

A N S C H A U L I C H E

A D D I T I V E Z A H L E N T H E O R I E

OLIVER KNILL

Meinem ehemaligen Mathematiklehrer

Dr. Roland Stärk gewidmet.

Wieviele Möglichkeiten hat man, einen bestimmten Geldbetrag mit den in der Schweiz üblichen Münz- und Noteneinheiten auszus zahlen?

Das war die Frage, die mich zuerst beschäftigte. Um sie zu beantworten, musste ich weiter ausholen:

Auf wieviele Arten kann eine natürliche Zahl in natürliche Summanden zerlegt werden, wenn die Auswahl der Summanden, deren Anzahl und deren Anordnung vorgeschrieben sein kann?

Um die Zerlegungen der Zahl plastischer darstellen zu können, benützte ich das Cuisenaire-Material, verschieden lange Stäbchen mit charakteristischen Farben für jede Länge, die ich in meinem ersten Schuljahr benutzt hatte.

Das zweite unentbehrliche Hilfsmittel war der Computer, welcher Untersuchungen an umfangreichem Zahlenmaterial ermöglichte.

Damit ich Resultate vernünftig formulieren konnte, wählte ich Bezeichnungen, welche allen Fragestellungen gerecht werden sollten.

Es blieb nicht beim Beantworten des oben formulierten Geldwechselproblems. Viele interessante Fragestellungen tauchten auf.

Zwei Beispiele: Wieviele Dreiecke mit Umfang n und ganzzahligen Seiten können gebildet werden? Es zeigte sich, dass das Resultat gewisse Beziehungen zu einer Art diophantischer Gleichungen hatte, die ich speziell noch untersuchte. Das zweite Beispiel: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Kartenspiel Black-Jack (auch 17+4 genannt) genau die Summe 21 zu erhalten, wenn auf äusserstes Risiko gespielt wird? Hier lernte ich Wahrscheinlichkeitsprobleme von ganz anderer Sorte kennen. Auch die Kombinatorik präsentierte sich einem ungewohnten Hintergrund.

In meiner Arbeit legte ich grossen Wert auf Anschaulichkeit. Die meisten der etwa 80 gefundenen Sätze konnten mit Hilfe der Cuisenaire-Stäbchen bewiesen werden.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
KAPITEL I GRUNDLAGEN	
§ 1 Einleitung	5
§ 2 Problemstellung	6
§ 3 Darstellung	7
§ 4 Arbeitsweise	8
§ 5 Arbeitsmaterial	8
§ 6 Ziele	9
§ 7 Bezeichnungen	10
KAPITEL II FORSCHUNGEN	
§ 1 Der Zerlegungskomplex (Z/Y) " $p^*(n)$ "	16
1. " $p^*(n)$ " $(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)$	16
2. " $p^*(n)$ " $(Z/)$	17
Diophantische Gleichung	18
3. " $p^*(n)$ " $(G/)$	19
Geldwechselproblem mit Anordnen	22
Münzenwerfen	25
Allgemeines Problem	26
Eile mit Weile	27
Black-Jack	28
4. " $p^*(n)$ " $(/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)$	29
5. " $p^*(n)$ " $(/Y)$	33
6. $ f \downarrow p^*(n)$ $(Z/)$	35
7. $ f \downarrow p^*(n)$	37
8. $ f \downarrow p^*(n)$ $(G/)$	38
9. $ f \downarrow p^*(n)$ $(/e)$	40
10. $ f \downarrow p^*(n)$ $(/y)$	41
11. " $p^*(n)$ " $(z/)$ $(G/)$	42
12. $ f \downarrow p^*(n)$ $(z/)$ $(G/)$	45
13. " $p^*(n)$ " $(z/)$ (G/e)	47

	Seite
§ 2 Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} (Z/Y) \\ "p(n)" \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$	48
1. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$	48
2. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (G/) \end{matrix}$ Teil I	49
Geldwechselproblem	50
Wichtige zahlentheoretische Probleme	52
3. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$	54
4. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (/e) \end{matrix}$	55
Diophantisches Problem allgemeiner	56
$(Z/)$	
5. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (z/) \end{matrix}$	61
6. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$	67
$(z/)$	
7. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (/e) \end{matrix}$	68
Dreiecke mit ganzzahligen Seiten	69
Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten.	71
Neue Fragestellungen	73
$(/Y)$	
8. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (z/y) \end{matrix}$	74
9. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (z/y) \end{matrix}$	75
10. $ f \downarrow p(n)$	76
11. $\begin{matrix} f \downarrow p(n) \\ (G/) \end{matrix}$	78
$(z/)$	
12. $ f \downarrow p(n)$	80
13. $\begin{matrix} f \downarrow p(n) \\ (/e) \end{matrix}$	81
$(Z/)$	
14. $\begin{matrix} f \downarrow p(n) \\ (G/e) \end{matrix}$	82
15. $"p(n)"$	83
16. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (G/) \end{matrix}$ Teil II	87
$(z/)$	
17. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (G/) \end{matrix}$	88
$(z/)$	
18. $\begin{matrix} "p(n)" \\ (G/e) \end{matrix}$	88
$(z/)$	
19. $\begin{matrix} f \downarrow p(n) \\ (G/) \end{matrix}$	89

	(Z/Y)	Seite
§ 3 Der Zerlegungskomplex	" $\bar{p}(n)$ "	90
1.	" $\bar{p}(n)$ " (G/E)	90
2.	" $\bar{p}(n)$ " (z/)	91
3.	" $\bar{p}(n)$ " (/E)	94
4.	" $\bar{p}(n)$ " (/Y)	96
5.	" $\bar{p}(n)$ " (f ↓p)(z/)	96
6.	" $\bar{p}(n)$ " (/ē)	97
7.	" $\bar{p}(n)$ " (G/)	98
8.	" $\bar{p}(n)$ " (G/e)	100
9.	" $\bar{p}(n)$ " (f ↓p)(G/e)	100
10.	" $\bar{p}(n)$ " (z/)	101
11.	" $\bar{p}(n)$ " (G/e)	101
§ 4 Der Zerlegungskomplex	" $\bar{p}^*(n)$ "	102
1.	" $\bar{p}^*(n)$ " (z/)	102
2.	" $\bar{p}^*(n)$ " (G/E)	102
3.	" $\bar{p}^*(n)$ " (z/)	102
	Kombinatorik	103
§ 5 Der Zerlegungskomplex	" $\hat{p}(n)$ "	104
1.	" $\hat{p}(n)$ " (G/E)	104
2.	" $\hat{p}(n)$ " (G/)	107

	Seite
KAPITEL III NEUE HORIZONTE	
§ 1 Stammbrüche	109
1. Der Zerlegungskomplex " $p^{(2/)}(n)$ "	110
§ 2 Eine Dimension weiter	112
§ 3 Würfel in Würfel in...	114
KAPITEL IV ANHANG	
§ 1 Tabellen (Z/Y)	117
1 . $p^*(n)$ $(G/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$	117
2 . (Z/Y) $p(n)$ $(G/e, e, e, \dots, e_m)$	125
3 . (Z/Y) $\bar{p}(n)$ (G/E)	131
§ 2 Zerlegungskomplexe	133
1 . " $p^*(n)$ "	133
2 . " $p(n)$ "	135
3 . " $\bar{p}(n)$ "	143
4 . " $\hat{p}(n)$ "	144
§ 3 Diskussion der Ergebnisse	145
§ 4 Formelsammlung	146
§ 5 Zusammenstellung der Bezeichnungen	154

§ 1 EINLEITUNG

Wieviele Möglichkeiten gibt es eigentlich, zehn Franken zu bezahlen? Man könnte die Schuld mit einer Zehnernote begleichen, man könnte aber auch ein Fünffrankenstück, zwei Zweifränkler und einen Einfränkler auf den Ladentisch legen. Das sind aber nur zwei von über Hunderttausend Möglichkeiten.

Wenn man sich näher mit diesem scheinbar einfachen kombinatorischen Problem beschäftigt, schlittert man direkt in ein reichhaltiges und fruchtbares Spezialgebiet der Mathematik hinein, in die additive Zahlentheorie, welche gleichsam Freunde der Kombinatorik, der Zahlentheorie und der Geometrie in den Bann ziehen kann.

Leider hört man in der Mittelschule noch wenig von den fesselnden Problemstellungen dieses Sektors der Mathematik, so dass man beim Einsteigen auf sich selbst angewiesen ist. Zum Glück braucht man aber zu Beginn praktisch keine Vorkenntnisse. Die Materie eignet sich vorzüglich für empirische Untersuchungen an Zahlenmaterial, welches am besten mit Computern erhalten werden kann.

Es ist klar, dass man als Neuling keine Pionierleistungen erbringen kann, sind doch schon Hunderte von Büchern zu diesem Thema geschrieben worden, welche von Anfängern, so auch von mir, nicht verstanden werden, da Kenntnisse vorausgesetzt werden, die über denen eines Mittelschülers liegen. So soll der Schwerpunkt dieser Arbeit auf "anschaulich" liegen, wie auch aus dem Titel hervorgeht.

KAPITEL I

GRUNDLAGEN

§ 2 PROBLEMSTELLUNG

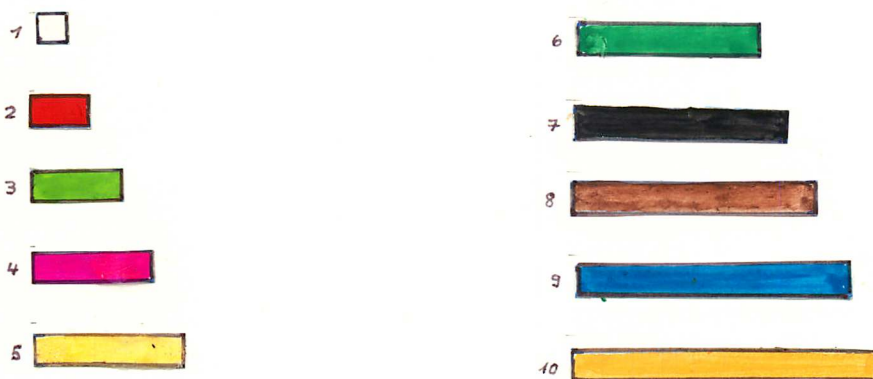
Auf wieviele Arten kann eine natürliche Zahl in Summanden, die auch natürlich sind, zerlegt werden, wenn

- die Reihenfolge der Summanden unwichtig ist.
- die Reihenfolge der Summanden berücksichtigt wird.
- die Anzahl Elemente pro Zerlegung vorgeschrieben ist.
- die Anzahl verschiedener Elemente pro Zerlegung vorgeschrieben ist.
- die Elemente, die zur Auswahl stehen, vorgegeben sind.
- die Elemente, die in jeder Zerlegung vorkommen müssen, vorgeschrieben sind.
- die Elemente pro Zerlegung verschieden sein müssen.
- die Elemente in jeder Zerlegung eine vorgeschriebene Folge bilden müssen.

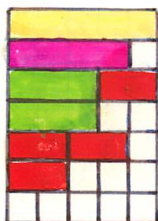
Die Bedingungen müssen natürlich nicht alle auf einmal erfüllt werden, teilweise schliessen sie^{sich} ja sogar aus.

§ 3 DARSTELLUNG

Um die Zerlegungen plastischer darstellen zu können, war mir das "Cuisenaire-Material" für den Mathematikunterricht in der Primarschule eine grosse Hilfe. Jede Zahl wird durch ein Stäbchen repräsentiert, wobei sich die Stäbchen in Länge und Farbe unterscheiden.



Mit diesem Hilfsmittel lassen sich nun Zerlegungen anschaulich darstellen. Die möglichen Zerlegungen werden nun untereinander aufgereiht, so dass ein Block entsteht, der leichter zu untersuchen ist.



Im "Cuisenaire-Material" sind nur Stäbchen der Längen 1-10 enthalten. Stäbchen mit grösseren Längen färben wir mit der Farbe, die zum Rest der Division Länge/10 gehört. Stäbchen, deren Längen kongruent mod 10 sind, haben also dieselbe Farbe.

§ 4 ARBEITSWEISE

Mit Hilfe der Zerlegungsblöcke aus den Cuisenaire-Stäbchen, mit Computerlistings oder mit Tabellen konnten empirisch Hypothesen aufgebaut werden, welche wenn möglich zu beweisen versucht wurden.

§ 5 ARBEITSMATERIAL

- Cuisenaire- Material
(Literatur: Madelaine Goulard: "Mathematik und Kinder"
Edition Delachaux et Niestlé, Neuchatêl)
- Computer:
 - TI 59 und Drucker
 - Olivetti 6040 Tischrechner
 - EG 3003 "Genie I" Microcomputer
- Lexikon: "Kleine Enzyklopädie Mathematik", Harri Deutsch 1977
- Formelsammlung: "Schülkes Tafeln", B.G Teubner Stuttgart 1980

§ 6 ZIELE

Ich hoffe:

- Ordnung in die Fragestellungen zu bringen.
- Geeignete Bezeichnungen zu finden.
- Eine klare verständliche Darstellung zu haben.
- Antworten auf die Fragestellungen in § 2 zu geben.
- Aufklärung über die Schwierigkeiten nachher noch ungelöster Probleme zu erhalten.
- Zusammenhänge mit andern Teilgebieten der Mathematik zu sehen.
- Neue Fragestellungen zu eröffnen.

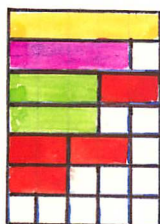
§ 7 BEZEICHNUNGEN

So weit es mir möglich ist, übernehme ich geläufige Schreibweisen.

Statt nun aber für jede Fragestellung eine neue Funktion einzuführen, halte ich es für besser, eine Funktion so auszubauen, dass sie für alle Fragestellungen tauglich ist.

Man kennt die Funktion $p(n)$, welche angibt, auf wieviele Arten sich die natürliche Zahl n in Summanden zerlegen lässt, wenn die Reihenfolge der Summanden unwichtig ist und sonst keine Einschränkungen gemacht werden.

Beispiel: $n=5$



Wir können 7 verschiedene Zerlegungen angeben.
Also ist $p(n)=7$.

Wir erweitern die Funktion nun so, dass wir oberhalb der Funktion Aussagen über die Anzahl Elemente und unterhalb der Funktion Aussagen über die Elemente selbst hinschreiben:

$$(z_1, z_2, z_3 \dots / y_1, y_2, y_3 \dots)$$

$$(g_1, g_2, g_3 \dots / e_1, e_2, e_3 \dots)$$

- Es sind ^{genau} $\forall z_1$ oder z_2 oder $z_3 \dots$ Elemente pro Zerlegung obligatorisch.
- Es sind ^{genau} $\forall y_1$ oder y_2 oder $y_3 \dots$ verschiedene Elemente pro Zerlegung obligatorisch.
- Es sind in allen Zerlegungen nur die Elemente g_1 oder g_2 oder $g_3 \dots$ möglich.
- Es sind in jeder Zerlegung die Elemente e_1 und e_2 und $e_3 \dots$ obligatorisch.

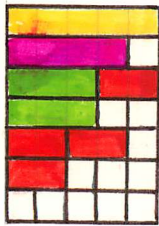
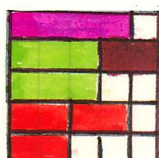
Die Menge der Zerlegungen, die die angegebenen Bedingungen erfüllen, nennen wir den Zerlegungskomplex

$$\begin{aligned} & "(z_1, z_2, z_3, \dots / y_1, y_2, y_3, \dots)" \\ & \quad p(n) \\ & "(g_1, g_2, g_3, \dots / e_1, e_2, e_3, \dots)" \end{aligned}$$

Wir schreiben den Zelegungskomplex in Anführungs- und Schlusszeichen, wenn wir den Komplex selbst meinen.

Die Summanden werden auch Elemente genannt. Eine Zerlegung heisst auch Partition.

Beispiele:

- "p(5)"  p(5)=7 Es werden keine Einschränkungen gemacht.
Die Summe der Elemente muss selbstverständlich 5 sein.
- "(3/)"
p(5)  (3/)
p(5)=2 Es gelten nur diejenigen Partitionen, welche 3 Elemente enthalten.
- "(/2)"
p(5)  (/2)
p(5)=5 Es gelten nur Partitionen mit 2 verschiedenen Elementen.
- "p(5)"
(1/)  p(5)=1 Es sind nur Elemente mit der Länge 1 erlaubt.
- "p(5)"
(/2)  p(5)=3 Es muss in jeder Zerlegung das Element 2 vorkommen.
- "(1,4,5/)"
p(5)  (1,4,5/)
p(5)=3 Jede Zerlegung muss entweder aus 1 oder 4 oder 5 Elementen bestehen.
- "(2,3/2)"
p(5)  (2,3/2)
(1,3,4/1,3) p(5)=1 Jede Zerlegung muss 2 oder 3 Elemente enthalten, muss aus 2 verschiedenen Elementen bestehen, darf nur Elemente mit den Längen 1 oder 3 oder 4 haben und muss die Summanden 1 und 3 enthalten.
- "(3/)"
p(5)  (3/)
(/4) p(5)=0 Es muss jede Zerlegung, die in Frage kommen soll, aus 3 Elementen bestehen und das Element 4 beinhalten. Eine solche Zerlegung mit der Länge 5 existiert gar nicht.

Wenn ein Element der grösste Summand der Zerlegung sein soll, so setzen wir einen Querbalken über die Zahl. Wenn es das kleinste Element ist, so schreiben wir den Querbalken unter die Zahl.

Wir könnten so definieren:

$$p\left(\frac{n}{\overline{x}}\right) = p(n)_{(x, x-1, x-2, \dots, 1/x)}$$

$$p\left(\frac{n}{\underline{x}}\right) = p(n)_{(x, x+1, x+2, \dots, n/x)}$$

denn im ersten Fall können nur Elemente vorkommen, die kleiner gleich x sind. Im letzteren Fall sind nur Elemente erlaubt, die grösser gleich x sind.

Beispiele:

" $p\left(\frac{5}{\overline{2}}\right)$ "  $p\left(\frac{5}{\overline{2}}\right) = 2$ 2 ist das grösste Element in jeder Zerlegung.

" $p\left(\frac{5}{\underline{2}}\right)$ "  $p\left(\frac{5}{\underline{2}}\right) = 1$ 2 ist das kleinste Element in jeder Zerlegung.

Anstatt die Elemente oder die möglichen Anzahl Elemente immer aufzuzählen, können wir sie auch als Mengen beschreiben.

Es gilt nämlich, wie man sich leicht überzeugt:

$$\begin{aligned} & "(z, z/) " "(z/) " \\ & p(n) = p(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & "(/y, y) " "(/y) " \\ & p(n) = p(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & "p(n) " = "p(n) " \\ & (\bar{g}, \bar{g}/) (\bar{g}/) \end{aligned}$$

aber: " $p(n)$ " $\neq$ " $p(n)$ " Beispiel: " $p\left(\frac{5}{\overline{2}, 2}\right)$ " $\neq$ " $p\left(\frac{5}{\underline{2}}\right)$ "



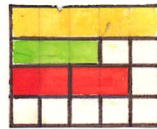
Da wir bei der Bildung der "Menge der in jeder Zerlegung vorkommenden Elemente" Information verlieren würden, müssen wir hier verzichten, eine Menge zu bilden.

So ist also nur die Bildung der Mengen Z , Y und G vorteilhaft.
Wir können den Zerlegungskomplex nun auch anders darstellen:

$$\begin{aligned} (Z=\{z|\dots\}/Y=\{y|\dots\}) \\ p(n) \\ (G=\{f|\dots\}/e_1, e_2, e_3 \dots) \end{aligned}$$

Beispiele:

$$p(n) \\ (Z=\{z|z \equiv 1 \pmod{2}\}/)$$



Es ist nur eine ungerade Anzahl Elemente pro Zerlegung erlaubt.

$$p(n) \\ (G=\{g|(g-1)! \equiv -1 \pmod{g}\}/)$$



Die Summanden müssen Primzahlen sein. (Bei der Definition der Primzahlen wird der Satz von Wilson verwendet.)

$$p(n) \\ (G=\{\bar{g}|\sqrt{g} \in \mathbb{N}\}/)$$



Es kommen nur Quadratzahlen als Summanden in Frage.

Für die Anzahl Elemente einer bestimmten Länge f in einem Zerlegungskomplex schreiben wir

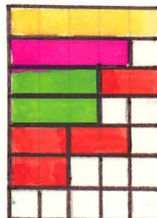
$$\begin{aligned} (Z/Y) \\ |f| \vdash p(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots) \end{aligned}$$

Beispiele:

$$|2| \vdash p(5) = 4$$

$$|1| \vdash p(5) = 12$$

Es gibt 4 rote und 12 weisse Stäbchen im Zerlegungskomplex " $p(5)$ ", wie man leicht abzählt:

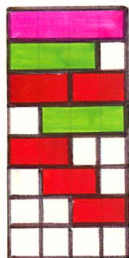


Um auf alle Fragestellungen (siehe § 2) eingehen zu können, müssen wir die Funktion (Z, G) noch erweitern:
 $p(n)$
 $(G, a_1, a_2, a_3, \dots)$

- Wollen wir, dass die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielen soll, so setzen wir ein Sternchen * schräg über das "p".

Beispiel:

"p*(4)"



$p^*(4)=8$

- Wollen wir die Einschränkung machen, dass pro Zerlegung alle Elemente verschieden sein müssen, setzen wir über das "p" einen Querstrich.

Beispiel:

" $\bar{p}(4)$ "



$\bar{p}(4)=2$

- Machen wir zur Bedingung, dass zwischen dem kleinsten und dem grössten Element in jeder Zerlegung alle möglichen Elemente vorhanden sein sollen, so setzen wir ein Dächlein über das "p". Alle Elemente sind verschieden.

Beispiel:

" $\hat{p}(7)$ "



$\hat{p}(7)=2$

Nun haben wir die Möglichkeit, zu bestimmen, dass in jeder Zerlegung ein Ausschnitt aus einer vorgegebenen Folge realisiert werden muss:

Beispiel:

" $\hat{p}(7)$ "

$(G=\{g \mid g=2^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\} /)$

$\hat{p}(7)$

$(G=\{g \mid g=2^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\} /)$ =1



Es gibt nur 1 Möglichkeit, dass die Summe aufeinanderfolgender Glieder der Folge 1, 2, 4, 8, ... gerade 7 beträgt.

Wenn n einmal negativ werden sollte, so gibt es keine Zerlegung:

$$\begin{matrix} (Z/Y) \\ p(-|q|) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix} = 0$$

Für den Fall, dass n Null wird, müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

$$\begin{matrix} p(0) = 1 \\ (G/) \end{matrix}$$

Gemeint ist die Zerlegung mit 0 Elementen.

$$\begin{matrix} p(0) = 0 \\ (/e) \end{matrix}$$

Sobald ein obligatorisches Element vorkommen muss, gibt es natürlich keine Zerlegung.

$$\begin{matrix} (z/) \\ p(0) = 0 \end{matrix}$$

Das gilt nur, wenn $z \neq 0$ ist.

$$\begin{matrix} (/y) \\ p(n) = 0 \end{matrix}$$

y ist auch nicht 0

Diese Aussagen gelten auch für die Komplexe " $p^*(n)$ ", " $\bar{p}(n)$ ", " $\hat{p}(n)$ ".

Man beachte ganz am Schluss der Arbeit die Zusammenstellung der Bezeichnungen!

KAPITEL II

FORSCHUNGEN

§ 1 Der Zerlegungskomplex $p^*(n)$
 $(F, e_1, e_2, e_3, \dots)$

Wenn man die Fragestellungen im Kapitel I § 2 betrachtet, könnte man im ersten Augenblick meinen, die Kombinatorik sei der Schlüssel für alle gestellten Probleme. Dem ist aber nicht so. Trotzdem spielt die Kombinatorik eine wichtige Rolle, die wir am besten erkennen, wenn wir die Funktion $p^*(n)$ oder den dazugehörigen Zerlegungskomplex " $p^*(n)$ " betrachten.

1. Der Zerlegungskomplex " $p^*(n)$ "

Rufen wir uns in Erinnerung : $p^*(n)$ ist gleich der Anzahl Möglichkeiten die man hat, eine natürliche Zahl in Summanden, die auch natürlich sind, zu zerlegen, wenn man die Reihenfolge der Summanden beachtet.

