Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire;

Par M. OLINDE RODRIGUES.

Idée générale de la translation et de la rotation d'un système solide.

1. J'entends par système solide un assemblage quelconque, continu ou discontinu, de points invariablement liés entre eux, de telle sorte que trois de ces points étant donnés de position, non en ligne droite, ainsi que leurs distances à tous les autres points du système, la situation de ce système soit invariablement déterminée pour chaque changement de situation du triangle formé par ces trois points;

Ce qui doit être, en effet, puisque sur une base triangulaire donnée, avec des distances données, on ne peut construire qu'une *seule* pyramide, identique ou superposable à une autre pyramide donnée. Ainsi donc, trois points d'un solide non en ligne droite étant fixes, aucun déplacement de ce solide n'est possible.

Mais s'il n'y a que deux points donnés qui doivent rester immobiles dans le système, l'invariabilité des distances de tout autre point à ces deux-là entraîne d'abord l'immobilité de tous les points avec lesquels ils sont en ligne droite; cette droite devient un *axe fixe,* autour duquel tout autre point du système ne peut que tourner dans une circonférence concentrique et normale à l'axe; et comme tous les points du système sont invariablement liés à l'un d'eux et à l'axe fixe, la *rotation* de l'un implique la rotation de tous; et l'*amplitude* de cette rotation est égale pour tous les points du système.

Tout déplacement d'un *solide* autour de deux points fixes se réduit donc à une *rotation* d'égale amplitude et *de même sens* pour tous les points du système autour de l'axe formé par les deux points fixes.

C'est ici le lieu de remarquer que toute rotation donnée peut être remplacée par une rotation de sens opposé, d'une amplitude complémentaire de celle de la première à 400°.

Des rotations différentes autour d'un même axe se composent en une rotation égale à leur somme, en ayant soin d'affecter de signes contraires les amplitudes de rotation qui s'effectueraient en sens opposés, l'ordre de succession des rotations restant d'ailleurs arbitraire.

Si l'amplitude des rotations est infiniment petite, les arcs décrits par les points du solide déplacé à distance finie de l'axe, se confondent avec leurs cordes, lesquelles sont diversement inclinées entre elles, selon les angles des rayons menés de l'axe aux points du système.

Mais si l'on suppose que l'axe lié invariablement au système que l'on considère en soit pourtant infiniment éloigné, une rotation infiniment petite d'un ordre infinitésimal *réciproque* à celui de la distance de l'axe à ce système, aura pour effet de faire décrire à tous ses points des droites finies *égales* et *parallèles*, de manière que le système n'aura fait que subir une *translation*, en désignant ainsi le déplacement d'un solide qui résulte du transport égal de tous les points parallèlement à une direction donnée.

Ainsi donc, toute *translation* d'un système peut rigoureusement être considérée comme une rotation d'une amplitude infiniment petite autour d'un axe fixe infiniment éloigné et normal à la direction de cette translation.

On ne sera donc pas surpris de trouver ultérieurement toutes les propriétés des *translations* comprises dans celles des rotations, comme les propriétés de la ligne droite dans celles de la circonférence ; et toutefois nous nous y arrêterons spécialement.

Mais auparavant nous compléterons cet exposé général du déplacement autour d'un axe fixe, par le théorème suivant, que l'inspection de la figure rend sensible et dont les conséquences serviront dans ce qui va suivre.

Du transport de l'axe de rotation parallèlement à lui-même.

La rotation d'un système solide autour d'un axe fixe peut être remplacée par une rotation égale autour d'un autre axe parallèle au premier *suivie* d'une *translation* de ce système égale et parallèle à la corde de l'arc décrit par un point du *second* axe autour du premier, en vertu de la première rotation, ou, ce qui revient au même, sauf le sens de la translation qui est changé, à la corde de l'arc qui serait décrit par un point du premier axe autour du second.

2. Revenons au déplacement par *translation.*

Si deux situations d'un même solide sont telles, que les cordes qui joindraient chaque point du solide dans l'une de ces situations à son *correspondant* dans l'autre soient égales et parallèles, il est clair que ce solide, pour arriver de la première à la seconde situation, aura pu ne faire que glisser en quelque sorte parallèlement à lui-même le long de l'une de ces cordes, dont la grandeur et la direction mesureront la grandeur et la direction de la translation de ce système, *et vice versâ.* Rien n'est plus simple que la translation d'un système solide selon une direction et une grandeur de translation données.

Loi générale de la composition des translations successives.

Si le système subit plusieurs translations consécutives, différentes en direction comme en étendue, toutes ces translations se composent évidemment en une translation unique, égale et parallèle à la droite qui joindrait un point de la première situation à son correspondant dans la situation définitive du système; droite qui fermerait le polygone tracé par les translations successives de ce point, et dont la grandeur et la direction ne dépendent, comme on le sait, que de la grandeur et de la direction des divers côtés de ce polygone, *quel-que soit d'ailleurs leur ordre de succession.*

Les projections de cette *translation résultante* sur trois axes coordonnés rectangulaires seront égales aux sommes des projections des translations données sur les mêmes axes et détermineront ainsi sa grandeur et sa direction, par un procédé analytique, indépendant du procédé graphique de la construction de ce polygone.

Telle est la loi de composition des translations successives d'un système solide, au moyen de laquelle on peut réciproquement décomposer toute translation donnée en une suite de translations diverses en grandeur et en directions, assujéties seulement à satisfaire à cette condition que la somme de leurs projections sur trois axes rectangulaires, ou plus généralement sur un axe *quelconque,* soit égale à celle des projections de la translation donnée sur le même axe.

On peut appeler cette loi de composition *loi du polygone des translations.*

Du déplacement d'un système autour d'un point fixe.

3. Deux situations différentes d'un même système étant données autour d'un point qui, dans ce déplacement est resté immobile, qu'on choisisse arbitrairement dans ce solide un triangle dont le point fixe serait le sommet, et que l'on considère les deux situations *correspondantes* de ce triangle, et particulièrement les angles formés par les côtés *correspondants* des deux triangles partant du même sommet commun; si par ce sommet, on mène deux plans qui, normaux aux plans respectifs de ces angles, les partagent également; il est évident que l'intersection de ces deux plans jouira de cette propriété que chacun de ses points pourra être considéré comme le sommet commun de deux pyramides *identiques* ou *superposables,* ayant pour bases les deux triangles considérés, de manière que cette intersection supposée liée invariablement au système déplacé, sera nécessairement restée immobile dans le déplacement supposé. Ce déplacement lui-même se réduit donc à un déplacement en rotation autour d'un axe fixe, que l'on détermine par la construction qui vient d'être expliquée.

Dans le cas singulier, que d'ailleurs on peut toujours éviter, où les deux plans bisséquants, dont l'intersection sert à déterminer l'axe de la rotation, se confondraient en un seul plan, l'axe n'est autre évidemment que la droite d'intersection des plans des deux triangles considérés. Toute autre droite que celle-là, bien qu'appartenant aux deux plans bisséquants confondus en un seul, forme avec les côtés des triangles considérés, des angles trièdres symétriques non superposables.

Ainsi donc, tout déplacement d'un système autour d'un point fixe revient à un déplacement par voie de rotation autour d'un axe fixe passant par ce point, ou plus généralement, peut être obtenu par une rotation égale autour d'un axe différent, mais parallèle au premier situé d'ailleurs comme on voudra, pourvu que cette rotation soit suivie d'un déplacement en translation parallèle et d'une étendue égale à la corde de l'arc que le point fixe devenu mobile décrirait autour de ce nouvel axe, le sens de la translation étant opposé à celui de cette corde;

Cette généralisation du déplacement autour d'un point fixe, étant la conséquence du théorème relatif au transport de l'axe de rotation parallèlement à lui-même (n° **1**).

Du déplacement quelconque d'un système solide dans l'espace.

4. Considérons enfin deux situations entièrement arbitraires d'un même solide, et cherchons à nous représenter de la manière la plus simple, le mode de déplacement qui a pu amener le solide de l'une de ces situations à l'autre.

Par un point quelconque de ce solide dans la première situation, imaginons qu'on mène des droites égales et parallèles à celles qui, dans la seconde situation joignent le point *correspondant* de celui-ci à tous les autres points du solide déplacé; on aurait ainsi construit un assemblage de points, un solide entièrement identique à celui que nous considérons; mais dont la situation intermédiaire entre les deux situations données serait dérivée de la première par le moyen d'une certaine rotation autour d'un axe fixe, passant par ce point choisi pour y rapporter le déplacement du système, tandis qu'à son tour la seconde situation du solide serait dérivée de cette situation intermédiaire, au moyen d'une translation dont la direction et l'étendue seraient égales à celle de la droite qui joint le point choisi et son correspondant.

Si, de plus, on observe qu'en vertu du théorème relatif au transport de la rotation autour d'un axe donné, à un autre axe parallèle à celui-ci, rien n'empêche de supposer que cette situation intermédiaire du solide résulte d'une rotation égale et de même sens autour d'un axe passant par un point quelconque du solide, suivie d'une translation égale et parallèle à la corde de l'arc décrit par ce nouveau point choisi pour y rapporter le déplacement du système autour du premier axe dans la première rotation admise; comme cette translation, composée avec celle qui s'opère du solide intermédiaire à la situation définitive, se réduit à une translation égale et parallèle à la droite qui joint cette nouvelle origine à son point correspondant dans la situation définitive;

comme enfin, pour chaque origine du déplacement, il n'y a qu'un seul axe de rotation possible; on se trouve enfin avoir démontré complétement le théorème suivant, l'un des plus beaux, sans contredit, de la géométrie, et qu'on doit considérer comme la base fondamentale des lois géométriques du mouvement.

Théorème fondamental.

De quelque manière qu'un solide ait été transporté d'un lieu dans un autre, on peut toujours considérer ce déplacement comme résultant de deux déplacements consécutifs en rotation et en translation, la rotation s'effectuant autour d'un axe fixe mené par un point quelconque du solide dans la première situation, parallèlement à une certaine direction, invariablement déterminée par les deux situations considérées du solide, aussi bien que le sens et l'amplitude de la rotation; la translation s'opérant ensuite parallèlement à la droite qui joint un point de cet axe à son correspondant dans la seconde situation du système, la grandeur de cette droite mesurant celle de la translation.

L'ordre de ces déplacements peut être interverti : la translation peut précéder la rotation, mais celle-ci s'effectue ensuite autour d'un axe passant par le point de la seconde situation correspondant à celui auquel est rapporté le déplacement dans la première situation. D'ailleurs la direction de l'axe de rotation, l'amplitude et le sens de rotation sont les mêmes pour tous les points du système, avant ou après la translation.

Dans cette succession de déplacements on remarque que la droite qui joindrait un point quelconque du solide dans sa première situation à son correspondant dans la seconde, c'est-à-dire la droite *réellement* parcourue par ce point, forme le troisième côté d'un triangle dont le premier, variable pour chaque point du système, est normal à l'axe de rotation, et dont le second, constant pour tous les points du système, mesure la translation du système relative à l'origine du déplacement.

La projection de cette droite sur l'axe de rotation est donc constante pour tous les points du solide, et ne peut être constante que relativement à cette même direction de l'axe de rotation; car cette projection sur toute direction est la somme de deux projections, savoir, de celle de la corde de l'arc de la rotation, et de celle de la droite parcourue en translation. La première de ces projections est variable, la seconde est constante. Leur somme ne saurait donc être constante pour toute direction autre que celle qui rend nulle la première de ces projections, savoir, la direction même de l'axe de la rotation.

Tous les points d'un système solide déplacé d'une manière quelconque sont donc *également* transportés *relativement* à la direction de l'axe de la rotation.

Si cette projection constante est nulle, le déplacement se réduit à une rotation sans translation autour d'un certain axe, facile à déterminer, puisque la droite parcourue par chaque point dans un plan normal à la direction commune de tous les *axes* de rotation se trouve être la base d'un triangle isoscèle situé dans ce plan, dont l'angle au sommet serait égal à l'amplitude de la rotation, et dont le sommet appartient à l'axe cherché.

En général, cette projection constante est la mesure de la translation *absolue* du système, qui est un minimum entre toutes celles qui sont relatives aux diverses origines du déplacement; c'est la translation même des points du système qui seraient transportés parallèlement à l'axe de rotation. Pour tous ces points considérés comme origines du déplacement, l'axe de rotation, que nous nommerons, pour le distinguer, l'*axe central du déplacement*, est en même temps l'axe de la translation; de manière que le déplacement du système rapporté à cet axe central, se réduit à tourner autour de cet axe, en *glissant* parallèlement à sa direction, sorte de mouvement qu'on a comparé à celui de la vis dans son écrou; expression la plus simple du théorème fondamental où les deux déplacements de rotation et de translation se trouvent effectués orthogonalement [*].

5. Mais il s'agit de trouver cet axe central, c'est-à-dire de déterminer les points du système dont le déplacement définitif se réduit à une translation parallèle à la direction de l'axe de rotation. Or c'est à quoi l'on arrive par la construction suivante.

---

[*] Ce beau théorème de géométrie appartient, je crois, à M. Chasles, qui l'a publié dans le *Bulletin universel des Sciences*, tome XIV, année 1830.

Par un point quelconque du solide, et dans le plan des deux axes de rotation et de translation *relatifs à ce point* considéré comme origine du déplacement, menez à l'axe de rotation une perpendiculaire égale à l'étendue de la translation projetée sur cette perpendiculaire; sur cette perpendiculaire, comme base et normalement au plan des deux axes, construisez un triangle isoscèle, dont l'angle au sommet soit égal à l'amplitude de la rotation du système, ce sommet appartiendra à l'*axe central*, si d'ailleurs le triangle isoscèle est, relativement au plan des deux axes, placé dans le sens de la rotation.

Car il est évident que ce sommet, tournant d'abord autour de l'axe de rotation relatif, puis décrivant une parallèle à l'axe de translation relatif, d'une grandeur égale à celle de la translation relative, arrivé à sa position définitive, se trouve avoir parcouru parallèlement à l'axe de rotation, une droite égale à cette même translation, *projetée sur l'axe de rotation.*

Et réciproquement, si l'on considère par rapport à l'axe de rotation, qui serait mené par ce sommet, le déplacement de l'origine des deux axes relatifs donnés, on voit ce point, en vertu de la rotation autour de l'*axe central*, arriver d'abord à l'extrémité de la base du triangle isoscèle ci-dessus indiqué, base qui mesure le déplacement de ce point perpendiculairement à l'axe de rotation central, puis, en vertu de la translation parallèle à ce même axe, arriver enfin à sa situation définitive, à l'extrémité de l'axe relatif de translation supposé.

Et cette construction montre bien que tout le déplacement se réduit à une simple rotation autour de l'axe central, quand l'axe de translation relatif est normal à l'axe de rotation, puisque alors le sommet du triangle isoscèle revient en définitive à sa première position.

Aussi toutes les fois que les divers points d'un solide, dans le déplacement de ce solide, restent dans des plans parallèles, ce déplacement se réduit à une rotation autour d'un certain axe fixe normal à ces plans.

Déplacement d'une figure plane dans son plan.

Le déplacement d'une figure plane dans son plan se réduit donc toujours à une rotation autour d'un centre fixe dans ce plan, ainsi qu'il est aisé de l'établir directement.

Si l'on considère le quadrilatère formé par la droite qui joint deux situations correspondantes d'un point du solide, l'axe central et les perpendiculaires abaissées de ces deux situations sur cet axe, on trouve que la droite qui joint les milieux du premier côté de ce quadrilatère et de celui qui lui est opposé, est perpendiculaire à ces deux lignes, propriété qui donne une autre construction de l'axe central, étant donnés seulement deux points du système, leurs correspondants, avec la direction de l'axe de rotation.

Par le milieu de chacune des droites qui joignent un des points donnés à son correspondant, faites passer une droite parallèle à la direction donnée de l'axe de rotation et une normale à ces deux droites, les plans formés en chaque milieu par cette normale et la droite parallèle à l'axe de rotation se couperont au lieu même de l'axe central [*].

6. Nous avons à énoncer maintenant les principaux corollaires qui se déduisent du théorème fondamental, relativement aux déplacements particuliers des points, des droites, des plans d'un système solide.

1°. Les distances qui séparent chaque point du solide dans sa première situation, de son correspondant dans la seconde, se projettent toutes également sur la direction de l'axe de rotation; cette projection commune est la mesure de la translation *absolue* du système;

2°. Toute droite, partie du système déplacé, ne faisant que tourner *quant à sa direction,* autour de l'axe de rotation, il en résulte un rapport très simple entre l'angle que forme cette droite avec l'axe de rotation et celui qu'elle forme avec sa position primitive, par suite de son déplacement et de l'amplitude de la rotation, savoir :

Le sinus du demi-*déplacement* angulaire *de toute droite, partie d'un système solide déplacé, est égal au sinus de la demi-rotation de ce système, multiplié par le sinus de l'angle de cette droite avec l'axe de rotation.*

Cette proposition, que l'inspection de la figure rend évidente, sert à établir de la manière la plus élémentaire l'une des propriétés les plus remarquables du mouvement de la Terre, qui est l'invariabilité presque absolue des pôles du globe, le mouvement *angulaire* de l'axe terrestre étant infiniment moindre que celui de rotation de la Terre;

[*] Cette construction m'a été indiquée par mon ami M. Lévy.

