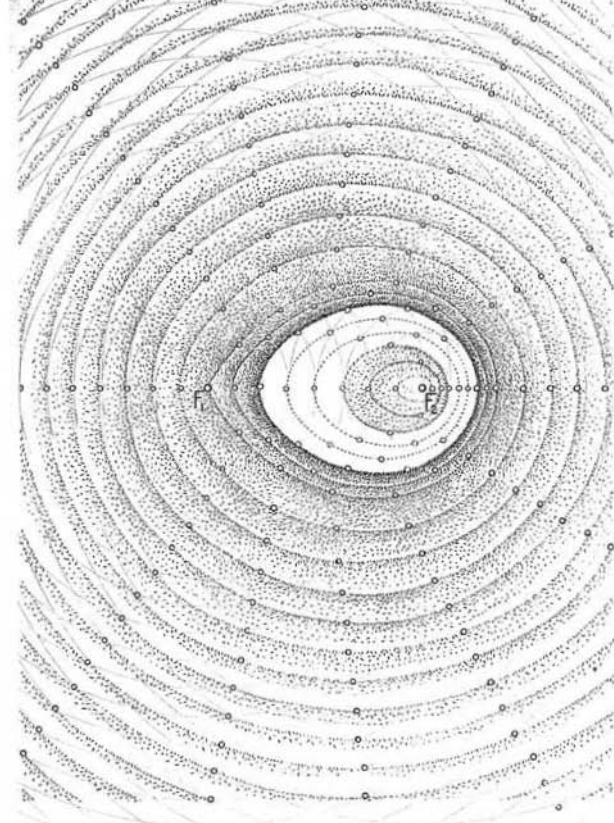
Hoe wordt het stralingsveld wanneer F_2 op oneindig ligt, en de straling van F_1 $2 \times$ zo snel is als die van F_2 ?

We krijgen dan tek. 101.

Bij groter worden van de stralingssnelheid van F_1 tot oneindig toe, zullen de krommen naderen tot verticale rechten, of wel tot cirkels met F_2 op oneindig als middelpunt.

Is de stralingssnelheid van F_2 op oneindig $2 \times$ zo groot als die van F_1 , dan krijgen we tek. 102. Wordt deze groter, dan krijgen we als uiterste geval concentrische cirkels om F_1 bij een stralingssnelheid oneindig uit F_2 op oneindig.

Thans moeten we het stralingsveld onderzoeken voor het geval dat F_1 $2 \times$



De punt in de kromme bij F1 van tek. 103 doet vreemd aan. Is de tekening wel goed en volledig?

zo sterk divergent is als F_2 convergent. We vinden dan tek. 103, waarin de *eivorm* optreedt. Voor $F_1F_2 = 8$ cm wordt de vergelijking (zie hiervóór)

$$2a + 3n = 16$$

waarin weer $a =$ afstand tot F_1

$n =$ aantal malen dat de straal uit F_1 2 cm groter is geworden,

en de straal uit F_2 1 cm kleiner.

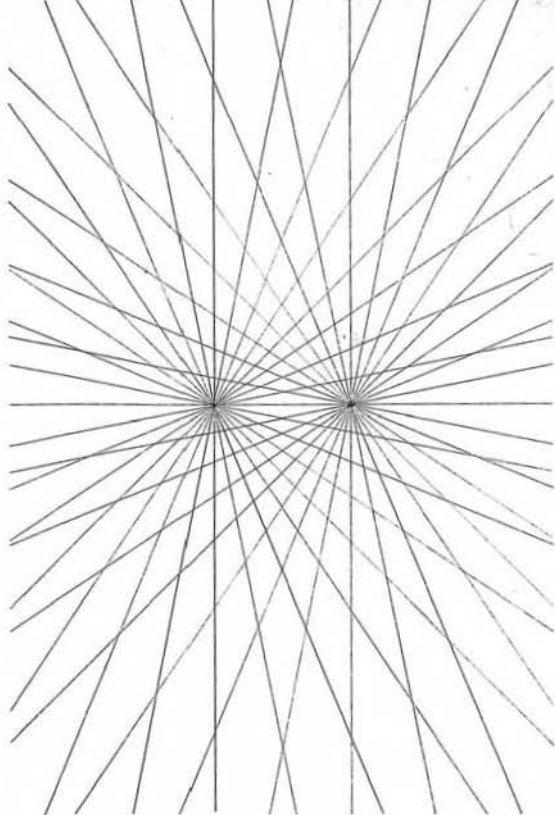
Bij de voorwaarde, dat a en n geheel moeten zijn, vinden we slechts 2 waarden, n.l. $a = 2, n = 4$

$$a = 5, n = 2$$

De krommen, die hierbij horen, prijken als een ei met dooier in de tekening, en we zien, dat het ei zich vormt om het convergente, receptieve, vrouwelijke brandpunt!!

Wordt het onderscheid in snelheid groter, dus de divergentie t.o.v. de con-

Evenals tek. 88 en 95 stelt ook de eenvoudige tek. 104 ons voor problemen, waarin wij trachten door te dringen. Wat is het verband tussen deze vierhoeken en driehoeken; en tussen de stukken, waarin de stralen elkaar verdelen?

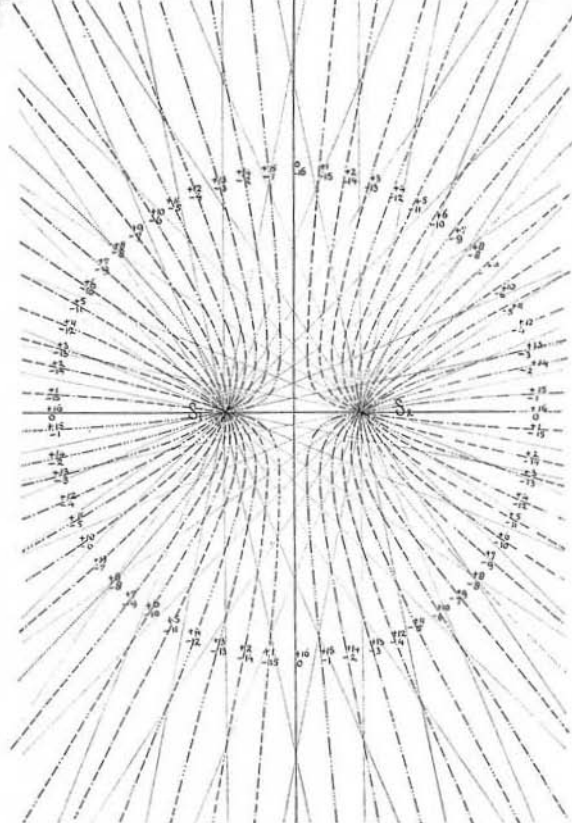


vergentie groter, dan zal het veld hoe langer hoe cirkelvormiger worden, met F_2 als middelpunt.

2. Twee punten in stralentekening.

In de cirkeltekeningen kozen wij de straling zó, dat in gelijke tijden gelijke uitbreiding werd verkregen.

In de stralentekeningen, waarvan tek. 104 de eerste is, kiezen wij de straling zodanig dat vanuit elk brandpunt een straal en dus de gehele stralenbundel, met constante hoeksnelheid draait. Wij tekenen de krommen, die hun snijpunten daarbij doorlopen. Dit is een aanpassen aan de mogelijkheden der tekening. De cirkeltekening bracht ons in het overgaan van de ene cirkel



Wat voor krommen ontstaan in tek. 105? Is het mogelijk de vergelijking ervoor op te stellen, dan zouden we daaruit tot een conclusie betreffende hun vorm kunnen komen.

naar de andere tot stralingsuitbreiding. De stralentekening brengt ons in het overgaan van de ene straal naar de andere tot stralingsdraaiing.

Wij krijgen dan dus de volgende gevallen:

- de stralingen draaien in tegengestelde zin,
- de stralingen draaien in gelijke zin.

2a.b. Draaiing in tegengestelde zin.

Brengen wij dit in tekening voor alle stralen en dus voor alle punten van het platte vlak, dan krijgen wij tek. 105. Hier begint het aangeven van de bijeenhorende takken der krommen minder duidelijk te worden en ook volgende tekeningen lijden daaronder. Maar deze moeilijkheid wordt met één slag

opgeheven, wanneer men verschillende kleuren daarvoor gaat gebruiken. Ge-
kleurd potlood brengt hier de oplossing. Het kan vele tekeningen verhelderen
en eenvoudiger uitvoerbaar maken.

De stralen, die elkaar op de verticale middenlijn snijden, kennen wij gelijke
fase toe, en geven aan de bijbehorende baankromme het cijfer 0. Is de straal
uit het rechter straalpunt een hoek van $90^\circ/8 = 11\frac{1}{4}^\circ$ vóór bij die uit het
linker straalpunt, dan geven we de baankromme het cijfer +1; is de straal
 $2 \times$ een hoek van $11\frac{1}{4}^\circ$ vóór, dan krijgt de baankromme het cijfer +2;
is hij een hoek van $15 \times 11\frac{1}{4}^\circ$ vóór, dan is dit hetzelfde alsof hij $1 \times 11\frac{1}{4}^\circ$
achter is. Daar staat dan dus +15 en -1 bij; enz.