In Kapitel III, § 5 sind die Zerlegungskomplexe mit Hilfe des "Cuisenaire-Materials" dargestellt. Man stellt bald fest, dass sich die Anzahl Möglichkeiten verdoppelt, wenn man n um 1 erhöht. So erhalten wir den ersten Satz:

$$(1) \quad p^*(n) = 2^{(n-1)}$$

Beispiel: $n=3$

" $p^*(3)$ "



$$p^*(3) = 4$$

Beweis :

Wir haben an $(n-1)$ Orten die Wahl, das Stäbchen mit der Länge n zu zerlegen oder zusammenzulassen.

2. Der Zerlegungskomplex $\frac{(Z/)}{p^*(n)}$

Man betrachte in Kapitel IV, §2, Abschnitt 1 die Zerlegungskomplexe $p^*(n)$. Die Zerlegungen sind nicht willkürlich übereinandergestapelt, sondern nach einem bestimmten Algorithmus geordnet. Die Anzahl Elemente pro Partition wächst nämlich stufenweise von 1 bis n .

Sehen wir uns beispielsweise den Komplex $p^*(6)$ genauer an: Zuerst ist die Zerlegung mit nur einem Element, dann kommen 5 Zerlegungen, die aus 2 Elementen bestehen. Es gibt dann weiter 10 Partitionen die 3 Elemente enthalten und ebenfalls 10 Zerlegungen mit 4 Summanden. Es folgen wieder 5 Partitionen mit 5 Elementen und schliesslich 1 Zerlegung mit 6 Summanden.

Besser dargestellt sieht das so aus:

Anzahl Elemente pro Zerlegung:	1	2	3	4	5	6
Anzahl Zerlegungen:	1	5	10	10	5	1

Diese Zahlen erinnern uns an das Pascal'sche Δ und lassen uns folgendes vermuten:

$$\frac{(Z/)}{p^*(n)} = \binom{n-1}{z-1}$$

Beweis:

Um z Elemente in jeder Zerlegung zu erhalten, müssen wir $z-1$ mal aus den $n-1$ möglichen Schnittstellen auswählen.

Nun können wir unsern zweiten Satz aufstellen:

$$(2) \quad \frac{(z_1, z_2, z_3 \dots z_m)}{p^*(n)} = \sum_{i=1}^m \binom{n-1}{z_i-1}$$

Beweis:

$$\frac{(z_1, z_2, z_3 \dots z_m)}{p^*(n)} = \frac{(z_1)}{p^*(n)} + \frac{(z_2)}{p^*(n)} + \frac{(z_3)}{p^*(n)} + \dots + \frac{(z_m)}{p^*(n)},$$

denn eine Zerlegung kann nicht aus z_i und z_j Elementen gleichzeitig bestehen, wenn $i \neq j$. Für jedes $\frac{(z_i)}{p^*(n)}$ schreiben wir nun nach unserm

Hilfssatz $\binom{n-1}{z_i-1}$, woraus dann Satz (2) folgt.

Noch eine Anwendung zu den eben gewonnenen Erkenntnissen:

Problem :

Wieviele Lösungen hat die diophantische Gleichung

$$\sum_{i=1}^z e_i = n \quad ?$$

Die Antwort ist leicht: ∞

Nun lassen wir aber nur noch positive Summanden zu.

Jetzt wird die Lösungsanzahl endlich.

Lösung :

Die Lösung heisst $p^{(z/)}(n)$, da sich jede dieser Zerlegungen mit der Länge n und z Elementen als Repräsentant einer möglichen Gleichung sehen lässt:



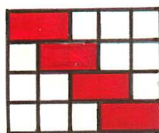
$$1+1+2+1=5$$

Es gibt also $\binom{n-1}{z-1}$ Lösungen für die Gleichung $\sum_{i=1}^z e_i = n$, wenn die Elemente natürliche Zahlen sein sollen.

Beispiel :

$\sum_{i=1}^4 e_i = 5$ Es gibt 4 Möglichkeiten, diese Gleichung zu

erfüllen :



3. Der Zerlegungskomplex $p^*(n)$ (G/)

Nun schränken wir die Auswahl der Elemente ein. Nur noch Elemente, die der Menge G angehören, dürfen zum Aufbau des Komplexes verwendet werden. Dass es nicht mehr so einfach ist wie vorhin, als wir die Anzahl der Elemente pro Zerlegung vorschrieben, sehen wir, wenn wir zum Beispiel den Komplex $p^*(n)$
(1,2/) betrachten:

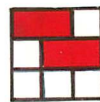
$p^*(1)$
(1,2/)



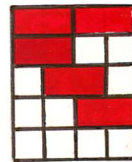
$p^*(2)$
(1,2/)



$p^*(3)$
(1,2/)



$p^*(4)$
(1,2/)



Schauen wir uns das zahlenmässig an:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$p^*(n)$ (1,2/)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

Das ist ja die Fibonaccifolge! Das Bildungsgesetz ist demnach rekursiv und lautet:

$$p^*(n) = p^*(n-1) + p^*(n-2)$$

(1,2/) (1,2/) (1,2/)

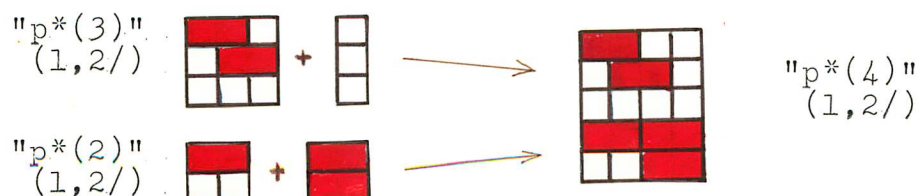
Die Zerlegungen von $p^*(n)$
(1,2/) können auf zwei verschiedene

Arten erhalten werden. Entweder hängen wir an jede Zerlegung von $p^*(n-1)$
(1,2/) ein Element mit der Länge 1 oder dann wird

jede Zerlegung von $p^*(n-2)$
(1,2/) mit einem Element der Länge 2

ergänzt .

Beispiel:



Dieses Verfahren, das rekursive Bilden der Komplexe, können wir noch verallgemeinern:

Wir bilden den Komplex " $p^*(n)$
 $(G/)$ " so, dass wir für jedes g , das Element ist von G , den Komplex " $p^*(n-g)$
 $(G/)$ " nehmen, und an jede seiner Zerlegungen das Element g hinten anhängen. Das sieht dann so aus:

$$p^*(n)_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)} = p^*(n-g_1)_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)} + p^*(n-g_2)_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)} + \dots + p^*(n-g_m)_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)}$$

Unser dritter Satz lautet also:

$$(3) \quad p^*(n)_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)} = \sum_{i=1}^m p^*(n-g_i)_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)}$$

Beweis:

Alle Zerlegungen, die wir mit unserm Verfahren erhalten, erfüllen die Bedingung, dass sie nur aus Elementen aus G bestehen.

Mit diesem Verfahren erhalten wir keine Zerlegung zweimal. Wären zwei Zerlegungen identisch, hätten sie natürlich auch das gleiche letzte Element. Es müssten also nach Wegnahme dieser letzten Elemente zwei identische Zerlegungen bei einem kürzeren Zerlegungskomplex existieren, was nicht sein kann.

Wir bekommen so alle Zerlegungen, denn gäbe es eine Zerlegung die nicht gebildet worden wäre, so würde die Zerlegung, die wir bei der Wegnahme des hintersten Elementes erhalten, in einem früheren Zerlegungskomplex nicht existieren.

In der Praxis liebt man ja Rekursionsalgorithmen nicht besonders, da mit ihnen immer ein relativ grosser Rechenaufwand verbunden ist. Man kann heute natürlich Computer verwenden, doch stösst man dort auch bald auf Zeit- und Speicherprobleme.

In einer Mathematiklektion haben wir einmal einen direkten Algorithmus für die Berechnung der n-ten Fibonaccizahl gesehen. Die Formel sah so aus:

$$(4) \quad f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Diese Formel gibt mir Mut zu hoffen, dass jede rekursive Funktion ersetzt werden kann durch einen direkten Algorithmus.

Diese Algorithmen können aber ganz verschieden geartet sein. Es ist uns nämlich noch möglich, Lösungsformeln für $p^*(n)$ und $p^*(n)$ anzugeben:
(g/) (1,g/)

$p^*(n)$ ist immer dann 1, wenn n ein Vielfaches ist von g.
(g/)

Sonst gibt es 0. Formelmässig sieht das so aus:

$$(5) \quad p^*(n)_{(g/)} = \text{Int}\left(\frac{n}{g}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{g}\right)$$

Da wir die Fibonaccifolge auch im Pascal'schen Dreieck wiederfinden können, liegt der Verdacht nahe, dass sich andere rekursive Funktionen ebenfalls dort wiederfinden lassen. Und tatsächlich finden wir:

$$(6) \quad p^*(n)_{(1,g/)} = \sum_{i=0}^{\text{Int}\left(\frac{n}{g}\right)} \binom{n-(g-1)i}{i}$$

Es wäre ein interessantes Forschungsgebiet, rekursive Funktionen zu untersuchen.

Anwendung:

In der Einleitung zu dieser Arbeit haben wir die Frage aufgeworfen, wieviele Möglichkeiten es gibt, einen bestimmten Betrag auszuzahlen. Wenn wir der Reihenfolge der Geldausgabe auch Bedeutung schenken, so können wir das Problem nun anpacken.

In der Schweiz kennen wir folgende Münz- und Noteneinheiten: (In Rappen)

5,10,20,50,100,200,500,1000,2000,5000,10000,20000,50000,100000

Zur Vereinfachung teilen wir diese Werte noch durch 5:

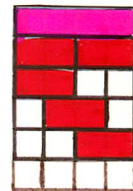
1,2,4,10,20,40,100,200,400,1000,2000,4000,10000,20000

Die Frage nach den Möglichkeiten der Geldausgabe ist nun identisch mit der Frage nach der Anzahl Zerlegungen des Komplexes $p^*(20n)$
(1,2,4,10,20,40,...,10000,20000/)
wenn wir n Franken zu wechseln haben.

Wenn wir 20 Rappen zu wechseln haben, so haben wir 6 Möglichkeiten:

20,10+10,10+5+5,5+10+5,5+5+10,5+5+5+5

Den dazugehörigen Zerlegungskomplex sehen wir daneben.



Wollen wir einen Franken wechseln, so gibt es schon 48008 Möglichkeiten.

Für zwei Franken gibt es sogar 3846364040 Möglichkeiten. Fünf Franken lassen sich schon auf $2 \cdot 10^{24}$ Arten herausgeben.

Zehn Franken schliesslich können auf weit mehr als 10^{100} Arten gewechselt werden.

Nun betrachten wir noch die Zerlegungskomplexe, bei denen die Längen der Elemente einer definierten Menge angehören sollen. Beispielsweise kann G die Menge der Quadratzahlen sein. Wir haben dann den Zerlegungskomplex $p^*(n)$
 $(G=\{g|\sqrt{g}\in\mathbb{N}\})$ vor uns.

In Kapitel IV, § 1, sind die Funktionswerte von einigen Komplexen angegeben.

Vergleichen wir die Funktionswerte der Komplexe, deren Elemente durch eine lineare Kongruenzgleichung gegeben sind, mit früheren Resultaten, stellen wir folgendes fest:

$$(7) \quad p^*(n)_{(G=\{g|g\equiv a \pmod b\})} = p^*(n-a)_{(a,b)}$$

Beispiel:

$$p^*(9)_{(G=\{g|g\equiv 2 \pmod 3\})} = p^*(7)_{(2,3)}$$



Beweis von Satz (7):

Wir nehmen Satz (3) zu Hilfe. Nach ihm können wir ja rekursiv zu den Funktionswerten gelangen. Im folgenden schreiben wir für die Menge der Elemente, die kongruent sind zu a modulo b einfach G' .

$$p^*(n)_{(G')} = p^*(n-a)_{(G')} + p^*(n-a-b)_{(G')} + p^*(n-a-2b)_{(G')} + p^*(n-a-3b)_{(G')} + \dots$$

$$p^*(n-b)_{(G')} = p^*(n-a-b)_{(G')} + p^*(n-a-2b)_{(G')} + p^*(n-a-3b)_{(G')} + \dots$$

Nachdem wir die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert haben, bleibt nur noch folgendes übrig:

$$p^*(n)_{(G')} = p^*(n-a)_{(G')} + p^*(n-b)_{(G')}$$

Dies ist ein neues rekursives Verfahren zum Berechnen von $p^*(n)$! $p^*(n)$ berechnen wir aber genauso gleich.
 (G') $(a, b/)$

So haben wir gezeigt, dass die Rekursionsalgorithmen ineinander übergeführt werden können.

Da nun aber $p^*(b)$ Null ist, im Gegensatz zu $p^*(b)$, verschieben sich die Funktionswerte um a .
 (G') $(a, b/)$

Wir haben nun ein Beispiel für Zerlegungskomplexe mit definierter Menge für die Elemente genauer kennengelernt. Wenn wir aber Komplexe betrachten, bei denen vorgeschrieben ist, dass die Elemente Primzahlen oder Quadratzahlen sind, liegen die Dinge schwieriger.

Eine andere Möglichkeit, die Menge der Elemente zu definieren, ist die, die Definition mit Hilfe der Zahl n selbst zu machen. Beispielsweise können wir vorschreiben, dass nur Teiler von n als Elemente in Frage kommen. Der Zerlegungskomplex sieht dann so aus: $"p^*(n)$
 $(G=\{g|n/g \in \mathbb{N}\})"$

Oder wir machen zur Bedingung, dass alle Elemente bei der Division durch 5 den gleichen Rest wie n haben müssen:

$$"p^*(n) \quad "$$

$$(G=\{g|g \equiv n \pmod{5}\})$$

Diese Möglichkeit der Definition macht aber ungeheure Schwierigkeiten zur Analyse.

Am Schluss von diesem Abschnitt können wir noch ein paar hübsche Anwendungen untersuchen, welche zeigen, wie wir die additive Zahlentheorie als Hilfsmittel in der Kombinatorik gebrauchen können.

Problem:

Wir werfen Münzen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit W , die Summe n zu erhalten, wenn wir immer bei Kopf 1 und bei Zahl 2 addieren?

Analyse:

Wir nehmen das Beispiel $n=3$: Die guenstigen Fälle können wir mit den farbigen Cuisenaire-Stäbchen so darstellen:



$$p^*(3)_{(1,2)}$$

Für die obere beiden Fälle beträgt die Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{4}$, da wir zweimal werfen müssen. Die dritte Möglichkeit tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{8}$ ein. Für $n=3$ beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit also $\frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Nun wird die Lösung des Problems schon sichtbar:

$$W = \sum_{i=1}^n \left[\frac{p^*(i)_{(1,2)}}{2^i} \right]$$

Mit Satz (60) können wir die Wahrscheinlichkeiten nun leicht rekursiv berechnen. In diesem Fall wird die Sache noch einfach. Es ergibt sich nämlich:

$$\frac{p^*(z)_{(1,2)}}{2^z} = \frac{p^*(z-1)_{(1,2)}}{2^{z-1}}$$

und daraus:

$$W = \sum_{i=1}^n \left[\frac{p^*(i)_{(1,2)}}{2^i} \right]$$

Als Grenzwert erhalten wir $\frac{2}{3}$.

Wir versuchen nun, den Problemkreis, der mit dem Münzenproblem angeschnitten wurde, etwas auszuweiten:

Allgemeine Problemstellung:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit nacheinander zufällig ausgewählten Elementen aus einer beliebigen Menge G natürlicher Zahlen genau die Summe n zu erhalten, wenn immer dann noch eine neue Zahl ausgewählt wird, wenn n noch nicht erreicht oder noch nicht überschritten worden ist?

Lösung:

Die Anzahl günstiger Fälle beträgt $p^*(n)_{(G/)}$. Diese Fälle treten aber nicht alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Wir müssen jedesmal noch schauen, aus wievielen Elementen eine Zerlegung besteht.

Wenn wir die Anzahl Elemente der Menge G mit $|G|$ bezeichnen, und eine Zerlegung aus z Elementen besteht, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieser Zerlegung $1/|G|^z$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt demnach:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{p^*(i)_{(G/)}}{|G|^i}$$

Sehen wir das uns noch an einem Beispiel an:

$$G = \{1, 2, 3, 4\} \quad n = 4$$



$$W = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \underline{\underline{\frac{125}{256}}}$$

Auch in einfachen Würfelspielen kann man noch Probleme finden. Eines können wir jetzt lösen:

"Eile mit Weile"

Beim "Eile mit Weile" hat ein Spieler gerade einen 5 gewürfelt und darf mit einem seiner Spielsteine auf die Rundreise gehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er am Schluss seines Parcours direkt das Ziel erreicht, ohne zweimal versuchen zu müssen, die richtige Zahl zu würfeln? Am Anfang hat er 62 Schritte vor sich. Einfacher formuliert heisst das Problem: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Summe 62 zu würfeln?

Die Lösung liegt jetzt auf der Hand:

$$W = \sum_{i=1}^{62} \frac{p^*(i)}{(1,2,3,4,5,6)^i} / 6^i = \underline{\underline{0,28571}}$$

Interessanterweise gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{p^*(i)}{(1,2,3,4,5,6)^i} / 6^i = \underline{\underline{2/7}}$$

Die meisten Chancen hat man, wenn sich die Figur 6 Felder vor dem Ziel befindet. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$\underline{\underline{7^5/6^6 = 0,36}}$$

Und noch ein packendes Problem:

Sicher kennt fast jeder das Glücksspiel "17+4" oder "Black-Jack". Es geht darum, möglichst nahe an die Grenzzahl 21 zu gelangen. Wenn man darüber ist, hat man verloren. Nun zur Frage:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim "Black-Jack" 21 zu erhalten, wenn man vor die Alternative gestellt ist, entweder 21 oder darüber zu haben. Man soll also auf äusserstes Risiko spielen.

Noch kurz die Kartenwerte:

Ass	1 oder 11 (kann beliebig geändert werden)
Under(Bube)	2
Ober(Dame)	3
König	4
Banner	10

Es gibt ferner noch die Karten mit den Werten 6,7,8,9.

Das Problem, wie es hier gestellt ist, erweist sich als äusserst schwierig. Wir müssen desshalb vereinfachen:

Wir machen zuerst die Annahme, dass wir von jeder Kartensorte unbeschränkt viele Karten zur Verfügung haben, sodass die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen immer gleich bleibt. ✓

Weiter müssen wir leider voraussetzen, dass sich doppelt so viele Asse im Spiel befinden als von irgendeiner andern Karte.

Jetzt können wir rechnen:

$$W = \sum_{i=1}^{21} \frac{p^*(21)}{(1,2,3,4,6,7,8,9,10,11/)} / 10^i = \underline{\underline{0,17}}$$

4. Der Zerlegungskomplex $p^*(n)$ (/e₁, e₂, e₃...)

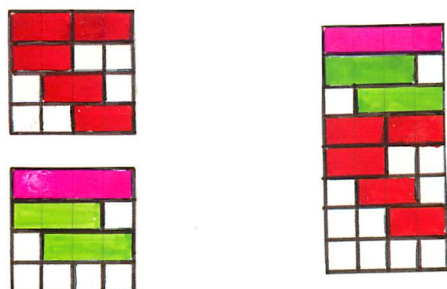
Statt wie im letzten Abschnitt die Auswahl der Elemente vorzuschreiben, machen wir nun zur Bedingung, welche Elemente obligatorisch in jeder Zerlegung vorkommen müssen. Diese beiden Problemstellungen hängen jedoch miteinander zusammen:

$$(8) \quad p^*(n)_{(/e)} + p^*(n)_{(G=\{g|g \neq e\}/)} = p^*(n)$$

Es ist ja klar, dass jede Zerlegung aus " $p^*(n)$ " entweder eine Zerlegung ist, in der das Element mit der Länge e vorkommt oder eine Partition ist, in der das Element nicht existiert.

Beispiel:

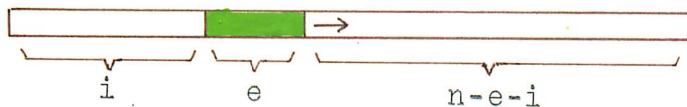
$$p^*(4)_{(/2)} + p^*(4)_{(1,3,4/)} = p^*(4)$$



Mit Satz (8) haben wir einen relativ schnellen Algorithmus zum Berechnen von $p^*(n)_{(/e)}$. Es ist jedoch nicht die einzige

Möglichkeit zum Finden von $p^*(n)_{(/e)}$.

Wir können auch die Zerlegungen, die das gemeinte Element e enthalten, folgendermassen zählen:



Das Element e wird zu Beginn ganz an den linken Rand geschoben. Dann wird es Schritt für Schritt nach rechts bewegt. Die Anzahl Schritte gelten als Parameter i . Jedesmal schaut man, wieviele Möglichkeiten es gibt, links vom Element Zerlegungen hinzusetzen, die das Element e nicht enthalten, und wieviele verschiedene Zerlegungen man rechts vom Element hinsetzen kann, die aber keine Bedingung zu erfüllen haben. Links vom Element gibt es also $p^*(i)$ mögliche Fälle, rechts vom Element gibt es $p^*(n-e-i)$ ($G=\{g|g \neq e\}$).

Möglichkeiten. In jeder Lage von e gibt es $p^*(i) \cdot p^*(n-e-i)$ ($G=\{g|g \neq e\}$) mögliche Situationen. Die Auflage, dass links vom Element e das Element e nicht vorkommen darf, machen wir deshalb, dass wir nicht gleiche Zerlegungen doppelt zählen. Aus diesen Ausführungen folgt Satz (9):

$$(9) \quad p^*(n)_{(/e)} = \sum_{i=0}^{n-e} \left[2^{(n-e-i-1)} \left(2^{(i-1)} - p^*(i)_{(/e)} \right) \right], n > e$$

Wir haben noch $p^*(n-e-i)$ und $p^*(i)$ nach Satz (1) ersetzt durch $2^{(n-e-i-1)}$ respektive durch $2^{(i-1)}$, und für $p^*(i)_{(/e)}$ haben wir nach Satz (8) $2^{(i-1)} - p^*(i)_{(/e)}$ hingeschrieben.

Dieses Verfahren ist etwa gleichwertig dem Algorithmus, den wir aus Satz (8) ableiten konnten. Beide Berechnungsmöglichkeiten haben jedoch den Nachteil, dass Zweierpotenzen vorkommen, die für hohe n keine Berechnung mehr zulassen.

Nun wollen wir aber doch noch wissen, was wir rechnen müssen, wenn mehrere Elemente der gleichen Sorte oder auch verschiedener Länge in jeder Partition obligatorisch sind.

Ganz allgemein gestellt würde das Problem dann so lauten:

Gesucht ist $p^*(n)$
 $(/\epsilon_1 \cdot e_1, \epsilon_2 \cdot e_2, \epsilon_3 \cdot e_3, \dots, \epsilon_m \cdot e_m)$

Wir gehen ähnlich vor wie vorhin:

Von jeder Elementsorte, die vorkommen muss, lassen wir ein Element durch die Zerlegung durchwandern. Wir schreiben immer vor, dass links vom wandernden Element keines der vorgeschriebenen Elemente vorkommen darf. Rechts vom Element müssen jedoch alle noch verbleibenden obligatorischen Elemente vorkommen. So erhalten wir eine Verallgemeinerung von Satz (9), Satz (10):

$$(10) \quad p^*(n)_{(/ \epsilon_1 \cdot e_1, \epsilon_2 \cdot e_2, \dots, \epsilon_m \cdot e_m)} = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^{n-e_j} \left(p^*(i)_{(G=\{g \mid g \neq e_1 \wedge g \neq e_2 \dots g \neq e_j\})} \cdot p^*(n-e_j-i)_{(/ \epsilon_1 \cdot e_1, \epsilon_2 \cdot e_2, \dots, (\epsilon_j-1) e_j \dots \epsilon_m \cdot e_m)} \right) \right]$$

Es gelingt uns jetzt nicht mehr, die Formel weiter zu vereinfachen, es sei denn wir hätten gerade den Spezialfall $p^*(n)$ vor uns,
 $(/e)$

der Satz (10) zu Satz (9) macht.

Abgesehen davon, dass die Programmation dieses Algorithmus schon einiges komplizierter ist, ist der Rechenzeit- und Speicherbedarf auch schon bedeutend.