3°. Toute droite parallèle à l'axe de rotation est transportée parallèlement à elle-même, tandis que le déplacement angulaire de toute droite normale à cet axe est égal à l'amplitude de la rotation;

4°. Toute figure plane invariablement liée au système déplacé, et dont le plan est normal à l'axe de rotation, est donc transportée dans un plan parallèle au premier, à une distance égale à la translation absolue du système.

Toute figure plane, parallèle à l'axe, est au contraire transportée dans un plan incliné sur sa position primitive, d'un angle égal à l'amplitude de la rotation.

5°. Le milieu de la droite qui joint un point quelconque du système à son correspondant, est le point de cette droite le plus rapproché de l'axe central du déplacement;

6°. Les milieux de toutes les droites qui joignent tous les points d'une figure plane à leurs correspondants, après un déplacement quelconque de cette figure, sont dans un même plan avec les milieux de toutes les droites qui joindraient tout point *extérieur* à cette figure plane, à son correspondant *symétrique*.

Ce plan fait un angle égal avec les plans des deux figures planes, aussi bien qu'avec les droites *correspondantes* dans les deux figures, dans leur plan ou en dehors de leur plan, mais *symétriquement* inclinées;

7. Après avoir exposé la loi géométrique fondamentale du passage d'un solide, d'une situation donnée à une autre également donnée d'une manière quelconque, nous devons rechercher la loi de composition successive de ces déplacements au moyen de laquelle, étant donnés les éléments de ces déplacements successifs, on puisse construire ou calculer les éléments de la situation définitive du solide, la position de son axe central définitif, l'amplitude de la rotation et l'étendue de la translation.

Nous avons exposé déjà la loi de composition des *translations*, nous allons donner celle des rotations autour d'axes fixes différents, et enfin celle des déplacements quelconques, résultant chacun d'une translation et d'une rotation combinées.

De cette loi de composition des rotations autour d'axes différents, nous déduirons une transformation importante du théorème fondamental, savoir :

« Tout déplacement d'un système solide peut être représenté d'une » infinité de manières par la succession de deux rotations de ce système » autour de deux axes fixes non convergents. Le produit des sinus de » ces demi-rotations multipliés par le sinus de l'angle de ces axes et par » leur plus courte distance, est égal, pour tous ces *couples* d'axes *con-* » *jugués*, au produit du sinus de la demi-rotation du système autour » de l'axe *central* du déplacement, multiplié par la demi-translation » absolue du système.

» Autrement, le volume du tétraèdre dont les arètes opposées seraient » situées d'une manière quelconque sur chacun des axes conjugués et » dont les grandeurs seraient proportionnelles aux sinus des demi- » rotations respectives, est constant pour tous les couples de rotations » conjuguées, propres à représenter un déplacement donné. »

Ainsi donc, tout déplacement d'un système solide se réduit en définitive à tourner autour d'un ou de deux axes fixes.

Dans le cas où l'un de ces axes est parallèle à l'axe *central*, il résulte de la loi de composition des rotations, que son conjugué est situé à l'infini, que la rotation qui lui correspond devient infiniment petite et se transforme ainsi en une simple translation, ce qui conduit au premier énoncé du théorème fondamental, énoncé qui n'est plus qu'un cas particulier de celui que nous venons de donner.

De la composition des rotations successives d'un solide autour de deux axes convergents.

8. Il s'agit maintenant d'exposer la loi de composition des rotations successives d'un solide autour d'axes différents. Commençons par ne considérer que deux axes convergents, et cherchons à déterminer l'axe *résultant* de ces deux rotations, celui autour duquel, en définitive, se trouvera avoir tourné le solide donné, pour arriver de sa première à sa dernière situation.

Cet axe résultant, doit être placé de telle sorte, qu'accomplissant lui-même les deux rotations indiquées autour des axes convergents supposés, il revienne à sa position première. Si donc par chacun des axes donnés on mène un plan qui fasse avec celui de ces deux axes un angle égal à la demi-rotation relative à cet axe, l'intersection de ces deux plans sera l'axe résultant cherché, arrivant en vertu de la première rotation à sa position *symétrique* par rapport au plan des deux axes, et revenant par la seconde rotation à sa position primitive.

On voit en même temps que l'angle de ces deux plans mesurera la demi-rotation composée, puisque le premier axe, immobile pendant la première rotation, ne se déplace que par la seconde et se trouve décrire autour de l'axe résultant, déterminé comme on vient de le dire, un angle double de celui des deux plans. Observons ici que la demi-rotation autour de chaque axe peut indifféremment se mesurer par l'angle intérieur ou par l'angle extérieur des deux plans qui passent par cet axe, le sens de la rotation étant seulement changé, selon que l'on adopte l'une ou l'autre mesure, puisque toute rotation accomplie dans un sens autour d'un axe équivaut à une rotation contraire d'une amplitude complémentaire de la première à 400°.

Ensuite, relativement à l'ordre de succession de ces rotations, il arrive que l'axe *symétrique* de celui qui vient d'être déterminé par rapport au plan des deux axes donnés, correspondrait, comme axe résultant, aux mêmes rotations accomplies dans un ordre inverse de celui qui est supposé autour des mêmes axes; d'où l'on voit que la valeur de la rotation résultante ne dépend pas de l'ordre des rotations, mais que la position de l'axe résultant en dépend essentiellement, et que dans la composition des rotations d'un système solide, l'ordre de ces rotations ne peut être modifié sans altérer la position de l'axe résultant et la valeur même de la rotation résultante, s'il y a plus de deux axes à composer successivement.

Telle est la différence caractéristique à signaler entre la composition des rotations et celle des translations successives. Il y a d'ailleurs entre ces deux sortes de composition l'analogie qui existe entre les propriétés du triangle rectiligne et celles du triangle sphérique; et si l'on compare les translations parallèles aux trois côtés d'un triangle rectiligne, aux sinus des demi-rotations accomplies autour des trois côtés d'un angle trièdre, les valeurs des translations et celles de ces sinus seront également proportionnelles aux sinus des angles opposés aux côtés respectifs dans le triangle rectiligne et dans l'angle trièdre.

Composition des rotations infiniment petites.

9. Mais ces deux axes symétriques résultants correspondant aux

mêmes rotations dans deux ordres différents de succession, coïncident dans le plan des deux axes si les rotations deviennent infiniment petites, et il en résulte deux conséquences importantes :

La première, c'est que l'ordre de succession des rotations infiniment petites autour de deux axes convergents, et, par suite, autour de tant d'axes qu'on voudra, est indifférent; la seconde, c'est que l'axe et l'amplitude de la rotation infiniment petite, résultante de la succession de deux rotations infiniment petites autour de deux axes convergents, se déterminent de la même manière que l'axe et la grandeur de la translation qui résulterait de deux translations successives proportionnelles aux rotations données et parallèles à leurs axes; et comme, en éloignant infiniment les axes de rotation, on transforme les rotations infiniment petites en translations finies perpendiculaires à ces axes et inclinées entre elles comme ces axes mêmes, on comprend toute la généralité de la loi de composition des rotations finies qui, par l'intermédiaire des rotations infiniment petites, comprend aussi la loi de composition des translations.

De la composition des rotations autour de deux axes parallèles.

10. Tous les points du système déplacé par suite de deux rotations consécutives autour de deux axes parallèles, sont restés dans des plans parallèles normaux à ces axes. Le déplacement se réduit donc à une simple rotation autour d'un certain axe parallèle aux premiers. Cela étant posé, le mode de détermination et de construction de cet axe, qui a été exposé pour deux axes convergents, s'applique également à deux axes parallèles et donne pour résultat un axe parallèle aux premiers et une rotation composée égale à la somme ou à la différence des rotations données, selon qu'elles s'effectuent dans un même sens ou dans des sens opposés.

Couples de rotations parallèles.

Mais ici se présente un cas bien remarquable, celui où les deux rotations étant égales et de sens contraire, la rotation composée est nulle et l'axe résultant situé à l'infini, circonstance où le déplacement aboutit à une simple translation. En effet, par suite des deux rotations égales mais contraires, autour de deux axes parallèles, chaque point du solide déplacé a parcouru définitivement une droite constante de grandeur et de direction pour tous les points du système; la direction de cette droite fait avec la normale au plan des deux axes, un angle égal à la demi-rotation supposée autour de chaque axe en même temps qu'elle est normale à ces deux axes; sa grandeur est égale au produit de la distance des deux axes par le double sinus de la demi-rotation.

L'ordre de succession des rotations n'est pas indifférent; la position symétrique de la direction de la translation, relativement à la normale au plan des deux axes, correspond au changement d'ordre dans la succession des rotations.

Tout cela résulte facilement d'une comparaison de triangles semblables; et, lorsque les rotations sont infiniment petites, on voit encore que l'ordre de succession est indifférent, la translation s'opérant alors suivant la normale au plan des deux axes.

Ainsi donc, tout *couple de rotations parallèles* équivaut à une simple translation, et réciproquement, toute *translation* peut être remplacée d'une infinité de manières par un couple de ce genre.

Ces couples de rotations parallèles se composent donc et se décomposent, selon la loi des translations, dans un ordre de succession arbitraire pouvant occuper dans l'espace toutes les positions qui correspondent à une même translation en grandeur et en direction.

Compositions et décompositions qui s'obtiennent en substituant aux couples les translations qu'ils représentent.

Ainsi se trouve généralisée pour les *couples de rotations finies* la loi de composition que M. Poinsot a, je crois, indiquée le premier pour les couples de rotations *infiniment petites*.

11. Tout déplacement d'un système solide se réduisant à une rotation suivie d'une translation, cette translation pouvant toujours être remplacée par un *couple de rotations* dont l'un des axes coupera l'axe donné de la rotation du système, les rotations autour de ces deux axes convergents se composant en une seule rotation, il en résulte évidemment la démonstration de la transformation énoncée ci-dessus du théorème fondamental, savoir : que tout déplacement d'un système solide peut toujours provenir de la succession de deux rotations autour de deux axes fixes non convergents et d'une infinité de manières.

De la composition des rotations autour d'axes fixes non convergents en nombre quelconque.

12. Il s'agit enfin de composer des rotations autour d'axes fixes non convergents en nombre quelconque. Prenons un point dans l'espace pour y *rapporter* dans leur ordre toutes ces rotations; nous avons vu que toute rotation autour d'un axe fixe pouvait être remplacée par une autre rotation égale, accomplie autour d'un autre axe parallèle au premier, suivie d'une translation égale à la corde de l'arc décrit par un point du nouvel axe autour du premier par suite de la première rotation donnée. Nous avons vu aussi qu'une translation suivie d'une rotation accomplie autour d'un axe passant par l'extrémité de l'axe de translation pouvait au contraire en être précédée, si l'axe de rotation passait par l'origine de l'*axe* de translation. Cela posé, si par le point choisi pour y rapporter toutes les rotations, on fait passer des axes parallèles aux axes donnés non convergents, le déplacement du système opéré successivement autour de ces axes, au moyen du transport des rotations aux axes convergents menés parallèlement aux premiers, et de l'échange successif des rotations autour d'axes passant aux extrémités des lignes de translation en rotations autour d'axes passant par leur origine, le déplacement du système se partagera en une suite de rotations respectivement égales aux rotations données, accomplies successivement autour des axes convergents parallèles aux premiers, suivies d'une suite de translations telles, qu'elles résulteront des cordes *successivement* parcourues par le point choisi autour des axes non convergents donnés *dans l'ordre indiqué par les rotations*.

La composition des rotations autour d'axes convergents et celle des translations s'opéreront suivant les modes indiqués plus haut. Le déplacement du système se ramènera en définitive à une rotation et à une translation relatives à deux axes de rotation et de translation passant par le point choisi pour origine du déplacement.

On voit par cette construction que les éléments de la rotation définitive du système ne dépendent que de l'amplitude et de la direction des rotations, et nullement de l'écartement des axes de rotation ; tandis que la grandeur et la direction de la translation dépendent à la fois des rotations, de leurs directions, et de la *position* des axes de ces rotations composantes, attendu que les cordes successivement décrites par le point choisi pour y rapporter le déplacement du système varient de grandeur et de direction suivant les positions successives que prend le point déplacé relativement aux divers axes de rotation donnés.

Si dans le système de ces axes il s'en trouve de consécutifs qui forment des *couples de rotations parallèles*, il est évident que ces *couples* ne fourniront aucun élément dans la détermination de la direction et de l'amplitude de la rotation résultante, et qu'ils n'auront d'influence que sur la grandeur et la direction de la translation résultante, le point dont les rotations successives déterminent cette translation se trouvant, par suite de ces *couples de rotations*, lorsqu'il y arrive, décrire la translation équivalente à chaque couple respectif.

Examen du cas particulier de deux axes fixes non convergents.

13. Si nous considérons deux axes non convergents et leur plus courte distance, et que nous prenions pour origine du déplacement l'extrémité de cette plus courte distance sur le premier axe de rotation, c'est-à-dire sur l'axe de la rotation qui doit s'effectuer la première, en faisant passer par cette origine un axe parallèle au second donné, on composera les deux axes convergents en un troisième, qui sera l'*axe de rotation* du déplacement relatif à cette origine, et l'on aura l'axe de la translation relative par la corde de l'arc que décrirait cette origine, en vertu de la rotation à effectuer autour du second axe donné. La projection de cette corde sur l'axe relatif de rotation, ainsi déterminé, mesure la translation absolue du déplacement; elle est égale à la somme des projections des deux côtés du triangle isoscèle dont elle est la base; chacun de ces côtés est égal à la plus courte distance des deux axes non convergents donnés, et il est facile de s'assurer en outre que chacun de ces côtés est également incliné sur l'axe relatif composé. En effet, cette plus courte distance est normale au plan des deux axes convergents; or, en considérant l'angle formé par cette normale et par la droite *symétrique* de l'axe résultant relativement à ce plan, on voit que cet angle ne change pas lorsqu'on le suppose mobile et entraîné par la seconde rotation qui amène la droite *symétrique* dont nous parlons, à se confondre avec l'axe résultant; mais, dans cette rotation, la normale s'est inclinée sur elle-même dans un plan perpendiculaire au second axe, de manière à être parallèle au second côté du triangle isoscèle que nous considérons, et comme il est évident que l'angle de la normale avec l'axe résultant est supplément de celui qu'elle forme avec sa position *symétrique*, on voit qu'effectivement l'axe résultant est, ainsi que nous venons de le dire, également incliné par rapport aux deux côtés de ce triangle isoscèle. D'où l'on conclut enfin que la translation absolue d'un système solide provenant de la succession de deux rotations autour de deux axes fixes non convergents, est égale au double de la distance de ces deux axes projetée sur la direction de l'axe de la rotation composée ou résultante.

Mais il est évident que le cosinus de l'angle de cette distance avec l'axe composé est égal au sinus de l'angle de même axe avec le plan des deux axes composants, lequel, par suite de la loi de proportion des sinus des demi-rotations à ceux des angles compris entre les axes opposés, se trouve être égal au produit des sinus des demi-rotations données par le sinus de l'angle des deux axes, divisé par celui de la demi-rotation composée; d'où l'on arrive à compléter le théorème fondamental transformé ainsi que nous l'avons déjà énoncé, savoir, que *tout déplacement d'un système solide peut toujours provenir, d'une infinité de manières, de la succession de deux rotations autour de deux axes fixes non convergents*, pourvu que *le produit des sinus des demi-rotations successives multiplié par la distance des deux axes conjugués et par le sinus de l'angle de ces axes, soit égal au produit de la demi-translation absolue du système déplacé multipliée par le sinus de la demi-rotation résultante.*

De la composition des déplacements successifs d'un système combinés de rotations et de translations.

14. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre complétement le problème général suivant, où l'on considère la succession des déplacements quelconques d'un même solide.

Étant donnés les axes de rotation et de translation ainsi que l'amplitude et l'étendue de ces rotations et translations pour chaque déplacement successif d'un système, on demande de construire les axes de rotation et de translation de ce système relatif à une origine donnée.

La solution de ce problème est évidemment la même que celle du problème précédent, où il ne s'agissait que de rotations autour d'axes fixes, puisque les translations peuvent être remplacées par des couples de rotations autour d'axes fixes. Nous l'avons indiqué nettement dans le dernier paragraphe du n° **12**. Il n'y a donc pas lieu de s'y arrêter davantage.

Examen du cas particulier des déplacements infiniment petits successifs.