Elke kromme blijkt zo 2 takken te hebben, die zich door het oneindige heen
sluiten. De krommen, waar gelijke cijfers bij staan, behoren bij elkaar.

Het heeft er veel van, dat de punten beide divergent of beide convergent
stralend zijn. De krommen ontwijken elkaar, evenals in tek. 90. Ze verbinden
de straalpunten niet dan door het oneindige heen. Divergentie van een stralend
punt beduidt een door het oneindige heen weerkerende convergentie.

Wat voor soort krommen toont ons tek. 105? Daartoe beschouwen we
tek. 106.

AC en BC stellen 2 draaiende stralen voor. Hun faseverschil is een aantal
malen de constante hoek $90^\circ/8$, dus in het algemeen nc.

De algemene vergelijking van een rechte door een punt (x_1, y_1) is:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \text{ waarin } m = \operatorname{tg} \alpha$$

De verg. van AC door A $(-a, 0)$ is dus

$$y = \operatorname{tg} \alpha (x + a) \quad (1)$$

en die van BC door B $(+a, 0)$

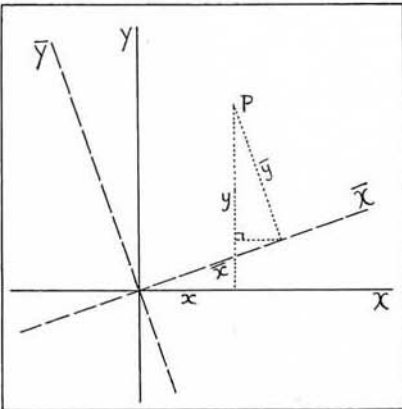
$$y = -\operatorname{tg}(\alpha + nc) (x - a) \text{ of}$$

$$y = (a - x) \operatorname{tg}(\alpha + nc) \quad (2)$$

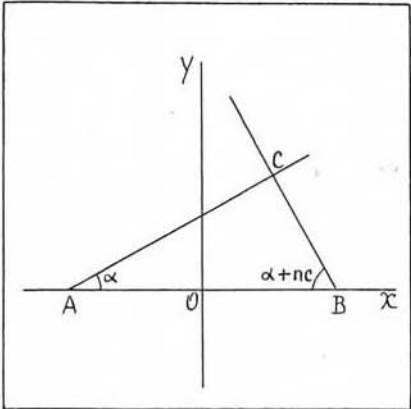
We zullen nu de kromme, die hun snijpunt beschrijft, krijgen door de x
en de y uit (1) en (2) aan elkaar gelijk te stellen en daarbij α te elimineren.
We krijgen dan uit (1)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x + a} \text{ Dit gesubst. in (2) geeft:}$$

$$y = (a - x) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} nc}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} nc} \quad y = (a - x) \frac{\frac{y}{x + a} + \operatorname{tg} nc}{1 - \frac{y}{x + a} \operatorname{tg} nc}$$



[106]



[107]

$$y = (a - x) \frac{y + (x + a) \operatorname{tg} nc}{x + a - y \operatorname{tg} nc}$$

$$xy + ay - y^2 \operatorname{tg} nc = ay - xy + (a^2 - x^2) \operatorname{tg} nc$$

waaruit: $x^2 + \frac{2}{\operatorname{tg} nc} xy - y^2 = a^2$.

Dit is de vergelijking voor het hele stelsel krommen, die thans blijken *hyperbolen* te zijn. Vullen we voor n een bepaalde waarde in, dan krijgen we de bijbehorende hyperbool.

Voor $n = 0$ wordt $xy = 0$ of $x = 0$ en $y = 0$. Dat zijn de 2 assen.
 $n = 4$ geeft $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$ (3)
 $n = 8$ geeft $x^2 - y^2 = a^2$. Dit is de hyperbool, die recht op de x - en y -as staat. (de term met xy ontbreekt)

Willen we de assen bepalen voor de hyperbool (3), dan moeten we, zoals uit tek. 107 blijkt, de volgende transformatieform. toepassen.

$$x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi$$

$$y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi$$

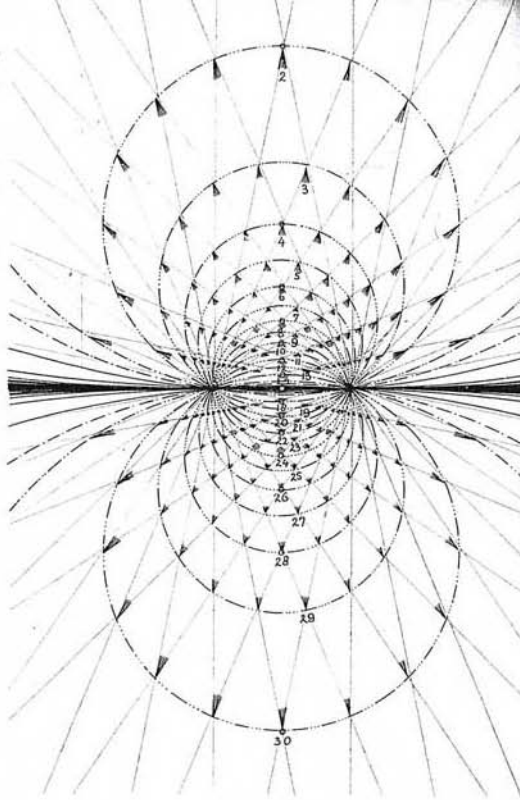
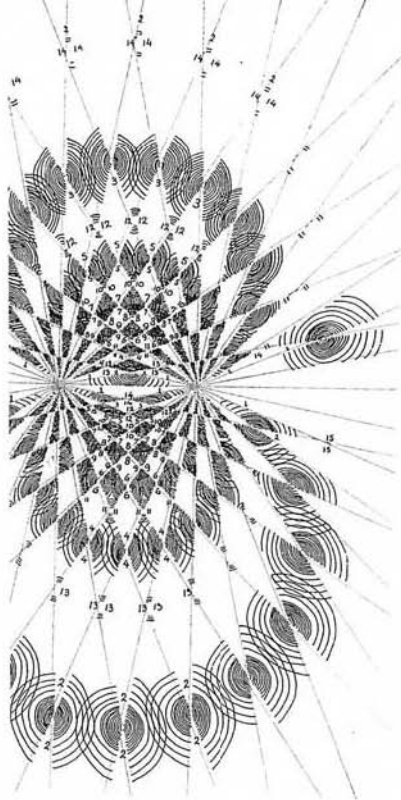
Deze waarden ingevuld in (3) geven:

$$x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi - 2xy \sin \varphi \cos \varphi + 2x^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$- 2y^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2xy (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - x^2 \sin^2 \varphi$$

$$- y^2 \cos^2 \varphi - 2xy \sin \varphi \cos \varphi = a^2$$

De coëfficiënt van xy is:
 $- 4 \sin \varphi \cos \varphi + 2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$



[108]

[109]

Stel deze = 0 dan krijgen we de verg. v. d. hyperbool loodrecht op de assen, en dit geeft de voorwaarde voor de assen:

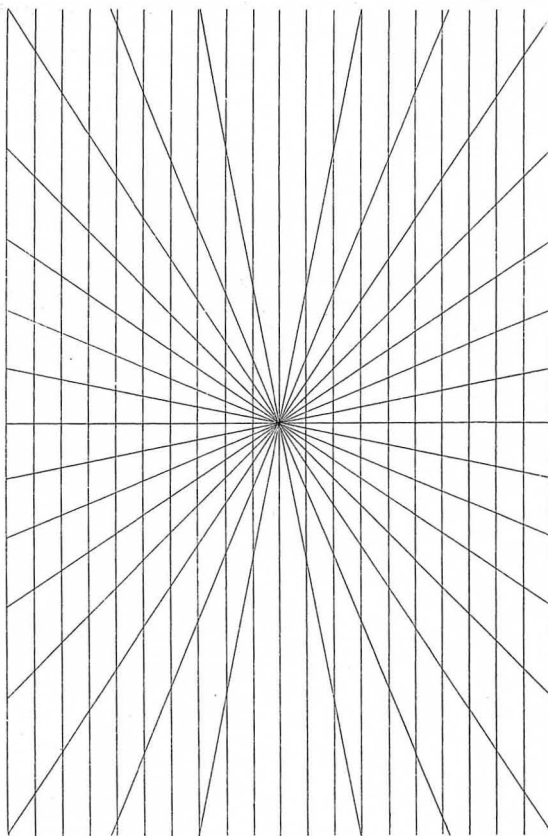
$$2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 4 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$2 \cos 2 \varphi - 2 \sin 2 \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = 1$$

$$2 \varphi = 45^\circ. \quad \varphi = 22\frac{1}{2}^\circ \text{ is dus de assendraaiing bij } n = 4.$$

We keren terug tot tek. 104, en ons vallen al de hoeken op, die de stralen uit de 2 punten met elkaar maken. Welke hoeken daarvan zijn gelijk? De grootte der hoeken is gemakkelijk te bepalen; ze zijn alle een veelvoud van $90^\circ/8$. Geven we gelijke hoeken een gelijke aanduiding, dan krijgen we tek. 108, een zwakke schaduw van een prachtig gebeuren. De hoeken worden daarin aangeduid door een cijfer, dat de grootte aangeeft in een veelvoud van $90^\circ/8 = 11\frac{1}{4}^\circ$ of door een aantal boogjes, dat hetzelfde veelvoud aangeeft (de eerste 10 boogjes staan dicht opeen om het tellen te vergemakkelijken).