Betrachten wir noch zwei Spezialfälle:

$$p^*(n)_{(/2e)} = \sum_{i=0}^{n-e} \left(p^*(i)_{(G=\{g \mid g \neq e\})} \cdot p^*(n-e-i)_{(/e)} \right)$$

$$p^*(n)_{(/e_1, e_2)} = \sum_{i=0}^{n-e_1} \left(p^*(i)_{(G=\{g \mid g \neq e_1 \wedge g \neq e_2\})} \cdot p^*(n-e_1-i)_{(/e_2)} \right) + \sum_{i=0}^{n-e_2} \left(p^*(i)_{(G=\{g \mid g \neq e_1 \wedge g \neq e_2\})} \cdot p^*(n-e_2-i)_{(/e_1)} \right)$$

$p^*(n)$ könnten wir noch anders erhalten:
 $(/e_1, e_2)$

Wir stellen uns den Komplex " $p^*(n)$ " vor. Von diesem nehmen wir nun diejenigen Zerlegungen fort, welche das erste geforderte Element nicht enthalten. Dann entfernen wir die Zerlegungen, die das zweite geforderte Element nicht enthalten. Was übrigbleibt, sind die Zerlegungen, welche sowohl das erste als auch das zweite Element enthalten.

Was heisst das nun, wenn wir es formal rechnen?

$$(11) \quad p^*(n)_{(/e_1, e_2)} = p^*(n) - p^*(n)_{(G=\{g|g \neq e_1\}/)} - p^*(n)_{(G=\{g|g \neq e_2\}/)} + p^*(n)_{(G=\{g|g \neq e_1, g \neq e_2\}/)}$$

Da wir beim Abziehen von $p^*(n)_{(G=\{g|g \neq e_1\}/)}$ und $p^*(n)_{(G=\{g|g \neq e_2\}/)}$ diejenigen Zerlegungen doppelt wegzählen, die keines der beiden Elemente enthält, müssen wir diese Zerlegungen nachträglich wieder addieren. 1,2

Für den Spezialfall, dass nur zwei verschiedene Elemente obligatorisch sind, ist dieser Algorithmus demjenigen von Satz (10) haushoch überlegen. Er ist übrigens die Weiterentwicklung von Satz (8). Wir könnten ihn noch ausdehnen auf mehrere verschiedene obligatorische Elemente, für eine allgemeine Form hat es jedoch auch keinen Sinn, da dann Satz (10) konkurrenzfähig wird.

5. Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} (/Y) \\ p^*(n) \end{matrix}$

Dies ist wahrscheinlich der schwierigste Komplex in diesem Paragraphen. Es sind nur Zerlegungen zugelassen, die y verschiedene Elemente beinhalten, wobei $y \in Y$.

Die Hoffnungen auf einen einfachen Algorithmus werden $\begin{matrix} (/1) \\ \end{matrix}$ schon zunichte gemacht, wenn man den Zerlegungskomplex $p^*(n)$ betrachtet:

Beispiel: $n=6$



$$\begin{matrix} (/1) \\ p^*(6) = 4 \end{matrix}$$

Die Anzahl Zerlegungen des Komplexes $\begin{matrix} (/1) \\ p^*(n) \end{matrix}$ ist identisch mit der Anzahl Teiler der Zahl n . Diese Funktion kennt man in der Zahlentheorie in der Schreibweise $d(n)$.

Wenn n in Primfaktoren zerlegt so aussieht: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m}$ so berechnet sich $d(n)$ natürlich so: $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$ denn wir können bei der Bildung eines Teilers von jeder Primzahl 0 oder 1 oder 2 ... oder α_i nehmen.

$$(12) \quad \begin{matrix} (/1) \\ p^*(n) \end{matrix} = d(n) = \prod_{i=1}^m (\alpha_i + 1) = \sum_{i=1}^n \left[\text{Int}\left(\frac{n}{i}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{i}\right) \right]$$

Das letzte Berechnungsverfahren für $d(n)$ in Satz (12) ist ein praktischer Algorithmus für den Computer und ist eigentlich nichts anderes als das Probierversfahren.

Wenn n durch i teilbar ist, so ist $\text{Int}\left(\frac{n}{i}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{i}\right)$ gleich 1, da dann $\text{Int}\left(\frac{n}{i}\right)$ um 1 grösser ist als $\text{Int}\left(\frac{n-1}{i}\right)$.

Wenn n nicht teilbar ist durch i so gibt es 0.

Nun wird einfach die Anzahl i gezählt, welche Teiler sind von n .

Auf welche Arten kann " $p^*_{(n)}^{(/y)}$ " gebildet werden ?

- Wir können an alle Zerlegungen von der Länge $n-i$, die auch y verschiedene Elementsorten haben und das Element i schon enthalten, ein Element i anhängen.
- Wir können ein Element der Länge i an alle Zerlegungen der Länge $n-i$ anhängen, welche aus $y-1$ verschiedenen Elementen bestehen und das Element noch nicht enthalten.

So erhalten wir folgenden Algorithmus:

$$(13) \quad p^*_{(n)}^{(/y)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[p^*_{(n-i)}^{(/y)} + p^*_{(n-i)}^{(/y-1)} - p^*_{(n-i)}^{(/y-1)} \right]$$

Da sich die Komplexe " $p^*_{(n)}^{(/y)}$ " und " $p^*_{(n)}^{(/y_1)}$ " nicht überschneiden, können wir noch ergänzen: $i \neq 1$?

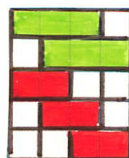
$$(14) \quad p^*_{(n)}^{(/y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)} = \sum_{i=1}^m p^*_{(n)}^{(/y_i)}$$

Satz (13) sieht zwar eindrucksvoll aus, er nützt uns aber praktisch überhaupt nichts, da wir nicht wissen, wie man $p^*_{(n)}^{(/y)}$ berechnet.
 $(/e)$

Betrachten wir noch den Spezialfall $y=1$:

$$p^*_{(n)}^{(/1)} = \sum_{i=1}^{n-1} p^*_{(n-i)}^{(/1)}$$

Beispiel " $p^*_{(4)}^{(/2)}$ ":



6. $|f| \downarrow p^*(n)$

Jetzt wollen wir nicht mehr die Anzahl Zerlegungen berechnen, wenn gewisse Bedingungen zu erfüllen sind. Wir stürzen uns nämlich auf die Anzahl Elemente eines Zerlegungskomplexes.

$|f| \downarrow p^*(n)$ ist gleich der Anzahl Elemente der Länge f im Zerlegungskomplex $p^*(n)$. Wenn wir in den Zerlegungskomplexen nachzählen, finden wir folgende Werte:

n	1	2	3	4	5	6	7
$ 1 \downarrow p^*(n)$	1	2	5	12	28	64	144
$ 2 \downarrow p^*(n)$	0	1	2	5	12	28	64
$ 3 \downarrow p^*(n)$	0	0	1	2	5	12	28
$ 4 \downarrow p^*(n)$	0	0	0	1	2	5	12

Es steigt ein Verdacht auf:

$$(15) \quad |f| \downarrow p^*(n) = |f+i| \downarrow p^*(n+i)$$

Dies ist zwar ein hübscher Satz, wir können damit aber keine neuen Werte berechnen.

Im folgenden werden wir ein Verfahren kennenlernen, das eine Berechnung erlaubt und Satz (15) gerade beweist.

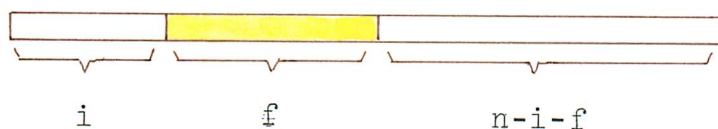
Wir betrachten " $p^*(n)$ " und unterscheiden zwei Fälle:

(a) Das Element f befindet sich am Rand:



Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein solches Element so an den Rand zu legen? Natürlich $2^{(n-f-1)}$, da wir neben dem Element gerade genug Platz haben für Zerlegungen aus " $p^*(n-f)$ ". Da wir 2 Ränder haben, gibt es also $2 \cdot 2^{(n-f-1)} = 2^{(n-f)}$ Elemente dieser Länge am Rand.

(b) Das Element f befindet sich nicht am Rand:



Es soll den Abstand i vom linken Rand haben. Der Abstand zum rechten Rand beträgt dann $n-f-i$. Links haben wir also Platz für eine Zerlegung aus " $p^*(i)$ ", rechts können wir eine Zerlegung aus " $p^*(n-f-i)$ " hinlegen. Die Anzahl Möglichkeiten beträgt demnach:

$$p^*(i) \cdot p^*(n-f-i) = 2^{(i-1)} \cdot 2^{(n-f-i-1)} = 2^{(n-f-2)}$$

Da i nun verschwunden ist, und wir $n-f-1$ Möglichkeiten haben, ein Element der Länge f nicht am Rand zu platzieren, können wir also auf $(n-f-1) \cdot 2^{(n-f-2)}$ Arten das Element nicht an den Rand legen.

Wir können nun die beiden Resultate zusammenzählen:

$$2^{(n-f)} + (n-f-1) \cdot 2^{(n-f-2)} = (n-f+3) \cdot 2^{(n-f-2)}$$

und haben so Satz (16) erhalten.

$$(16) \quad |f| \vdash p^*(n) = (n-f+3) \cdot 2^{(n-f-2)} \quad ; \quad n > f$$

Wenn $n < f$, dann ist $|f| \vdash p^*(n) = 0$, $|f| \vdash p^*(f) = 1$

$$7. |f|_{\downarrow p^*(n)}^{(z/)}$$

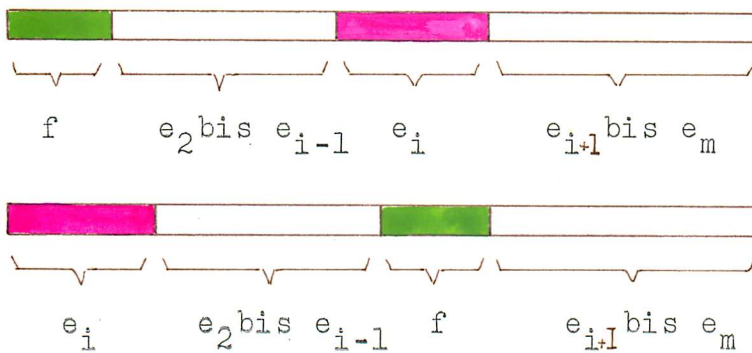
2

Auch hier könnten wir gleich vorgehen, wie vorhin, indem wir die Elemente in Randelemente und Nicht-Randelemente unterscheiden. Es ist hier jedoch am einfachsten, wenn wir die Rangordnung des Elementes betrachten:

Wir fragen: Wieviele Möglichkeiten gibt es, das Element f an den Anfang einer Zerlegung aus " $p^*(n)$ " zu legen?

Antwort: $\binom{z-1}{p^*(n-f)}$ Möglichkeiten.

Genausoviele Möglichkeiten haben wir, das Element an die zweite und an jede weitere Stelle der Zerlegung zu legen, da wir zwei Elemente einfach vertauschen können, ohne dass sich an der Anzahl der Möglichkeiten etwas ändern würde:



Nun können wir das Element an z verschiedenen Orten plazieren. Es gibt daher $z \cdot \binom{z-1}{p^*(n-f)}$ Elemente der Länge f im Komplex $p^*(n)$.

$$(17) \quad |f|_{\downarrow p^*(n)}^{(z/)} = z \cdot \binom{n-f-1}{z-2}$$

und selbstverständlich gilt auch :

$$(18) \quad |f|_{\downarrow p^*(n)}^{(z_1, z_2, z_3, \dots, z_m /)} = \sum_{i=1}^m \left[z_i \cdot \binom{n-f-1}{z_i-2} \right]$$

21

$$8. \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(G/)}$$

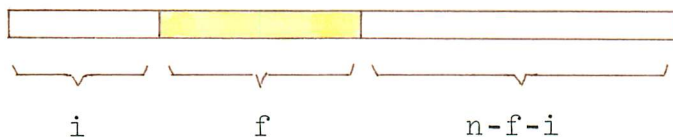
In Abschnitt 6 haben wir in Randelemente und Nicht-randelemente unterschieden. Dies wäre eigentlich nicht nötig gewesen, haben wir es doch nur gemacht, um der Problematik $p^*(0)$ etwas aus dem Wege zu gehen. Wir hätten einfach schreiben können:

$$|f| \downarrow p^*(n) = \sum_{i=0}^{n-f} \left(p^*(i) \cdot p^*(n-f-i) \right)$$

Diese Form haben wir aber übersprungen, weil wir direkt schneller ans Ziel kommen konnten. Nun greifen wir auf diese Darstellung zurück:

$$(19) \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(G/)} = \sum_{i=0}^{n-f} \left(p^*(i)_{(G/)} \cdot p^*(n-f-i)_{(G/)} \right) ; \quad f \in G$$

Illustration:



Es ist selbstverständlich, dass f Element sein sollte von G . Sonst gibt es natürlich immer 0.

Es wäre vielleicht noch interessant, die Werte für bestimmte Mengen zu erforschen.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit noch kurz den Zahlen $|1| \downarrow p^*(n)$ und den Komplexen $p^*(n)$ zu.
 $(1/)$ $(1/)$

Beim Aufführen der Werte $|1| \downarrow p^*(n)$ zählen wir
 $(1/)$

ganz einfach. Die Komplexe $p^*(n)$ repräsentieren
 $(1/)$

eigentlich die ursprünglichste Form der Zahl, das Aneinanderhängen von gleichen Einheiten.

1

4

2

5

3

6

Beim Betrachten der dank Satz (19) erhaltenen Resultate, fällt wieder das gleiche auf, wie zu Beginn von Abschnitt 6:

$$(20) \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(G/)} = |f+i| \downarrow p^*(n+i)_{(G/)}$$

Satz (20) ist eine Verallgemeinerung von Satz (15).

Der Beweis ist einfach:

Wir schreiben in Satz (19) für n , $n+k$ und für f , $f+k$.

Das sieht dann so aus:

$$|f+k| \downarrow p^*(n+k)_{(G/)} = \sum_{i=0}^{n+k-f-k} \left(p^*(i)_{(G/)} \cdot p^*(n+k-f-k-i)_{(G/)} \right) = \sum_{i=0}^{n-f} \left(p^*(i)_{(G/)} \cdot p^*(n-f-i)_{(G/)} \right)$$

$$= |f| \downarrow p^*(n)_{(G/)} \quad \text{qed}$$

$$9. \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(/e)}$$

Wir unterscheiden die zwei Fälle: $f=e$ und $f \neq e$.

a) $f=e$

$$(21) \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(/f)} = |f| \downarrow p^*(n)_{(/e)}$$

, da alle Zerlegungen berücksichtigt werden, in denen e vorkommt.

b) $f \neq e$

$$(22) \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(/e)} = \sum_{i=0}^{n-f} \left[p^*(i)_{(/e)} \cdot p^*(n-f-i)_{(/e)} - p^*(i)_{(/e)} \cdot p^*(n-f-i)_{(/e)} \right]$$

Wir lassen das Element f durch die ganze Zerlegung durchwandern und zählen die Möglichkeiten zusammen, die wir einerseits haben, das obligatorische Element rechts von f zu plazieren, und die wir andererseits haben, das Element links von f zu plazieren. Dann müssen wir noch die Fälle abziehen, in denen auf beiden Seiten das obligatorische Element vorkommt, da diese Fälle sonst doppelt gezählt würden.

Analog Satz (20) gilt auch hier:

$$(23) \quad |f| \downarrow p^*(n)_{(/e)} = |f+i| \downarrow p^*(n+i)_{(/e)}$$

Wir sehen das direkt in Formel (22). Dort kommt nämlich n immer als Differenz $n-f$ vor.

$$10. \quad |f|_{\downarrow p^*(n)}^{(/y)}$$

Wir betrachten hier nur den Fall $y=1$, da das weitere meiner Meinung nach zu schwierig ist.

$(/1)$
 $p^*(n)$ enthält nur eine Elementsorte. Wenn f diese Länge hat, so beträgt die Anzahl Elemente f in diesem Komplex n/f . In jedem andern Fall gibt es 0.

$$(24) \quad |f|_{\downarrow p^*(n)}^{(/1)} = \left(\text{Int}\left(\frac{n}{f}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{f}\right) \right) \cdot n/f$$

11. Der Zerlegungskomplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$

Nun erleben wir zum ersten mal, dass auch endlich viele Zerlegungskomplexe möglich sind.

Beispiel:



Das sind alle möglichen Komplexe.

Definition: Wir bezeichnen die Anzahl Elemente von G mit $|G|$.

$$(59) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(i) \\ (G/) \end{smallmatrix} = |G|^z$$

Wir können das so sehen: Wir haben z Plätze zur Verfügung. Für jeden der z Plätze können wir ein Element aus $|G|$ möglichen Elementen auswählen.

Betrachten wir zuerst $\begin{smallmatrix} (1/) \\ p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$:

$\begin{smallmatrix} (1/) \\ p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ ist immer dann 1, wenn n ein Element ist von G , sonst gibt es 0.

Der allgemeine Fall $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$: (Beispiel siehe Anhang)

Es gibt $\begin{smallmatrix} (z-1/) \\ p^*(n-g_i) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ Möglichkeiten, das Element g_i am linken

Rand zu haben, denn daneben haben wir noch Platz für einen Zerlegungskomplex der Länge $n-g_i$ mit $z-1$ Elementen, der seine Elemente auch aus G rekrutieren muss. Wenn wir nun nacheinander alle Elemente aus G an den linken Rand legen und die Möglichkeiten aufsummieren, so erhalten wir $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

$$(60) \quad \frac{\binom{z/}{G/}}{p^*(n)} = \sum_{i=1}^{|G|} \frac{\binom{z-1/}{G/}}{p^*(n-g_i)}$$

Er gilt übrigens auch für $z=1$, da $\frac{\binom{0/}{G/}}{p^*(0)} = 1$

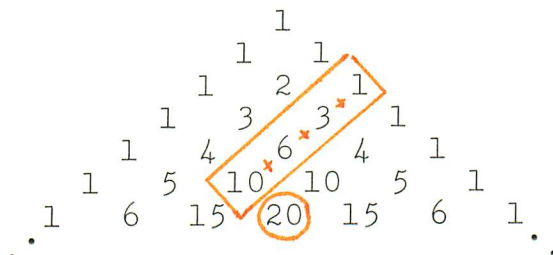
Wenn $G = N$, wenn also gerade alle natürlichen Zahlen zur Verfügung stehen, so sieht Satz (60) so aus:

$$(60a) \quad \frac{\binom{z/}{n}}{p^*(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{z-1/}{n-i}}{p^*(n-i)}$$

Aus Abschnitt 2 wissen wir: $\frac{\binom{z/}{n}}{p^*(n)} = \binom{n-1}{z-1}$

$$\binom{n-1}{z-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n-i-1}{z-2}$$

Eine Aussage, die wir im Pascalschen Dreieck bestätigen sehen können:



$$20 = 10 + 6 + 3 + 1$$

Noch eine Bemerkung zu Satz (59):

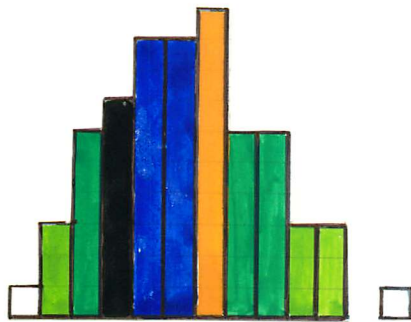
In Satz (59) können wir unschwer erkennen, dass es genau dann eine unendliche Anzahl Zerlegungen gibt, wenn G unendlich ist.

Im Anhang haben wir alle Zerlegungskomplexe $p^*(n)$ $\begin{smallmatrix} (3/) \\ (1,2,3,5/) \end{smallmatrix}$ aufgeführt. Numerisch sieht es so aus:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\begin{smallmatrix} (3/) \\ p(n) \\ (1,2,3,5/) \end{smallmatrix}$	0	0	0	1	3	6	7	9	9	10	6	6	3	3	0	1

Für n die grösser sind als 15 gibt es dann immer 0.

Diese Zahlen können wir mit dem Cuisenaire- Material plastischer darstellen :



Da das Thema $p^*(n)$ $\begin{smallmatrix} (z/) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ mit einem Satz (60) noch lange nicht als gelöst betrachtet werden kann, müssen wir hier nach neuen Darstellungsmöglichkeiten suchen . Wir werden später nochmals darauf zurückkommen.

$$12. |f|_{\downarrow p^*(n)}^{(z/)}_{(G/)}$$

Wenn f nicht Element ist von G , gibt $|f|_{\downarrow p^*(n)}^{(z/)}_{(G/)}$ Null.

Sonst berechnen wir die Anzahl der in allen möglichen Zerlegungen vorkommenden Elemente f so :

$$(61) \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f|_{\downarrow p^*(i)}^{(z/)}_{(G/)} = z \cdot |G|^{z-1}, \quad f \in G$$

(Wenn man Satz (59) und Satz (61) miteinander vergleicht, fühlt man sich ans Differenzieren erinnert.)

Satz (61) sagt aus, dass immer dann, wenn f ein Element ist von G , dieses Element $z \cdot |G|^{z-1}$ mal als Bauelement in allen möglichen Komplexen vorkommt, unabhängig davon, wie gross dieses Element ist.

Beweis:

Wir beweisen das zur Abwechslung mit vollständiger

Induktion :

$$z=1 : \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f|_{\downarrow p^*(i)}^{(1/)}_{(G/)} = 1$$

Für $z=1$ stimmt der Satz.

$$\text{Annahme: Der Satz stimmt für } z=k: \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f|_{\downarrow p^*(i)}^{(k/)}_{(G/)} = k \cdot |G|^{k-1}$$

Was passiert beim Uebergang von k zu $k+1$?

Wir können an jede Zerlegung nacheinander alle Elemente von G anhängen. d.h.: Um die Anzahl der nachher existierenden Elemente zu ermitteln, müssen wir die Anzahl ^{von} vorher mit $|G|$ multiplizieren und nachher noch $|G|^k$ addieren, da wir so viele Zerlegungen haben und an jede auch ein Element der Länge f angehängt haben. Formal sieht das so aus:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f|_{\downarrow p^*(i)}^{(k/)}_{(G/)} = k \cdot |G|^{k-1} \cdot |G| + |G|^k = k \cdot |G|^k + |G|^k = (k+1) \cdot |G|^k$$

Es stimmt auch für $z=k+1$.

qed

Was wir in Abschnitt 7 gesagt haben, gilt auch hier:

Im komplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ kann ein Element $f \in \begin{smallmatrix} (z-1/) \\ p^*(n-f) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ mal 7

an die erste Stelle des Komplexes und genausoviele Male an jede weitere Stelle des Komplexes gelegt werden.

Die Anzahl Elemente f im Komplex lässt sich demnach so berechnen:

$$(62) \quad \begin{smallmatrix} (z/) \\ |f| \downarrow p^*(n) \\ (G/) \end{smallmatrix} = z \cdot \begin{smallmatrix} (z-1/) \\ p^*(n-f) \\ (G/) \end{smallmatrix}, \quad f \in G$$

Selbstverständlich muss f wieder Element sein von G .

13. Der Zerlegungskomplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (G/e) \end{smallmatrix}$

Wieder wollen wir zuerst eine Aussage über alle möglichen Zerlegungen machen:

$$(63) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(i) \\ (G/e) \end{smallmatrix} = |G|^Z - |G-1|^Z$$

Wir ziehen von allen möglichen Zerlegungen diejenigen Zerlegungen ab, die das Element e nicht enthalten.

Nach Satz (59) gibt es $|G|^Z$ Zerlegungen und entsprechend $|G-1|^Z$ Zerlegungen mit einem Element weniger.

Bis jetzt haben wir noch nicht über den Komplexen $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (/e) \end{smallmatrix}$ gesprochen. Die Doktorarbeit, die wir hatten , bis wir nur einen Satz über $\begin{smallmatrix} p^*(n) \\ (/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{smallmatrix}$, Satz (10)

entwickelt hatten, hat uns davon abgehalten. Es hat nun auch keinen Sinn, jetzt eine ähnliche Formel für $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p^*(n) \\ (G/e) \end{smallmatrix}$ zu entwickeln, da sie praktisch fast keine Bedeutung hätte. Es ist aber möglich, dass sich Satz (10) ersetzen liesse durch eine direktere Form.

Jetzt können wir uns aber dennoch an der schönen Formel (63) erfreuen.

