

EIN BRIEF AN DIE FRONT

Lieber Serjoshal!

Ihr aus dem Lazarett gesandter Brief hat mich in dreifacher Hinsicht erfreut. Zunächst hat mir Ihre Bitte, Ihnen „irgendwelche mathematischen Perlen“ zu schicken, gezeigt, daß Sie tatsächlich gesund werden und nicht einfach als mutiger Kämpfer Ihre Freunde beruhigen möchten. Das war für mich die erste Freude.

Weiter haben Sie mir Anlaß gegeben, darüber nachzusinnen, warum in diesem Kriege gerade solche jungen Kämpfer wie Sie bei jeder kleinen Atempause mit aller Leidenschaft ihrer Lieblingsbeschäftigung nachgehen — der Beschäftigung, die sie noch vor dem Kriege pflegten und von der sie durch den Krieg fortgerissen wurden. Im vorigen Weltkrieg hat es das nicht gegeben. Damals empfand ein an die Front gekommener junger Mann fast immer, daß sein Leben einen Umbruch erlitten habe, daß alles, was früher sein Lebensinhalt gewesen war, für ihn ein unerfüllbares Märchen geworden sei. Jetzt gibt es dagegen solche, die in den Pausen zwischen den Kämpfen Dissertationen schreiben und sie bei der Rückkehr zu einem kurzen Urlaub verteidigen! Ist es nicht vielleicht deshalb, weil Sie mit dem ganzen Wesen Ihre Leistungen im Kriege und Ihre geliebte Arbeit — die Wissenschaft, die Kunst, die praktische Tätigkeit — als zwei Glieder ein und derselben großen Sache empfinden? Und wenn dem so ist, ist nicht vielleicht dieses Empfinden eine der Haupttriebfedern Eurer Siege, die wir hier im Hinterlande so bewundern? Dieser Gedanke hat mich sehr erfreut, und das war meine zweite Freude.

Und da fing ich an, darüber nachzudenken, was ich Ihnen etwa senden könnte. Ich kenne Sie nicht sehr genau — nur ein Jahr haben Sie meine Vorlesungen gehört. Dennoch ist bei mir die feste Überzeugung von Ihrer tiefen und ernsten Einstellung zur Wissenschaft geblieben, und daher wollte ich Ihnen nicht irgendwelche „Klappern“ schicken, die äußerlich effektiv, aber wissenschaftlich wenig inhaltsreich sind. Andererseits wußte ich, daß Ihre Vorkenntnisse nicht sehr groß sind — nur ein Jahr haben Sie auf der Universitätsbank verbracht, und während der drei Jahre des ununterbrochenen Aufenthalts an der Front werden Sie kaum die Zeit zum Studium gehabt haben. Nach mehrtägigem Überlegen habe ich eine Wahl getroffen. Ob sie glücklich ist oder

nicht, müssen Sie schon selbst beurteilen. Was mich anbetrifft, so halte ich die drei Sätze der Arithmetik, die ich Ihnen sende, für echte Perlen unserer Wissenschaft.

In der Arithmetik, diesem ältesten, aber ewig jungen Zweig der Mathematik, erwachsen von Zeit zu Zeit bemerkenswerte, eigenartige Aufgaben. Ihrem Inhalt nach sind sie so elementar, daß sie jeder Schüler verstehen kann; es handelt sich gewöhnlich um den Beweis irgendeines sehr einfachen, in der Welt der Zahlen herrschenden Gesetzes, eines Gesetzes, das sich in allen nachgeprüften Spezialfällen als richtig erweist. Es soll nun bewiesen werden, daß es tatsächlich *immer* richtig ist. Und doch, trotz der scheinbaren Einfachheit der Aufgabe hält ihre Lösung jahrelang, bisweilen jahrhundertlang den Bemühungen der bedeutendsten Gelehrten des Zeitalters stand. Sie werden zugeben, daß das außerordentlich verlockend ist.