[110]

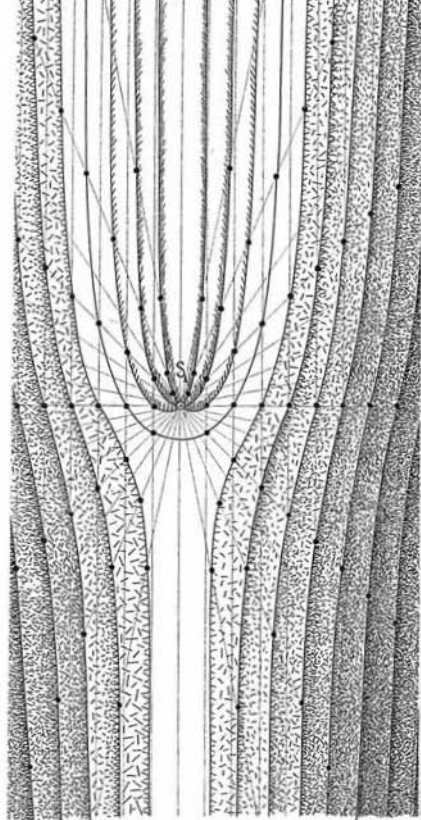
Zoals tek. 95 ontstond uit No. 88, evenzo volgt tek. 110 uit No. 104 als uiteindelijke stand: S1 is in het einde gebleven, S2 naar oneindig gegaan.

2c. *Draaiing der stralen in gelijke zin.*

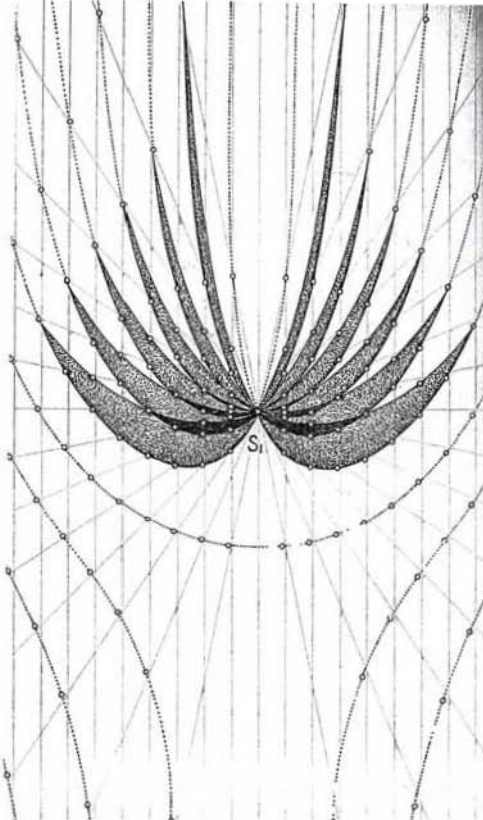
We krijgen tek. 109. De krommen verbinden de punten, waarin de stralen gelijke hoeken met elkaar maken. Nu liggen de toppunten van alle driehoeken met gelijke basis (F_1F_2) en gelijke tophoek op een cirkelboog, dus blijken alle krommen *cirkelbogen* te zijn. De ganse ruimte wordt door de uitdijende cirkels vervuld, van boven en beneden tot de rechte door F_1F_2 . De cijfers in de hoeken geven de grootte ervan aan, uitgedrukt in veelvouden van $90^\circ/8$. De cijfers aan de benedenkant gelden voor de inspringende hoeken.

Waar liggen de middelpunten der cirkels? Hoe verhouden zich hun stralen? Zijn de delen, waarin elke cirkel verdeeld wordt, onderling gelijk?

Gaan we de afhankelijkheid der figuur na van de afstand der 2 stralende punten, dan bemerken we weer, dat ze onafhankelijk is van deze afstand, en



[111]

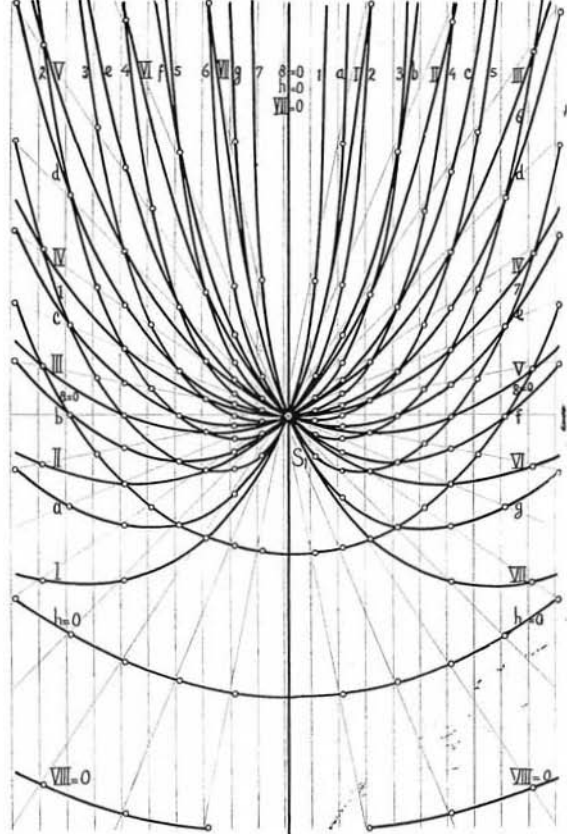


[112]

dus in zekere zin absoluut. Slechts voor de afstanden oneindig klein en oneindig groot kunnen we iets anders verwachten. In het laatste geval ontstaat tek. 110. Daar de richting, waarin het ene stralende punt in het oneindige verdwenen is, uniek is, kozen we deze in tek. 111 naar boven, en niet naar links of rechts, daar deze richtingen voor ons meer gelijkwaardig zijn.

We zien, dat alle krommen in de buurt van het stralend punt dáárheen gebogen worden. Een aantal krommen gaat er doorheen, en deze worden door een enkele kromme omsloten. Het is alsof om het punt zich een kom, kelk of graal vormt, waarin de straling uit het oneindige opgevangen en teruggekaatst wordt, terwijl de ruimte eromheen zich meedragend kromt.

In tek. 112 zijn de lijnen getekend, waarop de snijpunten liggen, wanneer de straling uit S_1 in het eindige $11\frac{1}{4}^\circ$ draait, terwijl de straling uit S_2 op oneindig zoveel draait, dat de verplaatsing in het eindige 1 cm is.



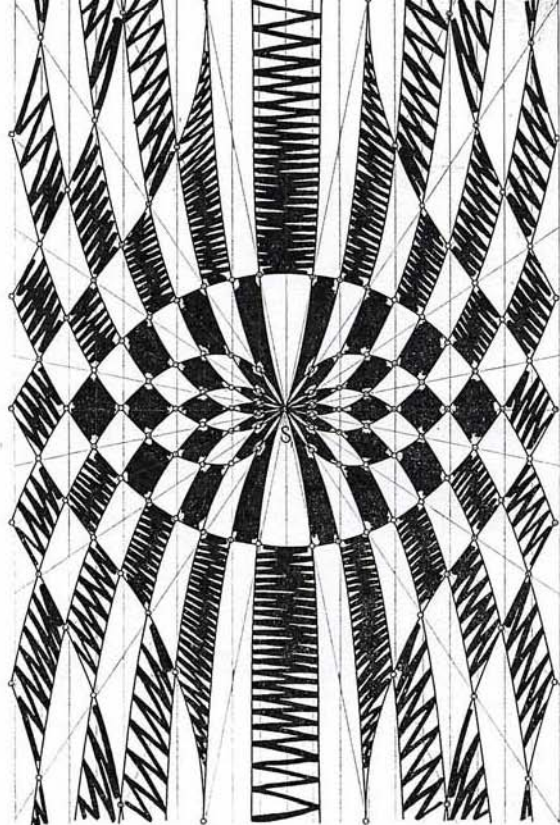
Tek. 113 geeft de figuur van tek. 111, doch voor 3 draaisnelheden van de straling uit oneindig in één figuur, zodat hier 3 omhullenden optreden.

Bovendien zijn een aantal krommen gedeeltelijk getekend, waarbij de draaiing uit S_2 dubbel zo snel is. De ruimte tussen deze twee stelsels is donker gemaakt. We kunnen ook hierin desgewenst een principieel natuurgebeuren zien tussen een entiteit in het eindige en een op oneindig (b.v. de zon).

Draait de straling uit S_1 $4 \times$ zo snel, dan komt dit overeen met een draaiing van $4 \times 11\frac{1}{4}^\circ = 45^\circ$ in de tijd, dat de straling uit S_2 1 cm in het eindige aflegt. Dit geeft tek. 111. Wij bespeuren, dat tek. 111 gelijk is aan tek. 112 maar dan $4 \times$ verkleind.