§ 2 DER ZERLEGUNGSKOMPLEX $\begin{matrix} (Z/Y) \\ p(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots) \end{matrix}$ "

Angesichts der Tatsache, dass es (so viel ich weiss) bis heute noch nicht gelungen ist, einen ^{einfachen} Algorithmus zu entwickeln, der es gestattet, nach Eingabe von n , $p(n)$ direkt, das heisst ohne Rekursionsverfahren zu berechnen, scheint es, dass wir in diesem Paragraphen auf wesentlich mehr Schwierigkeiten stossen werden, als in § 1. Tatsächlich sind die Probleme aber nur verlagert. Es gibt Dinge, die einfacher werden, andere werden heikler. Gerade in Abschnitt 1 sehen wir das eindrücklich:

1. Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} p(n) \\ (/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$

Als die Reihenfolge der Elemente noch eine Rolle spielte, hatten wir einige Mühe, die Anzahl Zerlegungen zu finden, in denen bestimmte Elemente obligatorisch vorkommen müssen. Nun können wir bei den Zerlegungen aus $\begin{matrix} p(n) \\ (/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$ die obligatorischen Elemente $e_1, e_2, e_3 \dots e_m$

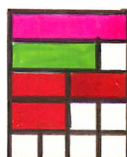
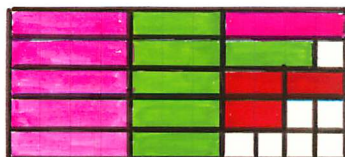
einfach an den linken Rand schieben, und den Rest mit beliebigen Zerlegungen auffüllen. Wir haben dann noch Platz für Zerlegungen der Länge $n - e_1 - e_2 - e_3 \dots - e_m$.

Es gibt $p(n - e_1 - e_2 - e_3 \dots - e_m)$ verschiedene Zerlegungen, da wir ja keine Auflagen an diese Zerlegungen machen.

$$(25) \quad \begin{matrix} p(n) \\ (/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix} = p(n - e_1 - e_2 - e_3 \dots - e_m)$$

Beispiel:

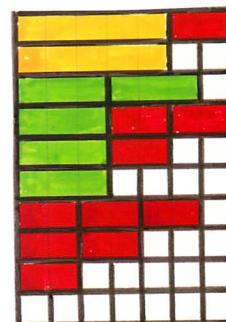
$$\begin{matrix} p(11) \\ (/3, 4) \end{matrix} = p(4)$$



2. Der Zerlegungskomplex " $p(n)$ " Teil 1 (G/)

Um uns an das Problem heranzupirschen, untersuchen wir einen speziellen Fall, bevor wir allgemein werden. Dazu wählen wir den Komplex " $p(7)$ " :
(1,2,3,5/)

Dieser Komplex besteht also nur aus den Elementen 1,2,3 und 5.



Nun nehmen wir diejenigen Zerlegungen heraus, die das Element 2 enthalten und schieben dieses Element an den linken Rand. In dem entstandenen neuen Komplex können wieder alle Elemente vorkommen, die vorher schon erlaubt

waren. Es gibt also $p(7-2)$ Zerlegungen, in denen das Element
(1,2,3,5/)

2 vorkommt. Genauso gibt es $p(6)$ Zerlegungen mit dem Element
(1,2,3,5/)

1 darin, $p(4)$ Zerlegungen mit dem Element 3 und $p(2)$
(1,2,3,5/)

Zerlegungen mit dem Element 5 darin. Um nun " $p(7)$ "
(1,2,3,5/)

abzuzählen, gehen wir folgendermassen vor:

Wir nehmen zuerst die Zerlegungen, die ein erstes Element, beispielsweise das Element 2 enthalten. Davon gibt es, wie schon gesagt, $p(5)$. Dazu zählen wir die Zerlegungen,
(1,2,3,5/)

die ein zweites Element enthalten, das Element 2 jedoch nicht mehr. Wenn das zweite Element 1 sein soll, so gibt das $p(6)$ mögliche Fälle. Jetzt addieren wir dazu die Anzahl
(1,3,5/)

der Zerlegungen, die ein drittes Element enthalten, die ersten beiden jedoch nicht mehr. Als drittes Element nehmen wir 3. So gibt es $p(4)$ Möglichkeiten. Genaugleich geht es
(1,5/)

weiter: Immer muss ein neu hinzugenommenes Element vorkommen, während die schon behandelten Elemente verboten sind.

$$p(7)_{(1,2,3,5/)} = p(5)_{(1,2,3,5/)} + p(6)_{(1,3,5/)} + p(4)_{(3,5/)} + p(2)_{(5/)}$$

Auf diese Weise erhalten wir alle zu zählenden Zerlegungen. Es ist nicht wichtig, welche Reihenfolge die Elemente einnehmen, wir müssen einfach alle einmal nehmen.

Die Verallgemeinerung bietet nun keine Schwierigkeiten mehr:

$$(26) \quad p(n)_{(G=\{g_k \mid 1 \leq k \leq m\})} = \sum_{i=1}^m \left[p(n-g_i)_{(G=\{g_k \mid 1 \leq k \leq m\})} \right]$$

Wir haben nun eine Möglichkeit, $p(n)$ rekursiv zu berechnen.

Allerdings braucht dieser Algorithmus relativ viel Rechenaufwand. Zum Glück haben wir aber heute Computer, mit denen Rekursionsalgorithmen viel an Schrecken verlieren.

Wir könnten nun $p(n)$ selbst mit diesem Verfahren berechnen, dafür gibt es aber noch bessere Algorithmen, die wir später kennenlernen werden.

Anwendung:

Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Betrag von n Franken mit den in der Schweiz gebräuchlichen Geldeinheiten zu wechseln?

Wir haben diese Frage in § 1 schon behandelt. Damals schenkten wir jedoch der Reihenfolge der Geldausgabe auch noch Bedeutung. Jetzt können wir die Antwort direkt geben:

$$x = p(20n)_{(1,2,4,10,20,40,100,200,400,1000,2000,4000,10000,20000)}$$

Wir greifen ein paar Werte heraus:

Fr.--,20	4	Fr.-2,00	293
Fr.--,50	13	Fr.-5,00	6149
Fr.-1,00	50	Fr.-10,00	104'561

Hier noch eine zunächst erstaunliche Feststellung :

Sind zwei Beträge nur um 5 Rappen verschieden, und ist die Rappenanzahl des ersten Betrags gerade, so lassen sich die beiden Beträge auf gleichviele Arten wechseln.

Erklärung: Hängen wir an jede Zerlegung des kleineren Betrags 5 Rappen an, so erhalten wir eine Zerlegung des grösseren Betrags.

Notieren wir noch die ersten 40 Werte bis 2 Franken:

0,00	1	1,00	50
0,05	1	1,05	50
0,10	2	1,10	62
0,15	2	1,15	62
0,20	4	1,20	77
0,25	4	1,25	77
0,30	6	1,30	93
0,35	6	1,35	93
0,40	9	1,40	112
0,45	9	1,45	112
0,50	13	1,50	134
0,55	13	1,55	134
0,60	18	1,60	159
0,65	18	1,65	159
0,70	24	1,70	187
0,75	24	1,75	187
0,80	31	1,80	218
0,85	31	1,85	218
0,90	39	1,90	252
0,95	39	1,95	252
1,00	50	2,00	293

Wir können einmal versuchen, ein paar bekannte zahlentheoretische Probleme mit der Schreibweise zu formulieren, die wir zum Beschreiben der Komplexe gebrauchen :

Im Folgenden soll P die Menge der Primzahlen p sein.

Der Satz von Fermat:

Jede Primzahl, welche durch 4 dividiert den Rest 1 ergibt, kann abgesehen von der Reihenfolge eindeutig als Summe von zwei Quadratzahlen dargestellt werden.

$$\begin{matrix} (2/) \\ p(p) \\ (G=\{g|\sqrt{g}\in\mathbb{N}\}/) \end{matrix} = 1, \quad p \equiv 1 \pmod{4}$$

Beispiel: $\begin{matrix} (2/) \\ "p(13)" \\ (G=\{g|\sqrt{g}\in\mathbb{N}\}/) \end{matrix}$



Der Satz von Lagrange:

Jede natürliche Zahl n lässt sich als Summe von höchstens vier ganzzahligen Quadraten darstellen.

$$\sum_{i=1}^4 \begin{matrix} (i/) \\ p(n) \\ (G=\{g|\sqrt{g}\in\mathbb{N}\}/) \end{matrix} > 0$$

Beispiel: $\begin{matrix} "p(7)" \\ (G=\{g|\sqrt{g}\in\mathbb{N}\}/) \end{matrix}$



Die Goldbachsche Vermutung :

Jede gerade Zahl grösser als 2 ist Summe zweier Primzahlen.

$$\begin{matrix} (2/) \\ p(2m) > 0, \quad m > 1 \\ (P/) \end{matrix}$$

Beispiel: $\begin{matrix} (2/) \\ "p(8)" \\ (P/) \end{matrix}$



Der grosse Satz von Fermat:

Es gibt für keinen ganzzahligen Exponenten $n > 2$ natürliche Zahlen x, y, z , die der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ genügen.

$$\bigwedge_{n > 2} \frac{p(z^n)}{(G = \{g \mid g^{1/n} \in \mathbb{N}\})} = 0$$

3 . Der Zerlegungskomplex " $p(n)$ ($G/e_1, e_2, e_3 \dots$)"

Satz (25) kann noch verallgemeinert werden:

$$(27) \quad \frac{p(n)}{(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)} = \frac{p(n-e_1-e_2-e_3-\dots-e_m)}{(G/)}$$

Selbstverständlich gilt das nur, wenn $e_1, e_2, e_3 \dots e_m$ Elemente sind von G . Sonst gibt $\frac{p(n)}{(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)}$ Null.

Der Beweis geht genauso wie bei Satz (25) :

Wir schieben die obligatorischen Elemente einfach an den Rand und sehen, wieviele Zerlegungen wir noch hineinlegen können.

Wir haben einmal definiert, dass mit $\frac{p(n)}{(/e)}$ diejenigen

Zerlegungen gemeint seien, in denen e das grösste Element sein soll. Diese Anzahl ist auch gleich $\frac{p(n)}{(1, 2, \dots, e-1, e/e)}$.

Nun wissen wir also auch, dass $\frac{p(n)}{(/e)} = \frac{p(n-e)}{(1, 2, \dots, e-1, e/)}$.

$$(27a) \quad \frac{p(n)}{(/e)} = \frac{p(n-e)}{(1, 2, \dots, e-1, e/)}$$

Da ^{wir übergang} die Zerlegungskomplexe " $p(n)$ " im Anhang die Zerlegungen ^{zu} nach der Grösse ihrer grössten Elemente geordnet haben, können wir die Verhältnisse dort direkt sehen.

4. Der Zerlegungskomplex $p(\frac{n}{e})$

Im letzten Abschnitt haben wir schon etwas gesagt über die Anzahl Zerlegungen mit dem grössten Element e .

Gehen wir vom Satz (27a) aus:

$$p(\frac{n}{e}) = p(n-e)_{(1,2,3,\dots,e/)}$$

Nach Satz (26) können wir weiter umformen:

$$p(n-e)_{(e,e-1,\dots,2,1/)} = p(n-e-e)_{(e,e-1,\dots,2,1/)} + p(n-e-e+1)_{(e-1,\dots,2,1/)} + \dots + p(n-e-1)_{(1/)}$$

Jetzt gehen wir mit Satz (27a) wieder zurück.

$$p(\frac{n}{e}) = p(\frac{n-e}{e}) + p(\frac{n-e}{e-1}) + \dots + p(\frac{n}{1})$$

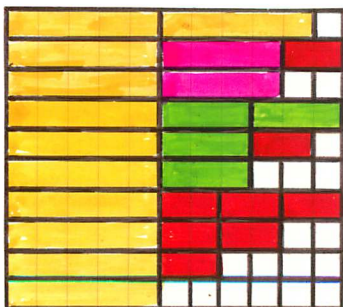
So haben wir einen neuen Satz gewonnen:

$$(28) \quad p(\frac{n}{e}) = \sum_{i=1}^e p(\frac{n-e}{i})$$

In Worten ausgedrückt, wird er trivial:

Der Komplex, der die Länge n hat und das grösste Element e in jeder Zerlegung hat, hat gleichviele Zerlegungen, wie der Komplex mit der Länge $n-e$, der die Elemente 1 bis e als grösste Elemente enthält.

Beispiel: $p(\frac{11}{5})$



In §1 Abschnitt 2 haben wir die Frage behandelt, wieviele Lösungen die Gleichung

$\sum_{i=1}^z e_i = n$ hat, wenn nur ganzzahlige positive Lösungen in Frage kommen.

Ich glaube, wir sind nun in der Lage, das allgemeine Problem wenigstens in Ansätzen zu erfassen:

Wieviele ganzzahlige positive Lösungen hat die Gleichung

$$\sum_{i=1}^m (\epsilon_i \cdot e_i) = n$$

Die Koeffizienten sind natürlich alle gegeben.

Um uns ein Bild von der Schwierigkeit der Problemstellung zu machen, untersuchen wir zuerst ein paar spezielle Fälle.

Gegeben ist die Gleichung $2e_1 + e_2 = n$. Wieviele ganzzahlige positive Lösungen hat sie?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4

$$x = \text{Int}\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Nun sehen wir uns die Gleichung $2e_1 + e_2 + e_3 = n$ an.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0	0	1	2	4	6	9	12	16

Rekursives Bildungsgesetz für x: $f(n+1) = f(n) + \text{Int}\left(\frac{n-1}{2}\right)$

Wir bilden die Reihe zur Folge vorhin.

Für gerade n heisst das Bildungsgesetz $x = \frac{n^2 - 4n + 4}{4}$

Für ungerade n heisst das Bildungsgesetz $x = \frac{n^2 - 4n + 3}{4}$

Wir nehmen die beiden Formeln zusammen:

$$x = \frac{n^2 - 4n + 3 + \left(\text{Int}\left(\frac{n}{2}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)}{4}$$

Jetzt untersuchen wir $2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x	0	0	0	0	1	3	7	13	22	34	50	70	95	125

Wenn wir die Differenzen bilden, können wir wieder die Resultate von vorhin entdecken. Wir unterscheiden wieder in gerade und ungerade n , bilden mit Hilfe eines Gleichungssystems die Bildungsgesetze, und verbinden die beiden Formeln:

$$x = \frac{n^3 - 8n^2 + 19n - 12 - \left(\left(\text{Int}\left(\frac{n}{2}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{2}\right) \right) \cdot (n^2 - 7n + 12) \right)}{8}$$

Man sieht, dass es immer mühsamer wird, direkte Algorithmen zu finden.

Zuletzt versuchen wir uns noch an $3e_1 + 2e_2 = n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2

Bildungsgesetz: $x = \text{Int}\left(\frac{n+1}{6}\right) + \text{Int}\left(\frac{n}{6}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-1}{6}\right)$

Auf diese Art und Weise kommen wir nicht weiter.

Definition:

Wir bezeichnen die Anzahl positiver ganzzahliger Lösungen der Gleichung $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3 + \dots + \varepsilon_m e_m = n$ mit der Funktion $h(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m / n)$.

Beispiele:

$$h(1, 2/10) = 4$$

$$h(1, 1, 1, 2/10) = 34$$

$$h(1, 1, 2/10) = 16$$

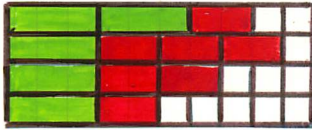
$$h(2, 3/10) = 1$$

Nun können wir das Resultat, das wir in §1 Abschnitt 2 erhalten haben, so formulieren:

$$h(m \cdot 1/n) = p_{\dots}^{\left(\frac{m}{\dots}\right)}(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{m-1} \right\rfloor$$

Wenn alle ε verschieden sind, so haben wir die Möglichkeit, die Lösungen mit den Cuisenaire-Stäbchen darzustellen:

Haben wir beispielsweise die Gleichung $3e_1 + 2e_2 + e_3 = 10$ vor uns, so können wir die Lösungen als Komplex darstellen.



Dieser Zerlegungskomplex heisst aber auch " $p(10)$
 $(1,2,3/1,2,3)$ ".

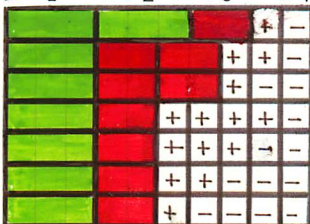
Es gilt also: $h(1,2,3/10) = \frac{p(10)}{(1,2,3/1,2,3)} = 4$

Allgemein können wir formulieren:

Wenn alle Koeffizienten der Gleichung $\varepsilon'_1 e_1 + \varepsilon'_2 e_2 + \dots + \varepsilon'_w e_w = n$ verschieden sind, so gilt für die Anzahl ganzer positiver Lösungen : $h(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_w / n) = \frac{p(n)}{(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_w / \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_w)}$

Sobald aber auch mehrmals gleiche ε vorkommen, haben wir diese praktische Darstellungsmöglichkeit nicht mehr. Wir müssen Elemente der gleichen Länge sonst noch irgendwie unterscheiden können. Das machen wir, indem wir die Elemente noch mit Zeichen beschriften.

Hier sehen wir beispielsweise den Komplex, der zur Gleichung $3e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 = 10$ gehört.



Wie berechnen wir nun aber $h(3,2,1,1/10)$? Wir müssen wieder rekursiv vorgehen. Im folgenden soll " $h(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m / n)$ " den Komplex meinen, der zur Gleichung $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_m e_m = n$ gehört. " $h(3,2,1,1/10)$ " kann aus den Komplexen " $h(3,2,1/9)$ " und " $h(3,2,1,1/9)$ " gebildet werden: Wir hängen an jede Zerlegung von " $h(3,2,1/9)$ " und an jede Zerlegung von " $h(3,2,1,1/9)$ " ein Element der Länge 1, das mit einem Zeichen beschriftet worden ist, das auf keinem Element der Länge 1 im Komplex " $h(3,2,1/9)$ " zu finden ist :

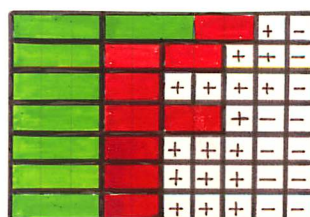
" $h(3,2,1/9)$ "



" $h(3,2,1,1/9)$ "



" $h(3,2,1,1/10)$ "



Es gilt jetzt also die Gleichung:

$$h(3,2,1,1/10) = h(3,2,1/9) + h(3,2,1,1/9)$$

Weil das so gut ging, verallgemeinern wir kurz entschlossen zu folgendem Satz :

$$h(a_1 \varepsilon'_1, a_2 \varepsilon'_2, \dots, a_w \varepsilon'_w / n) = h(a_1 \varepsilon'_1, a_2 \varepsilon'_2, \dots, a_w \varepsilon'_w / n - \varepsilon'_w) + h(a_1 \varepsilon'_1, a_2 \varepsilon'_2, \dots, (a_w - 1) \varepsilon'_w / n - \varepsilon'_w)$$

Wir müssen aber noch zur Bedingung machen, dass $a_w - 1$ nicht kleiner als 1 werden darf. Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir hier, man sieht ihn aber leicht ein, wenn man den Spezialfall von vorhin versteht.

Jetzt sind wir in der Lage, das allgemeine Problem $h(a_1 \varepsilon'_1, a_2 \varepsilon'_2, \dots, a_w \varepsilon'_w / n)$ sukzessive zu reduzieren auf das Problem $h(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_w / n)$, das wir ja lösen konnten.

Was heisst das nun praktisch ?

Sehen wir jetzt mit unserm Wissen die Gleichung $2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = n$ nochmals an:

Die Anzahl ganzzahliger positiver Lösungen beträgt $h(2, 3 \cdot 1 / n)$.

Zuerst berechnen wir $h(2, 1 / n)$:

$$h(2, 1 / n) = \frac{p(n)}{(1, 2 / 1, 2)} = \frac{p(n-3)}{(1, 2 /)} \quad (\text{Nach Satz (27)})$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$h(2, 1 / n)$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
$h(2, 1, 1 / n)$	0	0	0	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
$h(2, 1, 1, 1 / n)$	0	0	0	0	1	3	7	13	22	34	50	70	95	125

Zuerst haben wir die Werte für $\frac{p(n-3)}{(1, 2 /)}$ hingeschrieben.

Das Weitere konnte mühelos durch Addieren wie eingezeichnet gebildet werden.

Wieviele ganzzahlige, positive Lösungen hat die Gleichung

$$5e_1 + 5e_2 + 3e_3 + e_4 + e_5 + e_6 = 16 \quad ?$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$h(5,3,1/n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4	4
$h(5,5,3,1/n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$h(5,5,3,1,1/n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
$h(5,5,3,1,1,1/n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Es gibt eine Lösung : nämlich

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 16$$

Die Antwort hätten wir auch am Anfang geben können, unser Verfahren hat sich aber auch bewährt.

Wieviele ganzzahlige, positive Lösungen hat die Gleichung

$$4e_1 + 4e_2 + 2e_3 + e_4 + e_5 = 15$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$h(4,2,1/n)$	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	4	4	6	6	9
$h(4,2,1,1/n)$	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	6	10	14	20	26
$h(4,4,2,1,1/n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	6

Es gibt 6 Lösungen. Wir stellen sie mit unserm Cuisenairematerial dar:

+	-				+	+	-
+	-				+	-	-
+	-		+	+	+	+	-
+	-		+	+	+	-	-
+	-		+	+	-	-	-
+	-		+	-	-	-	-

5. Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix}$

Nach diesem Abstecher in die Welt einer speziellen Art Diophantischer Gleichungen, beschäftigen wir uns mit dem Komplex

$$\begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix}$$

Betrachten wir den Komplex $\begin{matrix} (z/) \\ p(10) \end{matrix}$ im Anhang und zählen die Zerlegungen, in denen $\bar{e}$ das grösste Element ist:

$\bar{e}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\begin{matrix} p(10) \\ (/e) \end{matrix}$	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

Und nun zählen wir im gleichen Komplex die Anzahl Zerlegungen mit z Elementen :

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\begin{matrix} (z/) \\ p(10) \end{matrix}$	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

Wir stellen fest, dass $\begin{matrix} (x/) \\ p(10) \end{matrix} = \begin{matrix} (x/) \\ p(10) \end{matrix}$ ist, und vermuten , dass auch allgemein gilt: $\begin{matrix} (x/) \\ p(n) \end{matrix} = \begin{matrix} (x/) \\ p(n) \end{matrix}$. Um diese

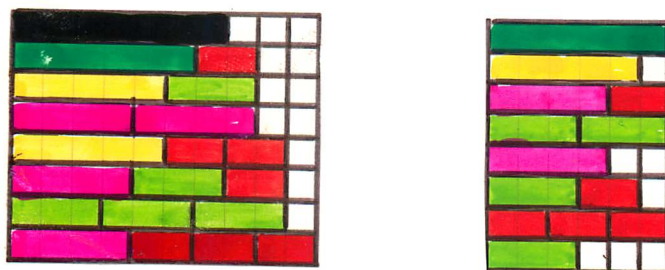
Vermutung nun zu beweisen, müssen wir etwas ausholen.

Beweis :

Wir verkleinern jedes Element aus $\begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix}$ um 1. Was entsteht, ist ein Komplex der Länge $n-z$. In ihm kommen maximal z Elemente vor, dann nämlich, wenn alle Elemente grösser als 1 waren. Minimal gibt es im neuen Komplex ein Element, genau dann, wenn in $\begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix}$ alles Einer sind ausser einem Element. Waren nur Elemente der Länge 1 vorhanden, so ist $z=n$ und der neue Komplex hat die Länge 0, mit 0 Elementen. Dieser neue Komplex heisst $\begin{matrix} (1,2,\dots,z/) \\ p(n-z) \end{matrix}$, weil die beschriebene Abbildung eindeutig ist, alle Zerlegungen der Länge $n-z$ sind, und ~~und~~ alle Zerlegungen mit $1,2,\dots,z$ Elementen erreicht werden.