Cette solution se simplifie notablement lorsqu'on ne considère que des déplacements infiniment petits; d'abord en ce qui concerne les rotations données et leur résultante, parce que l'ordre de ces rotations est indifférent, et que leur composition en nombre quelconque autour d'axes convergents s'opère comme celles de translations proportionnelles à ces rotations et parallèles à ces axes; ensuite, en ce qui concerne la translation composée, parce que l'ordre des rotations et des translations successivement effectuées par l'origine du déplacement est également indifférent, et que chacune de ces rotations et translations peut être établie directement et séparément, comme si le point à déplacer ne se déplaçait qu'alternativement et non successivement, ce qui tient à ce que l'espace parcouru pour chacun de ces déplacements est infiniment petit; la composition de ces translations partielles résultant de l'écartement des axes donnés, ou des translations mêmes qui sont jointes aux rotations, s'opère suivant la même loi que celle des rotations.

15. Il nous faut maintenant appliquer le calcul aux lois géométriques que nous venons d'exposer relativement aux déplacements quelconques d'un système solide, et en déduire d'abord les formules de la variation des coordonnées d'un système solide, qui tiennent une si grande place dans la mécanique analytique.

Détermination des formules de la variation *des coordonnées d'un système solide, provenant d'un déplacement quelconque.*

Soient $x, y, z, \ldots, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$, les coordonnées de deux points quelconques correspondants dans les deux situations du système déplacé; soient de plus x, y, z, les coordonnées du milieu de la droite qui les joint, en sorte que l'on ait

$$\mathrm{x} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \mathrm{y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad \mathrm{z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z;$$

soient enfin g, h, l, les angles formés par la direction de l'axe de rotation avec les axes des coordonnées, θ l'amplitude de la rotation, t la grandeur de la translation absolue, X, Y, Z, les coordonnés d'un point quelconque de l'axe central du déplacement.

Si l'on considère le triangle rectangle dont l'hypoténuse est formée par la droite de jonction des deux points correspondants et dont les deux autres côtés sont donnés, l'un par la corde de l'arc décrit par le premier point en vertu de la rotation θ, et l'autre par la droite parcourue en translation par ce même point après la rotation effectuée; il est clair que les variations Δx, Δy, Δz, seront respectivement égales aux projections respectives de cette hypoténuse, c'est-à-dire à la somme des projections des deux autres côtés de ce triangle rectangle sur les axes des coordonnées respectifs. Or le côté égal et parallèle à la translation absolue t, donne les trois projections $t\cos g$, $t\cos h$, $t\cos l$; l'autre côté est égal à $2u \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$, u désignant la distance de l'axe central à ce côté même qui lui est perpendiculaire. Cette distance est évidemment la même que celle du point (x, y, z) au même axe central, comme la direction de ce côté est la même que celle d'une droite qui serait menée par le point (x, y, z) perpendiculairement à l'axe central et à la distance de ce point à l'axe. Appelons G, H, L, les angles de cette droite avec les axes des coordonnées, nous aurons d'abord les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta x &= t\cos g + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos \mathrm{G},\\
\Delta y &= t\cos h + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos \mathrm{H},\\
\Delta z &= t\cos l + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos \mathrm{L};
\end{aligned}$$

et comme on a nécessairement

$$\cos g \cos \mathrm{G} + \cos h \cos \mathrm{H} + \cos l \cos \mathrm{L} = 0,$$

on en déduira, comme cela résulte aussi de la figure,

$$\begin{aligned}
&\Delta x \cos g + \Delta y \cos h + \Delta z \cos l = t,\\
&\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = t^2 + 4u^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\theta.
\end{aligned}$$

Les premiers termes $t \cos g$, $t \cos h$, $t \cos l$, représentent la partie des variations qui provient du déplacement absolu en translation; les seconds termes, celle qui est due à la rotation opérée par le déplacement. En comparant ces premiers et seconds termes entre eux, relativement à chaque axe coordonné, on trouve que les premiers qui, relativement à chaque axe coordonné, mesurent l'effet ou le *moment* de la translation du système, ont pour valeur les projections de cette translation sur chaque axe des coordonnées, tandis que les seconds termes, qui représentent pour chaque point l'*effet* ou le *moment* de la rotation du système relatif à chaque axe coordonné, ont pour valeur la projection relative à chaque axe coordonné d'un triangle ayant pour sommet le milieu de la droite, définitivement parcourue par le point considéré, et pour base une droite comptée sur l'axe central d'une étendue égale à $4 \tang \frac{1}{2}\theta$.

Dans le cas d'un déplacement infiniment petit, ce milieu et le point lui-même se confondent, et il en résulte que pour un point du système infiniment peu déplacé, l'*effet* de la rotation, relatif à une direction donnée, est égal au double de la projection relative à cette direction d'un triangle dont ce point est le sommet et dont la base prise sur l'axe central est égale à la rotation du système.

Ceci fait comprendre comment la théorie des projections se rattache par les projections linéaires aux lois de la translation, et par les projections des aires à celle de la rotation des solides. Poursuivons.

La corde $2u \tang \frac{1}{2}\theta$ étant normale à la fois à l'axe central et à la perpendiculaire abaissée du point $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ sur cet axe, laquelle est égale à u, on aura

$$\begin{aligned} u \cos \mathrm{G} &= (\mathrm{y} - \mathrm{Y}) \cos l - (\mathrm{z} - \mathrm{Z}) \cos h, \\ u \cos \mathrm{H} &= (\mathrm{z} - \mathrm{Z}) \cos g - (\mathrm{x} - \mathrm{X}) \cos l, \\ u \cos \mathrm{L} &= (\mathrm{x} - \mathrm{X}) \cos h - (\mathrm{y} - \mathrm{Y}) \cos g, \end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \Delta x &= t \cos g + 2u \tang \tfrac{1}{2}\theta \cos \mathrm{G} = \mathrm{A} + p\mathrm{y} - n\mathrm{z}, \\ \Delta y &= t \cos h + 2u \tang \tfrac{1}{2}\theta \cos \mathrm{H} = \mathrm{B} + m\mathrm{z} - p\mathrm{x}, \\ \Delta z &= t \cos l + 2u \tang \tfrac{1}{2}\theta \cos \mathrm{L} = \Gamma + n\mathrm{x} - m\mathrm{y}, \end{aligned}$$

A, B, Γ, m, n, p, désignant six constantes qui dépendent de la position de l'axe central du déplacement, de la grandeur de la translation et de l'amplitude de la rotation, ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= t\cos g + 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{Z}\cos h - \mathrm{Y}\cos l),\\
\mathrm{B} &= t\cos h + 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{X}\cos l - \mathrm{X}\cos g),\\
\Gamma &= t\cos l + 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{Y}\cos g - \mathrm{X}\cos h),
\end{aligned}$$

$$m = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos g,\quad n = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos h,\quad p = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos l.$$

Si l'on désigne par α, β, γ, les variations des coordonnées de l'origine des axes coordonnés, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{A} + \tfrac{1}{2}(p\beta - n\gamma),\\
\beta &= \mathrm{B} + \tfrac{1}{2}(m\gamma - p\alpha),\\
\gamma &= \Gamma + \tfrac{1}{2}(n\alpha - m\beta),
\end{aligned}$$

au moyen desquelles on remplacera, quand on voudra, les constantes A, B, Γ, par leurs valeurs en fonction des variations α, β, γ; et l'on aurait ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \alpha + 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\,[(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta)\cos l - (\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma)\cos h],\\
\Delta y &= \beta + 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\,[(\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma)\cos g - (\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha)\cos l],\\
\Delta z &= \gamma + 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\,[(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha)\cos h - (\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta)\cos g],
\end{aligned}$$

dont les premiers termes α, β, γ, expriment les *moments* de la translation *relative* à l'origine des coordonnées dont la valeur est $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, et ceux affectés de la rotation expriment les *moments* de cette rotation autour de l'axe *relatif* à l'origine. Nous aurions pu établir directement ces formules, comme celles qui précèdent, et que nous avons construites sur l'axe *central*.

Équations de l'axe central.

16. Les équations de l'axe central se déduisent à leur tour des formules ci-dessus, avec la plus grande simplicité; car pour tous les points de cet axe, l'effet de la rotation étant nul, on a $\Delta x = t\cos g$, $\Delta y = t\cos h$, $\Delta z = t\cos l$; les coordonnées x, y, z, appartiennent à cet axe, et en supprimant le trait on a les équations cherchées, exprimées au moyen des éléments des variations,

$$py - nz + \mathrm{A} = t\cos g = \frac{m(\mathrm{A}m + \mathrm{B}n + \Gamma p)}{m^2+n^2+p^2} = \frac{m(\alpha m + 6n + \gamma p)}{m^2+n^2+p^2},$$

$$mz - px + \mathrm{B} = t\cos h = \frac{n(\mathrm{A}m + \mathrm{B}n + \Gamma p)}{m^2+n^2+p^2} = \frac{n(\alpha m + 6n + \gamma p)}{m^2+n^2+p^2},$$

$$nx - my + \Gamma = t\cos l = \frac{p(\mathrm{A}m + \mathrm{B}n + \Gamma p)}{m^2+n^2+p^2} = \frac{n(\alpha m + 6n + \gamma p)}{m^2+n^2+p^2},$$

et plus simplement encore en éliminant les constantes A, B, Γ,

$$\frac{x - \frac{1}{2}\alpha - \dfrac{p6 - n\gamma}{m^2+n^2+p^2}}{m} = \frac{y - \frac{1}{2}6 - \dfrac{m\gamma - p\alpha}{m^2+n^2+p^2}}{n} = \frac{z - \frac{1}{2}\gamma - \dfrac{n\alpha - m6}{m^2+n^2+p^2}}{p},$$

équations dans lesquelles les coordonnées soustraites des coordonnées générales x, y, z, sont précisément celles du sommet du triangle isoscèle normal au plan des deux axes relatifs de translation et de rotation passant par l'origine des axes coordonnés, élevé sur une base perpendiculaire à l'axe relatif de rotation, coupant par la moitié l'axe de la translation relative et d'une grandeur égale à la translation projetée sur sa propre direction, l'angle au sommet étant égal à l'amplitude de la rotation θ; ce qui s'accorde bien avec la construction donnée précédemment.

Ces équations peuvent encore s'écrire ainsi qu'il suit, en y introduisant la rotation et les inclinaisons de l'axe de rotation:

$$\frac{x - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta(6\cos l - \gamma\cos h)}{\cos g} = \frac{y - \frac{1}{2}6 - \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta(\gamma\cos g - \alpha\cos l)}{\cos h} = \frac{z - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta(\alpha\cos h - 6\cos g)}{\cos l}.$$

Équation générale de l'axe central.

Mais on peut représenter ces trois équations des projections de l'axe central par une seule équation à coefficients indéterminés, savoir,

$$\cos a\Delta x + \cos b\Delta y + \cos c\Delta z = t\cos(t, a, b, c),$$

dans laquelle

$$\cos(t, a, b, c) = \cos a\cos g + \cos b\cos h + \cos c\cos l,$$

a, b, c, désignant trois angles arbitrairement formés par une direction quelconque avec les axes coordonnés. Cette équation unique, à cause de l'indétermination de ces angles a, b, c, se résout nécessairement dans les trois autres $\Delta x = t\cos g$, $\Delta y = t\cos h$, $\Delta z = t\cos l$, et elle exprime la propriété la plus générale du déplacement des points situés sur l'axe central, qui est d'être, relativement à une direction quelconque, égal à la translation absolue du système sans rotation, estimée suivant cette même direction.

Examen du cas des variations infiniment petites.

17. Si l'on ne considère que les variations des coordonnées du système solide, provenant d'un déplacement infiniment petit où les constantes α, β, γ, θ soient des infiniment petits du même ordre que les variations mêmes, si le signe Δ se change dans le signe usité δ, et qu'on néglige dans les formules données ci-dessus les termes du second ordre, on aura pour expressions des variations,

$$\delta x = \alpha + py - nz, \quad \delta y = \beta + mz - px, \quad \delta z = \gamma + nx - my,$$
$$m = \theta \cos g, \qquad n = \theta \cos h, \qquad p = \theta \cos l,$$

et pour équations de l'axe central,

$$\frac{\theta x + \gamma \cos h - \beta \cos l}{\cos g} = \frac{\theta y + \alpha \cos l - \gamma \cos g}{\cos h} = \frac{\theta z + \beta \cos g - \alpha \cos h}{\cos l}.$$

18. Revenons aux formules générales

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \mathrm{A} + p\mathrm{Y} - n\mathrm{Z} = \alpha + p(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta) - n(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\gamma),\\
\Delta y &= \mathrm{B} + m\mathrm{Z} - p\mathrm{X} = \beta + m(\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma) - p(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha),\\
\Delta z &= \Gamma + n\mathrm{X} - m\mathrm{Y} = \gamma + n(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha) - m(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta),
\end{aligned}$$

dans lesquelles

$$m = 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta \cos g, \quad n = 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta \cos h, \quad p = 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2} \cos l,$$

on en tire

$$(\Delta x - \alpha)^2 + (\Delta y - \beta)^2 + (\Delta z - \gamma)^2 = 4\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\theta\left\{(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 + (\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta)^2 + (\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma)^2 - [(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha)\cos g + (\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta)\cos h + (\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma)\cos l]^2\right\},$$

équation qui exprime que la corde décrite en rotation autour de l'axe relatif passant par l'origine est égale au double de la tangente de la demi-rotation multipliée par la distance de l'origine au milieu de cette corde, estimée perpendiculairement à l'axe de rotation, distance égale à celle des milieux des droites parcourues définitivement par le point considéré et par l'origine.

En partant de cette propriété, que la figure rend sensible, de l'égalité des projections de toutes les droites parcourues définitivement sur la direction de l'axe de rotation et de l'invariabilité de la distance d'un point quelconque à l'origine, on aurait immédiatement les trois équations suivantes, d'où l'on déduirait facilement les valeurs trouvées déjà pour les variations Δx, Δy, Δz, savoir :

$$(\Delta x-\alpha)^2+(\Delta y-\beta)^2+(\Delta z-\gamma)^2=4\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\theta\times\left\{(\mathrm{X}-\tfrac{1}{2}\alpha)^2+(\mathrm{Y}-\tfrac{1}{2}\beta)^2+(\mathrm{Z}-\tfrac{1}{2}\gamma)^2-[\mathrm{X}-\tfrac{1}{2}\alpha)\cos g+(\mathrm{Y}-\tfrac{1}{2}\beta)\cos h+(\mathrm{Z}-\tfrac{1}{2}\gamma)\cos l]^2\right\},$$
$$(\Delta x-\alpha)\cos g+(\Delta y-\beta)\cos h+(\Delta z-\gamma)\cos l=0,$$
$$(\Delta x-\alpha)(\mathrm{X}-\tfrac{1}{2}\alpha)+(\Delta y-\beta)(\mathrm{Y}-\tfrac{1}{2}\beta)+(\Delta z-\gamma)(\mathrm{Z}-\tfrac{1}{2}\gamma)=0.$$

Mais arrivons enfin à exprimer ces variations en fonctions des variables x, y, z, en éliminant les coordonnées X, Y, Z, au moyen de leurs valeurs respectives $x+\frac{1}{2}\Delta x$, $y+\frac{1}{2}\Delta y$, $z+\frac{1}{2}\Delta z$. On aura, par cette élimination,

$$\Delta x-\alpha=2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta(y\cos l-z\cos h)+\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta[(\Delta y-\beta)\cos l-(\Delta z-\gamma)\cos h],$$
$$\Delta y-\beta=2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta(z\cos g-x\cos l)+\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta[(\Delta z-\gamma)\cos g-(\Delta x-\alpha)\cos l],$$
$$\Delta z-\gamma=2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta(x\cos h-y\cos g)+\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta[(\Delta x-\alpha)\cos h-(\Delta y-\beta)\cos g],$$

d'où enfin ces formules définitives

$$\Delta x=\alpha+\sin\theta(y\cos l-x\cos h)+2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta[\cos g(x\cos g+y\cos h+z\cos l)-x],$$
$$\Delta y=\beta+\sin\theta(z\cos g-x\cos l)+2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta[\cos h(x\cos g+y\cos h+z\cos l)-y],$$
$$\Delta z=\gamma+\sin\theta(x\cos h-y\cos g)+2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta[\cos l(x\cos g+y\cos h+z\cos l)-z],$$

dont les premiers termes seuls sont à conserver lorsqu'on passe des variations finies aux variations infiniment petites.

Expressions des variations finies en fonctions rationnelles des six constantes arbitraires α, β, γ, m, n, p.

Si l'on conserve dans ces formules les constantes primitives m, n, p, et qu'on tire directement les valeurs de Δx, Δy, Δz, des équations

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \alpha + p\left(y + \tfrac{1}{2}\Delta y - \tfrac{1}{2}\beta\right) - n\left(z + \tfrac{1}{2}\Delta z - \tfrac{1}{2}\gamma\right),\\
\Delta y &= \beta + m\left(z + \tfrac{1}{2}\Delta z - \tfrac{1}{2}\gamma\right) - p\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x - \tfrac{1}{2}\alpha\right),\\
\Delta z &= \gamma + n\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x - \tfrac{1}{2}\alpha\right) - m\left(y + \tfrac{1}{2}\Delta y - \tfrac{1}{2}\beta\right),
\end{aligned}$$

on aura les expressions suivantes en fonctions *rationnelles* des six constantes α, β, γ, m, n, p,

$$\Delta x = \alpha + \frac{py - nz + \frac{m}{2}(mx + ny + pz) - (m^2 + n^2 + p^2)\frac{x}{2}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$\Delta y = \beta + \frac{mz - px + \frac{n}{2}(mx + ny + pz) - (m^2 + n^2 + p^2)\frac{y}{2}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$\Delta z = \gamma + \frac{nx - my + \frac{p}{2}(mx + ny + pz) - (m^2 + n^2 + p^2)\frac{z}{2}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}.$$

Conséquence importante relative aux formules de la transformation des coordonnées rectangulaires.