Het verloop der omringende krommen is hier goed te zien. Zij worden alle min of meer naar S_1 toegebogen en wel zó, dat de kromming met vergroting der afstand van S_1 afneemt om ten slotte onmerkbaar te worden.

Nemen wij in één tekening de gevallen op, dat de straling uit S_2 op on-



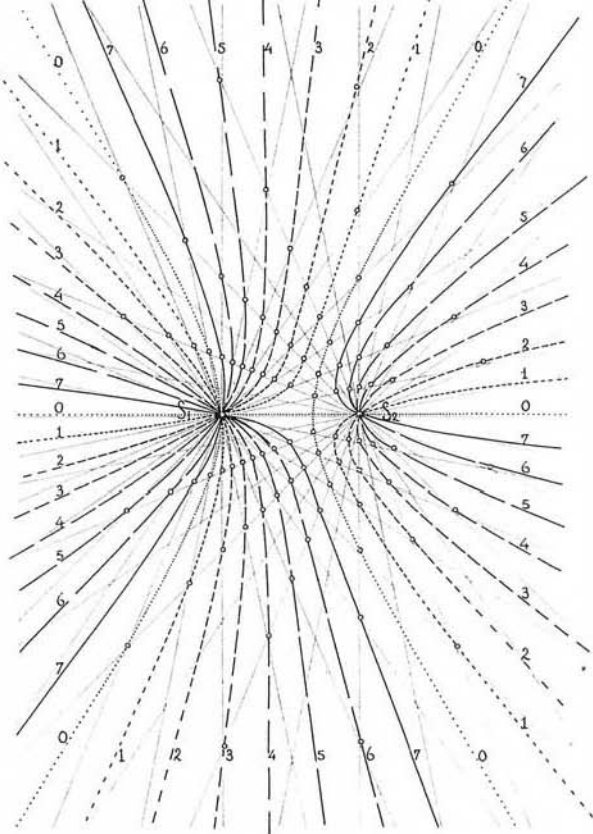
Tek. 114 had ook als No. 111 getekend kunnen worden, maar dan met zijn omgekeerde erbij. De beide omhullenden omsluiten nu een vlakke figuur, a.h. w. een lichaam met inwendige delen.

eindig 1 cm, 2 cm en 3 cm in het eindige draait, terwijl de straling uit S_1 $11\frac{1}{4}^\circ$ draait, dan ontstaat tek. 113. De 3 stelsels zijn verschillend genoteerd.

Hieruit is te zien, dat de 3 stelsels krommen vergrotingen van elkaar zijn. Zij ontstaan door vermenigvuldiging vanuit S_1 uit elkaar en verhouden zich als 1 : 2 : 3. Hier blijkt dus weer één figuur aan ten grondslag te liggen *onafhankelijk* van de draaisnelheid van de straling uit S_2 op oneindig. Deze draaisnelheid bepaalt slechts de grootte van het beeld.

Bij oneindig langzame draaiing, dus stilstand, van het straalpunt in het eindige of oneindige snelle draaiing van de straling in het oneindige, wordt het stralingsbeeld als dat van één enkel punt, dus als in de tek. 68—70.

Draait het straalpunt in het eindige oneindig snel of dat in het oneindige niet, dan vertoont het stralingsbeeld slechts de evenwijdige stralen uit het oneindige.



Deze tek. 115 is te vergelijken met No. 105, waarvan de verticale O-O lijn nu een gebogen O-O lijn is geworden, die ook weer 2 stelsels krommen scheidt.

Dit komt er dus op neer, dat niet-draaiing der straling van S_1 overeen komt met een maximum spreiding der eigen convergente of divergente straling, en dat oneindig snelle draaiing de stralingsfiguur blust. Het laatste zouden we kunnen aanzien voor een in zichzelf geabsorbeerd zijn met als gevolg een opheffing van zichzelf in het veld.

Wanneer de straling uit het oneindige zowel van de ene als van de andere kant komt, ontstaat een veld als in tek. 114. Hier zijn de lijnstukken op 1 straal alle gelijk aan elkaar, behalve bij S_1 , waar ze om de ander de helft zijn! Alle vierhoekige gekromde vlakken blijken geordend in rechte lijnen volgens de stralen uit S_1 en S_2 op oneindig.

Ongelijk snelle draaiing van 2 straalpunten in het eindige.

We gaan uit van tek. 105, waarin de stralingen in tegengestelde zin

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

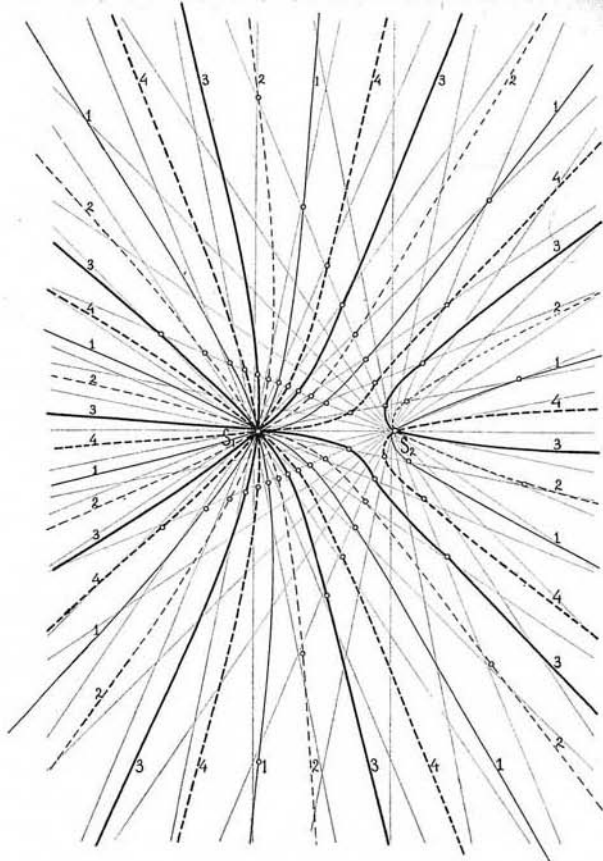
46

47

48

49

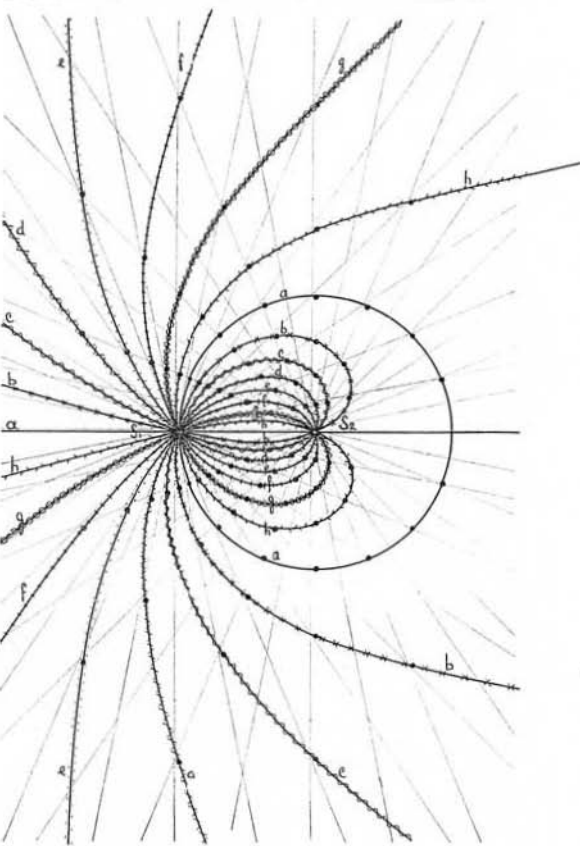
50



Zou in tek. 116 ook een
scheidingskromme tus-
sen de takken 3 en 4
aanwezig zijn?

draaien. Draait de rechter straling nu $2 \times$ zo snel als de linker, dan ontstaat tek. 115. De bijeenhorende lijnen zijn op dezelfde manier aangegeven. Het zijn gesloten krommen, die $3 \times$ door het oneindige gaan behalve de gestippelde, die bestaat uit 2 takken, welke $2 \times$ door 't oneindige gesloten zijn (is dit een hyperbool?) en de rechte, die door de straalpunten gaat. Het zijn blijkbaar 3e graads krommen. Deze en vele andere tekeningen winnen aan duidelijkheid, wanneer men de lijnen met verschillend gekleurde potloden aangeeft.

Wentelt de rechter straling $4 \times$ zo snel als de linker, dan krijgen we tek. 116. Alle lijnen zijn krommen, die zich $5 \times$ door het oneindige sluiten. Het zijn blijkbaar 5e graads krommen. Hoe sneller draaiing in een punt, hoe meer de krommen er doorheen worden weggeblazen. Bij een oneindig snelle draaiing heft het zichzelf in het stralings- of actievelde geheel op.



In tek. 117 treedt onverwacht de cirkel op en wel als scheiding tussen de takken, die wel en niet door S_2 gaan. Deze cirkel omhult de knop.

aaing van de straling in gelijke zin.

De straling van S_2 wentelt $2 \times$ zo snel als die van S_1 .