Sehen wir uns das an einem Beispiel an:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} (4/) \\ "p(10)" \end{array} & & \begin{array}{c} (1,2,3,4/) \\ "p(6)" \end{array} \end{array}$$



Mit diesem Verfahren haben wir also folgenden Satz gewonnen:

$$(29) \quad \begin{array}{c} (z/) \\ p(n) \end{array} = \begin{array}{c} (1,2,\dots,z/) \\ p(n-z) \end{array}$$

Wir können ihn auch so formulieren:

$$\begin{array}{c} (z/) \\ p(n) \end{array} = \begin{array}{c} (1/) \\ p(n-z) \end{array} + \begin{array}{c} (2/) \\ p(n-z) \end{array} + \dots + \begin{array}{c} (z/) \\ p(n-z) \end{array}$$

Nach Satz (28) gilt aber auch:

$$\begin{array}{c} p(n) \\ (/e) \end{array} = \begin{array}{c} p(n-\bar{e}) \\ (/1) \end{array} + \begin{array}{c} p(n-\bar{e}) \\ (/2) \end{array} + \dots + \begin{array}{c} p(n-\bar{e}) \\ (/e) \end{array}$$

Wir haben nun für $\begin{array}{c} (z/) \\ p(n) \end{array}$ und $\begin{array}{c} p(n) \\ (/e) \end{array}$ das gleiche Bildungsgesetz.

Jetzt gehen wir induktiv vor. Wir prüfen zuerst für $n=1$, ob

$\begin{array}{c} (x/) \\ p(n) \end{array} = \begin{array}{c} p(n) \\ (/x) \end{array}$. Das ist der Fall. Nun vergrössern wir n schrittweise $\begin{array}{c} (x/) \\ p(n) \end{array}$ und bilden jedesmal alle möglichen $\begin{array}{c} p(n) \\ (/x) \end{array}$ und alle $\begin{array}{c} (x/) \\ p(n) \end{array}$.

Diese sind dann immer identisch, da auch für alle kleineren n die Identität nachgewiesen ist und nach den Sätzen (28) und (29) $\begin{array}{c} p(n) \\ (/e) \end{array}$ und $\begin{array}{c} (z/) \\ p(n) \end{array}$ aus einer Summe von Resultaten gebildet werden, die ein kleineres n zur Berechnung gebrauchen.

Unsere zu Beginn des Abschnitts geäusserte Vermutung wird nun zum Satz:

$$(30) \quad \begin{array}{c} (x/) \\ p(n) \end{array} = \begin{array}{c} p(n) \\ (/x) \end{array}$$

Satz (30) ist deshalb wichtig , weil wir nun
 $\binom{z/}{p(n)}$ für alle z relativ leicht berechnen können.

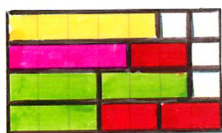
Wir wenden jetzt Satz (27a) an:

$$\binom{z/}{p(n)} = \binom{n}{z} = \binom{n-z}{1,2,3,\dots,z/}$$

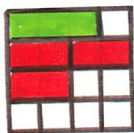
$$(30a) \quad \binom{z/}{p(n)} = \binom{n-z}{1,2,3,\dots,z/}$$

Beispiel :

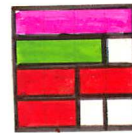
$\binom{3/}{p(7)}$



" $p(4)$ "
 $(1,2,3/)$



$\binom{1,2,3/}{p(4)}$



(Nach Satz(29))

$$(30b) \quad \binom{1,2,3,\dots,z/}{p(n)} = \binom{n}{1,2,3,\dots,z/}$$

Wenn wir eine Lösungsformel für $p^{(z/)}(n)$ entwickeln könnten, hätten wir auch gerade eine für $p(n)$. Das sehen wir am folgenden Satz :

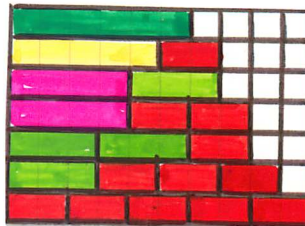
$$(31) \quad p(n) = \frac{((x-1) \cdot n /)}{p(x \cdot n)}$$

Beispiel:

"p(5)"



"p(10)"



Beweis:

Wir könnten den Beweis ohne weiteres mit Hilfe der bisherigen Sätzen führen, wir versuchen es nun aber direkt:

Wir geben ein Verfahren an, das "p(n)" überführt in $p^{((x-1) \cdot n /)}(x \cdot n)$.

Wir nehmen eine Zerlegung aus "p(n)". Jedes Element, das in dieser Zerlegung vorkommt, wird um 1 vergrößert. Was noch übrigbleibt, bis wir die Länge $x \cdot n$ haben, wird mit Einern aufgefüllt. Diese Anzahl ^{die ser} Elemente mit der Länge 1 nennen wir y. Wenn die Zerlegung vorher z Elemente hatte, so gilt:

Neue Länge: $x \cdot n = n + z + y$

Neue Element-

anzahl: $(x-1) \cdot n = z + y$

Diese beiden Gleichungen sind identisch. Das heisst, y ist bei Angabe von z, n und x vollständig bestimmt. Die Abbildung, die die beiden Komplexe ineinander überführt, ist also eindeutig.

Gibt es denn direkte Formeln für $p(n)$?

$$\begin{matrix} (1/) \\ p(n) = 1 \end{matrix}$$

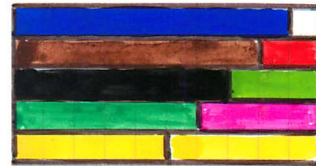
Beispiel: " $p(10)$ "



$$\begin{matrix} (2/) \\ p(n) = \text{Int}\left(\frac{n}{2}\right) \end{matrix}$$

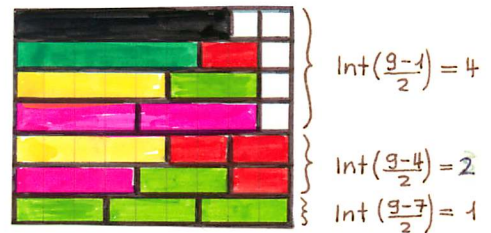
Ein Fall mit grosser praktischer Bedeutung.

Beispiel: " $p(10)$ "



$$\begin{matrix} (3/) \\ p(n) = \text{Int}\left(\frac{n-1}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-4}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-7}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-10}{2}\right) + \dots \end{matrix}$$

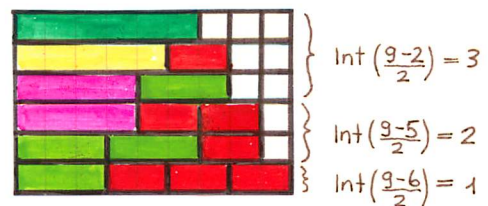
Am Beispiel " $p(9)$ " können wir uns das Bildungsgesetz klarmachen:



Diese Formel für $p(n)$ können wir später auch anwenden. Je grösser z aber wird, je aufwendiger wird eine direkte Formel:

$$\begin{matrix} (4/) \\ p(n) = \text{Int}\left(\frac{n-2}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-5}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-8}{2}\right) + \dots \\ + \text{Int}\left(\frac{n-6}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-9}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-12}{2}\right) + \dots \\ + \text{Int}\left(\frac{n-10}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-13}{2}\right) + \text{Int}\left(\frac{n-16}{2}\right) + \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{matrix}$$

Beispiel: " $p(9)$ "



Natürlich wird bei den Formeln, die wir angegeben haben, immer nur solange gerechnet, wie positive Werte herauskommen.

Um es ganz klar zu machen, formulieren wir es noch etwas genauer :

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \begin{aligned} & \text{(1/)} \\ & p(n) = 1 \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} & \text{(2/)} \\ & p(n) = \text{Int}\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} & \text{(3/)} \\ & p(n) = \sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n-1}{3})} \text{Int}\left(\frac{n-1-3i}{2}\right) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Diese 3 Formeln für z gleich 1, 2 oder 3 sind wichtig. Die allgemeine Formel hat fast nur noch theoretische Bedeutung:

$$(33) \quad p(n) \stackrel{(z/)}{=} \sum_{i_1=0} \sum_{i_2=0} \sum_{i_3=0} \dots \sum_{i_{z-1}=0} \text{Int}\left\{ \frac{n-z+2-\sum_{j=1}^{z-1} ((z-j+1) \cdot i_j)}{2} \right\}$$

Erstaunlicherweise ist diese Formel aus dem Blickwinkel der Informatik noch recht leistungsfähig. Die Programmation ist leicht und was noch wichtiger ist: Da es sich nicht um ein Rekursionsalgorithmus handelt, stossen wir auch nicht auf Speicherprobleme. Den Nachteil können wir schon an der Form sehen : Für grosse n und grosse z wird der Zeitaufwand für den Gebraucher untragbar.

Wir haben nun schon ein paarmal die Integerfunktion gebrauchen können. Es wäre nicht nur eine interessante, sondern auch eine wichtige Aufgabe, Integerfunktionen systematisch zu untersuchen.

Zum Schluss von diesem Abschnitt müssen wir doch noch der Vollständigkeit halber auch auf den allgemeinen Fall $(Z/)$ eingehen.
 $"p(n)"$

$$(34) \quad \frac{(z_1, z_2, z_3 \dots z_m /)}{p(n)} = \sum_{i=1}^m \frac{(z_i /)}{p(n)}$$

(34) gilt, da zwei Komplexe $"p(n)"$ und $"p(n)"$ keine gemeinsame Zerlegung haben.

6. Der Zerlegungskomplex $\frac{(z /)}{p(n)}$
 $(/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)$

Wieder können wir (25) erweitern:

$$(35) \quad \frac{(z /)}{p(n)} \cdot \frac{(z-m /)}{p(n-e_1-e_2-e_3 \dots -e_m)} = \frac{(z-m /)}{p(n-e_1-e_2-e_3 \dots -e_m)}$$

Wieder schieben wir die obligatorischen Elemente an den Rand und spalten sie ab. Der neu entstandene Komplex hat nur noch $z-m$ Elemente pro Zerlegung. Die Länge beträgt $n-e_1-e_2-e_3 \dots -e_m$.

Beispiel:

$$\frac{(4 /)}{p(11)} \quad \frac{(2 /)}{p(8)}$$

$(/1, 2)$



7. Der Zerlegungskomplex $"p \begin{pmatrix} z/ \\ n \\ e \end{pmatrix}"$

Es geht genauso, wie in Satz (35).

$$(36) \quad \begin{pmatrix} z/ \\ p \begin{pmatrix} n \\ e \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1/ \\ p(n-e) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4/ \\ p \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/ \\ p(6) \end{pmatrix}$$

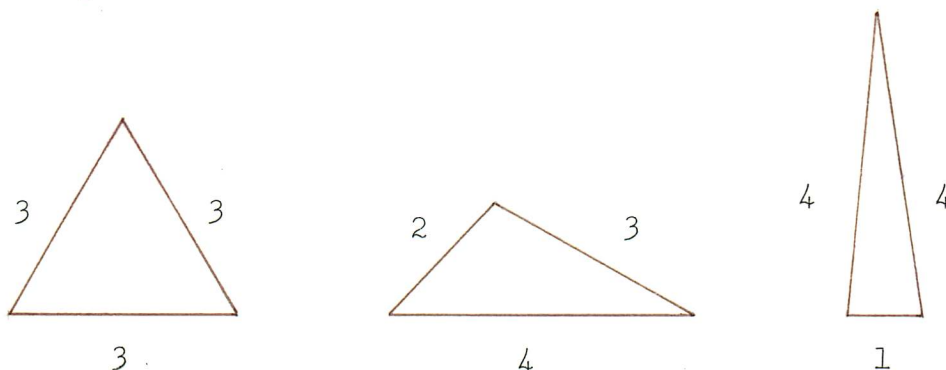


Anwendung:

Wieviele verschiedene Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und Umfang n gibt es, wenn gespiegelte Dreiecke als identisch gelten sollen ?

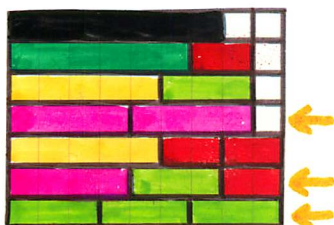
beim Dreieck

Beispiel : $n=9$



Für $n=9$ gibt es 3 Möglichkeiten.

Zuerst könnte man vielleicht auf den Gedanken kommen, dass die Anzahl Möglichkeiten x gleich der Anzahl Zerlegungen des Komplexes ${}^{(3/)}_p(n)$ sei. Das ist zwar nicht ganz richtig, wir befinden uns aber auf dem richtigen Weg. Sehen wir uns einmal den Komplex ${}^{(3/)}_p(9)$ an :



${}^{(3/)}_p(9)$

Von den 7 Zerlegungen sind 3 günstig. Was für eine Bedingung muss erfüllt sein ? Die Dreiecksungleichung muss gelten. Die Summe von zwei Elementen der Zerlegung muss grösser sein als das dritte Element. Wir können es auch anders formulieren: Das grösste Element ist kleiner als $n/2$.

$$x = \begin{matrix} {}^{(3/)} \\ p(n) \\ (1, 2, 3 \dots \text{Int}(\frac{n-1}{2})) \end{matrix}$$

denn alle Elemente, die grösser sind als $\text{Int}(\frac{n-1}{2})$, sind verboten.

$$\begin{matrix} (3/) \\ p(n) \\ (1,2,3\dots\text{Int}(\frac{n-1}{2})/) \end{matrix} = \begin{matrix} (3/) & (3/) & (3/) & \dots & (3/) \\ p(n) & -p(\frac{n}{n}) & -p(\frac{n}{n-1}) & \dots & -p(\frac{n}{\text{Int}(\frac{n}{2})}) \end{matrix}$$

denn so können wir die Zerlegungen mit verbotenen Elementen auch aussieben.

Mit Satz (36) können wir noch weiter vereinfachen:

$$\begin{matrix} (3/) & (3/) & (3/) & \dots & (3/) \\ p(n) & -p(\frac{n}{n}) & -p(\frac{n}{n-1}) & \dots & -p(\frac{n}{\text{Int}(\frac{n}{2})}) \end{matrix} = \begin{matrix} (3/) & (2/) & (2/) & \dots & (2/) \\ p(n) & -p(0) & -p(1) & \dots & -p(n-\text{Int}(\frac{n}{2})) \end{matrix}$$

Nun benützen wir Satz (32):

$$= \sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n-1}{2})} \text{Int}(\frac{n-1-3i}{2}) - \text{Int}(\frac{0}{2}) - \text{Int}(\frac{1}{2}) - \dots - \text{Int}(\frac{\text{Int}(\frac{n}{2})}{2})$$

und haben die Lösung:

$$x = \sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n-1}{2})} \text{Int}(\frac{n-1-3i}{2}) - \sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n}{2})} \text{Int}(\frac{i}{2})$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3	5	4	7	5	8	7	10	8

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x	12	10	14	12	16	14	19	16	21	19	24	21	27	24	30	27	33	30	37	33

Interessant an dieser Funktion ist, dass $f(2m-1)=f(2m+2)$ ist. Auch folgende, durch Vergleichen mit schon früher erhaltenen Resultaten gewonnene Tatsache, zeigt, dass noch viele Geheimnisse verborgen sind:

Es lassen sich gleichviele Dreiecke mit ganzzahligen Seiten und Umfang $2m-1$ bilden, als es Tripel natürlicher Zahlen gibt, welche die Gleichung $3a_1+2a_2+a_3 = m+4$ erfüllen.

Dies ist ein so reizvolles Thema, dass wir noch etwas weiterfahren:

Wieviele rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten und Umfang $n=2m$ gibt es? Wieder gelten gespiegelte Dreiecke als identisch.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c-b)(c+b)} \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\begin{aligned} \text{Wir substituieren: } c-b &= 2u^2 \\ c+b &= 2v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{u^2 \cdot v^2} = uv \\ b &= (v^2 - u^2)/2 \\ c &= (v^2 + u^2)/2 \end{aligned} \quad (\text{Durch Auflösen der beiden Substitutionsgleichungen nach } b \text{ und } c \text{ erhalten.})$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite noch mit 2 und erhalten dann für jede Seite eine Art Parametergleichung, die sicherstellt, dass das Dreieck rechtwinklig ist:

$$\begin{aligned} a &= 2uv \\ b &= v^2 - u^2 \\ c &= v^2 + u^2 \end{aligned}$$

$$a+b+c = n = 2m$$

$$2uv + 2v^2 = 2m$$

$$uv + v^2 = m$$

$$u = \frac{m}{v} - v$$

Wir müssen jetzt v finden, welche Teiler sind von m und für die gilt:

$$v < \frac{m}{v}, \text{ da } u \text{ auch positiv sein muss, wenn } a \text{ positiv ist.}$$

$$v < \sqrt{m}$$

und da $v > u$ sein muss, wenn b positiv werden soll, muss auch noch gelten:

$$v > \frac{m}{v} - v$$

$$v > \sqrt{\frac{m}{2}}$$

Die Anzahl möglicher Dreiecke ist also gleich der Anzahl möglicher v , für die gilt:

- v ist ein Teiler von m , dem halben Umfang.
- v ist grösser als $\sqrt{m/2}$
- v ist kleiner als $\sqrt{m}$

Mit der Formel $\sum_{v=1}^m \left(\text{Int}\left(\frac{m}{v}\right) - \text{Int}\left(\frac{m-1}{v}\right) \right)$ erhalten wir

die Anzahl Teiler von m . Wir müssen in diesem Algorithmus v nur noch einschränken und erhalten dann die Lösung :

$$x = \sum_{v=\text{Int}(\sqrt{m/2})+1}^{\text{Int}(\sqrt{m}-1/2m)} \left(\text{Int}\left(\frac{m}{v}\right) - \text{Int}\left(\frac{m-1}{v}\right) \right)$$

(Für die obere Schranke in der Summenformel haben wir deshalb noch $1/2m$ weggezählt, da sonst für eine Quadratzahl als m die Bedingung $v < \sqrt{m}$ nicht ^{immer} gelten würde.)

$x=1$ für $m= 6,12,15,20,24,28,30,35,40,42,45,48,54,56,60,63,\dots$

$x=2$ für $m= 120,180,240,252,336,360,378,420,432,480,\dots$

$x=3$ für $m= 840,1080,1260,1440,1680,1980,2016,2160,\dots$

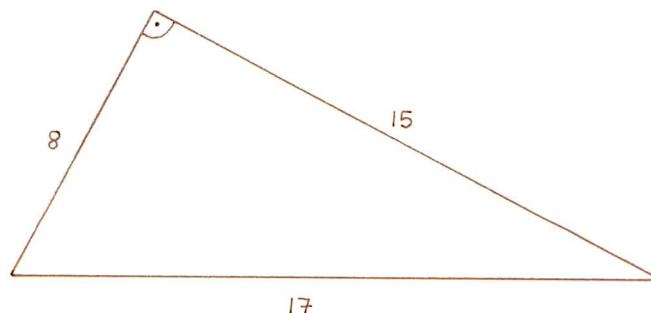
$x=4$ für $m= 2520,5040,5544,6300,\dots$

$x=5$ für $m= 10080,13860,15120,\dots$

Beispiel $m=20$: $v=4, u=1$

$a=8, b=15, c=17$

$64+225=289$



Probleme von dieser Art gibt es haufenweise:

- Wieviele Tetraeder mit ganzzahligen Kantenlängen und der Gesamtkantenlänge n gibt es?
- Wieviele Dreiecke mit Umfang n und ganzzahligen Seiten und Höhen gibt es?
- Welche Dreiecke haben integrale Seiten und Schwerlinien? Wieviele gibt es davon, wenn der Umfang n betragen soll?
- Welche Polygone haben integrale Seiten und Diagonalenlängen? Speziell: Wieviele Rechtecke mit diesen Bedingungen und Umfang n gibt es?

Diesen Fragestellungen sieht man die Problematik meist gar nicht an.

Beim ersten auf dieser Seite angeführten Problem hat man schon Hürden zu nehmen, wenn es um Symmetrien der Tetraeder geht. Welche Permutationen der Kanten bilden einen neuen und nicht nur einen gespiegelten Tetraeder?

Das zweite Problem führt zu den Heron'schen Dreiecken hin, Dreiecken mit rationalen Seiten und rationalem Inhalt.

Die dritte und vierte Aufgabe bringt uns zu schwierigen Diophantischen Gleichungen.

8. Der Zerlegungskomplex $\binom{(/Y)}{p(n)}$

Dieser Komplex gehört zu unsern Sorgenkindern.

$$\binom{(/1)}{p(n)} = d(n)$$

Für $y=1$ ist es genausgleich wie beim Komplex $\binom{(/1)}{p^*(n)}$.

Was machen wir für $y=2$?

Sehen wir uns die Zerlegungskomplexe $\binom{(/2)}{p(n)}$ im Anhang an:

Um die Anzahl Zerlegungen zu zählen, könnten wir alle Möglichkeiten aufsummieren, die wir haben, mit zwei Elementen einen Komplex aufzubauen, der beide Elemente enthalten muss. Dies ist zu umständlich.

Das am wenigsten üble Verfahren geht so:

Wir zählen die Zerlegungen, die das grösste Element i beinhalten. Es gibt $\binom{(/1)}{p(n-j \cdot i)}$ Zerlegungen, die das grösste Element i haben. Mit j bezeichnen wir die Anzahl dieser Elemente i in jeder Zerlegung.

$$\begin{aligned} \binom{(/2)}{p(n)} &= \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{\text{Int}(\frac{n-1}{i})} \binom{(/1)}{p(n-j \cdot i)} \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{\text{Int}(\frac{n-1}{i})} \sum_{k=1}^{i-1} \left[\text{Int}(\frac{n-j \cdot i}{k}) - \text{Int}(\frac{n-j \cdot i - 1}{k}) \right] \end{aligned}$$

Für $y=2$ haben wir also einen akzeptablen Algorithmus.

Wir können Satz (37) problemlos verallgemeinern:

$$\binom{(/y)}{p(n)} = \sum_{i=y}^{n-y \cdot (y+1)/2} \left[\sum_{j=1}^{\text{Int}(\frac{n-1}{i})} \binom{(/y-1)}{p(n-j \cdot i)} \right]$$

Solange wir aber $\binom{(/y)}{p(n)}$ nicht berechnen können, hat Satz (38)

nicht viel Wert.

Aber wie es so ist , erlebt man mit Sorgenkindern auch Ueberraschungen :

9. Der Zerlegungskomplex " $p(n)^{(z/y)}$ "

Wunderbarerweise gibt es hier eine ursprünglichere Form zu Satz (30) :

$$(39) \quad p(n)^{(x/y)} = p(\frac{n}{x})^{(/y)}$$

Beispiel :

$$p(10)^{(4/3)} = p(\frac{10}{4})^{(/3)}$$



Ich habe noch keinen Beweis für Satz (39) finden können. Wenn er aber bewiesen wäre, so ist auch gezeigt, dass Satz(30) richtig ist.

Noch eine kleine Ergänzung :

Wenn $z=y$ gilt, so haben wir gleichviele Elemente pro Zerlegung, wie verschiedene Elemente pro Zerlegung vorgeschrieben sind. Dafür können wir auch $\bar{p}(n)^{(z/z)}$ schreiben.

$$(64) \quad p(n)^{(z/z)} = \bar{p}(n)$$

$$10 \cdot |f| \downarrow p(n)$$

Wir summieren die Anzahl Zerlegungen der
Zerlegungskomplexe " $p(n)$ ", " $p(n)$ ", " $p(n)$ " ... usw.
 $(/f)$ $(/2f)$ $(/3f)$

2.5 = 1.

Damit erreichen wir alle Elemente der Länge f in " $p(n)$ ".

$$|f| \downarrow p(n) = p(n) + p(n) + p(n) + \dots$$

$(/f) \quad (/2f) \quad (/3f)$

Nach Satz (25) können wir das umformen:

$$|f| \downarrow p(n) = p(n-f) + p(n-2f) + p(n-3f) + \dots$$

$$(40) \quad |f| \downarrow p(n) = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{f})} p(n-i \cdot f)$$

Speziell ist vielleicht noch interessant:

$$|1| \downarrow p(n) = \sum_{i=1}^n p(n-i)$$

Ein Beispiel:

$$|2| \downarrow p(5) = p(3) + p(1) = 3 + 1 = 4$$

" $p(5)$ "

" $p(5)$ "
 $(/2)$

" $p(5)$ "
 $(/2, 2)$



Wir können $|f|\downarrow p(n)$ auch anders erhalten , indem wir nämlich an jede Zerlegung aus " $p(n-f)$ " ein Element f anhängen.

$$(44) \quad |f|\downarrow p(n) = |f|\downarrow p(n-f) + p(n-f)$$

Wir werden diese Form später auch wieder antreffen.

$$|f|\downarrow p(n) = |f|\downarrow p(n-f) + p(n-f)$$

$$|f|\downarrow p(n) = |f|\downarrow p(n-2f) + p(n-2f) + p(n-f)$$

$$|f|\downarrow p(n) = |f|\downarrow p(n-3f) + p(n-3f) + p(n-2f) + p(n-f)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$|f|\downarrow p(n) = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{f})} p(n-i \cdot f)$$

Wir sehen, dass durch die Entwicklung von Satz (44) Satz(40) entsteht.

$$11. |f| \downarrow p(n)_{(G/)}$$

In Abschnitt 3 haben wir Satz (27) kennengelernt.
Dank ihm können wir Satz (40) auch noch verallgemeinern:

$$(41) \quad |f| \downarrow p(n)_{(G/)} = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{f})} p(n-i \cdot f)_{(G/)} \quad , \quad f \in G$$

Es geht genauso wie im letzten Abschnitt .
Wenn f nicht ein Element ist aus G , so gibt es natürlich kein Element dieser Länge im Komplex.