En comparant ces expressions à celles que l'on obtiendrait par la considération de la transformation des coordonnées rectangulaires, ainsi que cela est indiqué au n° **26**, on obtient un mode de réduction des neuf coefficients qui entrent dans les formules de cette transformation à trois variables indépendantes m, n, p, entièrement dégagé de radicaux, ce qui, je crois, n'avait pas encore été donné. En désignant, suivant l'usage, ces neuf coefficients par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', et par cos (xx'), cos (yy') etc., les cosinus des angles des axes anciens et nouveaux, on trouve facilement

$$a = \cos(xx') = \frac{1 + \frac{m^2 - n^2 - p^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad a' = \cos(yx') = \frac{\frac{mn}{2} - p}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$b = \cos(xy') = \frac{\frac{mn}{2} + p}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad b' = \cos(yy') = \frac{1 + \frac{n^2 - m^2 - p^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$c = \cos(xz') = \frac{\frac{mp}{2} - n}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad c' = \cos(yz') = \frac{\frac{np}{2} + m}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}};$$

$$a'' = \cos(zx') = \frac{\frac{pm}{2} + n}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad b'' = \cos(zy') = \frac{\frac{np}{2} - m}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$c'' = \cos(zz') = \frac{1 + \frac{p^2 - m^2 - n^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

et réciproquement,

$$\frac{m^2}{4} = \frac{1 + a - b' - c''}{1 + a + b' + c''}, \quad \frac{n^2}{4} = \frac{1 + b' - a - c''}{1 + a + b' + c''}, \quad \frac{p^2}{4} = \frac{1 + c'' - a - b'}{1 + a + b' + c''},$$

$$m = \frac{2(c' - b'')}{1 + a + b' + c''}, \quad n = \frac{2(a'' - c)}{1 + a + b' + c''}, \quad p = \frac{2(b - a')}{1 + a + b' + c''}.$$

En éliminant m, n, p, des valeurs des coefficients a', b, c', a'', b'', c, on obtiendrait les formules de Monge, en fonctions *irrationnelles*, des trois constantes a, b', c'' [*].

19. De la considération géométrique du déplacement d'un système solide nous avons d'abord déduit les propriétés caractéristiques ou lois générales de ce déplacement qui se réduit toujours à une rotation et une translation consécutives, ou même à un seul couple de rotations autour

[*] Lacroix, tome I, page 533.

de deux axes fixes parallèles ou non parallèles, le déplacement se réduisant dans le premier cas à une simple translation, si, de plus, les rotations sont égales et de sens contraire. De ces propriétés nous venons de conclure l'expression analytique des variations finies ou infiniment petites des coordonnées d'un système solide déplacé d'une manière quelconque.

De l'expression de ces variations nous allons déduire maintenant les lois de composition des rotations et des translations que nous avons d'abord exposées synthétiquement, puis enfin nous établirons directement, et suivant trois procédés analytiques distincts, ces mêmes formules de la variation des coordonnées d'un système solide, en les déduisant uniquement de l'invariabilité des distances des points de ce système.

Lois de la composition des translations et des rotations successives, analytiquement déduites des formules des variations des coordonnées du système déplacé.

Désignons par les signes Δ', Δ'', les variations successives des coordonnées du solide déplacé, par le signe Δ les variations composées résultant de la succession des déplacements, par x', y', z', x'', y'', z'', les coordonnées des milieux des droites parcourues successivement par le point (x, y, z), et toujours par x, y, z, celles du milieu de la droite définitivement parcourue par ce point, en telle sorte qu'on ait

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{x}' = x + \frac{1}{2}\Delta' x, & \mathrm{y}' = y + \frac{1}{2}\Delta' y, & \mathrm{z}' = z + \frac{1}{2}\Delta' z, \\
\mathrm{x}'' = x + \Delta' x + \frac{1}{2}\Delta'' x, & \mathrm{y}'' = y + \Delta' y + \frac{1}{2}\Delta'' y, & \mathrm{z}'' = z + \Delta' z + \frac{1}{2}\Delta'' z, \\
\mathrm{x} = x + \frac{1}{2}\Delta x, & \mathrm{y} = y + \frac{1}{2}\Delta y, & \mathrm{z} = z + \frac{1}{2}\Delta z, \\
\Delta x = \Delta' x + \Delta'' x, & \Delta y = \Delta' y + \Delta'' y, & \Delta z = \Delta' z + \Delta'' z.
\end{array}$$

Désignons de plus par t, t', θ, θ', g, h, l, g', h', l', les translations absolues, les rotations et les inclinaisons des axes de rotation de chacun des deux déplacements consécutifs que nous considérons, et par T, Θ, G, H, L, les éléments analogues du déplacement définitif ou composé.

Examinons séparément la composition des translations simples, et celle des rotations sans translation. Supposons d'abord que les déplacements se réduisent à des translations, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta' x &= t\cos g, & \Delta'' x &= t'\cos g', & \Delta x &= \mathrm{T}\cos \mathrm{G} = t\cos g + t'\cos g',\\
\Delta' y &= t\cos h, & \Delta'' y &= t'\cos h', & \Delta y &= \mathrm{T}\cos \mathrm{H} = t\cos h + t'\cos h',\\
\Delta' z &= t\cos l, & \Delta'' z &= t'\cos l', & \Delta z &= \mathrm{T}\cos \mathrm{L} = t\cos l + t'\cos l',
\end{aligned}$$

par où l'on voit que la translation résultante de deux translations successives n'est autre en étendue et en direction que le troisième côté du triangle formé successivement par le parcours d'un point du système en vertu de deux translations données, on généraliserait facilement ce mode de composition en passant du triangle au polygone des translations.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de composer deux rotations sans translation autour de deux axes convergents à l'origine des coordonnées; on aura successivement

$$\begin{aligned}
\Delta' x &= 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{y}'\cos l - \mathrm{x}'\cos h), & \Delta'' x &= 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta'(\mathrm{y}''\cos l' - \mathrm{z}''\cos h'),\\
\Delta' y &= 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{z}'\cos g - \mathrm{x}'\cos l), & \Delta'' y &= 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta'(\mathrm{z}''\cos g' - \mathrm{x}''\cos l'),\\
\Delta' z &= 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{x}''\cos h - \mathrm{y}''\cos g), & \Delta'' z &= 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\theta'(\mathrm{x}''\cos h' - \mathrm{y}''\cos g');
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta' x + \Delta'' x = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\Theta\,(\mathrm{y}\cos \mathrm{L} - \mathrm{z}\cos \mathrm{H}),\\
\Delta y &= \Delta' y + \Delta'' y = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\Theta\,(\mathrm{z}\cos \mathrm{G} - \mathrm{x}\cos \mathrm{L}),\\
\Delta z &= \Delta' z + \Delta'' z = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\Theta\,(\mathrm{x}\cos \mathrm{H} - \mathrm{y}\cos \mathrm{G}).
\end{aligned}$$

Il faut déterminer les éléments Θ, G, H, L, en fonction des éléments donnés θ, g, h, l, θ', g', h', l', pour chacune des rotations à composer.

Or il convient d'abord, au moyen des relations données ci-dessus, d'éliminer les variables x', y', z', x'', y'', z'', de ces relations; on conclut facilement, en effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}' &= \mathrm{x} - \tfrac{1}{2}\Delta'' x, & \mathrm{x}'' &= \mathrm{x} + \tfrac{1}{2}\Delta' x,\\
\mathrm{y}' &= \mathrm{y} - \tfrac{1}{2}\Delta'' y, & \mathrm{y}'' &= \mathrm{y} + \tfrac{1}{2}\Delta' y,\\
\mathrm{z}' &= \mathrm{z} - \tfrac{1}{2}\Delta'' z, & \mathrm{z}'' &= \mathrm{z} + \tfrac{1}{2}\Delta' z,
\end{aligned}$$

et ensuite

$$
\begin{aligned}
\Delta' x &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{y} \cos l - \mathrm{z} \cos h) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos h\,\Delta'' z - \cos l\,\Delta'' y),\\
\Delta'' x &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\mathrm{y} \cos l' - \mathrm{x} \cos h') + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos l'\,\Delta' y - \cos h'\,\Delta' x),\\
\Delta' y &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{z} \cos g - \mathrm{x} \cos l) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos l\,\Delta'' x - \cos g\,\Delta'' z),\\
\Delta'' y &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\mathrm{z} \cos g' - \mathrm{x} \cos l') + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos g'\,\Delta' z - \cos l'\,\Delta' x),\\
\Delta' z &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\mathrm{x} \cos h - \mathrm{y} \cos g) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos g\,\Delta'' y - \cos h\,\Delta'' x),\\
\Delta'' z &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\mathrm{x} \cos h' - \mathrm{y} \cos g') + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos h'\,\Delta' x - \cos g'\,\Delta' y);
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit les valeurs suivantes pour les variations partielles $\Delta' x$, $\Delta'' x$, $\Delta' y$, $\Delta'' y$, $\Delta' z$, $\Delta'' z$,

$$
\Delta' x = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta\,(\mathrm{y} \cos l - \mathrm{z} \cos h) + 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta'\,[\mathrm{x} \cos v - \cos g'\,(\mathrm{x} \cos g + \mathrm{y} \cos h + \mathrm{z} \cos l)]}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos v},
$$

$$
\Delta'' x = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta'\,(\mathrm{y} \cos l' - \mathrm{z} \cos h') + 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta'\,[\mathrm{x} \cos v - \cos g\,(\mathrm{x} \cos g' + \mathrm{y} \cos h' + \mathrm{z} \cos l')]}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos v},
$$

et semblablement pour les autres, v représentant l'angle des deux axes de rotation [*]; de ces expressions on forme par l'addition les variations complètes Δx, Δy, Δz, et par la comparaison des termes avec leurs expressions en fonction des éléments cherchés Θ, G, H, L, on arrive aux relations suivantes :

$$
\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \cos \mathrm{G} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \cos g + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos g' + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta'\,(\cos h \cos l' - \cos l \cos h')}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos v},
$$

$$
\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \cos \mathrm{H} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \cos h + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \cos h' + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta'\,(\cos l \cos g' - \cos g \cos l')}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos v},
$$

$$
\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \cos \mathrm{L} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \cos l + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos l' + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta'\,(\cos g \cos h' - \cos h \cos g')}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta' \cos v},
$$

d'où l'on tire enfin, pour la valeur de la rotation résultante,

$$
\cos \tfrac{1}{2}\Theta = \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' - \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos v,
$$

et pour les inclinaisons de l'axe résultant

$$
\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos \mathrm{G} &= \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' \cos g + \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos g' + \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos h \cos l' - \cos l \cos h'),\\
\sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos \mathrm{H} &= \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' \cos h + \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos h' + \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos l \cos g' - \cos g \cos l'),\\
\sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos \mathrm{L} &= \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' \cos l + \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos l' + \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos g \cos h' - \cos h \cos g')
\end{aligned}
$$

---

[*] On a $\cos v = \cos g \cos g' + \cos h \cos h' + \cos l \cos l'$.

On remarque d'abord dans ces formules que l'ordre de succession des rotations θ, θ' est indifférent pour l'amplitude de la rotation résultante, mais qu'il ne l'est pas pour la direction de l'axe de cette rotation, car la transposition des éléments $\theta\theta'$, ghl, $g'h'l'$, qui n'altère pas la valeur de la rotation, altère celle des cosinus des angles de son axe en changeant le signe des termes du second ordre par rapport à ces rotations, dans l'expression des cosinus, à moins que ces termes ne disparaissent pour des valeurs infiniment petites de θ, θ'.

Ensuite, l'expression de $\cos\frac{1}{2}\Theta$ convient bien à l'angle d'un triangle sphérique dont l'arc opposé serait égal à ν et les deux autres angles à $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\theta'$. Pour préciser davantage la position de l'axe résultant par rapport aux axes composants, supposons, ce qui est toujours possible,

$$\cos l = \cos l' = 0,\quad \cos h = 0,\quad \cos g = 1,\quad \cos g' = \cos\nu,\quad \cos h' = \sin\nu,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos G &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta' + \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\nu,\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos H &= \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta\sin\nu,\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos L &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta'\sin\nu.
\end{aligned}$$

Dans le cas du changement de l'ordre des rotations, le signe de cos L devient négatif, et c'est la seule altération que ce changement produise dans ces formules, d'où l'on voit que le nouvel axe résultant de ce changement dans l'ordre des rotations est placé, relativement au plan des deux axes donnés, dans une position *symétrique* de celle du premier.

Si l'on désigne par H' l'angle formé par l'axe résultant avec l'axe de la rotation θ', on aura

$$\cos H' = \cos H\cos h' + \cos G\cos g' = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta'\cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta'\cos\nu}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta &= \sin^2\tfrac{1}{2}\theta\sin^2\nu + (\sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta'\cos\nu)^2\\
&= \sin^2\tfrac{1}{2}\theta'\sin^2\nu + (\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta' + \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\nu)^2,
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\sin^2 G = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta' \sin^2 \nu}{\sin^2 \frac{1}{2}\Theta}, \qquad \sin^2 H' = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta \sin^2 \nu}{\sin^2 \frac{1}{2}\Theta},$$

équations qui établissent la proportionnalité des sinus des demi-rotations à ceux des angles formés par l'axe résultant avec les axes composés inversement correspondants, et qui conduisent ainsi à la construction que nous avons indiquée d'abord pour la composition des rotations.

Les termes du second ordre relatifs aux rotations rendent très compliquées les formules que l'on obtiendrait en suivant une marche analogue pour la composition des rotations autour d'un nombre quelconque d'axes convergents; nous ne nous y arrêterons donc pas.

De la composition analytique des rotations autour d'axes non convergents.

20. Quant à la composition de rotations autour d'axes non convergents, et généralement à celle des déplacements quelconques successivement donnés d'un système solide par des variations telles que $\Delta' x$, $\Delta'' x$, $\Delta''' x$, etc., dont la forme analytique est connue, on aura généralement

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta' x + \Delta'' x + \Delta''' x + \ldots = \mathrm{A} + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta\, (\mathrm{Y} \cos L - \mathrm{Z} \cos H),\\
\Delta y &= \Delta' y + \Delta'' y + \Delta''' y + \ldots = \mathrm{B} + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta\, (\mathrm{Z} \cos G - \mathrm{X} \cos L),\\
\Delta z &= \Delta' z + \Delta'' z + \Delta''' z + \ldots = \Gamma + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta\, (\mathrm{X} \cos H - \mathrm{Y} \cos G).
\end{aligned}$$

Les constantes A, B, Γ,... se trouvent déterminées en fonction de constantes analogues A′, B′, Γ′, A″, B″, Γ″,... propres à chacun des déplacements consécutifs à composer, et des autres éléments de ces déplacements. Mais il est évident que les éléments Θ, G, H, L, de la rotation définitive ne seront fonctions que des éléments *rotatifs* de ces déplacements, ainsi que nous l'avons vu d'abord, par des considérations géométriques. Prenons pour exemple de calcul la composition des rotations autour de deux axes fixes non convergents, l'un confondu avec l'axe des x et l'autre normal à l'axe des z et coupant cet axe à une distance de l'origine égale à u; désignons toujours par ν l'angle de ces deux axes de rotation, par θ, θ', les amplitudes des rotations respectives. On aura d'abord, pour l'amplitude de la rotation et la direction de l'axe résultant, les valeurs données ci-dessus, et soit pour compléter les variations des coordonnées, soit pour fixer la position de l'axe central, il n'y aura plus qu'à calculer les variations de l'origine des coordonnées α, β, γ. Or celles qui proviennent de la première rotation autour de l'axe des x sont nulles; il suffit donc de calculer celles qui proviennent de la rotation θ', pour laquelle on a généralement

$$\begin{aligned}
\Delta'' x &= \alpha + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' [(\mathrm{Y}'' - \tfrac{1}{2}\beta) \cos l' - (\mathrm{Z}'' - \tfrac{1}{2}\gamma) \cos h'], \\
\Delta'' y &= \beta + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' [(\mathrm{Z}'' - \tfrac{1}{2}\gamma) \cos g' - (\mathrm{X}'' - \tfrac{1}{2}\alpha) \cos l'], \\
\Delta'' z &= \gamma + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' [(\mathrm{X}'' - \tfrac{1}{2}\alpha) \cos h' - (\mathrm{Y}'' - \tfrac{1}{2}\beta) \cos g'];
\end{aligned}$$

ces variations doivent être nulles pour tous les points de l'axe de la rotation θ', pour lequel on a

$$\cos l' = 0, \quad \cos h' = \sin \nu, \quad \cos g' = \cos \nu, \quad \mathrm{Y}'' = \mathrm{X}'' \operatorname{tang} \nu, \quad \mathrm{Z}'' = u.$$

Il en résulte pour α, β, γ, les valeurs suivantes, qu'on déduirait facilement par la construction même,

$$\alpha = u \sin \nu \sin \theta', \quad \beta = -u \sin \nu \sin \theta', \quad \gamma = 2u \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta',$$

d'où l'on tire pour la valeur T de la translation absolue résultant des deux rotations autour des deux axes fixes non convergents,

$$\mathrm{T} = \alpha \cos \mathrm{G} + \beta \cos \mathrm{H} + \gamma \cos \mathrm{L} = \frac{2u \sin \nu \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta'}{\sin \frac{1}{2}\Theta} = 2u \cos \mathrm{L},$$

conformément aux théorèmes du n° 13.