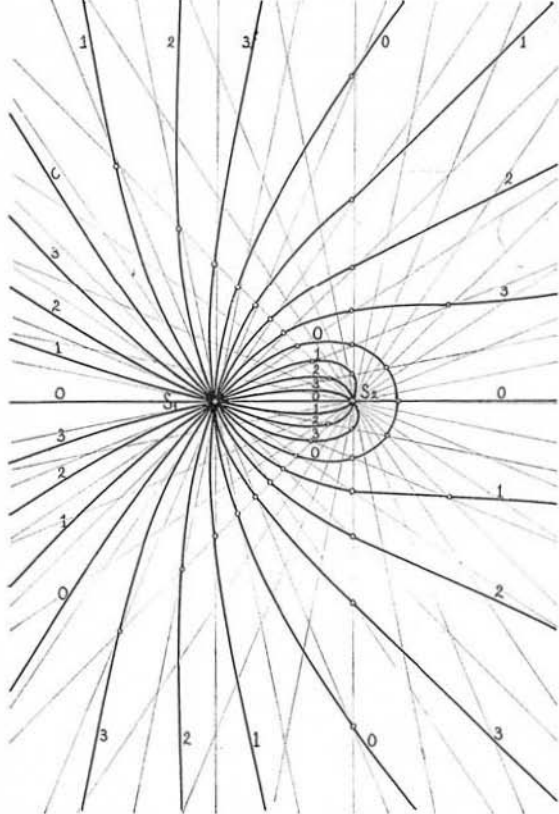
Tek. 117 ontstaat.

Er ontstaat een knop door de krommen, die een lus vormen. Ze worden omringd door een cirkel a, waarbij de rechte behoort, die door de 2 stralencenten S_1 en S_2 gaat.

Dat dit deel van kromme a een cirkel is, blijkt uit de driehoeken, door welke toppen hij gaat. Deze zijn alle gelijkbenig (overstaande hoeken gelijk) de gelijke benen zijn alle $= S_1 S_2$.

De krommen a—h zijn blijkbaar van de 3-de graad. Zij sluiten zich alle $\times$ door het oneindige.

Ook in tek. 118 treedt evenals in 117 knopvorming op. Zou het ei in tek. 103 wellicht als een afgescheiden knop beschouwd kunnen of moeten worden? In beide gevallen bestaat er verschil in stralings- of draaisnelheid tussen de straling van de 2 punten.



Wentelt de rechter straling $4 \times$ zo snel als de linker, dan ontstaat het veld van tek. 118. De knopvorm blijft bestaan. De krommen zijn gesloten en lopen $3 \times$ door oneindig. Bij sneller wenteling zal de knop hoe langer hoe platter worden, en bij oneindig snelle draaiing zal de straling van het rechter punt weer geheel verdwenen zijn, en we houden het veld van het linker straalpunt over.

Vergelijken we de krommen, die ontstaan bij tegengestelde draaiing met die welke bij wenteling in gelijke zin ontstaan, dan valt het op, dat bij de eersten de 2 stellen krommen elkaar ontwijken, terwijl in het andere geval alle krommen de beide punten steeds verbinden.

Bij tek. 117 moeten wij terugdenken aan tek. 3. Toen deze getekend was, kwam de vraag op naar de krommen, die ontstaan bij de onderlinge snijding van de zijden van de driehoeken. Denken wij ons de driehoeken van licht

gekleurd glas, dan liggen de toppunten van enkeldik glas op een cirkel; die van dubbeldik glas op een meloenvormige kromme; die van driedubbeldik glas op de volgende kromme, enz. Dit zien we in tek. 119.

Maar wat zijn dat voor krommen, die op vormen van een meloen, appel en noot lijken en hoe verlopen die eigenlijk?

Dit werd pas veel later wat duidelijker uit tek. 117. Daarin treden dezelfde driehoeken op met het verschil, dat punt A van tek. 3 nu op de cirkel ligt in plaats van erbinnen. Wij ontdekken daardoor het hele verloop van de krommen; dat ze ook buiten de cirkel doorlopen en dat er 2 stelsels van krommen op wonderschone wijze door elkaar heen lopen, zie tek. 120.

Elk snijpunt daarin heeft een cijfer met een index. Deze laatste geeft aan op welke lijn het snijpunt gelegen is.

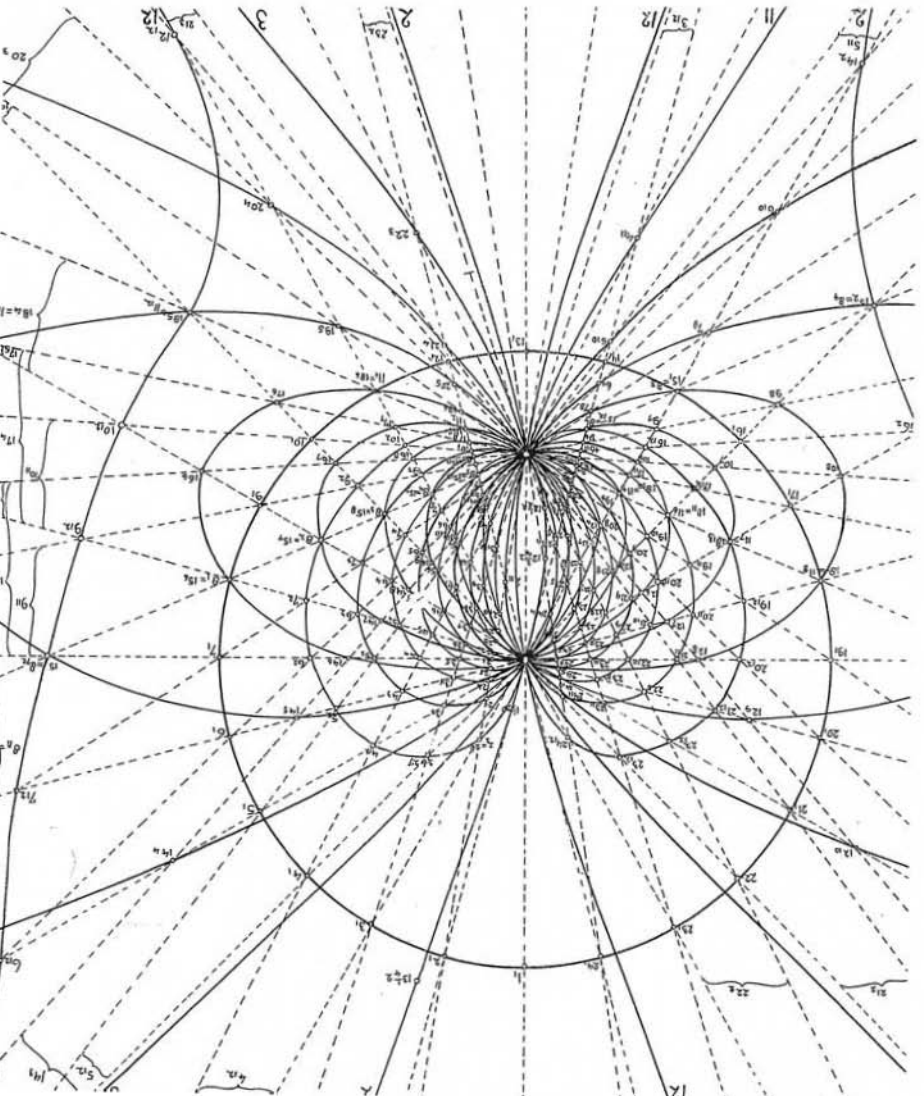
Aan de cijfercombinaties kan men controleren of de constructie goed is.

Er blijken 12 verschillende krommen te ontstaan, die twee aan twee elkaars spiegelbeeld zijn.

Er bestaat een micro-organisme, genaamd *Dorcadospyrus Dinoceras*, waarvan de glasblazer Herman Muller een natuurgetrouw model in glas vervaardigd heeft op millioen maal de ware grootte. Dit organisme, afgebeeld in fig. 121, doet ons denken aan de appelvorm in tek. 119, waarbij de scherpe stekels overeenkomen met de uitstekende driehoeken, die de appelvorm deden ontstaan.

In deze beschouwing van twee stralende punten ontmooten wij het oerfomneem van het contact tussen twee wezens in meetkundige vorm.

[120]



Die Lehrer sollten so eingestellt sein, dass sie die vier transcendenten Werte: das Wahre, Gute, Schöne und Organische (Plato noemt hier het Heilige) in allen Fächern ein zu prägen wissen. Der Vollendungswert ist die Synthese der vier oben genannten Transcendentalwerte.