Ich habe für Sie drei solche Aufgaben ausgesucht. Sie sind alle in jüngster Zeit gelöst worden, und in ihrem Schicksalslauf gibt es zwei bemerkenswerte gemeinsame Züge. Erstens sind alle drei Aufgaben nach den elementarsten arithmetischen Methoden gelöst worden (man soll nur nicht „elementar“ mit „einfach“ verwechseln; die Lösungen aller drei Aufgaben sind, wie Sie sehen werden, nicht sehr einfach, und Sie werden nicht wenig Mühe aufwenden müssen, um sie gut zu verstehen und sich anzueignen). Zweitens sind alle drei Aufgaben nach einer Reihe erfolgloser Angriffe seitens der „ehrwürdigen“ Gelehrten von ganz jungen, werdenden Mathematikern — Jünglingen von kaum Ihrem Alter — gelöst worden. Nicht wahr, welch ein vielversprechender Ansporn für künftige Gelehrte Ihrer Art, welch ein verheißungsvoller Ruf zum wissenschaftlichen Wagen!

Die Arbeit an der Darlegung dieser Sätze hat mich veranlaßt, tiefer in die Struktur ihrer wunderbaren Beweise einzudringen und hat mir eine große Freude bereitet.

Das war meine dritte Freude.

Ich wünsche Ihnen die besten Erfolge — im Kampf und in der Wissenschaft.

Ihr

A. Chintschin

Den 24. März 1945

Kapitel I

DER SATZ VON VAN DER WAERDEN ÜBER ARITHMETISCHE PROGRESSIONEN

§ 1

Im Sommer 1928 habe ich einige Wochen in Göttingen verbracht. Wie gewöhnlich waren dort zum Sommersemester viele ausländische Gelehrte eingetroffen. Viele von ihnen habe ich kennengelernt, mit einigen mich sogar befreundet. Das Tagesgespräch zur Zeit meiner Ankunft war das glänzende Resultat eines jungen Holländers, *van der Waerden*, der damals noch ein jugendlicher Anfänger war, jetzt aber zu den bekanntesten Gelehrten zählt. Dieses Resultat war eben hier in Göttingen gewonnen worden, und zwar nur einige Tage vor meiner Ankunft. Fast alle Mathematiker, die ich getroffen habe, erzählten mir mit Begeisterung davon.

Das Problem hatte folgende Vorgeschichte. Einer von den dortigen Mathematikern (seines Namens entsinne ich mich nicht) war im Laufe seiner wissenschaftlichen Arbeit auf das folgende Problem gestoßen: Stellen Sie sich vor, die Menge aller natürlichen Zahlen sei auf irgendeine beliebige Weise in zwei Teile zerlegt (z. B. in gerade und ungerade Zahlen, oder in Prim- und zusammengesetzte Zahlen, oder auf eine beliebige andere Weise). Kann man dann behaupten, daß sich mindestens in einem dieser Teile arithmetische Progressionen von beliebiger Länge angeben lassen (unter der Länge einer arithmetischen Progression werde ich hier und im folgenden einfach die Anzahl ihrer Glieder verstehen)? Alle, denen diese Frage vorgelegt wurde, hielten die Aufgabe auf den ersten Blick für ganz einfach, ihre positive Lösung schien beinahe selbstverständlich zu sein. Jedoch die ersten Versuche ihrer Bewältigung hatten zu nichts geführt. Und da die Göttinger Mathematiker und ihre ausländischen Gäste traditionsgemäß in ständiger Verbindung miteinander standen, wurde dieses durch seinen Widerstand reizvolle Problem bald zum Gegenstand des allgemeinen mathematischen Interesses. Alle hatten es in Angriff genommen, vom ehrwürdigen Gelehrten bis zum jungen Studenten. Nach einigen Wochen angespannter Bemühungen wurde die Aufgabe schließlich von einem zum Studium nach Göttingen gekommenen jungen Mann, dem Holländer *van der Waerden*, gelöst. Ich habe seine Bekanntschaft gemacht und von ihm selbst die Lösung der Aufgabe erfahren; sie war elementar, aber bei weitem nicht einfach. Die Aufgabe hat sich als tieflegend erwiesen, der Augenschein der Einfachheit war trügerisch.