Ainsi l'axe résultant et les deux axes divergents donnés approchent d'autant plus d'être parallèles à un même plan, que la distance qui sépare les deux derniers est plus grande par rapport à la translation absolue du déplacement composé.

Les équations de l'axe central s'obtiennent en substituant pour α, β, γ, Θ, G, H, L, leurs valeurs données ci-dessus dans les équations

52..

générales

$$\frac{x-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\Theta(\beta\cos L-\gamma\cos H)}{\cos G}=\frac{y-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\Theta(\gamma\cos G-\alpha\cos L)}{\cos H}=\frac{z-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\Theta(\alpha\cos H-\beta\cos G)}{\cos L}.$$

Dans le cas des rotations infiniment petites ces formules se simplifient beaucoup, et il se trouve que l'axe central est parallèle au plan des deux axes composants et rencontre leur plus courte distance. On a effectivement dans cette hypothèse, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos G=\frac{\theta+\theta'\cos\nu}{\Theta},\quad \cos H=\frac{\theta'\sin^2\nu}{\Theta},\quad \cos L=\frac{\theta\theta'\sin\nu}{2\Theta},$$

$$\Theta=\theta^2+\theta'^2+2\theta\theta'\cos\nu,$$

$$\alpha=u\theta'\sin\nu,\quad \beta=-u\sin\theta'\cos\nu,\quad \gamma=0,\quad T=\frac{u\theta\theta\sin\nu}{\Theta},$$

et pour équations de l'axe central,

$$y=\frac{x\theta'\sin\nu}{\theta+\theta'\cos\nu},\qquad z=\frac{u\theta'(\theta'+\theta\cos\nu)}{\Theta^2}.$$

Composition des rotations successives autour de trois axes rectangulaires.

21. Nous terminerons ce sujet en donnant les formules suivantes pour la composition de trois relations successives θ, θ', θ'', autour des trois axes coordonnés des x, y, z; les éléments de la rotation composée Θ, G, H, L, sont ainsi exprimés :

$$\cos\tfrac{1}{2}\Theta=\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta''-\sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta'\sin\tfrac{1}{2}\theta'',$$

$$\sin^2 G=\frac{1-\cos\theta'\cos\theta''}{2\sin^2\frac{1}{2}\Theta},\quad \sin^2 H=\frac{1-\cos\theta\cos\theta''+\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''}{2\sin^2\frac{1}{2}\Theta},\quad \sin^2 L=\frac{1\ \cos\theta\cos\theta'}{2\sin^2\frac{1}{2}\Theta}.$$

Ces formules ne deviennent symétriques, par rapport à chaque axe coordonné, que lorsque les rotations étant infiniment petites, le terme $\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''$ s'évanouit dans $\sin^2 H$, hypothèse qui rend d'ailleurs l'ordre de ces rotations indifférent et pour laquelle on trouve, suivant la loi de composition des rotations infiniment petites,

$$\Theta^2 = \theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2, \quad \cos G = \frac{\theta}{\Theta}, \quad \cos H = \frac{\theta'}{\Theta}, \quad \cos L = \frac{\theta''}{\Theta}.$$

Le problème inverse de celui que nous venons de résoudre et qui aurait pour objet, étant donnée une rotation finie et son axe, de la décomposer en trois rotations autour des axes coordonnés, reviendrait à tirer des équations ci-dessus les valeurs de θ, θ', θ'', en fonction des éléments donnés Θ, G, H, L, opération inextricable pour des rotations finies et d'une entière simplicité pour les rotations infiniment petites.

De la composition des déplacements infiniment petits successifs d'un système solide.

22. Nous allons maintenant considérer directement et avec une étendue spéciale, les lois de la composition et de la décomposition des déplacements infiniment petits successifs, tirées de l'expression analytique des variations infiniment petites des coordonnées d'un système solide.

Ces variations sont généralement exprimées de la manière suivante

$$\delta x = \alpha + py - nz, \quad \delta y = \beta + mz - px, \quad \delta z = \gamma + nx - my,$$

en fonctions *linéaires* des éléments infiniment petits du déplacement, α, β, γ, m, n, p; il en résulte que les variations provenant de plusieurs déplacements successifs infiniment petits se composent par l'addition des variations qui seraient dues séparément à chacun de ces déplacements successifs, rapporté à la situation première du système. Les *éléments* du déplacement composé ou définitif se forment par la somme des éléments analogues des déplacements partiels.

C'est ainsi que la différentielle complète d'une fonction de plusieurs variables se forme par l'addition des différentielles partielles relatives à chacune de ces variables, différentielles partielles qu'il est indifférent de prendre sur la fonction primitive même, ou sur cette fonction augmentée successivement par les accroissements infiniment petits de chacune de ses variables, puisqu'on néglige les infiniment petits du second ordre.

Si donc on désigne par α', β', γ', m', n', p', α'', β'', γ'', m'', n'', p'', α''', β''', γ''', m''', n''', p''', etc., les éléments des déplacements successifs que l'on doit composer, et pour chacun desquels, considéré séparément, on aura

$$\delta' x = \alpha' + p' y - n' z,\quad \delta' y = \beta' + m' z - p' x,\quad \delta' z = \gamma' + n' x - m' y,$$
$$\delta'' x = \alpha'' + p'' y - n'' z,\quad \delta'' y = \beta'' + m'' z - p'' x,\quad \delta'' z = \gamma'' + n'' x - m'' y,$$
etc.,

les éléments du déplacement définitif du système, représentés par A, B, C, M, N, P, seront respectivement les sommes des éléments partiels donnés; on aura

$$\mathrm{A} = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \Sigma\alpha,\quad \mathrm{B} = \Sigma\beta,\quad \mathrm{C} = \Sigma\gamma,\quad \mathrm{M} = \Sigma m,\quad \mathrm{N} = \Sigma n,\quad \mathrm{P} = \Sigma p,$$

et pour expressions définitives des variations des coordonnées du système

$$\delta x = \mathrm{A} + \mathrm{P}y - \mathrm{M}z = \mathrm{A} + \Theta(y \cos \mathrm{L} - z \cos \mathrm{H}),$$
$$\delta y = \mathrm{B} + \mathrm{M}z - \mathrm{P}x = \mathrm{B} + \Theta(z \cos \mathrm{G} - x \cos \mathrm{L}),$$
$$\delta z = \mathrm{C} + \mathrm{N}x - \mathrm{M}y = \mathrm{C} + \Theta(x \cos \mathrm{H} - y \cos \mathrm{G}),$$

en introduisant la rotation et les inclinaisons de son axe; et *réciproquement,* on pourra considérer tout déplacement donné et infiniment petit d'un système solide, dont les éléments seraient A, B, C, M, N, P, comme le résultat de déplacements successifs dont les éléments α', β', γ', m', n', p', etc., ne sauraient être assujétis qu'à la condition d'être égaux, en somme, aux éléments respectivement donnés A, B, C, M, N, P, l'ordre de succession de ces déplacements étant d'ailleurs tout-à-fait arbitraire; et par conséquent il devient évident que la rotation θ, dont les *composantes* relatives aux axes coordonnés sont égales respectivement à m, n, p, résulte des rotations *successives* m, n, p, comme la translation t, parallèle à l'axe de rotation, peut aussi être considérée comme résultant de trois translations *successives* $t \cos g$, $t \cos h$, $t \cos l$, parallèles aux axes coordonnés.

23. Ces rotations *successives* m, n, p, sont désignées en *mécanique* sous le nom de *rotations élémentaires*, et considérées comme *simultanées* dans le passage des lois *géométriques* aux lois *mécaniques* du déplacement des corps, bien que la géométrie n'en puisse rendre compte qu'en les supposant *successives*; car il est évident que le système, en tournant autour de l'axe, dont la rotation est θ et les angles avec les axes coordonnés g, h, l, n'accomplit pas *en même temps* les trois rotations m, n, p, autour de ces axes coordonnés, ce qui impliquerait quatre axes de rotation au lieu d'un seul (*Mécanique analytique*, t. I, page 52). Nous touchons ici un point fondamental de la philosophie des mathématiques, celui qui sépare la géométrie de la mécanique, et dont ce Mémoire a pour objet de constater toute l'importance.

La rotation θ résulte de la composition successive des rotations $\theta\cos g$, $\theta\cos h$, $\theta\cos l$, parce que la variation due à cette rotation θ est pour chaque axe coordonné la somme des variations qui seraient dues séparément à chacune de ces rotations élémentaires. En effet, si le système ne tournait qu'autour de l'axe des x avec une rotation $\theta\cos g$, on aurait pour ce déplacement,

$$\delta' x = 0, \quad \delta' y = \theta z \cos g, \quad \delta' z = -\theta y \cos g;$$

s'il ne tournait au contraire qu'autour de l'axe des y avec une rotation $\theta\cos h$, on aurait pour le second déplacement,

$$\delta'' x = \theta z \cos h, \quad \delta'' y = 0, \quad \delta'' z = \theta z \cos h;$$

et enfin la rotation $\theta\cos l$ autour de l'axe des z, considérée comme étant la seule, donnerait

$$\delta''' x = \theta y \cos l, \quad \delta''' y = -\theta x \cos l, \quad \delta''' z = 0.$$

La somme de ces variations composées relatives à chaque axe donnera donc pour le déplacement composé, effectué définitivement par la rotation θ autour de l'axe (g, h, l), les expressions suivantes :

$$\delta x = \theta(y\cos l - z\cos h), \quad \delta y = \theta(z\cos g - x\cos l), \quad \delta z = \theta(x\cos h - y\cos g).$$

24. Revenons à la composition des déplacements ou des variations quelconques successivement donnés pour un même système. Les formules des variations peuvent s'écrire ainsi, conformément au n° 15,

$$\delta x = \alpha + \theta(y\cos l - z\cos h) = t\cos g + \theta u\cos \mathrm{G},$$
$$\delta y = \beta + \theta(z\cos g - x\cos l) = t\cos h + \theta u\cos \mathrm{H},$$
$$\delta z = \gamma + \theta(x\cos h - y\cos g) = t\cos l + \theta u\cos \mathrm{L},$$

dans lesquelles u désigne la distance du point (x, y, z) à l'axe *central* du déplacement, G, H, L, les angles formés avec les axes coordonnés par la direction de l'*arc* infiniment petit $u\theta$, décrit en *rotation* autour de cet axe central.

On aura généralement pour expression du déplacement relatif à une direction quelconque s, faisant avec les axes coordonnés les angles a, b, c,

$$\delta s = t\cos(t, s) + \theta u\cos(tu, s),$$

en désignant par $\cos(t, s)$, $\cos(\theta u, s)$, les cosinus des angles de cette direction avec l'axe central et avec l'arc de la rotation infiniment petite θ.

Mais deux droites étant données dans l'espace, on sait que la distance d'un point de l'une à l'autre est réciproque au sinus de l'angle formé par la première avec le plan qui contient la seconde et le point considéré, ou, ce qui revient au même, que le produit de ce sinus et de cette distance est constamment égal au produit de la plus courte distance de ces droites par le sinus de leur inclinaison. Si donc on appelle D la distance de l'axe central à la droite qui serait menée par le point du système que l'on considère dans la direction s, et par ν l'angle de cette direction et de l'axe, on aura

$$u\cos(\theta u, s) = \mathrm{D}\sin\nu \quad \text{et} \quad \delta s = t\cos\nu + \mathrm{D}\theta\sin\nu.$$

$t\cos\nu$ est le *moment* de la translation du système relatif à la direction s; $\mathrm{D}\theta\sin\nu$ est celui de la rotation du système relatif à la même direction [*].

Si maintenant on considère les déplacements successifs du système autour d'axes centraux dont les éléments seraient $t, t', t'', \theta, \theta', \theta''$,

[*] *Ce moment est aussi* la mesure de toute translation qui serait effectuée par un point quelconque de l'axe central sur cet axe même, et d'une étendue égale au produit de la rotation θ par la distance de ce point à la droite s, cette translation étant estimée ou projetée *orthogonalement* à cette droite s, c'est-à-dire sur une droite menée par le point considéré normalement au plan qui contient ce point et cette droite.

g, h, l, g', h', l', g'', h'', l'', etc., et qu'on désigne par δS le déplacement composé et résultant d'un point du système relatif à cette même direction s et par T, Θ, G, H, L, les éléments de l'axe central résultant, on aura

$$\delta S = \Sigma t \cos v + \Sigma D \theta \sin v = T \cos V + \Theta \mathfrak{D} \sin V,$$

$\mathfrak{D}$ désignant la distance de l'axe résultant à la droite s, menée par le point (x, y, z).

Cette équation, à cause des indéterminées a, b, c, qu'elle renferme et parce qu'elle doit avoir lieu pour tous les points du système, équivaut aux six équations suivantes qui donnent la position de l'axe central du déplacement, la translation et la rotation résultantes,

$$\begin{gathered}
\Sigma\alpha - \mathrm{T} \cos \mathrm{G} + \Theta \mathrm{y} \cos \mathrm{L} - \Theta \mathrm{z} \cos \mathrm{H} = 0, \\
\Sigma\beta - \mathrm{T} \cos \mathrm{H} + \Theta \mathrm{z} \cos \mathrm{G} - \Theta \mathrm{x} \cos \mathrm{L} = 0, \\
\Sigma\gamma - \mathrm{T} \cos \mathrm{L} + \Theta \mathrm{x} \cos \mathrm{H} - \Theta \mathrm{y} \cos \mathrm{G} = 0, \\
\Theta \cos \mathrm{G} = \Sigma \theta \cos g, \quad \Theta \cos \mathrm{H} = \Sigma \theta \cos h, \quad \Theta \cos \mathrm{L} = \Sigma \theta \cos h,
\end{gathered}$$

desquelles on tire

$$\mathrm{T} = \cos \mathrm{G} \Sigma \alpha + \cos \mathrm{H} \Sigma \beta + \cos \mathrm{L} \Sigma \gamma,$$

x, y, z désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'axe central résultant; car on a

$$\begin{gathered}
\delta S = \cos a \Sigma \delta x + \cos b \Sigma \delta y + \cos c \Sigma \delta z, \\
\cos V = \cos a \cos \mathrm{G} + \cos b \cos \mathrm{H} + \cos c \cos \mathrm{L},
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} \sin V = \cos a [(y - \mathrm{y}) \cos \mathrm{L} - (z - \mathrm{z}) \cos \mathrm{H}] + \cos b [(z - \mathrm{z}) \cos \mathrm{G} - (x - \mathrm{x}) \cos \mathrm{L}] \\
+ \cos c [(x - \mathrm{x}) \cos \mathrm{H} - (y - \mathrm{y}) \cos \mathrm{G}].
\end{aligned}$$

On pourrait rigoureusement ne considérer que des rotations dans cette analyse, puisque les translations t, t', peuvent toujours être représentées par des couples de rotations, et poser simplement

$$\delta S = \mathrm{T} \cos V + \Theta \mathfrak{D} \sin V = \Sigma \theta D \sin v.$$