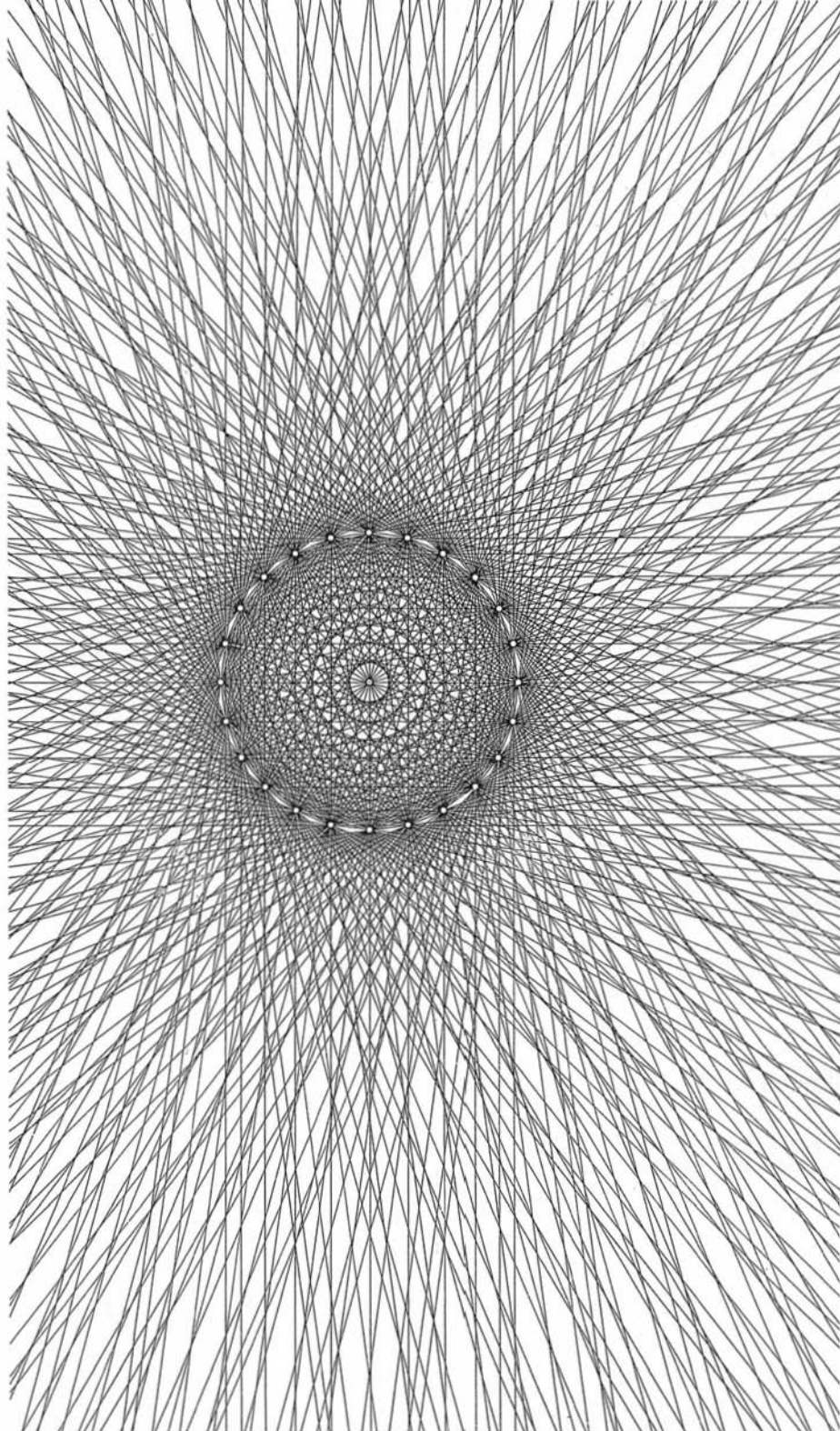
J. Castiello

Hier zijn we aan het einde gekomen van onze beschouwing over 1 en 2 stralende punten. Ze is ongetwijfeld onvolledig, zodat er nog allerlei aan toegevoegd zou kunnen worden. We hebben gezien hoe velerlei stralingsvelden van prachtige vorm ontstonden. Ten slotte klimt de gedachte in ons op, dat deze stralingsvelden, die door de aanwezigheid van 1 of 2 punten zo oorspronkelijk optreden, wellicht vormgevend zijn bij het ontstaan van de primitieve vormen bij plant, knop en bloem, schelp, ei en nevelvlek. Want evenals aan de zichtbare wereld een onzichtbare wereld van electriciteit, van beweging, van geest ten grondslag ligt, evenzo ligt daar tevens een wiskundige, een meetkundige wereld aan ten grondslag. En wanneer alles in diepste wezen één is en met elkaar verbonden, is het ook niet vreemd, — al moge het wonder ons treffen, — dat in deze tekeningen een symboliek tot uiting komt, die de primaire verhouding van twee wezens, entiteiten, betreft.

* *

De uitwerking dezer gedachten voor 3 punten zou een aparte studie zijn.

★



*Nichts is mir zu klein
Und ich liebe es trotzdem
Und mal es auf Goldgrund und groß
Und halte es hoch und ich weiß nicht wem
Löst es die Seele los.*

R. M. Rilke

STRALING VAN PUNTEN OP EEN CIRKELOMTREK.

Stellen wij ons voor, dat de straling, uitgaande van één punt gekomen is tot een cirkelomtrek, dan zou elk punt daarvan op zichzelf weer middelpunt van straling kunnen worden.

Wij kunnen op de cirkelomtrek daartoe 3, 4, 5, 6n punten kiezen, b.v. als de hoekpunten van een regelmatige 3-, 4-, 5-, 6-, n-hoek.

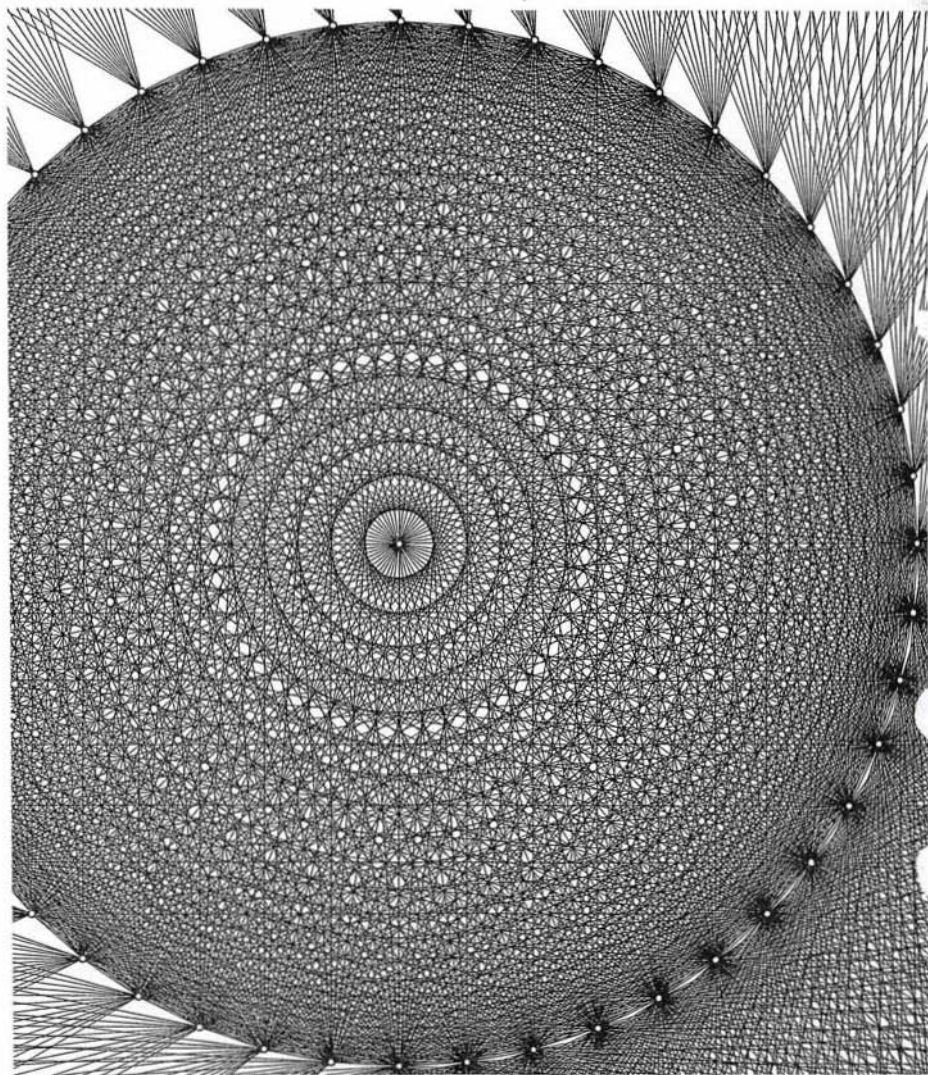
Nemen wij $n = 24$ en trekken wij alle stralen, die de punten onderling verbinden, ook buiten de cirkel door, dan ontstaat tek. 122.

Het lijkt een zonnerad met corona en van binnen geslepen edelsteen.

Daar wij de figuur binnen de cirkel nader willen bezien, tekenen wij deze groter, maar voor 48 punten. Dit levert tek. 123 op.

Opmerkelijk is, dat de stralende punten tezamen één middelpunt accentueren, dat ons a.h.w. naderbij wordt gebracht door de perspectivische werking van de figuur, die zij samen vormen. Ook het verband tussen rechte en cirkel kan hier opvallen.

Kunnen wij bewijzen, dat sommige lijnen elkaar in 1 punt moeten snijden? Hoeveel cirkelvormige figuren (48-hoeken) ontstaan er? Hoe groot zijn hun stralen? Hoeveel rechte lijnen bevat de figuur?