Ganz kürzlich sandte mir *M. A. Lukomskaja* (Minsk) einen von ihr gefundenen, bedeutend einfacheren und durchsichtigeren Beweis des Satzes von *van der Waerden*, den ich — mit der freundlichen Erlaubnis der Verfasserin — Ihnen im folgenden darstelle.

§ 2

Eigentlich hat *van der Waerden* etwas mehr bewiesen, als gefordert war. Erstens setzt er voraus, daß die natürlichen Zahlen nicht in zwei, sondern in beliebig viele, etwa k Klassen (Mengen) zerlegt sind; zweitens ist es, wie sich herausgestellt hat, nicht erforderlich, die gesamte natürliche Zahlenreihe zu zerlegen, um das Vorhandensein einer arithmetischen Progression von vorgegebener (beliebig großer) Länge l in mindestens einer dieser Klassen zu verbürgen. Es genügt zu diesem Zweck, lediglich einen gewissen Abschnitt von ihr vorzunehmen. Die Länge dieses Abschnitts $n(k, l)$ ist eine Funktion der Zahlen k und l . Selbstverständlich ist es gleichgültig, wo wir diesen Abschnitt annehmen, es müssen lediglich $n(k, l)$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sein.

Somit läßt sich der Satz von *van der Waerden* folgendermaßen formulieren:

Es seien k und l zwei beliebige natürliche Zahlen. Dann existiert eine natürliche Zahl $n(k, l)$ derart, daß sich bei jeder Zerlegung eines beliebigen Abschnitts der Reihe der natürlichen Zahlen von der Länge $n(k, l)$ in k Klassen (unter denen auch leere sein können) mindestens in einer dieser Klassen eine arithmetische Progression von der Länge l angeben läßt.

Offenbar ist dieser Satz für $l = 2$ richtig. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, $n(k, 2) = k + 1$ zu setzen; denn bei der Zerlegung von $k + 1$ Zahlen in k Klassen wird tatsächlich mindestens eine dieser Klassen mehr als eine Zahl enthalten, und ein beliebiges Zahlenpaar bildet eine arithmetische Progression von der Länge 2, womit der Satz bewiesen ist. Wir werden den Satz durch vollständige Induktion nach l beweisen. Somit werden wir in allem folgenden voraussetzen, daß der Satz für irgendeine Zahl $l \geq 2$ und für beliebige Werte von k bereits feststeht, und zeigen, daß er dann auch für die Zahl $l + 1$ (und natürlich auch für alle Werte von k) seine Gültigkeit behält.

§ 3

Für jede natürliche Zahl k gibt es also nach unserer Voraussetzung eine natürliche Zahl $n(k, l)$ mit folgender Eigenschaft:

Bei jeder Zerlegung eines beliebigen Abschnitts der natürlichen Zahlenreihe von der Länge $n(k, l)$ in k Klassen existiert in mindestens einer dieser Klassen eine arithmetische Progression von der Länge l .

Wir müssen dann beweisen, daß für jede natürliche Zahl k auch ein $n(k, l+1)$ existiert. Diese Aufgabe lösen wir durch direkte Konstruktion der Zahl $n(k, l+1)$. Dazu setzen wir

$$q_0 = 1, \quad n_0 = n(k, l)$$

und definieren dann nacheinander die Zahlen $q_1, q_2, \dots; n_1, n_2, \dots$, wie folgt. Wenn für irgendein $s > 0$ schon q_{s-1} und n_{s-1} definiert sind, so setzen wir

$$(1) \quad q_s = 2 n_{s-1} q_{s-1}, \quad n_s = n(k^{q_s}, l) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Dadurch sind offensichtlich die Zahlen n_s, q_s für beliebiges $s \geq 0$ definiert. Wir behaupten nun, daß man für $n(k, l+1)$ die Zahl q_k nehmen kann. Wir müssen also zeigen, daß bei einer beliebigen Zerlegung eines Abschnitts der natürlichen Zahlenreihe von der Länge q_k in k Klassen in mindestens einer dieser Klassen eine arithmetische Progression der Länge $l+1$ existiert. Diesem Beweis ist das ganze übrige Kapitel gewidmet.