Beispiele:

$$|2| \downarrow p(6)_{(1,2,5/)} = p(4)_{(1,2,5/)} + p(2)_{(1,2,5/)} + p(0)_{(1,2,5/)}$$

$$"p(6)"_{(1,2,5/)}$$



$$|3| \downarrow p(6)_{(1,2,5/)} = 0$$

Auch hier können wir den noch nicht entwickelten Satz aufstellen:

$$(45) \quad |f|_{\downarrow p(n)}^{(G/)} = |f|_{\downarrow p(n-f)}^{(G/)} + p(n-f)_{(G/)}$$

$$12. \quad |f| \downarrow p(n) \quad \begin{matrix} (z/) \\ \end{matrix}$$

Eigentlich geht es wieder genausgleich , wie in Abschnitt 10.
Nur müssen wir noch auf z achten:

Wir summieren nun so:

$$|f| \downarrow p(n) = \begin{matrix} (z/) \\ \end{matrix} p(n-f) + \begin{matrix} (z-1/) \\ \end{matrix} p(n-2f) + \begin{matrix} (z-2/) \\ \end{matrix} p(n-3f) \dots$$

$$(42) \quad |f| \downarrow p(n) = \sum_{i=1}^z \begin{matrix} (z-i/) \\ \end{matrix} p(n-i \cdot f)$$

Beispiel:

$$|2| \downarrow p(8) = \begin{matrix} (3/) \\ \end{matrix} p(6) + \begin{matrix} (2/) \\ \end{matrix} p(4) + \begin{matrix} (1/) \\ \end{matrix} p(2) = 3 + 1 + 1$$

$\begin{matrix} (3/) \\ \end{matrix}$
"p(8)"



Die andere Möglichkeit:

Wir setzen ^{wieder} an jede Zerlegung von $\begin{matrix} (z-1/) \\ \end{matrix} p(n-f)$ ein Element der Länge f an. Die Anzahl Elemente f im Komplex $\begin{matrix} (z/) \\ (z-1/) \end{matrix} p(n)$ ist dann gleich der Anzahl Elemente f in $\begin{matrix} (z-1/) \\ \end{matrix} p(n-f)$ plus die $\begin{matrix} (z/) \\ \end{matrix} p(n-f)$ Elemente, ^{an} die wir anhängen. ah

$$(43) \quad \begin{matrix} (z/) \\ \end{matrix} |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-f) + \begin{matrix} (z/) \\ \end{matrix} p(n-f)$$

Wenn wir Satz (43) entwickeln, d.h. $\begin{matrix} (z-1/) \\ \end{matrix} |f| \downarrow p(n-f)$ immer wieder vorn in die Formel einsetzen, so erhalten wir Satz (42).

$$13. |f| \downarrow p(n)_{(/e)}$$

Wir liefern die Sätze nun ohne grossen Kommentar.
Es ist ja doch immer etwas das selbe.

$$a) f = e$$

$$(46) |f| \downarrow p(n)_{(/e)} = |f| \downarrow p(n-e) + p(n-e)$$

$$b) f \neq e$$

$$(47) |f| \downarrow p(n)_{(/e)} = |f| \downarrow p(n-e)$$

Zum Spass können wir die beiden Formeln (46) und (47) noch zu einer Formel zusammennehmen, obwohl in der Praxis eine Fallunterscheidung praktischer wäre.
Manchmal überkommt einen halt der Aestetikfimmel.

$$(48) |f| \downarrow p(n)_{(/e)} = |f| \downarrow p(n-e) + \text{Int} \left\{ \frac{1}{1 + (e-f)^2} \right\} \cdot p(n-e)$$

$$14. \quad |f| \downarrow p \begin{matrix} (Z/) \\ (n) \\ (G/e) \end{matrix}$$

Um den Formelkult noch auf die Spitze zu treiben
geben wir noch folgende Formel an :

$$(49) \quad |f| \downarrow p \begin{matrix} (z_1, z_2, z_3 \dots z_m /) \\ (n) \\ (G/e) \end{matrix} = \sum_{i=1}^m |f| \downarrow p \begin{matrix} (z_i - 1 /) \\ (n-e) + \text{Int} \left(\frac{1}{1+(f-e)^2} \right) \\ (G/) \end{matrix} \cdot p \begin{matrix} (z_i - 1 /) \\ (n-e) \\ (G/) \end{matrix}$$

Natürlich bringt diese Formel nicht sehr viel.
Manchmal ist es aber gerade beim Arbeiten mit
Computern übersichtlicher, wenn nicht alles durch
Entscheiden geregelt wird, sondern dass die Entscheidungen rd
in die Formel integriert sind.

Oben haben wir folgendes gemacht:

Wenn $e \neq f$ ist, so soll der zweite Teil der Summe 0 ergeben.
Im Fall, dass $e=f$ ist, so müssen wir den zweiten Teil
einbeziehen.

$\text{Int} \left(\frac{1}{1+(f-e)^2} \right)$ gibt 1, wenn $f=e$ ist. In jedem
andern Fall gibt es 0.

Ein anderes Beispiel:

$\text{Int}(\frac{n}{i}) - \text{Int}(\frac{n}{i+1})$ gibt 1, wenn i ein Teiler ist von n .
In jedem andern Fall gibt es 0.

15. Der Zerlegungskomplex "p(n)"

Endlich können wir uns an diesen Komplex heranwagen.

Erste Möglichkeit zum Berechnen von p(n) :

Nach Satz (31) in Abschnitt 5 können wir es so machen:

$$p(n) = \sum_{d|n} p\left(\frac{n}{d}\right)$$

und dann mit Satz (33) rechnen.

Zweite Möglichkeit :

Wir berechnen den Flächeninhalt des Komplexes "p(n)":

$$p(n) \cdot n = |1| \cdot p(n) + |2| \cdot p(n) + |3| \cdot p(n) + \dots + |n| \cdot p(n)$$

$$p(n) \cdot n = \sum_{i=1}^n |i| \cdot p(n) \cdot i$$

Nun verwenden wir Satz (40) :

$$p(n) \cdot n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\text{Int}\left(\frac{n}{i}\right)} p(n-j \cdot i) \right) \cdot i$$

Schreiben wir das aus,

$$\begin{aligned} p(n) \cdot n &= (p(n-1) + p(n-2) + p(n-3) + \dots + p(0)) \cdot 1 \\ &\quad + (p(n-2) + p(n-4) + p(n-6) + \dots + \dots) \cdot 2 \\ &\quad + (p(n-3) + p(n-6) + p(n-9) + \dots + \dots) \cdot 3 \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad + (p(n-n)) \cdot n \end{aligned}$$

dann merken wir beim Zusammenfassen, dass p(n-k) $\sigma(k)$ mal vorkommt, wenn $\sigma(k)$ die Summe der Teiler von k ist.

Beobachten wir zum Beispiel p(n-6) beim Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Linie} &: p(n-6) \cdot 1 \\ 2. \text{ Linie} &: p(n-6) \cdot 2 \\ 3. \text{ Linie} &: p(n-6) \cdot 3 \\ 6. \text{ Linie} &: p(n-6) \cdot 6 \end{aligned}$$

$$\text{Zusammengezählt} : p(n-6) \cdot (1+2+3+6) = p(n-6) \cdot \sigma(6) = p(n-6) \cdot 12$$

Wir können jetzt also notieren:

$$p(n) \cdot n = \sum_{k=1}^n (\sigma(k) \cdot p(n-k))$$

Nach $p(n)$ auflösen:

$$(50) \quad p(n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\sigma(k) \cdot p(n-k))$$

Kein göttlicher, aber doch ^{eine} wunderschöner Rekursionsalgorithmus für $p(n)$.

$\sigma(k)$ können wir so berechnen :

$$\sigma(k) = \sum_{i=1}^k \left[\left(\text{Int}\left(\frac{k}{i}\right) - \text{Int}\left(\frac{k-1}{i}\right) \right) \cdot i \right]$$

Ein Beispiel :

$$\begin{aligned} p(9) &= \frac{1}{9} \cdot (p(8) + 3 \cdot p(7) + 4 \cdot p(6) + 7 \cdot p(5) + 6 \cdot p(4) + 12 \cdot p(3) + 8 \cdot p(2) + 15 \cdot p(1) + 13 \cdot p(0)) \\ &= \frac{1}{9} \cdot (22 + 45 + 44 + 49 + 30 + 36 + 16 + 15 + 13) = \frac{1}{9} \cdot 270 = \underline{\underline{30}} \end{aligned}$$

Dritte Möglichkeit zum Berechnen von $p(n)$:

Wir zählen die Zerlegungen mit dem kleinsten Element i .

Es gibt zum Beispiel 7 Zerlegungen im Komplex $p(10)$ die das kleinste Element 2 haben. Wir können diese Anzahl auch so beschreiben: $p_{\underline{(2)}}(10)$.

$$p_{\underline{(1)}}(n) = p_{\underline{(1)}}(n) = p(n-1), \text{ da es kein kleineres Element als 1 gibt.}$$

$$p_{\underline{(2)}}(n) = p_{\underline{(2)}}(n) - p_{\underline{(1,2)}}(n) = p(n-1) - p(n-3)$$

$$p_{\underline{(3)}}(n) = p_{\underline{(3)}}(n) - p_{\underline{(1,3)}}(n) - p_{\underline{(2,3)}}(n) + p_{\underline{(1,2,3)}}(n) = p(n-3) - p(n-4) - p(n-5) + p(n-6)$$

So geht es weiter. Um $p(n)$ zu berechnen ziehen wir von der

Anzahl Zerlegungen in der das Element e vorkommt $\left(\frac{p(n)}{e} \right)$

alle Zerlegungen ab, in denen e mit einem kleineren Element vorkommt und addieren wieder alle Möglichkeiten, die wir haben, das Element e mit zwei kleineren Elementen in eine Zerlegung zu tun, da wir diese Zerlegungen sonst doppelt zählen würden. Wieder müssen wir alle Zerlegungen weg - zählen, in denen das Element e mit drei kleineren Elementen vorkommt. usw.

$$p(n) = \frac{p(n)}{1} + \frac{p(n)}{2} + \frac{p(n)}{3} + \dots + \frac{p(n)}{n}$$

$$p(n) = \frac{p(n)}{1} + \frac{p(n)}{2} + \frac{p(n)}{3} + \frac{p(n)}{4} + \dots + \frac{p(n)}{n}$$

$$- \frac{p(n)}{1,2} - \frac{p(n)}{1,3} - \frac{p(n)}{1,4} - \dots - \frac{p(n)}{2,3} - \frac{p(n)}{2,4} - \dots - \frac{p(n)}{n-1,n}$$

$$+ \frac{p(n)}{1,2,3} + \frac{p(n)}{1,2,4} + \dots + \frac{p(n)}{1,3,4} + \dots + \frac{p(n)}{2,3,4} + \dots + \frac{p(n)}{n-2,n-1,n}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$(-1)^{(n-1)} \cdot \frac{p(n)}{1,2,3\dots n}$$

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) + p(n-3) + p(n-4) + \dots + p(n-n)$$

$$- p(n-3) - p(n-4) - p(n-5) - \dots - p(n-5) - p(n-6) - \dots$$

$$+ p(n-6) + p(n-7) + \dots + p(n-8) + \dots + p(n-9) + \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

wunderbarerweise lässt sich das erstaunlich gut zusammenfassen:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15)$$

$$- p(n-22) - p(n-26) - p(n-35) - p(n-40) - p(n-51) - p(n-57) + p(n-70) + \dots$$

$$\text{z.B. } p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = \underline{\underline{42}}$$

Sehen wir uns die Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70... an, merken wir, ^{dass wir} zwei quadratische Funktionen vor uns haben, die im Reissverschlussystem miteinander verknüpft sind :

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 \dots \quad \frac{3k^2 - k}{2}$$

$$2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 \dots \quad \frac{3k^2 + k}{2}$$

Wenn wir die Vorzeichen noch mitberücksichtigen, so erhalten wir Satz (51)

$$51) \quad p(n) = \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+24n+1}}{6})} [(-1)^{(k-1)} \cdot p(n - \frac{3k^2 - k}{2})] + \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+24n-1}}{6})} [(-1)^{(k-1)} \cdot p(n - \frac{3k^2 + k}{2})]$$

Dies ist ein hervorragender Algorithmus. Mit ihm habe ich auch die $p(n)$ Werte im Anhang berechnet. Er hat aber immer noch den Nachteil, dass alle $p(n)$ Werte gespeichert sein müssen.

vgl. Pentagonalzahlensatz

Warum sich alles überhaupt so gut gegeben hat, kann ich nicht sagen. Obwohl sich Satz (51) bishin zu grosse Zahlen n bewährt hat, d.h. überprüft worden ist, heisst es immer noch vorsichtig zu sein, da der Beweis noch nicht erbracht ist. Später werden wir noch auf einen möglichen Beweisansatz hinweisen.

16. Der Zerlegungskomplex " $p(n)$ " Teil 2 (G/)

Was wir im letzten Abschnitt entdeckt haben, können wir auch übertragen auf den Komplex " $p(n)$ " :
(G/)

Um Satz (50) umzuformen, müssen wir die Funktion $\sigma(k)$ erweitern.

Definition: Mit $\sigma(G,k)$ bezeichnen wir die Funktion, die die Summe der Teiler von k angibt, die sich aus der Menge G rekrutieren.

$$\sigma(G,k) = \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\text{Int}\left(\frac{k}{g_i}\right) - \text{Int}\left(\frac{k-1}{g_i}\right) \right) \cdot g_i \right\}, \quad G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_m\}$$

$$(52) \quad p(n)_{(G/)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\sigma(G,k) \cdot p(n-k)_{(G/)} \right)$$

Für Satz (51) können wir keinen entsprechenden Satz mit $p(n)_{(G/)}$

angeben. Wenn G jedoch wenig Elemente hat und man ohne Computer auskommen möchte, kann ^{man} auch diesen Weg einschlagen:

Beispiel:

$$\begin{aligned} p(n)_{(1,2,5/)} &= p(n-1)_{(1,2,5/)} + p(n-2)_{(1,2,5/)} + p(n-5)_{(1,2,5/)} - p(n-3)_{(1,2,5/)} - p(n-6)_{(1,2,5/)} - p(n-7)_{(1,2,5/)} \\ &\quad + p(n-8)_{(1,2,5/)} \end{aligned}$$

17. Der Zerlegungskomplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$

Analog Abschnitt 11 im letzten Paragraphen, ist es auch hier wesentlich leichter, Aussagen über die Gesamtanzahl der Zerlegungen, zu machen.

$$(65) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ p(i) \\ (G/) \end{smallmatrix} = \begin{bmatrix} |G|+z-1 \\ z \end{bmatrix}$$

In der Kombinatorik kennt man dazu das Stichwort "Kombination mit Wiederholung". Satz (65) gibt einfach die Anzahl möglicher Kombinationen von z Elementen aus $|G|$ Elementen, wobei auch jedes Element mit sich selbst kombiniert werden kann und auf die Reihenfolge nicht Wert gelegt wird.

Im Anhang sind Beispiele für Komplexe $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ aufgeführt.

18. Der Zerlegungskomplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ p(n) \\ (G/e) \end{smallmatrix}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ p(i) \\ (G/e) \end{smallmatrix} = \begin{bmatrix} |G|+z-1 \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} |G|+z-2 \\ z \end{bmatrix}$$

Wir haben einfach die Anzahl Zerlegungen weggezählt, die ein Element weniger enthalten. Nach Umformen erhalten wir :

$$(66) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ p(i) \\ (G/e) \end{smallmatrix} = \begin{bmatrix} |G|+z-2 \\ z-1 \end{bmatrix}, \quad e \in G$$

Wir können es auch so sehen: Es gibt $\begin{smallmatrix} (z-1/) \\ p(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ Zerlegungen mit dem Element e , da wir an alle Zerlegungen von $\begin{smallmatrix} (z-1/) \\ p(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$ ein Element e anhängen können.

$$\begin{smallmatrix} (z-1/) \\ p(n) \\ (G/) \end{smallmatrix} = \begin{bmatrix} |G|+z-2 \\ z-1 \end{bmatrix}$$

$$19. \quad |f| \downarrow_{p(n)}^{(z/)} \\ (G/)$$

Wenn wir an jeden Komplexen " $p(n)$ " ein Element der Länge f anhängen, so erhalten wir, $p(n)$ wie schon vorhin gesehen, alle Zerlegungen mit z Elementen, die das Element f enthalten. Voraussetzung ist natürlich, dass f ein Element ist von G .

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z/)} = \sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z-1/)} + \sum_{i=0}^{\infty} p(i)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z-1/)} = \sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z-2/)} + \sum_{i=0}^{\infty} p(i)$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Zusammenfassen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z/)} = \sum_{j=0}^{z-1} \sum_{i=0}^{\infty} p(i)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z/)} = \sum_{j=0}^{z-1} \left(|G| + j - 1 \right)$$

$$(67) \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow_{p(i)}^{(z/)} = \left(|G| + z - 1 \right)$$

§ 3 DER ZERLEGUNGSKOMPLEX " $\frac{(Z/Y)}{p(n)} \frac{(G/E)}{p(n)}$ "

Nun darf kein Element in einer Zerlegung mehr als einmal vorkommen .

1 . Der Zerlegungskomplex " $\bar{p}(n)$ "

Aus " $p(n)$ " nehmen wir diejenigen Zerlegungen heraus, welche 2 Elemente der Länge 1 enthalten. Dazu addieren wir wieder jene Zerlegungen, welche zwei Elemente der Länge 1 und zwei Elemente der Länge 1 enthalten, da wir diese schon doppelt abgezogen haben. Jetzt geht es auf die gleiche Weise weiter, wie wir es schon in Abschnitt 15 des letzten Paragraphen kennengelernt haben.

So erreichen wir , dass nach und nach alle Zerlegungen herausgesiebt werden, die nur aus verschiedenen Elementen bestehen.

Wir erhalten damit folgendes :

$$\bar{p}(n) = p(n) - p(n-2) - p(n-4) + p(n-10) + p(n-14) - p(n-24) - p(n-30) + p(n-44) + p(n-52) - \dots$$

Wir erkennen in diesen Zahlen alte Bekannte. Wir müssen sie nur durch 2 dividieren.

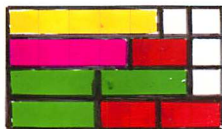
$$(53) \quad \bar{p}(n) = p(n) - \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+12n+1}}{6})} (-1)^{(k-1)} \cdot p(n-3k^2+k) - \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+12n-1}}{6})} (-1)^{(k-1)} \cdot p(n-3k^2-k)$$

Mit diesem Algorithmus können wir ohne Probleme $\bar{p}(n)$ berechnen.

vgl. Partitionstheorie

2 . Der Zerlegungskomplex $\overset{(z/)}{p(n)}$

$\overset{(3/)}{p(7)}$



$\overset{(3/)}{p(10)}$



Wir haben zwei Komplexe gegenübergestellt.
Der zweite Komplex rechts entsteht folgendermassen
aus dem Komplex links :

In jeder Zerlegung aus $\overset{(3/)}{p(n)}$ werden Aenderungen wie folgt gemacht:

Das erste Element von rechts behält seine Grösse.
Das zweite Element von rechts wird um Eins verlängert.
Das dritte und letzte Element von rechts wird um 2 vergrössert.

Allgemein können wir den Komplex $\overset{(z/)}{p(n)}$ in den Komplexen
 $\overset{(z/)}{p(n-z \cdot (z-1)/2)}$ überführen , indem wir in jeder Zerlegung
aus $\overset{(z/)}{p(n)}$ das i -te Element von rechts um $i-1$ vergrössern.

Voraussetzung ist natürlich , dass die Elemente in jeder
Zerlegung dieses Komplexes der Grösse nach geordnet sind und
zwar so, dass die grossen Elemente links sind.

Was entsteht, wenn wir diese Veränderungen machen ?

- Es entsteht ein Komplex der Länge $n+(1+2+\dots+z-1)=n+z \cdot (z-1)/2$
- Dieser Komplex hat immer noch z Elemente .
- Alle Elemente sind verschieden, denn wären nachher zwei
Elemente gleich, so müsste im alten Komplex ein grösseres
Element rechts von einem kleineren Element stehen.
- Es werden alle Zerlegungen des Komplexes $\overset{(z/)}{p(n+z \cdot (z-1)/2)}$
gebildet, denn da die Abbildung die wir beschrieben haben,
eindeutig ist, müsste eine nicht entstandene Zerlegung auch
eine nichtexistierende Zerlegung in $\overset{(z/)}{p(n)}$ haben.

Wir können jetzt guten Gewissens folgenden Satz aufschreiben:

$$(54) \quad \frac{\binom{z}{/}}{\bar{p}(n)} = \frac{\binom{z}{/}}{p(n-z(z-1)/2)}$$

umgekehrt:

$$\frac{\binom{z}{/}}{p(n)} = \frac{\binom{z}{/}}{\bar{p}(n+z(z-1)/2)}$$

Natürlich hätten wir auch einen dem Satz (33) entsprechenden Algorithmus bilden können, um dann zu sehen, dass Satz (54) stimmt.

Beweisansatz für Satz (51) :

Wir untersuchen die Frage, ob sich $p(n-x)$ wegkürzen lässt, oder ob es mit negativem oder positivem Vorzeichen verrechnet wird. $p(n-x)$ wurde immer dann positiv gezählt, wenn x als Summe von einer ungeraden Summandenzahl gebildet wurde. Wenn die Summandenzahl gerade war, wurde $p(n-x)$ negativ hineingenommen. Die Summanden waren immer verschieden. Was liegt nun näher, als den Komplexen " $\bar{p}(x)$ " zu betrachten.

Beispiel: $x=7$

" $\bar{p}(7)$ "



Wir sehen, es gibt 3 Zerlegungen mit einer geraden Anzahl Elementen und 2 Zerlegungen mit einer ungeraden Anzahl Elementen. Die Anzahl der Zerlegungen mit einer geraden Anzahl ist um 1 grösser, d.h. $p(n-7)$ kommt mit dem Faktor (-1) in die Rechnung.

Stellen wir das etwas ausführlicher dar :

n	(1//) $\bar{p}(n)$	(2//) $\bar{p}(n)$	(3//) $\bar{p}(n)$	(4//) $\bar{p}(n)$	(5//) $\bar{p}(n)$	(2m-1//) $p(n)$	(2m//) $\bar{p}(n)$	+/-	$\bar{p}(n)$	n
1	1					1	0	+	1	1
2	1					1	0	+	1	2
3	1	1				1	1		2	3
4	1	1				1	1		2	4
5	1	2				1	2	-	3	5
6	1	2	1			2	2		4	6
7	1	3	1			2	3	-	5	7
8	1	3	2			3	3		6	8
9	1	4	3			4	4		8	9
10	1	4	4	1		5	5		10	10
11	1	5	5	1		6	6		12	11
12	1	5	7	2		8	7	+	15	12
13	1	6	8	3		9	9		18	13
14	1	6	10	5		11	11		22	14
15	1	7	12	6	1	13	13		26	15
16	1	7	14	9	1	16	16		32	16
17	1	8	16	11	2	19	19		38	17
18	1	8	19	15	3	23	23		46	18
19	1	9	21	18	5	27	27		54	19
20	1	9	24	23	7	32	32		64	20

Die $\bar{p}(x)$ Werte sind immer dann ungerade, wenn $p(n-x)$ verrechnet werden soll.

Um hier weiterzukommen ,müssten wir $\bar{p}(n)$ nach Kongruenzen modulo 2 untersuchen.

Das Untersuchen von Kongruenzen könnte sich noch lohnen , weiss ich doch aus meinem Lexikon, dass $p(5m-1) \equiv 5$ sei.