Pour transformer une translation t suivant la direction g, h, l, en un couple de rotations, il faut résoudre les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} t\cos g &= u_1\theta_1\cos \mathrm{G}_1 + u_2\theta_2\cos \mathrm{G}_2 = \theta_1[(y-\mathrm{Y})\cos l_1 - (z-\mathrm{Z})\cos h_1] \\ &\qquad + \theta_2[(y-\mathrm{Y}')\cos l_2 - (z-\mathrm{Z}')\cos h_2], \\ t\cos h &= u_1\theta_1\cos \mathrm{H}_1 + u_2\theta_2\cos \mathrm{H}_2 = \theta_1[(z-\mathrm{Z})\cos g_1 - (x-\mathrm{X})\cos l_1] \\ &\qquad + \theta_2[(z-\mathrm{Z}')\cos g_2 - (x-\mathrm{X}')\cos l_2], \\ t\cos l &= u_1\theta_1\cos \mathrm{L}_1 + u_2\theta_2\cos \mathrm{L}_2 = \theta_1[(x-\mathrm{X})\cos h_1 - (y-\mathrm{Y})\cos g_1] \\ &\qquad + \theta_2[(x-\mathrm{X}')\cos h_2 - (y-\mathrm{Y}')\cos g_2], \end{aligned}$$

dans lesquelles X, Y, Z, X', Y', Z', etc., représentent les coordonnées des axes de rotations, et g_1, h_1, l_1, g_2, h_2, l_2, leurs inclinaisons. Ces équations doivent être satisfaites indépendamment des variables x, y, z, et donnent ainsi les six équations suivantes :

$$\begin{gathered} \theta_1\cos g_1 + \theta_2\cos g_2 = 0, \quad \theta_1\cos h_1 + \theta_2\cos h_2 = 0, \quad \theta_1\cos l_1 + \theta_2\cos l_2 = 0, \\ t\cos g = (\mathrm{Z}\cos h_1 - \mathrm{Y}\cos l_1)\theta_1 + (\mathrm{Z}'\cos h_2 - \mathrm{Y}'\cos l_2)\theta_2, \\ t\cos h = (\mathrm{X}\cos l_1 - \mathrm{Z}\cos g_1)\theta_1 + (\mathrm{X}'\cos l_2 - \mathrm{Z}'\cos g_2)\theta_2, \\ t\cos l = (\mathrm{Y}\cos g_1 - \mathrm{X}\cos h_1)\theta_1 + (\mathrm{Y}'\cos g_2 - \mathrm{X}'\cos h_2)\theta_2, \end{gathered}$$

d'où l'on tire

$$\begin{gathered} \theta_2 = -\theta_1, \quad \cos g_1 = \cos g_2, \quad \cos h_1 = \cos h_2, \quad \cos l_1 = \cos l_2, \\ t\cos g = \theta_2[(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}')\cos l_1 - (\mathrm{Y}-\mathrm{Y}')\cos l_2] \text{ etc.}, \end{gathered}$$

équations qui conviennent exclusivement à deux axes de rotation parallèles dans un plan normal à t, la distance de ces deux axes étant égale au quotient $\frac{t}{\theta^2}$. Revenons à l'équation

$$\delta S = \mathrm{T}\cos \mathrm{V} + \Theta\mathfrak{D}\sin \mathrm{V} = \Sigma\theta \mathrm{D}\sin \nu,$$

il en résulte que, *relativement à une direction quelconque s*, la composition des rotations θ, θ', θ'', autour d'axes fixes, se résout en une rotation Θ, et en une translation ou *couple* de rotations dont le *moment* $\mathrm{T}\cos \mathrm{V}$ est égal à l'excédant de la somme des *moments* de ces rotations partielles, sur le moment résultant de la rotation composée, ces moments estimés relativement à un même point.

Pour un point quelconque comparé à l'origine des coordonnées, on aura

$$\delta S - \delta S_0 = \Sigma\theta D \sin\nu - \Sigma\theta D_0 \sin\nu_0 = \Theta \sin V (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Ainsi donc, la différence des *moments composés* d'un système solide assujéti à subir successivement des déplacements infiniment petits par rapport à deux points de ce système, est égale à la somme des différences des *moments* résultant pour ces deux points de chacune des rotations successives du système, tous ces moments étant estimés relativement à une même direction.

On sait que ces *moments* ne désignent rien autre que l'*effet* du déplacement du système sur le point auquel ils sont rapportés; la translation étant commune à tous les points ne peut, ni dans les déplacements partiels, ni dans le déplacement composé, altérer leur situation relative. Il était donc évident *à priori* que tout *déplacement relatif*, partiel ou composé, d'un point quelconque du système par rapport à un autre point de ce système, ne pouvait dépendre que des *rotations partielles* ou *composées* de ce système.

*Conditions d'*équilibre *de plusieurs déplacements successifs infiniment petits.*

24. Nous sommes conduits à rechercher à quelles conditions devraient satisfaire les éléments des déplacements successifs indiqués pour un système solide, pour que ce système passant successivement par les diverses situations infiniment voisines, correspondant à ces éléments, revînt à sa position primitive, ce qui constituerait un état définitif d'*équilibre* ou de neutralisation pour ces déplacements successifs. Or il est évident que toutes les conditions dont il s'agit sont comprises dans une seule équation décomposable en six autres, à cause des indéterminées qu'elle renferme, savoir :

$$\delta S = 0,$$

puisque cette équation exprime que chaque point du système est revenu à sa position primitive. Les six équations renfermées dans l'équation générale $\delta S = 0$, sont

$$\delta x_0 = \Sigma \alpha = 0,$$
$$\delta y_0 = \Sigma \beta = 0,$$
$$\delta z_0 = \Sigma \gamma = 0,$$
$$\Sigma \theta \cos g = 0, \quad \Sigma \theta \cos h = 0, \quad \Sigma \theta \cos l = 0,$$

en désignant par δx_0, δy_0, δz_0, les variations complètes des coordonnées de l'origine; les trois premières expriment l'*immobilité* de l'origine des coordonnées, et les trois autres qu'aucune rotation n'a lieu définitivement dans le système déplacé : double condition qui exclut la possibilité d'un déplacement définitif quelconque. Cette double condition ressort immédiatement de la relation,

$$\delta S = T \cos V + \Theta \mathfrak{D} \sin V = 0,$$

relation qui ne peut être satisfaite pour un point quelconque qu'autant qu'on ait

$$T = 0, \quad \Theta = 0.$$

Or $\Theta = 0$ implique forcément les trois équations suivantes,

$$\Sigma \theta \cos g = 0, \quad \Sigma \theta \cos h = 0, \quad \Sigma \theta \cos l = 0,$$

et l'équation fondamentale (n° **15**), appliquée à l'origine,

$$\delta x_0^2 + \delta y_0^2 + \delta z_0^2 = t^2 + \theta^2 u^2,$$

lorsque la rotation est nulle avec la translation, donne les trois autres

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0.$$

Ainsi donc, les conditions d'*équilibre* d'une suite de déplacements successifs infiniment petits d'un même solide sont au nombre de six, dont trois expriment que le déplacement du système n'admet aucune translation et les trois autres excluent toute rotation.

Ces six équations d'équilibre sont analytiquement comprises dans une seule équation qui exprime de la manière la plus simple la loi *générale* de cet équilibre, savoir,

$$\Sigma \theta D \sin v = 0,$$

qui exprime que le *moment* résultant pour un point quelconque du système de l'addition de tous les *moments* produits en ce point par les rotations et les translations ou *couples* de *rotations* successivement imprimées ou subies par le système, soit nul par rapport à une direction quelconque. Mais l'équilibre de ces déplacements infiniment petits successifs, toutes conditions restant égales, continuera d'avoir lieu, quelque rapide que puisse être supposée la succession de ces déplacements : en passant aux limites, on arrive à l'identité des lois de l'équilibre des causes *successives* de déplacements infiniment petits avec celle de l'équilibre des causes *simultanées* de déplacements infiniment petits.

Ainsi donc l'équation

$$\Sigma \theta \mathrm{D} \sin \mathrm{V} = 0,$$

exprime la condition générale de l'*immobilité* d'un système invariable, sollicité par des causes quelconques agissant *simultanément* à décrire autour d'axes fixes donnés les rotations infiniment petites θ, θ', etc.

Analogie de ces lois de composition et d'équilibre avec celles de la composition et de l'équilibre des forces *appliquées à un système invariable.*

26. L'analogie de cette loi générale avec celle de l'équilibre des forces appliquées à un système invariable est frappante. Les forces appliquées suivant les axes des rotations et supposées proportionnelles à ces rotations, le *moment* d'une force de ce système est identiquement proportionnel à celui de la rotation correspondante, chaque translation est remplacée par un couple de forces appliquées suivant les axes du couple de rotation équivalent à la translation ; mais l'analogie s'étend aux lois de la composition comme à celles de l'équilibre et peut s'énoncer ainsi : Un système de déplacements successifs étant donné à composer en un déplacement définitif, et en même temps un système de forces proportionnelles aux rotations successives données pour chaque déplacement et appliquées suivant les mêmes axes que ces rotations, les translations des déplacements successifs, si on ne les suppose pas implicitement comprises dans les rotations au moyen de leur représentation par des couples de rotations, étant alors représentées dans le système de force considérés par des couples de forces dont les moments seraient égaux à ceux de ces translations, relativement aux trois axes coordonnés, le système de déplacements successifs aboutira à un déplacement définitif composé d'une rotation et d'une translation absolue relatives à l'axe central de rotation; de même que le système de forces se résoudra par la composition successive de ses éléments en une seule force et à un seul couple de forces situé dans un plan normal à la force résultante. Cette force résultante sera appliquée à l'axe central du déplacement définitif, lequel sera en même temps l'*axe central* du système statique; elle sera proportionnelle à la rotation résultante, et le moment du couple normal à cette force sera proportionnel à la translation absolue du système qui s'opère parallèlement à l'axe central. Lorsque les axes des rotations à composer sont tous parallèles et passent par des points déterminés, l'axe central résultant leur est aussi parallèle et passe par un certain point qui correspond au centre des forces parallèles, toujours le même, quelle que soit la direction des axes de rotation, et qui n'est autre que le centre de gravité des points déterminés sur les axes de rotation composants lorsque toutes les rotations sont égales [*].

En effet, les équations de l'axe central résultant de la composition des axes fixes de rotation, se réduisent dans ce cas à

$$y\cos l - z\cos h + \frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\theta} = 0, \qquad x\cos h - y\cos g + \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\theta} = 0,$$

et l'on a

$$T = 0, \quad \Theta = \Sigma\theta = \Sigma\alpha = \Sigma\,\theta(Z\cos h - Y\cos l), \text{ etc.},$$

X, Y, Z, désignant les coordonnées de l'axe de la rotation θ, l'axe résultant passe donc par le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\Sigma\theta X}{\Sigma\theta}, \quad y = \frac{\Sigma\theta Y}{\Sigma\theta}, \quad z = \frac{\Sigma\theta Z}{\Sigma\theta}.$$

---

[*] Et comme toute succession de rotations infiniment petites en nombre quelconque effectuées par un solide autour d'axes fixes différents se réduit d'une infinité de manières à deux rotations conjuguées, de même tout système de forces appliquées à un solide peut être représenté d'une infinité de manières par deux forces conjuguées, dont le produit multiplié par la distance qui les sépare et par le sinus de leur direction est constant.

De la détermination des variations des coordonnées d'un système solide dues à un déplacement quelconque de ce système, analytiquement déduites des conditions de l'invariabilité de ce système.

27. La considération du déplacement des axes coordonnés supposés liés invariablement au système déplacé, conduit immédiatement à l'expression algébrique des variations des coordonnées de ce système, et il ne s'agit plus que de réduire au moindre nombre les constantes arbitraires qui se présentent dans le calcul, ainsi qu'on va le voir.

En effet, si l'on désigne par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les cosinus des angles que forment avec leurs directions primitives les axes coordonnés déplacés avec le système, les coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, d'un point du système après son déplacement, rapportées à la situation première des axes coordonnés, s'exprimeront en fonction des coordonnées de ce même point déplacé, rapportées aux axes déplacés et qui seront les mêmes que celles du point considéré dans la première position, rapportées aux premiers axes suivant les formules connues pour la transformation des coordonnées rectangulaires; on aura donc les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= \alpha + a x + b y + c z, \\ y + \Delta y &= \beta + a'x + b'y + c'z, \\ z + \Delta z &= \gamma + a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

au moyen desquelles Δx, Δy, Δz, se trouvent généralement exprimées, quel que soit le déplacement du solide, en fonction linéaire des coordonnées x, y, z, comprenant douze coefficients arbitraires qui réellement se réduisent à six constantes, car les trois premières α, β, γ, expriment la variation des coordonnées de l'origine, et les trois autres, a, b', c'', au moyen desquelles on élimine les six autres cosinus par les formules de Monge, définissent le changement de *direction* dans l'espace des axes coordonnés primitifs.

Mais la réduction de ces douze constantes à six peut s'opérer plus simplement encore, sans l'emploi des formules de Monge, compliquées de radicaux, et par une voie qui, relativement aux variables x, y, z, conduit aux expressions analytiques les moins compliquées pour Δx, Δy, Δz. En effet, introduisons dans les équations ci-dessus les coordonnées x, y, z, du milieu de la droite qui joint les deux situations correspondantes du point x, y, z, en sorte qu'on ait

$$x = \mathrm{x} - \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad y = \mathrm{y} - \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad z = \mathrm{z} - \tfrac{1}{2}\Delta z;$$

puis pour réunir ces trois équations en une seule, multiplions-les successivement par trois facteurs indéterminés μ, ν, π, et additionnons-les, nous aurons à considérer l'équation unique

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\Delta x(a\mu + a'\nu + a''\pi + \mu) + \tfrac{1}{2}\Delta y(b\mu + b'\nu + b''\pi + \nu) + \tfrac{1}{2}\Delta z(c\mu + c'\nu + c''\pi + \pi)\\ &= \alpha\mu + 6\nu + \gamma\pi + (a\mu + a'\nu + a''\pi - \mu)\mathrm{x} + (b\mu + b'\nu + b''\pi - \nu)\mathrm{y} + c\mu + c'\nu + c''\pi - \pi)\mathrm{z},\end{aligned}$$

Pour déterminer Δx, il faut, dans cette équation, donner à μ, ν, π, des valeurs qui annullent les coefficients de Δy, Δz, c'est-à-dire poser

$$b\mu + b'\nu + b''\pi + \nu = 0, \quad c\mu + c'\nu + c''\pi + \pi = 0,$$

d'où l'on tire

$$\mu = (1 + b')(1 + c'') - c'b'', \quad \nu = a'' - b(1 + c''), \quad \pi = bc' - c(1 + b').$$

Or entre les neuf cosinus $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, il existe, comme on le sait, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}a &= b'c'' - c'b'', & a' &= cb'' - bc'', & a'' &= bc' - cb',\\ b &= c'a'' - a'c'', & b' &= ac'' - ca'', & b'' &= ca' - ac',\\ c &= c'b'' - b'c'', & c' &= ba'' - ab'', & c'' &= ab' - ba',\end{aligned}$$

lesquelles se déduisent de ces six autres :

$$\begin{aligned}&a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, && b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, && c^2 + c'^2 + c''^2 = 0,\\ &ab + a'b' + a''b'' = 0, && ac + a'c'' + a''c'' = 0, && bc + b'c' + b''c'' = 0,\end{aligned}$$

qui expriment que les axes primitifs et les axes nouveaux sont rectangulaires. L'ambiguité des signes qui se présente dans la déduction dont il s'agit, est résolue par cette autre condition tout-à-fait nécessaire, dans la considération du déplacement d'un système solide, savoir : que le système des nouveaux axes coordonnés provenant lui-même du déplacement du système des premiers axes, reste toujours avec le premier dans des conditions de superposition possible pour chaque axe respectif et son correspondant.

Cela posé, il est clair qu'au moyen des relations ci-dessus on a

$$\mu = 1 + a + b' + c'', \quad \nu = a' - b, \quad \pi = a'' - c,$$

d'où l'on tire

$$a'\mu + a'\nu + a''\pi = 1 + a + b' + c'' = \mu,$$

ce qui donne

$$\Delta x - \alpha = \frac{2\left[(y - \tfrac{1}{2}\beta)(b - a') - (z - \tfrac{1}{2}\gamma)(a'' - c)\right]}{1 + a + b' + c''},$$

on aura semblablement,

$$\Delta y - \beta = \frac{2\left[(z - \tfrac{1}{2}\gamma)(c' - b'') - (x - \tfrac{1}{2}\alpha)(b - a')\right]}{1 + a + b' + c''},$$

$$\Delta z - \gamma = \frac{2\left[(x - \tfrac{1}{2}\alpha)(a'' - c) - (y - \tfrac{1}{2}\beta)(c' - b'')\right]}{1 + a + b' + c''},$$

formules identiques à celles du n° **15**, en posant

$$m = \frac{2(c' - b'')}{1 + a + b' + c''}, \quad n = \frac{2(a'' - c)}{1 + a + b' + c''}, \quad p = \frac{2(b - a')}{1 + a + b' + c''},$$

28. Dans le cas des déplacements infiniment petits on a directement, en négligeant les déplacements angulaires du second ordre

$$a = 1, \quad b' = 1, \quad c'' = 1,$$

ce qui donne

$$\delta x = \alpha + by + cz, \quad \delta y = \beta + a'x + c'z, \quad \delta z = \gamma + a''x + b''y;$$

et comme à cause de l'invariabilité de la distance d'un point quelconque à l'origine entraînée dans le déplacement du système, on a

$$x(\delta x - \alpha) + y(\delta y - \beta) + z(\delta z - \gamma) = 0,$$

quelles que soient x, y, z, il existera nécessairement entre les cosinus infiniment petits du premier ordre b, c, a', c', a'', b'', les relations suivantes

$$b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0,$$

on aura donc finalement

$$\delta x = \alpha + py - nz, \quad \delta y = \beta + mz - px, \quad \delta z = \gamma + nx - my,$$

en posant

$$m = c' = -b'', \quad n = a'' = -c, \quad p = b = -a'.$$

29. Mais il est intéressant de parvenir à ces mêmes formules des variations finies ou infiniment petites des coordonnées d'un système solide par une voie purement algébrique, indépendante de toute considération géométrique, en partant de l'expression algorithmique des conditions du problème, c'est-à-dire de l'invariabilité des distances des points de ce solide.