In allem folgenden setzen wir abkürzend $l+1 = l'$.

§ 4

Sei also der Abschnitt Δ der natürlichen Zahlenreihe von der Länge q_k in beliebiger Weise in k Klassen zerlegt. Zwei Zahlen a und b aus Δ nennen wir von gleichem Typ, wenn a und b derselben Klasse angehören; wir schreiben dann $a \sim b$. Zwei gleichlange Teilabschnitte $\delta = (a, a+1, \dots, a+r)$ und $\bar{\delta} = (\bar{a}, \bar{a}+1, \dots, \bar{a}+r)$ von Δ nennen wir von gleichem Typ, wenn $a \sim \bar{a}$, $a+1 \sim \bar{a}+1$, ..., $a+r \sim \bar{a}+r$ gilt; wir schreiben dann $\delta \sim \bar{\delta}$. Offenbar ist die Anzahl der verschiedenen möglichen Typen für die Zahlen des Abschnitts Δ gleich k ; für Abschnitte der Form $(a, a+1)$ (d. h. für Abschnitte der Länge 2) ist die Anzahl der möglichen Typen gleich k^2 und allgemein für Abschnitte der Länge m gleich k^m . (Selbstverständlich brauchen nicht alle diese Typen im Abschnitt Δ wirklich vorzukommen.)

Wegen $q_k = 2 n_{k-1} q_{k-1}$ (siehe (1)) kann man den Abschnitt Δ als Folge von $2 n_{k-1}$ Abschnitten der Länge q_{k-1} ansehen. Solche Abschnitte können, wie wir soeben gesehen haben, $k^{q_{k-1}}$ verschiedene Typen haben. Die linke Hälfte des Abschnitts Δ enthält nun n_{k-1} solche Abschnitte, wobei nach (1) $n_{k-1} = n(k^{q_{k-1}}, l)$ ist. Wir können also wegen der Bedeutung der Zahl $n(k^{q_{k-1}}, l)$ behaupten, daß die linke Hälfte des Abschnitts Δ eine arithmetische Progression von l Abschnitten gleichen Typs

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$$

der Länge q_{k-1} enthält. Hierbei sagen wir abkürzend, daß gleichlange Abschnitte Δ_i eine arithmetische Progression bilden, wenn ihre ersten Zahlen eine solche Progression bilden. „Differenz“ d_1 der Progression $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ nennen wir die Differenz der ersten Zahlen zweier benachbarter Abschnitte dieser Progression. Selbstverständlich ist die Differenz der zweiten (oder dritten, vierten usw.) Zahlen zweier solcher benachbarter Abschnitte ebenfalls gleich d_1 .

Zu dieser Progression von Abschnitten fügen wir nun noch das darauf folgende, $(l+1)$ -te Glied $\Delta_{l'}$ hinzu — wir erinnern daran, daß $l' = l+1$ ist —, das u. U. schon über den Rand der linken Hälfte des Abschnitts Δ hinausragt, aber auf jeden Fall noch vollständig zum Abschnitt Δ selbst gehört. Dann bilden die Abschnitte $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l, \Delta_{l'}$ eine arithmetische Progression von der Länge $l' = l+1$ und der Differenz d_1 aus Abschnitten der Länge q_{k-1} , wobei $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ von gleichem Typ sind. Über den Typ des letzten Abschnitts $\Delta_{l'}$ wissen wir nichts.

Damit ist der erste Schritt unserer Konstruktion beendet. Es wäre gut, wenn Sie ihn sich noch einmal überlegten, bevor wir weitergehen.