[123]

*He most honours my style, who learns
under it to destroy the teacher.*

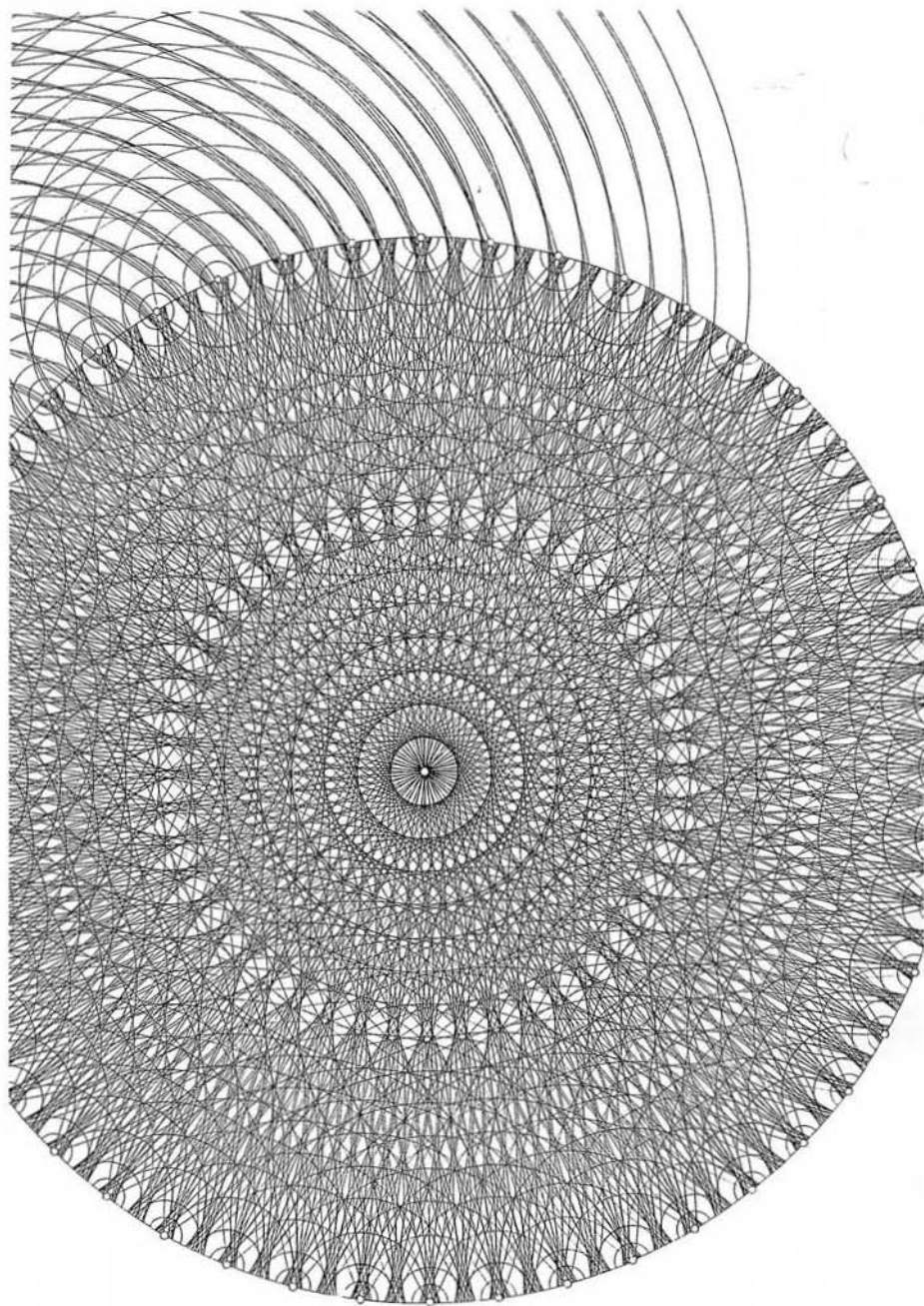
Walt Whitman

Indien ieders individuele rede teruggebracht kan worden tot de Rede, als onder een gemeenschappelijke noemer, opgevat als supra-individueel, onpersoonlijk. . . . komt dat, doordat tenslotte iedere geest en datgene wat men de natuur pleegt te noemen, deel hebben aan dezelfde werkelijkheid, eenzelfde oorsprong hebben, uitvloeisels zijn van eenzelfde cosmische Energie.

Adolphe Ferrière

. In tek. 123 werden voor 13 punten in één hoek alle stralen getekend, die naar de andere straalpunten gaan, terwijl in de overige punten slechts de straling naar binnen werd getekend.

Voor een goede figuur is veel nauwkeurigheid vereist en een lat, die zuiver recht is. De meeste latten voldoen niet aan deze eis; de houten latten zeker niet, — wanneer men de figuur op een vel tekenpapier wil maken. Het is goed dit erbij te vermelden daar het blijkt, wanneer men zulk een tekening laat zien, dat verschillende leerlingen er zó door gefraspeerd worden, dat zij zonder iets te zeggen een paar dagen later met een eigen tekening voor den dag komen. Deze is dan natuurlijk in potlood en vaak niet af, omdat hij niet meegevallen is. Pas bij enige nauwkeurigheid en met een goed gepunt potlood komen de figuren in de sferen duidelijk naar voren. Vandaar, dat het beter lijkt niet ineens een 48-hoek te tonen, maar er desgewenst naar toe te werken door de straling te tekenen bij n -hoeken, waarin n kleiner is. Vrijwillig aanvaarde tekeningen van een 5-, 6-, 7-, 8, 9-hoek enz. door verschillende leerlingen zouden een collectie kunnen vormen, die voor andere leerlingen misschien inspirerend zou kunnen werken. Men behoeft niet alles zelf te tekenen. Meetkundige problemen kunnen zij alle opleveren; eventueel door goed gemikte vragen. Het gaat om de impuls, die opkomt uit de stof en zijn schoonheid.



De geest moet zich bevrijden van het separatief egoïsme, en gevoerd worden tot een staat van volgzaamheid, analoog aan de zuivering van het geweten der asceten, een houding van edelmoedigheid, die is als een werkzame liefde, die raadt en begrijpt, omdat zij zichzelf vergeet, omdat zij de arbeid der noodzakelijke transformaties aanvaardt om te versmelten met haar object en een volkomen objectiviteit te bereiken.

Edouard Le Roy / La Discipline de l'Intuition

Bij vele tekeningen zal men ook in figuren, die gedeeltelijk af zijn, nieuwe gezichtspunten, vragen en schoonheid ontwaren, vooral wanneer men systematisch tewerk gaat.



Indachtig aan de omstandigheid, dat straling op *twee* manieren kan aangegeven worden, n.l. door rechte lijnen en door cirkels (stralingsfronten), kwam de vraag op hoe de figuren zouden worden, wanneer in de tek. 122 en 123 de straling in cirkels aangeduid zou worden i.p.v. door rechte lijnen.

Het inwendig stralingsbeeld bij 48 punten toont tek. 124. Als tekenregel werd aangenomen, dat in alle zestiende delen van de straal van de grote cirkel een cirkel werd getrokken en dan nog slechts niet verder dan het middelpunt, — hetgeen natuurlijk een vreemde restrictie is. Deze werd alleen aangenomen om te laten zien hoe schoon ook niet voltooide figuren kunnen zijn. Slechts voor een beperkt aantal punten in één hoek zijn de cirkels ook naar buiten doorgetrokken.

Het punt wordt bereikt langs een windend pad. Het geeft uitzicht en inzicht. Het pad is de weg van de geest: zowel harde werkelijkheid als figuur van de schijn. Het figuur in de figuur.



Wij aarzelen niet uit te spreken, dat wij mensen willen, die in staat zijn zich te blijven ontwikkelen; die zich inzetten om de verhoudingen, waaronder zij leven, te veranderen en te vernieuwen; geestelijk onafhankelijke mensen, die steeds bereid zijn het betere te aanvaarden en die vóór alles in staat zijn zichzelf voortdurend te vernieuwen. Mensen, die geluk vinden in de triomf van nieuwe ideeën en streven naar een vol, veelzijdig, leven.

Francisco Ferrer.