Soient donc

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x, \quad y_0,\ y_1,\ y_2,\ y, \quad z_0,\ z_1,\ z_2,\ z,$$

les coordonnées de quatre points invariablement liés entre eux et faisant partie du système que l'on considère, les trois premiers spécialement choisis pour y rapporter tous les autres ; les distances de ces quatre points devant rester constantes, quelles que soient les variations de leurs coordonnées, par suite d'un déplacement quelconque du système, cette condition exprimée algorithmiquement donnera entre les variations de ces douze coordonnées, les six équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(x_1+\Delta x_1-x_0-\Delta x_0)^2+(y_1+\Delta y_1-y_0-\Delta y_0)^2+(z_1+\Delta z_1-z_0-\Delta z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2,\\
&(x_2+\Delta x_2-x_0-\Delta x_0)^2+(y_2+\Delta y_2-y_0-\Delta y_0)^2+(z_2+\Delta z_2-z_0-\Delta z_0)^2=(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2,\\
&(x_2+\Delta x_2-x_1-\Delta x_1)^2+(y_2+\Delta y_2-y_1-\Delta y_1)^2+(z_2+\Delta z_2-z_1-\Delta z_1)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\\
&(x+\Delta x-x_0-\Delta x_0)^2+(y+\Delta y-y_0-\Delta y_0)^2+(z+\Delta z-z_0-\Delta z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\\
&(x+\Delta x-x_1-\Delta x_1)^2+(y+\Delta y-y_1-\Delta y_1)^2+(z+\Delta z-z_1-\Delta z_1)^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,\\
&(x+\Delta x-x_2-\Delta x_2)^2+(y+\Delta y-y_2-\Delta y_2)^2+(z+\Delta z-z_2-\Delta z_2)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2.
\end{aligned}$$

Ces six équations serviront à déterminer Δx, Δy, Δz, en fonction des variations des coordonnées des trois premiers points qui devront se réduire à six constantes par suite des trois équations qui les lient entre elles.

Il s'agit de résoudre effectivement ces six équations, qui, bien que du second degré par rapport aux variations Δx, Δy, Δz, deviennent linéaires lorsqu'au lieu des variables x, y, z, on introduit celles-ci :

$$\mathrm{x} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \mathrm{y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad \mathrm{z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z,$$

et de même pour les autres points : le système des six équations ci-dessus peut dès lors s'écrire ainsi :

$$(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)(\Delta x - \Delta x_0) + (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)(\Delta y - \Delta y_0) + (\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)(\Delta z - \Delta z_0) = 0,$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)(\Delta x_1 - \Delta x_0) + (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)(\Delta y_1 - \Delta y_0) + (\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)(\Delta z_1 - \Delta z_0)\\ + (\Delta x - \Delta x_0)(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0) + (\Delta y - \Delta y_0)(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0) + (\Delta z - \Delta z_0)(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0) = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)(\Delta x_2 - \Delta x_0) + (\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)(\Delta y_2 - \Delta y_0) + (\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)(\Delta z_2 - \Delta z_0)\\ + (\Delta x - \Delta x_0)(\mathrm{x}_2 - x_0) + (\Delta y - \Delta y_0)(\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_0) + (\Delta z - \Delta z_0)(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0) = 0,\end{gathered}$$

$$(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0)(\Delta x_1 - \Delta x_0) + (\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0)(\Delta y_1 - \Delta y_0) + (\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0)(\Delta z_1 - \Delta z_0) = 0,$$

$$(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0)(\Delta x_2 - \Delta x_0) + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_0)(\Delta y_2 - \Delta y_0) + (\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0)(\Delta z_2 - \Delta z_0) = 0,$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0)(\Delta x_2 - \Delta x_0) + (\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0)(\Delta y_2 - \Delta y_0) + (\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0)(\Delta z_2 - \Delta z_0)\\ + (\Delta x_1 - \Delta x_0)(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0) + (\Delta y_1 - \Delta y_0)(\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_0) + (\Delta z_1 - \Delta z_0)(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0) = 0.\end{gathered}$$

En multipliant ces six équations successivement par les facteurs indéterminés μ^2, $\mu\nu$, $\mu\pi$, ν^2, π^2, $\nu\pi$, et en les ajoutant, on forme l'équation complexe suivante, qui comprend le système des six premières :

$$\left.\begin{aligned}&[\mu(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \nu(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0) + \pi(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0)][\mu(\Delta x - \Delta x_0) + \nu(\Delta x_1 - \Delta x_0) + \pi(\Delta x_2 - \Delta x_0)]\\ &+ [\mu(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + \nu(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0) + \pi(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0)][\mu(\Delta y - \Delta y_0) + \nu(\Delta y_1 - \Delta y_0) + \pi(\Delta y_2 - \Delta y_0)]\\ &+ [\mu(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + \nu(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0) + \pi(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0)][\mu(\Delta z - \Delta z_0) + \nu(\Delta z_1 - \Delta z_0) + \pi(\Delta z_2 - \Delta z_0)]\end{aligned}\right\} = 0.$$

En choisissant μ, ν, π, convenablement, on réduit successivement cette équation à ne contenir que Δx, Δy, Δz, et on en déduit les valeurs de ces variations de la manière la plus simple. En effet, posons

$$\mu(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + \nu(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0) + \pi(\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_0) = 0,$$
$$\mu(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + \nu(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0) + \pi(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0) = 0;$$

l'équation générale se réduit à

$$[\mu(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\nu(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_0)+\pi(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_0)][\mu(\Delta x-\Delta x_0)+\nu(\Delta x_1-\Delta x_0)+\pi(\Delta_2 x-\Delta x_0)]=0.$$

Or le premier facteur de ce produit ne peut être nul sans que le second le soit également, ainsi que nous le démontrerons ci-après; on aura donc simultanément

$$\begin{aligned}
\mu(\Delta x-\Delta x_0) &+ \nu(\Delta x_1-\Delta x_0) + \pi(\Delta x_2-\Delta x_0) = 0,\\
\mu(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0) &+ \nu(\mathrm{y}_1-\mathrm{y}_0) + \pi(\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_0) = 0,\\
\mu(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0) &+ \nu(\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_0) + \pi(\mathrm{z}_2-\mathrm{z}_0) = 0,
\end{aligned}$$

équations qui se transforment évidemment en celles-ci :

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 - \Delta x_0 &= p(\mathrm{y}_1-\mathrm{y}_0) - n(\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_0),\\
\Delta x_2 - \Delta x_0 &= p(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_0) - n(\mathrm{z}_2-\mathrm{z}_0),\\
\Delta x - \Delta x_0 &= p(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_0) - n(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0),
\end{aligned}$$

n et p étant deux constantes liées aux variations des trois premiers points par les deux premières de ces trois équations.

La même analyse donnerait

$$\begin{aligned}
\Delta y - \Delta y_0 &= m'(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0) - p'(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0),\\
\Delta z - \Delta z_0 &= n'(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) - m'(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0);
\end{aligned}$$

et comme on a

$$(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)(\Delta x-\Delta x_0) + (\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)(\Delta y-\Delta y_0) + (\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)(\Delta z-\Delta z_0) = 0,$$

il s'ensuit que $m = m'$, $n' = n$, $p' = p$, et qu'on a enfin les formules générales suivantes

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \mathrm{A} + p\mathrm{y} - n\mathrm{z},\\
\Delta y &= \mathrm{B} + m\mathrm{z} - p\mathrm{x},\\
\Delta z &= \Gamma + n\mathrm{x} - m\mathrm{y},
\end{aligned}$$

où les six constantes A, B, Γ, m, n, p, sont fonctions des variations

$$\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\quad \Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\quad \Delta z_0,\ \Delta z_1,\ \Delta z_2.$$

30. Mais il reste à prouver ce que nous avons avancé, que le facteur $\mu\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\nu\,(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_0)+\pi\,(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_0)$ ne peut être nul dans la question qui nous occupe, sans que le second facteur

$$\mu\,(\Delta x-\Delta x_0)+\nu\,(\Delta x_1-\Delta x_0)+\pi\,(\Delta x_2-\Delta x_0)$$

ne le soit également. En effet, les trois équations simultanées

$$\begin{aligned}
\mu\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\nu\,(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_0)+\pi\,(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_0)&=0,\\
\mu\,(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)+\nu\,(\mathrm{y}_1-\mathrm{y}_0)+\pi\,(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_0)&=0,\\
\mu\,(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)+\nu\,(\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_0)+\pi\,(\mathrm{z}_2-\mathrm{z}_0)&=0,
\end{aligned}$$

donneraient par l'élimination des facteurs μ, ν, π, une équation finale entre les coordonnées x_0, x_1, x_2, x, y_0, y_1, y_2, y, z_0, z_1, z_2, z, exprimant que les milieux des droites parcourues par les quatre points que nous considérons sont dans un même plan; mais cette condition singulière ne peut être remplie qu'autant que ces quatre points eux-mêmes sont dans un même plan, ou qu'autant que les pyramides formées par ces quatre points, dans leurs premières et leurs secondes positions, seraient symétriques au lieu d'être identiques ou superposables. Cette seconde hypothèse n'est pas admissible dans le problème qu'il s'agit de résoudre; mais la première doit être examinée. Si donc les quatre points donnés sont dans un même plan, nous disons qu'on aura à la fois

$$\mu(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\nu(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_0)+\pi(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_0)=0,\ \mu(\Delta x-\Delta x_0)+\nu(\Delta x_1-\Delta x_0)+\nu(\Delta x_2-\Delta x_0)=0,$$

et semblablement pour les variables y, z, et les variations Δy, Δz.

En effet, si les quatre points considérés sont dans un même plan, ainsi que leurs correspondants, on aura simultanément, en distinguant par un accent les coordonnées de ces derniers,

$$\begin{aligned}
&g\,(x-x_0)+h(x_1-x_0)+l(x_2-x_0)=0,\ g'(x'-x'_0)+h'(x'_1-x'_0)+l'(x'_2-x'_0)=0,\\
&g\,(y-y_0)+h(y_1-y_0)+l(y_2-y_0)=0,\ g'(y'-y'_0)+h'(y'_1-y'_0)+l'(y'_2-y'_0)=0,\\
&g\,(z-z_0)+h(z_1-z_0)+l(z_2-z_0)=0,\ g'(z'-z'_0)+h'(z'_1-z'_0)+l'(z'_2-z'_0)=0,
\end{aligned}$$

g, h, l, g', h', l', étant des coefficients à éliminer. Comme on a par l'invariabilité des distances

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x'-x'_0)^2+(y'-y'_0)+(z'-z'_0)^2,$$

$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)+(z-z_0)(z_1-z_0)=(x'-x'_0)(x'_1-x'_0)+(y'-y'_0)(y'_1-y'_0)+(z'-z'_0)(z'_1-z'_0),\ \text{etc.},$$

et que les rapports $\frac{h}{g}$, $\frac{h'}{g'}$, $\frac{l}{g}$, $\frac{l'}{g'}$, sont fonctions identiques de ces mêmes quantités, il s'ensuit qu'ils sont égaux et qu'on peut supposer $g' = g$, $h' = h$, $l' = l$, d'où l'on conclura, en introduisant les coordonnées des milieux $\mathrm{x} = \frac{x + x'}{2}$, etc., et les différences Δx, Δy, etc., qu'on a aussi

$$\begin{aligned}
&g\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + h\,(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0) + l\,(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0) = 0,\\
&g\,(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + h\,(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0) + l\,(\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_0) = 0,\\
&g\,(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + h\,(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0) + l\,(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0) = 0,\\
&g\,(\Delta x - \Delta x_0) + h\,(\Delta x_1 - \Delta x_0) + l\,(\Delta x_2 - \Delta x_0) = 0,\\
&g\,(\Delta y - \Delta y_0) + h\,(\Delta y_1 - \Delta y_0) + l\,(\Delta y_2 - \Delta y_0) = 0,\\
&g\,(\Delta z - \Delta z_0) + h\,(\Delta z_1 - \Delta z_0) + l\,(\Delta z_2 - \Delta z_0) = 0.
\end{aligned}$$

Les trois premières équations, comparées aux trois données en μ, ν, π, montrent la proportionnalité des coefficients g, h, l, à ces derniers, et enfin conduisent à l'équation

$$\mu\,(\Delta x - \Delta x_0) + \nu\,(\Delta x_1 - \Delta x_0) + \pi\,(\Delta x_2 - \Delta x_0) = 0, \text{ etc.};$$

ce qu'il fallait établir.

31. Les deux méthodes analytiques que nous venons d'exposer pour déterminer les formules des variations des coordonnées d'un système solide, sont déduites de procédés purement algébriques. L'algorithme infinitésimal fournit encore une démonstration plus simple de ces formules, se rapprochant de celle que Lagrange a donnée dans sa *Mécanique,* et comprenant dans la même analyse l'expression des variations finies et celle des infiniment petites. Voici cette démonstration.

Si l'on désigne par d les différences infiniment petites des coordonnées d'un point du système à celles du point infiniment voisin dans le système non déplacé, puis par le signe Δ ou δ, selon qu'on considère un déplacement fini ou infiniment petit de ce système, les variations de ces coordonnées dues à ce déplacement même; il s'agira de déterminer généralement les variations Δx, Δy, Δz, au moyen de l'équation suivante, qui renferme l'expression algorithmique la plus simple de l'invariabilité des distances mutuelles de tous les points du système

$$\Delta\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0.$$

Or en posant

$$\text{x} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \text{y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad \text{z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z,$$

cette équation, au moyen de la règle de l'inversion de signes d, Δ, devient

$$d\text{x}\, d\Delta x + d\text{y}\, d\Delta y + d\text{z}\, d\Delta z = 0,$$

à laquelle il faut satisfaire de la manière la plus générale. Dans ce but, considérons Δx, Δy, Δz, comme fonctions des variables indépendantes x, y, z; l'équation ci-dessus fournira d'abord l'intégrale suivante, en supposant constantes $d\text{x}$, $d\text{y}$, $d\text{z}$,

$$\frac{d\text{x}\,\Delta x + d\text{y}\,\Delta y + d\text{z}\,\Delta z}{\sqrt{d\text{x}^2 + d\text{y}^2 + d\text{z}^2}} = \textit{constante},$$

traduction algorithmique de la propriété du quadrilatère, dont deux côtés opposés sont égaux, laquelle consiste en ce que ces côtés et les deux autres se projettent *également* sur la ligne qui joint les milieux de ces derniers. Mais l'équation

$$d\text{x}\, d\Delta x + d\text{y}\, d\Delta y + d\text{z}\, d\Delta z = 0,$$

lorsqu'on y substitue les différentielles partielles aux différentielles complètes, devient

$$d\text{x}^2 \frac{d\Delta x}{d\text{x}} + d\text{y}^2 \frac{d\Delta y}{d\text{y}} + d\text{z}^2 \frac{d\Delta z}{d\text{z}} + d\text{x}\, d\text{y} \left(\frac{d\Delta x}{d\text{y}} + \frac{d\Delta y}{d\text{x}}\right)$$
$$+ d\text{x}\, d\text{z} \left(\frac{d\Delta x}{d\text{z}} + \frac{d\Delta z}{d\text{x}}\right) + d\text{y}\, d\text{z} \left(\frac{d\Delta y}{d\text{z}} + \frac{d\Delta z}{d\text{y}}\right) = 0,$$

et à cause de l'indépendance des différentielles $d\text{x}$, $d\text{y}$, $d\text{z}$, donne ces six autres :

$$\frac{d\Delta x}{d\text{x}} = 0, \quad \frac{d\Delta y}{d\text{y}} = 0, \quad \frac{d\Delta z}{d\text{z}} = 0, \quad \frac{d\Delta x}{d\text{y}} + \frac{d\Delta y}{d\text{x}} = 0,$$
$$\frac{d\Delta x}{d\text{z}} + \frac{d\Delta z}{d\text{x}} = 0, \quad \frac{d\Delta y}{d\text{x}} + \frac{d\Delta z}{d\text{y}} = 0.$$

Le système de ces six équations s'intègre aisément. Les trois premières montrent que les variations Δx, Δy, Δz, sont respectivement formulées indépendamment des variables respectives x, y, z. Il en est par conséquent ainsi de leurs dérivées, d'où il est facile de conclure que ces six dérivées sont des constantes égales deux à deux et de signes contraires, ce qui produit enfin les expressions auxquelles nous sommes déjà arrivés,

$$\Delta x = \text{A} + p\text{y} - n\text{z}, \quad \Delta y = \text{B} + m\text{z} - p\text{x}, \quad \Delta z = \Gamma + n\text{x} - m\text{y}.$$

Nous ne reviendrons pas sur les transformations que subissent ces formules lorsqu'on y rétablit les variables x, y, z; il nous suffit d'avoir montré comment la méthode des *variations* s'applique à la recherche de ces formules et donne dans une même forme algorithmique les variations finies et infiniment petites des coordonnées d'un système solide, avec cette seule différence que les coordonnées des points déplacés, sont remplacées dans le cas des variations finies, par celles des milieux des espaces parcourus en ligne droite par ces points.