Wenn wir Satz (51) bewiesen hätten,wäre auch folgende Aussage richtig:

$$\bar{p}\left(\frac{3k^2+k}{2}\right) \equiv 1 \pmod{2}$$

3. Der Zerlegungskomplex $\bar{p}(n)_{(/E)}$

Im Gegensatz zu früher, können wir jetzt eine Menge E der obligatorischen Elemente bilden, da alle Elemente verschieden sein müssen.

Zuerst untersuchen wir $\bar{p}(n)_{(/e)}$:

$$\text{Es gilt : } \bar{p}(n)_{(/e)} = \bar{p}(n-e) - \bar{p}(n-e)_{(/e)}$$

denn es gibt $\bar{p}(n-e) - \bar{p}(n-e)_{(/e)}$ Partitionen aus $\bar{p}(n-e)$,

welche das Element e nicht enthalten. An diese Zerlegungen hängen wir das Element e und erhalten so $\bar{p}(n)_{(/e)}$.

Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned} \bar{p}(n-e)_{(/e)} &= \bar{p}(n-2e) - \bar{p}(n-2e)_{(/e)} \\ \bar{p}(n-2e)_{(/e)} &= \bar{p}(n-3e) - \bar{p}(n-3e)_{(/e)} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Nun fassen wir zusammen :

$$\bar{p}(n)_{(/e)} = \bar{p}(n-e) - \bar{p}(n-2e) + \bar{p}(n-3e) - \dots + (-1)^{(\text{Int}(\frac{n}{e})+1)} \cdot \bar{p}(n - \text{Int}(\frac{n}{e}) \cdot e)$$

$$\boxed{\bar{p}(n)_{(/e)} = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{e})} \left[(-1)^{(i+1)} \cdot \bar{p}(n-i \cdot e) \right]}$$

Der allgemeine Fall " $\bar{p}(n)$ "
 $(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$ geht ähnlich :

$$\bar{p}(n)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)} = \bar{p}(n-e_1)_{(/e_2, e_3, \dots, e_m)} - \bar{p}(n-e_1)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)}$$

$$\bar{p}(n-e_1)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)} = \bar{p}(n-2e_1)_{(/e_2, e_3, \dots, e_m)} - \bar{p}(n-2e_1)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)}$$

$$\bar{p}(n-2e_1)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)} = \bar{p}(n-3e_1)_{(/e_2, e_3, \dots, e_m)} - \bar{p}(n-3e_1)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)}$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

Zusammenfassen :

$$(55) \quad \bar{p}(n)_{(/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)} = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{e_1})} \left[(-1)^{(i+1)} \cdot \bar{p}(n-i \cdot e_1)_{(/e_2, e_3, \dots, e_m)} \right]$$

Mit dem Computer kein Problem .

Beispiel :

$$\bar{p}(13)_{(/1, 2)}$$



$$\begin{aligned} \bar{p}(13)_{(/1, 2)} &= \bar{p}(11)_{(/1)} - \bar{p}(9)_{(/1)} + \bar{p}(7)_{(/1)} - \bar{p}(5)_{(/1)} + \bar{p}(3)_{(/1)} - \bar{p}(1)_{(/1)} \\ &= 5 - 3 + 2 - 1 + 1 - 1 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

4. Der Zerlegungskomplex " $\bar{p}(n)$ "

$$(56) \quad \begin{matrix} (/Y) \\ \bar{p}(n) \end{matrix} = \begin{matrix} (Y/) \\ \bar{p}(n) \end{matrix}$$

Dieser Satz braucht keinen Kommentar .

$$5. \quad |f| \downarrow \begin{matrix} (Z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/) \end{matrix}$$

$$(57) \quad |f| \downarrow \begin{matrix} (Z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/) \end{matrix} = \begin{matrix} (Z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/f) \end{matrix}$$

speziell:

$$|f| \downarrow \bar{p}(n) = \begin{matrix} \bar{p}(n) \\ (/f) \end{matrix}$$

Auch dieser Satz sollte selbst für sich sprechen.

6. Der Zerlegungskomplex " $\bar{p}(n)$ " ($\bar{e}$)

Das grösste Element e befindet sich in jeder Zerlegung immer am linken Rand. Wir haben rechts vom Element immer noch Platz für Zerlegungen, in denen die Elemente $1, 2, 3, \dots, e-1$ vorkommen dürfen.

$$(58) \quad \bar{p}(n) = \bar{p}(n-e) \\ (\bar{e}) \quad (1, 2, \dots, e-1/)$$

Beispiel :

$$\bar{p}(12) \\ (\bar{6})$$

$$\bar{p}(6) \\ (1, 2, 3, 4, 5/)$$



Wir müssen uns aber schleunigst ans Problem " $\bar{p}(n)$ "
($G/$) machen.

7. Der Zerlegungskomplex $\bar{p}(n)$ (G/)

Bis jetzt ist es erst 2 mal vorgekommen, dass nur endlich viele Komplexe gebildet werden konnten, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Ein Beispiel für diese dritte Möglichkeit:

" $\bar{p}(n)$ "
(1,2,3/)



Das sind alle Komplexe $\bar{p}(n)$
(1,2,3/), die gebildet werden können.

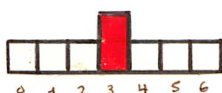
Wir sehen, dass jede Zerlegung eine Möglichkeit repräsentiert, die vorgegebenen Elemente zu kombinieren, oder anders ausgedrückt: Jede Zerlegung hat eine andere Teilmenge der Grundmenge G zur Verfügung. Wenn wir mit |G| die Anzahl Elemente der Menge G bezeichnen, so gibt es $2^{|G|}$ Zerlegungen mit dieser Menge, da die Potenzmenge von G so viele Teilmengen hat. Im Beispiel oben sind es 8 Zerlegungen. Die Zerlegung mit 0 Elementen sieht man halt nicht.

$$(68) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \bar{p}(i)_{(G/)} = 2^{|G|}$$

Sehen wir uns die Werte $\bar{p}(n)$
(1,2,3/) an:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{p}(n)$ (1,2,3/)	1	1	1	2	1	1	1	0	0	0	0

Mit dem Cuisenaire-Material:



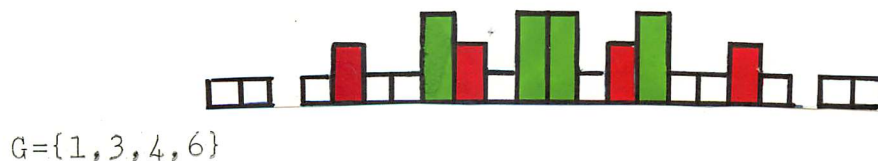
Unten können wir weitere Beispiele sehen. Was sofort auffällt: Die $\bar{p}(n)$ Werte sind offensichtlich symmetrisch angelegt.

Definition: Mit S_G bezeichnen wir die Summe aller Elemente der Menge G .

Erklärung der Symmetrie: Zu jeder Zerlegung aus " $\bar{p}(n)$ " lässt sich eine duale Zerlegung aus " $\bar{p}(S_G - n)$ " finden, die genau diejenigen Elemente aus G enthält, welche jene nicht enthält. Wir können es auch so formulieren: Zu jeder Menge der Potenzmenge von G , bilden wir die Komplementmenge bezüglich G , welche wieder eine Menge der Potenzmenge von G ist.

$$(69) \quad \bar{p}(n)_{(G/)} = \bar{p}(S_G - n)_{(G/)}$$

$$G = \{1, 3, 4, 6, 7, 21\}$$



8. Der Zerlegungskomplex " $\bar{p}(n)$ "
(G/e)

$$(70) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \bar{p}(n)_{(G/e)} = 2^{(|G|-1)} \quad , \quad e \in G$$

Wir zählen wieder von der Gesamtanzahl Zerlegungen diejenigen Zerlegungen ab, die ein Element e nicht in sich haben:

$$2^{|G|} - 2^{(|G|-1)} = 2^{(|G|-1)}$$

$$(71) \quad \bar{p}(n)_{(G/e)} = \bar{p}(n-e)_{(G=\{g \mid g \neq e\})} \quad , \quad e \in G$$

...Ein Satz, der uns im Moment nicht viel nützt.

9. $|f| \downarrow \bar{p}(n)$
(G/)

$$(72) \quad |f| \downarrow \bar{p}(n)_{(G/)} = \bar{p}(n)_{(G/f)}$$

Mit Satz (71) und (72) könnten wir vielleicht $\bar{p}(n)_{(G/)}$ ansatzweise berechnen :

Wir berechnen den Flächeninhalt von " $\bar{p}(n)_{(G/)}$ " und dividieren durch n :

$$(73) \quad \bar{p}(n)_{(G/)} = \left[\sum_{i=g_1}^{|G|} \left\{ \bar{p}(n-g_i)_{(G=\{g \mid g \neq g_i\})} \cdot g_i \right\} \right] / n$$

speziell:

$$(73a) \quad \bar{p}(n)_{(G/)} = \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \bar{p}(n-i)_{(G=\{g \mid g \neq i\})} \cdot g_i \right\} \right] / n$$

10. Der Zerlegungskomplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$

$$(74) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/) \end{smallmatrix} = \begin{pmatrix} |G| \\ z \end{pmatrix}$$

,denn wir müssen z mal aus $|G|$ verschiedenen Elementen auswählen.

11. Der Zerlegungskomplex $\begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/e) \end{smallmatrix}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/e) \end{smallmatrix} = \begin{pmatrix} |G| \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |G|-1 \\ z \end{pmatrix}, \quad e \in G$$

Noch umformen :

$$(75) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/e) \end{smallmatrix} = \begin{pmatrix} |G|-1 \\ z-1 \end{pmatrix}, \quad e \in G$$

12. $|f| \downarrow \begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/) \end{smallmatrix}$

$$(76) \quad |f| \downarrow \begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/f) \end{smallmatrix}, \quad f \in G$$

§ 4 DER ZERLEGUNGSKOMPLEX $\begin{matrix} (z/) \\ \bar{p}^*(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$

Die Reihenfolge der Elemente spielt wieder eine Rolle. Weil aber alle Elemente verschieden sind, ist der Uebergang nicht so schwierig.

1. Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} (z/) \\ \bar{p}^*(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$

$$(77) \quad \begin{matrix} (z/) \\ \bar{p}^*(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix} = z! \cdot \begin{matrix} (z/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$$

Wir können in jeder Zerlegung die z Elemente frei permutieren lassen.

Wenn z nicht vorgegeben ist, machen wir dennoch den Umweg über Satz (77):

2. Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} \bar{p}^*(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$

$$(78) \quad \begin{matrix} \bar{p}^*(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix} = \sum_{i=1}^n \begin{matrix} (i/) \\ \bar{p}(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m) \end{matrix}$$

3. Der Zerlegungskomplex $\begin{matrix} (z/) \\ \bar{p}^*(n) \\ (G/) \end{matrix}$

$$(79) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \begin{matrix} (z/) \\ \bar{p}^*(i) \\ (G/) \end{matrix} = \begin{bmatrix} |G| \\ z \end{bmatrix} \cdot z!$$

In der Kombinatorik sagt man dazu : Variation ohne Wiederholung.

Immer dann haben wir zur Kombinatorik greifen müssen, wenn es um Aussagen über die Gesamtanzahl Zerlegungen machten. Fassen wir kurz zusammen:

$$(59) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{(G/)} p^*(i) = |G|^z$$

" Variation mit Wiederholung "

$$(79) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{(G/)} \bar{p}^*(i) = \binom{|G|}{z} \cdot z!$$

" Variation ohne Wiederholung "

$$(65) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{(G/)} p(i) = \binom{|G|+z-1}{z}$$

" Kombination mit Wiederholung "

$$(74) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{(G/)} \bar{p}(n) = \binom{|G|}{z}$$

" Kombination ohne Wiederholung "

Was wir jetzt verlangen, lässt nicht mehr sehr viele Zerlegungen zu: Es sollen pro Zerlegung lauter verschiedene Elemente da sein, wobei zwischen dem kleinsten und dem grössten Element alle Elemente der vorgegebenen Grundmenge vorkommen müssen, die dazwischen vorkommen können.

1. Der Zerlegungskomplex " $\hat{p}(n)$ "

Die dargestellten Komplexe befinden sich im Anhang.

Wenn wir das kleinste Element mit k , die Anzahl Elemente der Zerlegung mit z und die Länge der Zerlegung mit n bezeichnen, gilt für jede Zerlegung folgende Gleichung:

$$k \cdot z + \frac{z(z-1)}{2} = n \quad (\text{endliche arithmetische Reihe})$$

Nun können wir mit dem Computer berechnen, wieviele Möglichkeiten wir für jedes n haben, indem wir einfach für k und z Werte einsetzen.

$$\hat{p}(n)=1 \text{ für } : n= 1,2,4,8,16,32,64,128,256,\dots$$

$$\hat{p}(n)=2 \text{ für } : n= 3,5,6,7,10,11,12,13,14,17,19,20,22,23,\dots$$

$$\hat{p}(n)=3 \text{ für } : n= 9,18,25,36,49,50,72,78,98,100,\dots$$

$$\hat{p}(n)=4 \text{ für } : n=15,21,27,30,33,35,\dots$$

Es fällt auf, dass für alle n , welche Zweierpotenzen sind, $\hat{p}(n)$ Eins ist, dass also nur eine Zerlegung möglich ist. Wenn $\hat{p}(n)=2$ gilt, so ist n eine Primzahl oder eine Zweierpotenz multipliziert mit einer Primzahl.

Im Uebrigen zeigen sich Aenlichkeiten zur Funktion $d(n)$, wobei die Primzahl 2 eine besondere Rolle zu spielen scheint.

Untersuchen wir das genauer:

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 2^y$:

$$k \cdot z + \frac{z(z-1)}{2} = 2^y$$

$$z \cdot (2k + z - 1) = 2^{(y+1)}$$

z muss ein Teiler sein von $2^{(y+1)}$. d.h. z muss gerade oder 1 sein. Wenn z gerade ist, so ist $2k+z-1$ ungerade, was nicht möglich ist. Als einzige Möglichkeit bleibt: $z=1$. k ist dann 2^y , also genau n .

Für die Untersuchung des allgemeinen Falls, stellen wir n so dar: $n = 2^y \cdot n'$, wobei n' ungerade sein soll.

$$z(2k + z - 1) = 2^{(y+1)} \cdot n'$$

Wieder haben wir die Möglichkeit, dass $z=1$ ist. Dann wird k zu n , wie man leicht nachrechnet.

z muss sicher ein Teiler von $2^{(y+1)} \cdot n'$ sein. Dabei darf aber nicht gleichzeitig z und $2^{(y+1)} \cdot n' / z$ gerade sein, da sonst auch $2k + z - 1$ gerade sein müsste, was ja bei geradem z gar nicht möglich ist. Das heisst: Als z kommen nur Teiler von n' , t , in Frage, welche entweder noch mit $2^{(y+1)}$ multipliziert werden oder dann eben nicht multipliziert werden.

$$\text{Fall a): } z = t \cdot 2^{(y+1)}$$

$$2k + t \cdot 2^{(y+1)} - 1 = n' / t, \quad k = \frac{1}{2} \cdot (n' / t - t \cdot 2^{(y+1)} + 1)$$

$$\text{Fall b): } z = t$$

$$2k + t - 1 = 2^{(y+1)} \cdot n' / t, \quad k = \frac{1}{2} \cdot (2^{(y+1)} \cdot n' / t - t + 1)$$

Nun machen wir noch folgende Veränderung: Statt dem Teiler t von n' , nehmen wir den dualen Teiler n' / t . Diese Veränderung vollführen wir nur in einem Fall, sagen wir in Fall b), wir sehen gerade, wesshalb.

$$\text{Fall b): } z = n' / t$$

$$2k + n' / t - 1 = 2^{(y+1)} \cdot t, \quad k = \frac{1}{2} \cdot (2^{(y+1)} \cdot t - n' / t + 1)$$

Wir vergleichen jetzt die beiden Resultate für k :

$$\text{Fall a)} \quad k = \frac{1}{2} \cdot (n'/t - 2^{(y+1)} \cdot t + 1)$$

$$\text{Fall b)} \quad k = \frac{1}{2} \cdot (2^{(y+1)} \cdot t - n'/t + 1)$$

Wir sehen, dass Fall a) Fall b) ausschliesst und umgekehrt, denn selbst $2^{(y+1)} \cdot t = n'/t$ ist ausgeschlossen, da n' kein Vielfaches ist von 2.

Wir haben also zeigen können, dass jede Möglichkeit, ein z nach Fall a) zu bilden, eine Möglichkeit in Fall b) ausschliesst und umgekehrt.

Für beide Fälle a) und b) hatten wir $d(n')$ Teiler zur Auswahl. Das hätte gesamt $2 \cdot d(n')$ Möglichkeiten gegeben. Diese Anzahl schrumpft nun wieder auf die Hälfte zusammen.

$$(80) \quad \hat{p}(n) = d(n') \quad , \quad n = 2^y \cdot n' \quad , \quad n' \equiv 1 \pmod{2}$$

... ein ausgesprochen schöner Satz.

*gemässiger Bedingungen
Satz von Sylvester*

Nachtrag :

Wir hätten eine Zerlegung auch durch Angabe des kleinsten und des grössten Elements festlegen können.

Wenn wir das grösste Element g nennen, so hat eine Zerlegung $g-k+1$ Elemente. Die Summe n würde sich dann so berechnen:

$$n = (g-k+1) \cdot \frac{(g+k)}{2}$$

$$2n = g^2 - k^2 + g + k$$

und wir hätten fragen müssen: Wieviele ganzzahlige Paare (g, k) gibt es, die die Gleichung $2n = g^2 - k^2 + g + k$ erfüllen.

2. Der Zerlegungskomplex $\hat{p}(n)$ $(G=\{g | \log_b g \in \mathbb{N}\} /)$

Wir können das Thema $\hat{p}(n)$ nicht allgemein behandeln, dafür

ist es zu komplex. Wir greifen einfach ein ~~paar~~ Beispiele heraus. So haben wir in diesem Abschnitt nur Elemente b^y erlaubt.

Wir beginnen mit $b=2$:

Nehmen wir an, in einer Zerlegung sei das kleinste Element 2^k , und das grösste Element 2^g . Dadurch haben wir die Zerlegung vollständig bestimmt. Da die Elemente, wenn sie der Grösse nach daliegen, eine geometrische Folge bilden, berechnet sich die Länge n der Zerlegung so:

$$n = 2^k \cdot (2^{g-k+1} - 1)$$

,da es $g-k+1$ Elemente gibt, das Anfangsglied 2^k ist und der Quotient zwischen zwei benachbarten Elementen 2 beträgt. Wir formen noch um:

$$n = 2^{g+1} - 2^k$$

Beispiel: $\hat{p}(14)$
 $(G=\{g | \text{lb}(g) \in \mathbb{N}\} /)$, $\text{lb}(g)$ ist der dyadische Logarithmus von g , also mit $b=2$



Das kleinste Element beträgt hier 2, das grösste 8.

$$n = 2^4 - 2^1 = 14$$

$$(81) \quad \hat{p}(n) < 2$$

$$(G=\{g | \log_b g \in \mathbb{N}\} /)$$

Das sehen wir leicht, wenn wir n im Zahlensystem mit der Basis b aufschreiben.

Zuerst wollen wir noch schnell sehen, wie die Summe n allgemein gebildet wird, wenn b^g das grösste und b^k das kleinste Element ist:

$$n = (b^{g+1} - b^k) / (b-1)$$

Um nun zu zeigen, dass Satz (81) stimmt, dass es also höchstens eine Zerlegung mit vorgegebener Summe gibt, wählen wir als Basis $b=10$.

$$n = (10^{g+1} - 10^k) / 9$$

Wir bilden nun die Differenz:

$$100\dots 000 - 10\dots 00 = 99\dots 900\dots 00$$

$$\begin{array}{ccc} g+1 \text{ Nullen} & k \text{ Nullen} & k \text{ Nullen} \\ & & g+1-k \text{ Neuner} \end{array}$$

Da man zu jeder Zahl mit lauter Neunern am Anfang und lauter Nullern am Schluss eindeutig zwei Zehnerpotenzen finden kann, die diese Zahl als Differenz ergeben, ist n eindeutig bestimmt.

Genauso geht es für alle andern b .

Um nun zu entscheiden, ob $\hat{p}(n) \in (G = \{g \mid \log_b g \in \mathbb{N}_0\})$ 1 ist oder 0,

ziehen wir einfach alle möglichen Potenzen von b nacheinander von n ab und schauen ob das Resultat eine Potenz ist von b .

Wenn $b=10$ ist, sehen wir gerade beim Betrachten von n , ob es 0 gibt oder 1.

KAPITEL III

NEUE HORIZONTE

In diesem Kapitel wollen wir noch kurz auf weitere Fragestellungen eingehen, die zwar meines Wissens nichts mit additiver Zahlentheorie zu tun haben, die aber doch verwandt sind mit den bis jetzt gestreiften Problemen.

§ 1 Stammbrüche

Wir können nicht nur ganze Zahlen in Summanden zerlegen, auch Stammbrüche, Brüche mit dem Zähler 1, lassen sich, ähnlich wie die ganze Zahlen, zerlegen in lauter Stammbrüche. Schränken wir die Anzahl der Summanden nicht ein, gibt es unendlich viele Zerlegungen:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n}$$

⋮

$$\frac{1}{n} = k \cdot \frac{1}{n \cdot k}$$

Interessant wird es erst, wenn wir die Anzahl der Summanden einschränken.

Leider lassen sich die Zerlegungen nicht so praktisch darstellen, wie wir das jetzt bei den ganzen Zahlen gewohnt sind, die Bezeichnungen können wir aber übernehmen:

Definition: Mit $p_{(G/e)}^{(z/y)}(\frac{1}{n})$ bezeichnen wir ganz analog zur Funktion $p_{(G/e)}^{(z/y)}(n)$ die Anzahl der Zerlegungen des Stammbruchs $\frac{1}{n}$ in lauter Stammbrüche.

Wir werden vorläufig nur die Funktion $p_{(2/)}^{(2/)}(\frac{1}{n})$ untersuchen:

1 . Der Zerlegungskomplex $p^{(2/)}(\frac{1}{n})$

Ein Beispiel:

$$p^{(2/)}(\frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

Wir sehen : $p^{(2/)}(\frac{1}{8}) = 4$

Schauen wir uns die Resultate für die ersten 15 Werte an:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p^{(2/)}(\frac{1}{n})$	1	2	2	3	2	5	2	4	3	5	2	8	2	5	5

Da scheint die Primfaktorzerlegung von n eine Rolle zu spielen !

Wir können den Stammbruch $\frac{1}{n}$ so in zwei Stammbrüche zerlegen:

$$\frac{1}{\frac{n}{a} \cdot (a+b)} + \frac{1}{\frac{n}{b} \cdot (a+b)} = \frac{(a+b)}{n \cdot (a+b)} = \frac{1}{n}$$

Dabei sind a und b Teiler von n und sind teilerfremd.

Die Bedingung, dass sie teilerfremd sein sollen , machen wir nur deshalb, dass nicht mehrmals gleiche Lösungen vorkommen.

$$a=1, b=1 \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$a=1, b=2 \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12}$$

$$a=1, b=4 \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10}$$

$$a=1, b=8 \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{72} + \frac{1}{9}$$

Hier am Beispiel $n=8$ können wir es sehen.

$$a=2, b=4 \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12}$$

Wir suchen nun die Anzahl teilerfremder Teilerpaare von n .
Dazu schreiben wir n in Primfaktoren zerlegt auf:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$$

Um nun die Anzahl zu bestimmen, verteilen wir die Primfaktoren nacheinander:

Der Primfaktor p_1 kann auf α_1 verschiedene Arten zum Teiler a gehören: $p_1, p_1^2, p_1^3 \dots p_1^{\alpha_1}$. Genauso gibt es α_1 Möglichkeiten, ihn zu b zu legen. Dann gibt es noch die Möglichkeit, dass er nirgends platziert wird. Gesamt gibt es $2 \cdot \alpha_1 + 1$ Möglichkeiten, ihn zu verteilen.

Auf dieselbe Art und Weise können die andern Primfaktoren verteilt werden.

Wieviele Möglichkeiten haben wir also gesamt?

$$(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)(2\alpha_3 + 1) \dots (2\alpha_m + 1)$$

Da es egal ist, ob wir a und b vertauschen, müssen wir noch durch 2 dividieren. Zuerst aber müssen wir noch 1 addieren, da die Möglichkeit, dass a und b gleich 1 sind, nicht zweimal vorkommt.

$$(82) \quad p(\gamma n) = \frac{\prod_{i=1}^m (2\alpha_i + 1) + 1}{2}$$

Ähnlich haben wir ja die zahlentheoretische Funktion $d(n)$ ausdrücken können:

$$d(n) = \prod_{i=1}^m (\alpha_i + 1)$$

Jetzt wird diese Darstellung auch verständlich.