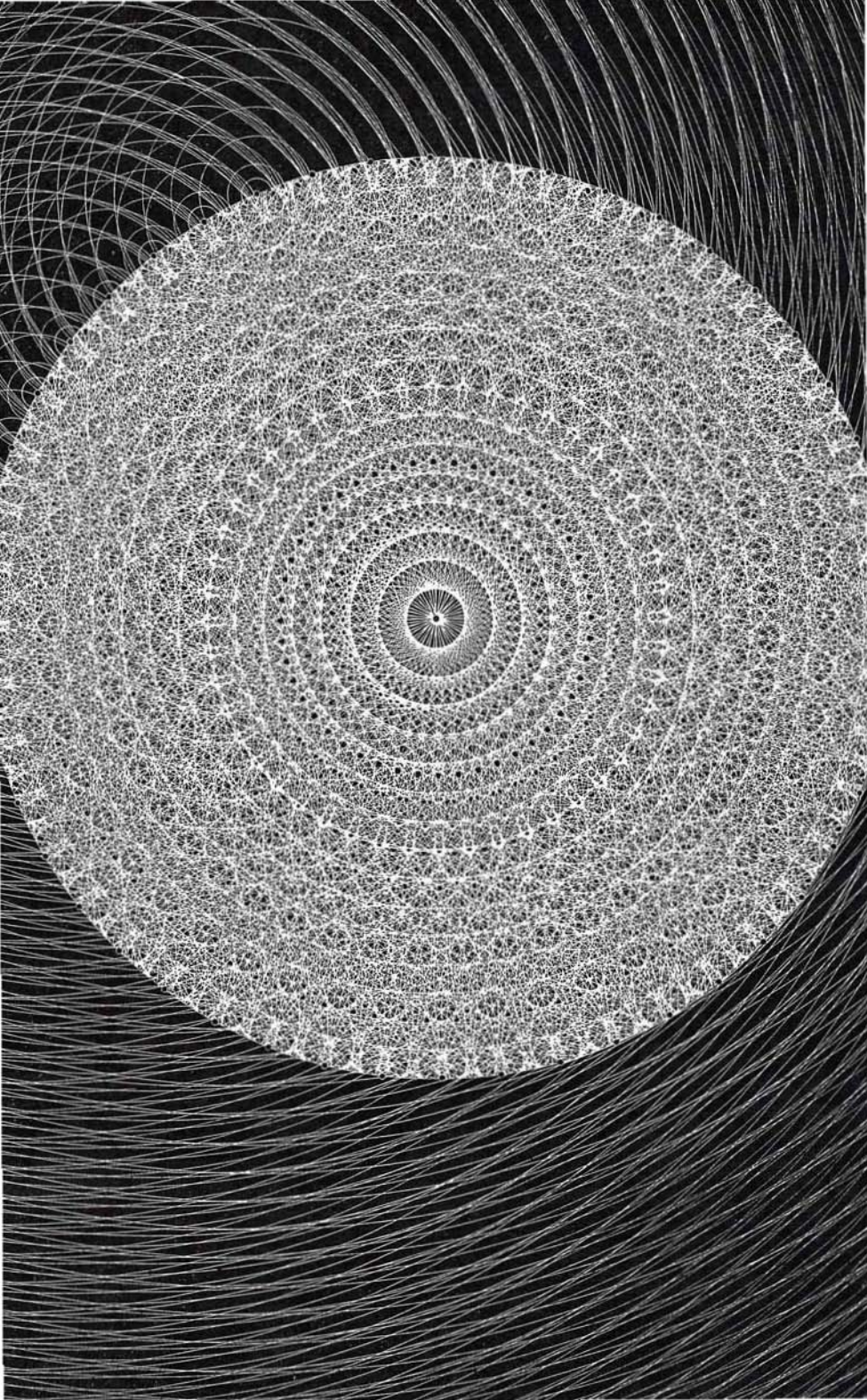


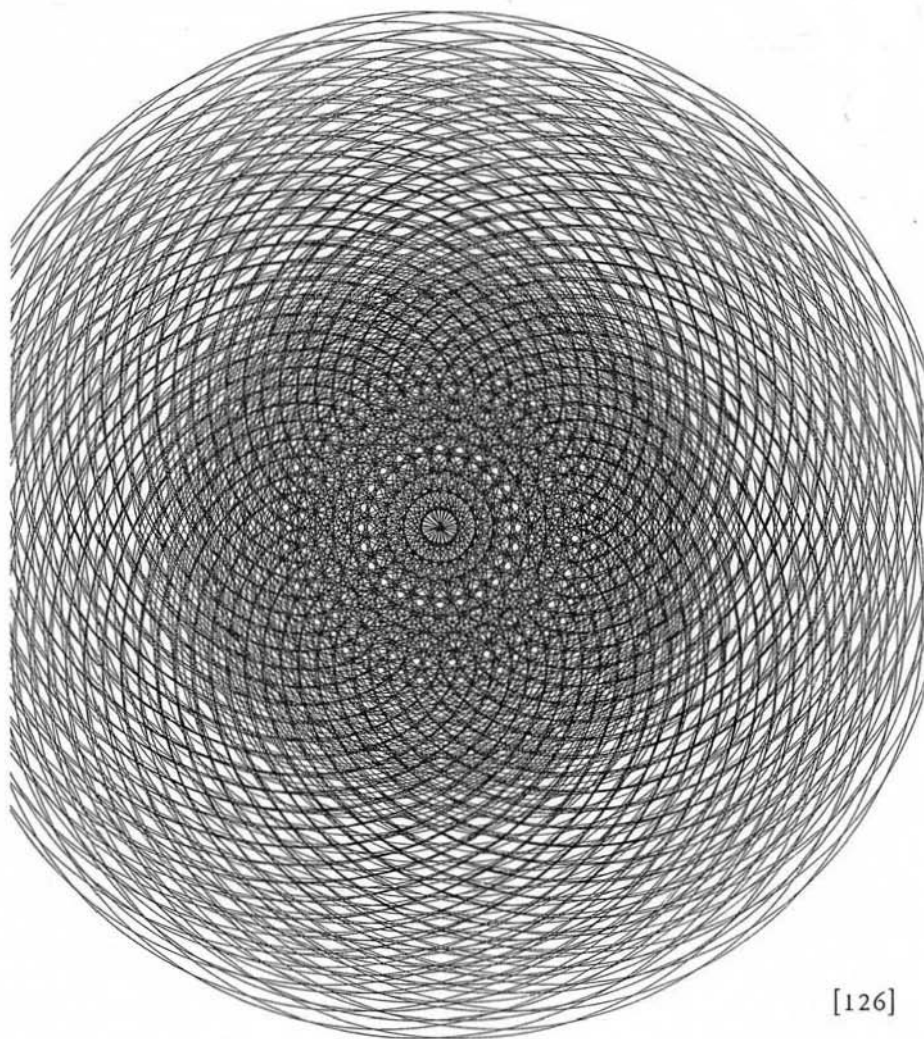
Eerst in een volgende ontwikkelingsfase in de paedagogie zal men meer algemeen inzien dat het hele onderwijs ook het z.g. intellectuele deel daarvan vanuit de kunstzinnige levensbeschouwing moet worden opgebouwd en gegeven Want de creatief - aesthetische, de kunstzinnige levensbehoefte is niet een luxe voor de overgeschoten leertijd of voor de enkele talentvollen of beter gesitueerden, maar het is een noodwendige zaak voor ieder mens.

D. Vis

Tek. 125 toont ons hoe de figuur wordt, wanneer de stralingsfronten ook voorbij het middelpunt worden getekend.

Nieuwsgierigheid naar de vorm van het stralingsveld buiten de cirkel deed tek. 126 ontstaan. Hierin zijn 24 stralende punten op een cirkelomtrek aangenomen, welke evengroot is als die van tek. 122. De straling is door cirkels afgebeeld, waarvan de stralen telkens een achtste deel van de straal van de oorspronkelijke cirkel groter worden. Zo werd de straling tot $20/8$ van deze straal voortgezet en niet verder omdat de figuur bij voortzetting niet meer wezenlijk verandert.





[126]

*Wij willen allen dingen geest zijn.
En alle dingen moeten ons geest in den geest zijn. Eckart*

Opmerkelijk is, dat de stralende punten zelf in de figuur opgelost worden (een ideale gemeenschap).

Er ontstaan sterke bundels, die om en bij de straalpunten ontspringen en midden er tussenin. In tek. 124 is dit duidelijk te zien. Tek. 126 doet denken aan een roosraam met gothische lijnen, welke daaruit spontaan organisch ontstaan.

Is het mogelijk een wiskundige vorm voor deze bundels te vinden? Deze bundeling treedt blijkbaar bij de stralende punten op en op de helft van de afstand tot het middelpunt. (Is het op de helft?) Maar ook op $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ van die afstand, ruwweg geschat, — ofschoon daar minder sterk.

Hoe worden deze figuren voor 25, 36, 47, 49 stralende punten?



Het aardse goed ter hand nemen, vol hartelijke liefde, bewonderend, als ons voorlopig enig bezit; dat is tevens, om het heel eenvoudig te zeggen, de grote gebruiksaanwijzing van God, en die bedoelde de heilige Franciscus neer te schrijven in zijn lied aan de zon. . . .

R.M. Rilke

Onder, achter alles is de vuurzee van de geest, de grond der dingen, die overal doorheen schijnt. Maar onze zintuigen zijn zodanig gebouwd, dat zij de vuurzee afschermen. Wij leven op de schil van het wonder.



Zo kan de meetkunde ons een rijkdom aan vormenschoonheid opleveren, die ons telkens voor nieuwe vragen stelt.

*

Door al het behandelde zal misschien duidelijk geworden zijn, dat het niet alleen maar om mooie figuren gaat, — het toch niet daarom gaat, dat men zelfs niet om gaat *alle* wiskundige problemen, die deze figuren opleveren; op te lossen; ja, dat het eigenlijk en ten slotte niet eens om dat gaat. De Indiër zou zeggen: neti, neti, neti: niet dit, niet dit, niet dat. Misschien is dit alles wel weg, alleen weg, een weg..... om verder te gaan.

•