32. Il nous reste maintenant, pour terminer ce travail, à déduire rapidement de l'expression de ces variations les lois géométriques du déplacement des corps solides que nous avons d'abord exposées synthétiquement, et prises pour point de départ de notre première analyse.

Les formules

$$\Delta x = \text{A} + p\text{y} - n\text{z}, \quad \Delta y = \text{B} + m\text{z} - p\text{x}, \quad \Delta z = \Gamma + n\text{x} - m\text{y},$$

donnent immédiatement la relation fondamentale suivante :

$$m\Delta x + n\Delta y + p\Delta z = \text{A}m + \text{B}n + \Gamma p,$$

d'où l'on voit que les *droites* réellement parcourues par tous les points du système, en passant d'une situation à l'autre, sont toutes également projetées sur une même direction (m, n, p). En désignant les angles de cette direction par g, h, l, et par t cette projection commune, on aura pour tous les points du système déplacé,

$$\cos g \, \Delta x + \cos h \, \Delta y + \cos l \, \Delta z = t,$$

et pour deux points différents,

$$\cos g \, (\Delta x - \Delta x') + \cos h \, (\Delta y - \Delta y') + \cos l \, (\Delta z - \Delta z') = 0$$

$\Delta x - \Delta x'$, $\Delta y - \Delta y'$, $\Delta z - \Delta z'$, mesurent les projections sur les axes respectifs coordonnés de la corde de l'arc qui serait décrit par le premier point autour d'un axe de rotation mené par le second point (x', y', z'), parallèlement à la direction (m, n, p); ces deux points sont transportés ensuite à leur situation définitive, en décrivant deux droites égales et parallèles à celle qui joint le point (x', y', z') à son correspondant. Si l'on désigne par θ l'angle de cette rotation, par u la distance de cette corde à cet axe de rotation, on aura évidemment

$$4u^2 \tang^2 \tfrac{1}{2}\theta \begin{cases} = (\Delta x - \Delta x')^2 + (\Delta y - \Delta y')^2 + (\Delta z - \Delta z')^2 \\ = (m^2+n^2+p^2)\left\{ (X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2-[(X-X')\cos g+(Y-Y')\cos h+(Z-Z')\cos g]^2 \right\}, \end{cases}$$

$$u^2 = (X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2 - [(X-X')\cos g + (Y-Y')\cos h + (Z-Z')\cos l]^2;$$

on a donc, quels que soient les deux points considérés,

$$4 \tang^2 \tfrac{1}{2}\theta = m^2 + n^2 + p^2.$$

Ainsi le déplacement donné d'un solide, d'une situation à une autre, peut toujours résulter de deux déplacements consécutifs en rotation et en translation, ainsi que cela a été expliqué au commencement de ce travail.

Soit de plus ν l'amplitude du déplacement angulaire d'une droite de ce solide, φ l'angle qu'elle forme avec la direction des axes de rotation x, y, z, x', y', z', les coordonnées de deux points de cette droite, on aura

$$\cos\varphi = \frac{(x-x')\cos g + (y-y')\cos h + (z-z')\cos l}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

et, à cause de l'invariabilité des distances mutuelles des points de ce solide,

$$\Delta \cos\varphi = \frac{(\Delta x - \Delta x')\cos g + (\Delta y - \Delta y')\cos h + (\Delta z - \Delta z')\cos l}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = 0.$$

L'angle φ reste le même avant et après le déplacement; quant à l'angle ν, on a

$$\cos\nu = \frac{(x+x')(x-x+\Delta x-\Delta x') + (y-y')(y-y'+\Delta y-\Delta y') + (z-z')(z-z'-\Delta z-\Delta z')}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2};$$

d'où enfin cette relation remarquable

$$\sin \tfrac{1}{2}\nu = \sin \varphi \sin \tfrac{1}{2}\theta,$$

qui exprime le théorème énoncé au n° 5.

Les droites parallèles à la direction des axes de rotation sont donc transportées parallèlement à elles-mêmes. Entre toutes ces droites il y en a une qui ne fait que glisser sur elle-même et pour laquelle les variations Δx, Δy, Δz, doivent évidemment être proportionnelles aux cosinus des angles g, h, l. Les équations de cette droite seront donc

$$\frac{\Delta x}{\cos g} = \frac{\Delta y}{\cos h} = \frac{\Delta z}{\cos l} = t;$$

et comme on a

$$\mathrm{x} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \mathrm{y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad \mathrm{z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z,$$

on aura, comme nous les avons déjà données au n° 16, pour équations de l'axe *central* du déplacement :

$$\begin{aligned} py - nz + \mathrm{A} &= t \cos g, \\ mz - px + \mathrm{B} &= t \cos h, \\ nx - my + \Gamma &= t \cos l, \end{aligned}$$
etc.

Conclusion. — *Loi générale de la Statique.*

33. La Géométrie considère les déplacements finis ou infiniment petits des corps solides, occasionnés par l'action *successive* de causes ou de *forces* capables de les produire.

La Mécanique considère les déplacements consécutifs des corps solides, et plus généralement ensuite des systèmes quelconques de points occasionnés par l'action simultanée et prolongée de causes ou de *forces* capables de les produire.

La Statique est cette première partie de la Mécanique où l'on ne considère que la possibilité des déplacements infiniment petits ou *virtuels* de ces systèmes, qui résulteraient de l'action simultanée et non continue de ces mêmes causes.

La Géométrie enseigne que le déplacement d'un corps solide se réduit à tourner autour d'un ou de deux axes fixes.

Il en résulte que si les forces qui agissent simultanément sur un système solide ne peuvent lui imprimer aucune rotation autour d'un axe fixe quelconque, ces forces se font équilibre ou se neutralisent, et le corps reste immobile.

Ces forces, considérées séparément, ne peuvent agir que de deux manières, ou parce qu'elles tendent à faire tourner ce corps solide autour d'un axe fixe, ou parce qu'elles tendent à déplacer un certain point de ce système, ou plus expressivement à faire varier les coordonnées de ce point. C'est la manière la plus générale de considérer et d'examiner, en Mécanique, l'action des forces.

Toutefois la loi de l'équilibre est identique dans ces deux modes de considération, ainsi qu'on va le voir.

Si des forces ou causes quelconques de déplacement tendent *successivement* ou *simultanément*, en passant aux limites, c'est-à-dire en passant de la Géométrie à la Mécanique, à imprimer à un solide des rotations *élémentaires* ou virtuelles θ, θ', θ'',..., autour d'axes fixes déterminés, la loi de l'équilibre de ces forces consiste en ce que la somme des moments de ces rotations soit nulle par rapport à un *axe quelconque;*

L'équation

$$\Sigma \theta D \sin \nu = 0,$$

qui est la traduction algorithmique de cette loi, impliquant, à cause de l'indétermination de cet axe quelconque, six équations spéciales qui se réduisent à trois quand ce système solide se réduit à un point.

Examinons maintenant ce qui arrive quand les forces qui agissent simultanément sur le solide tendent séparément à faire varier les coordonnées de divers points de ce système. Tout déplacement se rapportant *virtuellement* à un axe fixe de rotation, il suffira pour chaque point de considérer la variation qui peut résulter de l'action des forces qui agissent en ce point, sur la coordonnée de ce point *orthogonale* à ce même axe fixe, dont la résistance s'oppose à toute variation de ses autres coordonnées rectangulaires.

Or il est évident que le déplacement infiniment petit d'un point peut être considéré comme effectué *successivement* par rapport à chacune des coordonnées rectangulaires de ce point, la variation de chacune de ces coordonnées étant d'ailleurs égale à la projection du déplacement total sur la direction de cette coordonnée. Il en résulte que dans tout système où il se trouve un axe fixe, les forces qui agissent sur un point de ce système ne peuvent réellement faire varier que la coordonnée de ce point orthogonale à cet axe fixe.

D'un autre côté, à cause de l'invariabilité du système, il est évident que deux forces *égales*, dans leur action sur un même point, se font équilibre,

1°. Si elles tendent à faire varier également ses coordonnées, mais en sens contraire;

2°. Si elles sont *appliquées*, mais en sens contraire, aux extrémités d'une droite invariable;

3°. Si elles tendent à faire tourner en sens contraire une circonférence dont le centre est fixe, dans le plan de laquelle elles sont appliquées tangentiellement;

4°. Si, plus généralement, elles tendent à faire tourner en sens contraire un cylindre droit dont l'axe est fixe, à la surface duquel elles sont tangentes orthogonalement à son axe.

Il résulte de ces propositions que si l'on considère toutes les forces qui tendent à déplacer les divers points d'un système solide, où il se trouve un axe fixe, suivant des directions données, et à leur imprimer des translations *virtuelles* données, il y aura équilibre entre toutes ces forces si, en les supposant appliquées toutes à des points équidistants de l'axe fixe, ce qui est toujours possible, la somme des *moments* des translations virtuelles qui mesure l'effet de ces forces est nulle par rapport à cet axe.

En passant d'un axe fixe déterminé à un axe quelconque, il s'ensuivra nécessairement que l'équation générale

$$\Sigma \theta D \sin \nu = 0$$

est la traduction algorithmique de l'équilibre d'un système de forces capables de produire des translations virtuelles ou infiniment petites proportionnelles aux rotations θ, θ', θ'',..., ces forces étant appliquées sur les axes de ces rotations, *positivement* ou *négativement*, selon le signe de ces rotations.

Ainsi s'explique l'analogie si remarquable des lois de l'équilibre et conséquemment de celles de la composition des rotations infiniment petites, avec les lois de l'équilibre et de la composition des forces considérées dans la Statique.

Si l'on désigne généralement ces forces par les grandeurs finies P, P',..., proportionnelles aux translations virtuelles qu'elles tendent à imprimer, l'équation de leur équilibre sera

$$\Sigma \mathrm{PD} \sin \nu = 0;$$

le terme général PD sin ν exprime le *moment* statique de la force P, relatif à l'axe fixe, et est égal au produit de la distance du point d'application de cette force à l'axe fixe, multipliée par la composante de cette force orthogonale à ce même axe.

On comprend nettement par cette signification du produit PD sin ν, ce qu'il faut entendre en Statique par les *moments* qui tendent à faire tourner dans un sens ou dans un autre, ces *moments*, à un dénominateur commun près, n'étant autre chose que les composantes orthogonales des forces données, par rapport à l'axe de rotation, appliquées à une même distance de cet axe.

Les conditions de l'équilibre des forces appliquées à un système solide, que la considération secondaire, bien qu'admirablement ingénieuse, des *couples*, réduit en termes finis à deux conditions, sont donc comprises dans une seule loi, également exprimée en termes finis, qui consiste en ce que la somme des *moments* ou des forces du système soit nulle par rapport à un axe quelconque.

Cette loi est générale et s'applique, ainsi que celle du principe des vitesses virtuelles, qui n'en est que la transformation *infinitésimale*, à l'équilibre de tout système invariable ou non, pourvu que les conditions de la liaison des points de ce système puissent être remplacées par l'introduction de forces qui permettent de regarder ces points comme entièrement libres, forces que l'analyse détermine et élimine ensuite des équations qui donnent l'équilibre de chaque point.

Au moyen de cette introduction, la loi d'équilibre d'un point engendre immédiatement celle d'un système solide; nous ne nous y arrêterons pas : nous remarquerons seulement que, dans ce cas particulier, les forces introduites étant deux à deux égales et de signes contraires, la somme des moments de toutes les forces appliquées à tous les points, qui doit être nulle pour l'équilibre, ne contient que ceux des forces données, et exprime ainsi, sous une forme identique, la loi de l'équilibre d'un point ou de plusieurs points entièrement libres, et celle d'un système invariable.

De l'équation des vitesses virtuelles.

Si la force P tend à faire varier la coordonnée p, le produit $P\delta p$ sera égal à $PD\theta \sin \nu$, $D\theta \sin \nu$ exprimant le *moment* de la rotation virtuelle θ, dans l'hypothèse d'un déplacement infiniment petit quelconque du système, qui produirait dans les coordonnées de ce système des variations caractérisées par le signe δ.

En effet, ce déplacement infiniment petit se réduisant forcément à une ou à deux rotations successives, doit *virtuellement* n'être considéré que dans sa première ou son unique rotation, et dès-lors l'arc infiniment petit décrit par le point d'application de la force P, projeté sur la direction de cette force, se trouve égal à la variation même de la coordonnée p, suivant laquelle agit cette force, ce qui donne

$$\delta p = \theta D \sin \nu, \quad P\delta p = \theta PD \sin \nu.$$

L'équation générale de l'équilibre de ces forces,

$$\Sigma PD \sin \nu = 0,$$

se transforme donc en celle-ci

$$\Sigma P\delta p = 0,$$

qui exprime que, *des forces étant en équilibre dans un système solide, si, par une cause quelconque, ce système vient à être dérangé infiniment peu de sa situation actuelle, la somme des forces multipliées par les espaces infiniment petits parcourus par les points de ce système* *dans la direction de ces forces respectives devra être nulle, et réciproquement, ce qui est l'énoncé du principe des vitesses virtuelles.*

Cette équation bien supérieure, algorithmiquement parlant, à la première, n'a pas au fond plus de généralité : mais elle exprime le plus simplement possible la loi de l'équilibre de tous les systèmes dans lesquels les conditions de liaison sont susceptibles d'être traduites par des équations linéaires entre les variations des coordonnées des divers points du système.

En effet, si ces conditions sont exprimées par des équations telles que

$$\delta L = 0, \quad \delta L' = 0, \quad \delta L'' = 0,$$

ou plus généralement par une seule équation telle que

$$\lambda \delta L + \lambda' \delta L' + \lambda'' \delta L'' \ldots = 0,$$

dans laquelle λ, λ', λ'', sont des multiplicateurs arbitraires, et qu'on désigne par X, Y, Z, les coefficients des variations δx, δy, δz, dans cette équation; par r une grandeur linéaire dont la direction serait (X, Y, Z); par R une force appliquée au point (x, y, z), dans la direction de cette droite qu'elle tendrait à faire varier, égale à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, on aura

$$\delta r = \frac{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

et semblablement pour $\delta r'$, $\delta r''$,..., etc., l'équation ci-dessus prendra la forme

$$R\delta r + R'\delta r' + R''\delta r'' \ldots = 0,$$

et les deux équations

$$\Sigma P\delta p = 0, \quad \Sigma P\delta p + R\delta r + R'\delta r' + R''\delta r'' \ldots = 0,$$

auront la même généralité, les variations étant *limitées* dans la première par les équations de conditions, et complétement *indépendantes* dans la seconde. Or, dans ce dernier cas, l'équation

$$\Sigma P\delta p + R\delta r + R'\delta r' + R''\delta r'' \ldots = 0,$$

exprime la condition d'équilibre de tous les points du système, dégagés de toute liaison, mais sollicités par les forces primitivement données P, P′, P″,..., et par d'autres forces R, R′, R″, qui ont *statiquement* remplacé les conditions de liaison supposées.

L'élimination de ces forces R, R′, R″, dans les équations particulières comprises dans l'équation précédente, fournira les équations définitives de l'équilibre des premières forces, telles qu'elles résultent de la liaison du système. Et réciproquement, si ces équations ont lieu, il y aura équilibre, car les forces R, R′, R″, se trouvent en même temps déterminées, et l'équation

$$\Sigma P\delta p + R\delta r + R'\delta r' + R''\delta r''\ldots = 0,$$

à variations indépendantes, établit l'immobilité de tous les points du système, par suite de l'action des forces données et de celles qui, *statiquement*, équivalent à la liaison donnée entre les divers points du système.

Quand le système que l'on considère est continu, les équations de condition renferment des intégrales définies qui représentent en quelque sorte un nombre infini de conditions linéaires entre les variations des coordonnées du système; les multiplicateurs arbitraires passent sous le signe de ces intégrales, dont il reste à obtenir les variations par un mode entièrement analytique et indépendant de toute considération statique. On y arrive aisément par la formule générale suivante

$$\delta S^n U dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n = S^n dx_1 dx_2 \ldots dx_n \left[\delta U + U\left(\frac{d\delta x_1}{dx_1} + \frac{d\delta x_2}{dx_2} \ldots + \frac{d\delta x_n}{dx_n}\right)\right],$$

U étant une fonction quelconque des variables indépendantes x_1, x_2, x_3,..., x_n, et le signe S^n désignant une intégrale définie multiple de l'ordre n.

5 décembre 1840.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Institut, professeur d'Analyse à l'École Polytechnique.

TOME CINQUIÈME.

ANNÉE 1840.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1840