§ 5

Wir gehen nun zum zweiten Schritt über. Wir nehmen ein beliebiges der ersten l Glieder der soeben konstruierten Progression von Abschnitten. Dieses sei Δ_{i_1} , so daß also $1 \leq i_1 \leq l$ und Δ_{i_1} ein Abschnitt der Länge q_{k-1} ist. Bei ihm gehen wir genau so vor wie beim Abschnitt Δ . Wegen $q_{k-1} = 2^{n_{k-2}} q_{k-2}$ kann man die linke Hälfte des Abschnitts Δ_{i_1} als Folge von n_{k-2} Abschnitten der Länge q_{k-2} ansehen. Für Abschnitte dieser Länge sind aber $k^{q_{k-2}}$ verschiedene Typen möglich, und andererseits ist wegen (1) $n_{k-2} = n(k^{q_{k-2}}, l)$. Deshalb muß die linke Hälfte von Δ_{i_1} eine Progression aus l Abschnitten gleichen Typs $\Delta_{i_1 i_2}$ ($1 \leq i_2 \leq l$) der Länge q_{k-2} enthalten. Die Differenz dieser Progression (d. h. der Abstand zwischen den ersten Zahlen zweier benachbarter Abschnitte) sei gleich d_2 . Zu dieser Progression von Abschnitten fügen wir noch das $(l+1)$ -te Glied $\Delta_{i_1 l'}$ hinzu, über dessen Typ wir allerdings nichts wissen. Der Abschnitt $\Delta_{i_1 l'}$ braucht nicht mehr zur linken Hälfte des Abschnitts Δ_{i_1} zu gehören, muß aber offensichtlich dem Abschnitt Δ_{i_1} selbst angehören.

Unsere Konstruktion, die wir bisher nur in einem der Abschnitte Δ_{i_1} durchgeführt haben, übertragen wir nun ganz analog auf alle anderen Abschnitte Δ_{i_1} ($1 \leq i_1 \leq l'$). So erhalten wir eine Menge von Abschnitten $\Delta_{i_1 i_2}$ ($1 \leq i_1 \leq l', 1 \leq i_2 \leq l'$) mit schon zwei Indizes. Dabei sind offensichtlich zwei beliebige Abschnitte dieser Menge mit Indizes $\leq l$ von gleichem Typ:

$$\Delta_{i_1 i_2} \sim \Delta_{j_1 j_2} \quad (1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq l).$$

Zweifelloos ist Ihnen nun schon klar, daß wir diesen Prozeß weiter fortsetzen können. Wir führen ihn k -mal durch. Die Ergebnisse der Konstruktion waren bei unserem ersten Schritt Abschnitte der Länge q_{k-1} , beim zweiten solche der Länge q_{k-2} usw. Nach dem k -ten Schritt sind somit die Ergebnisse der Konstruktion Abschnitte der Länge $q_0 = 1$, d. h. einfach Zahlen unseres ursprünglichen Abschnitts Δ . Nichtsdestoweniger bezeichnen wir sie wie früher mit

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq l').$$

Dabei gilt für $1 \leq s \leq k$ und $1 \leq i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \leq l$

$$(2) \quad \Delta_{i_1 i_2 \dots i_s} \sim \Delta_{j_1 j_2 \dots j_s}.$$

Wir machen jetzt zwei für das Folgende wichtige Bemerkungen.

1. Wenn in (2) $s < k$ ist und wenn $i_{s+1}, i_{s+2}, \dots, i_k$ beliebige Indizes aus der Reihe $1, 2, \dots, l, l'$ sind, so steht die Zahl $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{s+1} \dots i_k}$ im Abschnitt $\Delta_{i_1 \dots i_s}$ an derselben Stelle wie die Zahl $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_s i_{s+1} \dots i_k}$ im Abschnitt $\Delta_{j_1 \dots j_s}$. Da diese zwei Abschnitte wegen (2) von gleichem Typ sind, folgt somit

$$(3) \quad \Delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_k} \sim \Delta_{j_1 j_2 \dots j_s i_{s+1} \dots i_k},$$

wenn $1 \leq i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \leq l$ und $1 \leq i_{s+1}, i_{s+2}, \dots, i_k \leq l'$ ($1 \leq s \leq k$).

2. Bei $s \leq k$, $i'_s = i_s + 1$ sind $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s}$ und $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s}$ offensichtlich benachbarte Abschnitte beim s -ten Schritt unserer Konstruktion. Bei beliebigen Indizes $i_{s+1}, \dots, i_k$ stehen deshalb die Zahlen $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_k}$ und $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \dots i_k}$ in zwei solchen benachbarten Abschnitten an derselben Stelle, so daß

$$(4) \quad \Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \dots i_k} - \Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_k} = d_s$$

ist.

§ 6

Nunmehr sind wir dicht am Ziel. Wir betrachten die folgenden $k+1$ Zahlen des Abschnitts Δ :

$$(5) \quad \begin{cases} a_0 = \Delta_{r' r' \dots r'} \\ a_1 = \Delta_{1 r' r' \dots r'} \\ a_2 = \Delta_{1 1 r' \dots r'} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_k = \Delta_{1 1 1 \dots 1} \end{cases}$$

Da der Abschnitt Δ in k Klassen zerlegt ist, wir jedoch in (5) $k+1$ Zahlen haben, so gibt es unter diesen Zahlen zwei, die derselben Klasse angehören. Es seien dies die Zahlen a_r und a_s ($r < s$), also

$$(6) \quad \underbrace{\Delta_{1 \dots 1}}_r \underbrace{l' \dots l'}_{k-r} \sim \underbrace{\Delta_{1 \dots 1}}_s \underbrace{l' \dots l'}_{k-s}.$$

Wir betrachten die $l+1$ Zahlen

$$(7) \quad c_i = \underbrace{\Delta_{1 \dots 1}}_r \underbrace{i \dots i}_{s-r} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s} \quad (1 \leq i \leq l').$$

Die ersten l Zahlen dieser Gruppe (d. h. diejenigen mit $i < l'$) gehören wegen (3) derselben Klasse an. Die letzte aber ($i = l'$) ist wegen (6) vom selben Typ wie die erste. Somit sind alle $l+1$ Zahlen (7) von gleichem Typ, und zum Beweis unserer Behauptung bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Zahlen eine arithmetische Progression bilden, d. h. daß die Differenz $c_{i+1} - c_i$ ($1 \leq i \leq l$) nicht von i abhängt.

Wir setzen abkürzend $i+1 = i'$. Ferner sei

$$c_{i,m} = \underbrace{\Delta_{1 \dots 1}}_r \underbrace{i' \dots i'}_m \underbrace{i \dots i}_{s-r-m} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s} \quad (0 \leq m \leq s-r),$$

also $c_{i,0} = c_i$, $c_{i,s-r} = c_{i+1}$ und folglich

$$c_{i+1} - c_i = \sum_{m=0}^{s-r} (c_{i,m} - c_{i,m-1}).$$

Wegen (4) gilt aber

$$c_{i,m} - c_{i,m-1} = \underbrace{\Delta_{1 \dots 1}}_r \underbrace{i' \dots i'}_m \underbrace{i \dots i}_{s-r-m} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s} - \underbrace{\Delta_{1 \dots 1}}_r \underbrace{i' \dots i'}_{m-1} \underbrace{i \dots i}_{s-r-m+1} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s} = d_{r+m}.$$

Also ist die Differenz

$$c_{i+1} - c_i = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_s$$

und hängt in der Tat nicht von i ab, womit der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht ist.

Sie sehen, wie kompliziert bisweilen ein vollkommen elementarer Aufbau sein kann. Das ist dennoch nicht das Äußerste; im nächsten Kapitel werden Sie einem ebenso elementaren Aufbau begegnen, der noch bedeutend komplizierter sein wird. Es ist übrigens nicht ausgeschlossen, daß der Satz von *van der Waerden* einen noch einfacheren Beweis zuläßt, und alles Suchen in dieser Richtung kann nur begrüßt werden.

A. J. CHINTSCHIN

Drei Perlen
der Zahlentheorie

Mit einem Vorwort zur Reprintausgabe
von
Helmut Koch

Reprint
1984

VERLAG HARRI DEUTSCH
Thun · Frankfurt/Main

DREI PERLEN
DER ZAHLENTHEORIE

VON

A. J. CHINTSCHIN

Herausgegeben vom Forschungsinstitut für Mathematik
der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

1 9 5 1

AKADEMIE-VERLAG BERLIN