§ 2 Eine Dimension weiter

Wir haben bis jetzt Zahlen zerlegt. Dies kann man auch auffassen als eine Zerlegung eines eindimensionalen Gebildes, des Zahlenstrahls in lauter eindimensionale Strecken.

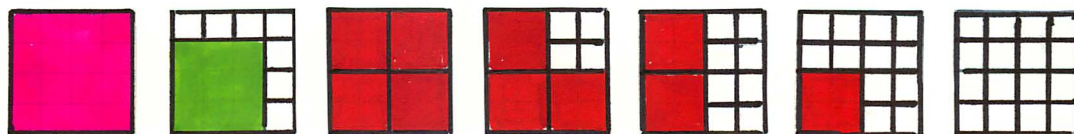
Wir gehen jetzt eine Dimension weiter. Nun zerlegen wir die Ebene oder wenigstens einen Teil davon.

Wir fragen uns, auf wieviele Arten sich ein Quadrat in lauter Quadrate unterteilen lässt, wenn die Seitenlänge n beträgt. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $p_2(n^2)$.

Genaugleich übernehmen wir wieder alle Bezeichnungen von früher. Wenn die Anordnung der Quadrate noch eine Rolle spielt, heisst die Funktion $\bar{p}_2(n^2)$, wenn lauter verschiedene Quadrate vorkommen müssen, nennen wir sie $\hat{p}_2(n^2)$ usw. .

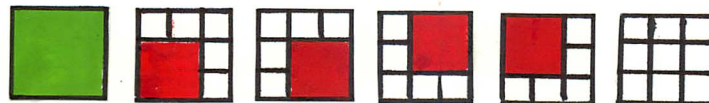
Beispiele:

Der Zerlegungskomplex " $p_2(4^2)$ "



$$p_2(4^2) = 7$$

Der Zerlegungskomplex " $p_2^*(3^2)$ "



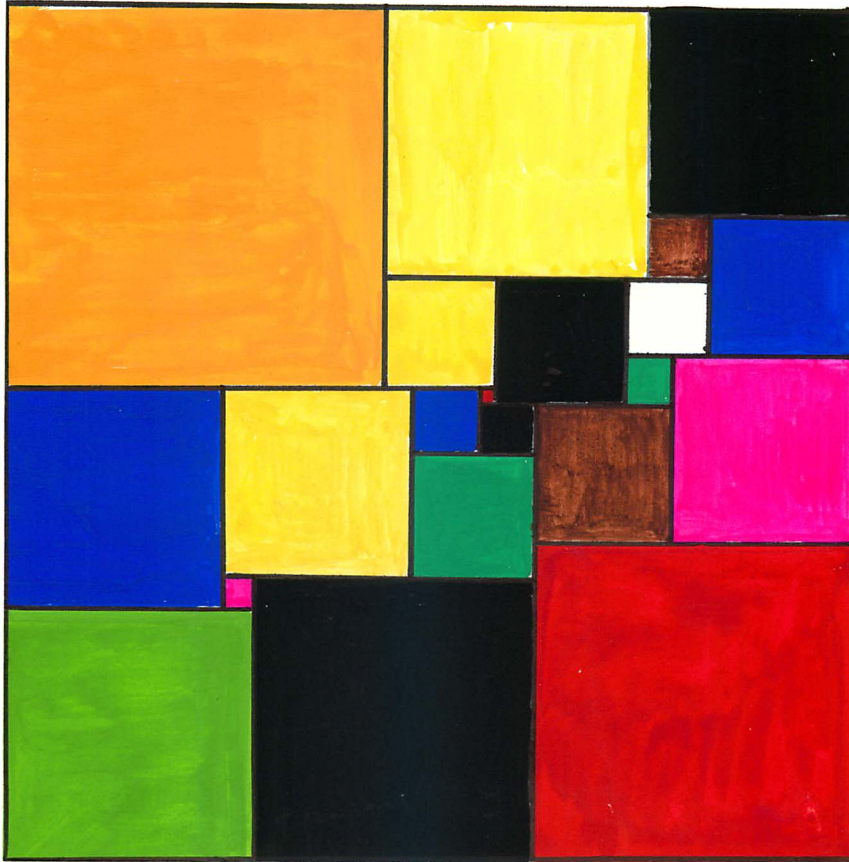
$$p_2^*(3^2) = 6$$

Der Zerlegungskomplex " $\bar{p}_2(n^2)$ "

Wenn wir lauter verschiedene Quadrate zu einem Quadrat zusammensetzen sollen, wird es schwierig:

Das erste vollkommene Quadrat(so nennt man Quadrate, die aus lauter verschiedenen Quadraten zusammengesetzt sind) wurde erst 1938 entdeckt. Es konnte von A.J.W.Duijvestijn bewiesen werden, dass für $n=112$ das Quadrat mit am wenigsten Teilquadraten existiert. Es besteht aus 21 kleineren Quadraten. Hier das von ihm gefundene Quadrat:

" $\bar{p}_2(112^2)$ "



Der Zerlegungskomplex " $\hat{p}_2(n^2)$ "

Vielleicht kann einmal ein Supercomputer mit einem guten Programm eine solche Zerlegung finden.

§ 3 Würfel in Würfel in ...

Im Dreidimensionalen ist das Problem auch noch faszinierend.

Wir nennen die Anzahl Zerlegungsmöglichkeiten analog $p_3(n^3)$.

Natürlich können wir auch hier mit den Cuisenaire- Stäbchen arbeiten. Praktischer wäre es aber, wenn wir Cuisenaire-Würfel hätten.

Interessant ist die Frage, ob es eine Zerlegung mit z Würfeln gibt oder nicht, d.h. für welche n $\binom{z}{p_3(n^3)}$ grösser ist als 0.

Man weiss schon, dass für alle z grösser als 47 eine Zerlegung existiert. Das kann man so zeigen:

Dieses Verfahren wurde unter der Rubrik " Mathematisches Kabinet" in der Zeitschrift "Bild der Wissenschaft"(1970) veröffentlicht :(Den Autor weiss ich leider nicht mehr)

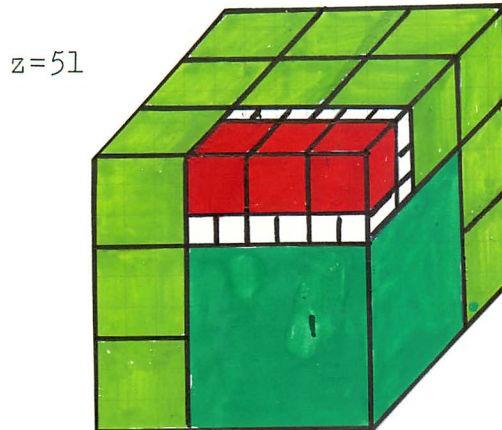
Wenn wir eine Zerlegung mit z Würfeln vor uns haben, können wir eine Zerlegung mit $z+7$ Würfeln konstruieren, indem wir einen Würfel ersetzen durch 8 kleine Würfel. Wir können nun eine Tabelle machen:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

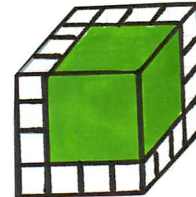
Zeigung

In jeder Spalte müssen wir nun möglichst hoch oben eine Zer-
angeben. Jede Zerlegung mit z Elementen kann sicher
existieren, wenn eine Zerlegung mit $z-7$ Würfeln existiert.

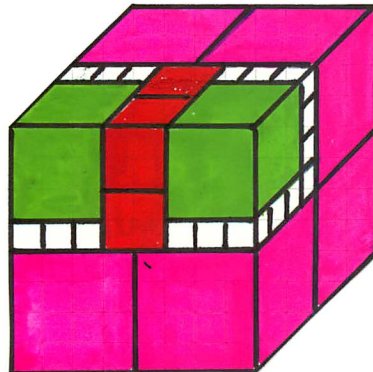
$z=1$ ist trivial: 



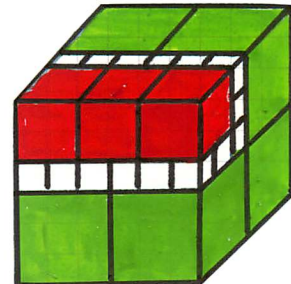
$z=38$



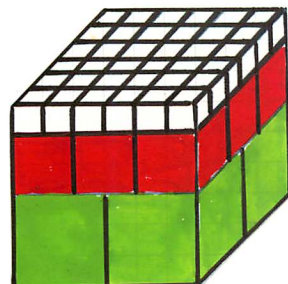
$z=54$



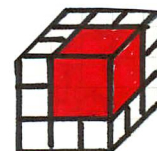
$z=39$



$z=49$



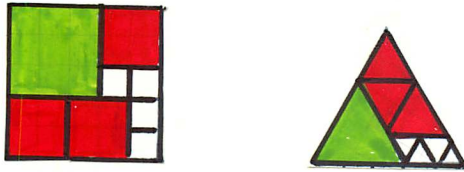
$z=20$



Wir können jetzt in der Tabelle sehen, dass 47 das grösste
 z ist, für das es keine Zerlegung gibt. Mein Computer hat
nach Zerlegungen für $z=47$ gesucht, ist aber erfolglos
geblieben.

Ich finde es noch interessant, dass es eine eindeutige Abbildung zu geben scheint, die Zerlegungen von Quadraten in Quadrate, auf Zerlegungen von gleichseitigen Dreiecken in gleichseitige Dreiecke abbildet.

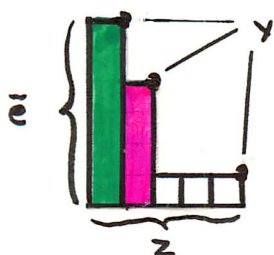
Ein Beispiel:



Beweis von Satz (39)

Dr. Roland Stärk machte mich noch auf eine andere Darstellungsmöglichkeit aufmerksam, die manchmal weiterhilft:

Statt eine Zerlegung eindimensional darzustellen, kann man sie auch flächig anordnen:



Diese Zerlegung links stammt aus dem Komplex " $p(13)$ ". Der Flächeninhalt beträgt 13. An der Höhe dieses Diagramms können wir das grösste Element 6 ablesen, die Breite gibt an, wieviele Elemente vorhanden sind und die Anzahl Stufen ist gerade gleich der Anzahl verschiedener Elemente in dieser Zerlegung.

Nun zum Beweis von Satz (39). Behauptet wird ja:

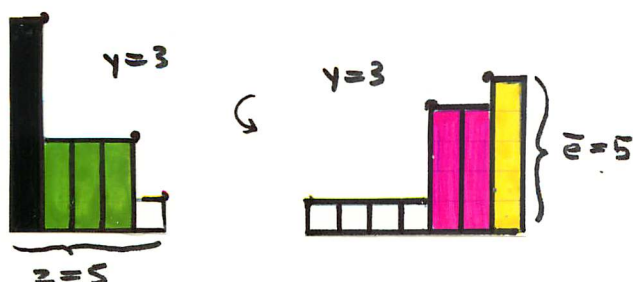
$$\begin{matrix} (x/y) \\ p(n) \end{matrix} = \begin{matrix} (/y) \\ p(\frac{n}{x}) \end{matrix}$$

Wenn wir die neue Darstellungsmethode betrachten, wird der Satz trivial:

Wir können nämlich jede Zerlegung einfach um 90 Grad drehen und erhalten so eine neue Zerlegung. Die Anzahl Stufen bleibt gleich. Das grösste Element wird zur Anzahl Zerlegungen, währenddem die Anzahl Zerlegungen zum grössten Element wird.

Beispiel

$$\begin{matrix} (5/3) \\ p(17) \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} (/3) \\ p(\frac{17}{5}) \end{matrix}$$

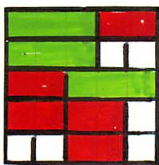


Weitere Untersuchungen zum Problem Black-Jack:

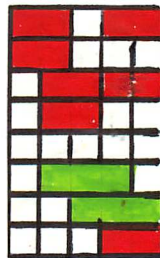
Die Antwort auf die Frage (Seite 28) nach der Wahrscheinlichkeit, beim Black-Jack genau die Summe 21 zu erreichen, ist alles andere als befriedigend. Wir haben Bedingungen stellen müssen, damit wir überhaupt zu rechnen beginnen konnten.

Zuerst versuchen wir, herauszufinden, was passiert, wenn wir die zweite Bedingung fallen lassen. Jetzt kommt die ganze Problematik rund um das Ass herum voll zum Vorschein. Um das zu zeigen, simulieren wir einen einfachen Fall, indem wir statt der Summe 21 die Summe 5 nehmen und die Kartenwerte reduzieren auf die Karte Bauer (Wert 2) und Ass (Wert 1 oder 3).

Nun gibt es so wenig Fälle, dass wir alle aufzählen können:



$$W=13/16$$



Hier die günstigen Fälle,
die definiert sind

Hier die günstigen Fälle, die
nicht definiert sind

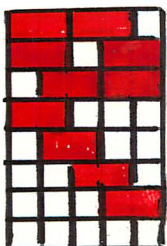
Die Kartenfolge Bauer-Ass-Bauer z.B. ist deshalb nicht definiert, da mit Bauer-Ass die Summe 5 schon erreicht ist.

Die Antwort, die wir auf Seite 28 gegeben haben, unterscheidet nicht in definierte und nicht definierte Fälle. Es spielt ein dummer oder gleichgültiger Spieler.

Wie können wir nun die definierten Fälle herauslesen, sodass wir immer noch die Wahrscheinlichkeit berechnen können?

Wir gehen schrittweise vor:

Zuerst nehmen wir diejenigen Zerlegungen, die keinen Gebrauch machen vom Wert 3 des Asses:



Unter diesen Zerlegungen ist natürlich viel Unsinn dabei. Dies müssen wir nachher wieder korrigieren.

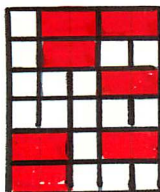
$$W=21/32$$

Nun nehmen wir sukzessive die Fälle hinzu, in denen auch der Summand 3 vorkommt. Dabei nehmen wir unsinnige Fälle gar nicht dazu, d.h. wir lassen den Summanden 3 durchlaufen, wobei wir beachten, dass links kein Einer mehr vorkommt, da dieser Fall gar nicht möglich ist. Wir erhalten dann folgende Zerlegungen



$$W=5/8$$

Zuletzt müssen wir diejenigen Fälle wieder rückgängig machen, die wir am Anfang fälschlicherweise dazuaddiert haben.



$$W=15/32$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit beträgt demnach:

$$21/32 + 5/8 - 15/32 = \underline{13/16}$$

..was wir erwartet haben.

Vielleicht wird dieses Verfahren etwas umständlich anmuten. Leider scheint es mir im Moment eine der rationellsten Möglichkeiten zu sein, mit einigermaßen vernünftigen Rechenaufwand das Problem zu lösen. Man muss bedenken, dass etwa 6 Mio. Zerlegungen untersucht werden müssten, wollte man direkt vernünftige und unvernünftige Lösungen trennen. ($n=21$)

Wir haben jetzt gesehen, was passiert, wenn wir die zweite Bedingung fallen lassen. Wollten wir die erste Bedingung auch noch beiseite schieben, wird es noch viel schwieriger. Dann kommt es nämlich noch darauf an, wieviele Karten wir von jeder Sorte noch haben. Hätten wir z.B. gerade zu Beginn alle vier Könige gezogen, ist die Wahrscheinlichkeit gleich 0, dass wir einen neuen König bekommen.

KAPITEL 1V

ANHANG

§ 1 Tabellen

1. $\begin{matrix} (Y/Z) \\ p^*(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3, \dots) \end{matrix}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p^*(n)$	1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	5096	10192
$\begin{matrix} (1/) \\ p^*(n) \end{matrix}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\begin{matrix} (2/) \\ p^*(n) \end{matrix}$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\begin{matrix} (3/) \\ p^*(n) \end{matrix}$	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
$\begin{matrix} (4/) \\ p^*(n) \end{matrix}$	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
$\begin{matrix} (5/) \\ p^*(n) \end{matrix}$	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
$\begin{matrix} p^*(n) \\ (1/) \end{matrix}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\begin{matrix} p^*(n) \\ (2/) \end{matrix}$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\begin{matrix} p^*(n) \\ (3/) \end{matrix}$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$\begin{matrix} p^*(n) \\ (1,2/) \end{matrix}$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
$\begin{matrix} p^*(n) \\ (1,3/) \end{matrix}$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129
$\begin{matrix} p^*(n) \\ (1,4/) \end{matrix}$	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p^*(n)$ (2,3/)	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21
$p^*(n)$ (2,4/)	1	0	1	0	2	0	3	0	5	0	8	0	13	0	22
$p^*(n)$ (2,5/)	1	0	1	0	1	1	1	2	1	3	2	4	4	5	7
$p^*(n)$ (3,5/)	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	3	1	3	4
$p^*(n)$ (1,2,3/)	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705	3136
$p^*(n)$ (1,2,4/)	1	1	2	3	6	10	18	31	55	96	169	296	520	912	1601
$p^*(n)$ (1,2,5/)	1	1	2	3	5	9	15	26	44	75	128	218	372	634	1081
$p^*(n)$ (1,3,5/)	1	1	1	2	3	5	8	12	19	30	47	74	116	182	286
$p^*(n)$ (2,3,5/)	1	0	1	1	1	3	2	5	6	8	14	16	27	36	51
$p^*(n)$ (1,2,3,4/)	1	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773	1490	2072	5536
$p^*(n)$ (2,3,4,5/)	1	0	1	1	2	3	4	7	10	16	24	37	57	87	134
$p^*(n)$ (2,4,8,9/)	1	0	1	0	2	0	3	0	6	1	10	2	18	5	31
$p^*(n)$ (1,2,3,4,5/)	1	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464	912	1793	3525	6930

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 0 \pmod{2}\} /$)	1	0	1	0	2	0	4	0	8	0	16	0	32	0	64
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 0 \pmod{3}\} /$)	1	0	0	1	0	0	2	0	0	4	0	0	8	0	0
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 1 \pmod{2}\} /$)	1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 1 \pmod{3}\} /$)	1	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 1 \pmod{4}\} /$)	1	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 1 \pmod{5}\} /$)	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 2 \pmod{3}\} /$)	1	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 2 \pmod{5}\} /$)	1	0	1	0	1	0	1	1	1	2	1	3	2	4	4
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 3 \pmod{5}\} /$)	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	3
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid g \equiv 4 \pmod{5}\} /$)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid \sqrt{g} \in \mathbb{N}\} /$)	1	1	1	1	2	3	4	5	7	11	16	22	30	43	62
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid \sqrt[3]{g} \in \mathbb{N}\} /$)	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid (2^g - 2) / g \in \mathbb{N}\} /$)	1	0	1	1	1	3	2	6	6	10	16	20	35	46	72
$p^*(n)$ ($G=\{g \mid \lg_2(g) \in \mathbb{N}_0\} /$)	1	1	2	3	6	10	18	31	56	98	174	306	542	956	1690

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 1\}/$)	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 2\}/$)	1	1	1	2	4	7	12	21	37	65	114	200	351	616	1081
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 3\}/$)	1	1	2	3	6	11	21	39	73	136	254	474	885	1652	3084
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 4\}/$)	1	1	2	4	7	14	27	52	101	195	377	729	1409	2724	5266
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 5\}/$)	1	1	2	4	8	15	30	59	116	228	449	883	1737	3417	6722
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 6\}/$)	1	1	2	4	8	16	31	62	123	244	484	960	1905	3779	7497
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 1\wedge g\neq 2\}/$)	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 1\wedge g\neq 3\}/$)	0	1	0	2	1	4	3	8	8	17	20	37	48	82	
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 1\wedge g\neq 4\}/$)	0	1	1	1	3	3	6	9	13	22	32	51	79	121	
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 1\wedge g\neq 5\}/$)	0	1	1	2	2	5	6	11	16	27	40	66	101	162	
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 2\wedge g\neq 3\}/$)	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	72	117	189	305	
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 2\wedge g\neq 4\}/$)	1	1	2	3	5	9	15	25	42	70	117	196	328	549	
$p^*(n)$ ($G=\{g g\neq 3\wedge g\neq 7\}/$)	1	2	3	6	11	21	38	71	131	244	452	839	1555	2885	

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p^*(n)$ (/1)	0	1	1	3	6	13	27	56	115	235	478	969	1959	3952	7959
$p^*(n)$ (/2)	0	0	1	2	4	9	20	43	91	191	398	824	1697	3480	7111
$p^*(n)$ (/3)	0	0	0	1	2	5	11	25	55	120	258	550	1163	2444	5108
$p^*(n)$ (/4)	0	0	0	0	1	2	5	12	27	61	135	295	639	1372	2926
$p^*(n)$ (/5)	0	0	0	0	0	1	2	5	12	28	63	141	311	679	1470
$p^*(n)$ (/6)	0	0	0	0	0	0	1	2	5	12	28	64	143	317	695
$p^*(n)$ (/7)	0	0	0	0	0	0	0	1	2	5	12	28	64	144	319
$p^*(n)$ (/8)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	5	12	28	64	144
$p^*(n)$ (/1,1)	0	0	1	1	4	8	19	41	89	189	398	830	1719	3539	7251
$p^*(n)$ (/2,2)	0	0	0	0	1	3	7	17	41	95	214	474	1036	2238	4787
$p^*(n)$ (/3,3)	0	0	0	0	0	0	1	3	9	23	58	140	331	765	1740
$p^*(n)$ (/1,2)	0	0	0	2	3	7	17	38	82	176	372	782	1627	3364	6919
$p^*(n)$ (/1,3)	0	0	0	0	2	3	10	20	50	107	241	515	1111	2348	4957
$p^*(n)$ (/1,4)	0	0	0	0	0	2	3	10	23	53	123	272	601	1307	2814
$p^*(n)$ (/2,3)	0	0	0	0	0	2	6	15	35	82	188	422	929	2017	4332
$p^*(n)$ (/3,7)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	18	47	120

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$(/1)$ $p^*(n)$		1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4
$(/2)$ $p^*(n)$	0	0	0	2	5	14	22	44							
$(/3)$ $p^*(n)$	0	0	0	0	0	0	6	16							
$(/4)$ $p^*(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6				
$ 1 \downarrow p^*(n)$	0	1	2	5	12	28	64	144	320	704	1536	3328	7268	15360	32768
$ 2 \downarrow p^*(n)$	0	0	1	2	5	12	28	64	144	320	704	1536	3328	7268	15360
$ 3 \downarrow p^*(n)$	0	0	0	1	2	5	12	28	64	144	320	704	1536	3328	7268
$ 4 \downarrow p^*(n)$	0	0	0	0	1	2	5	12	28	64	144	320	704	1536	3328
$(1/)$ $ 1 \downarrow p^*(n)$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(2/)$ $ 1 \downarrow p^*(n)$	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$(3/)$ $ 1 \downarrow p^*(n)$	0	0	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
$(4/)$ $ 1 \downarrow p^*(n)$	0	0	0	0	4	12	24	40	40	60	84	112	144	180	264
$(5/)$ $ 1 \downarrow p^*(n)$	0	0	0	0	0	5	20	50	100	175	280	420	600	825	1100

n

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

$\begin{matrix} (1/) \\ |2|\downarrow p^*(n) \end{matrix}$ 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$\begin{matrix} (2/) \\ |2|\downarrow p^*(n) \end{matrix}$ 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

$\begin{matrix} (3/) \\ |2|\downarrow p^*(n) \end{matrix}$ 0 0 0 0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33

$\begin{matrix} (5/) \\ |3|\downarrow p^*(n) \end{matrix}$ 0 0 0 0 0 0 0 5 20 50 100 175 280 420 600

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (1,2,5,7/) \end{matrix}$ 0 1 2 5 10 20 40 77 150 285 540 1013 1888 3503 6464

$\begin{matrix} |2|\downarrow p^*(n) \\ (1,2,5,7/) \end{matrix}$ 0 0 1 2 5 10 20 40 77 150 285 540 1013 1888 3503

$\begin{matrix} |3|\downarrow p^*(n) \\ (1,2,5,7/) \end{matrix}$ 0 0 0 1 2 5 10 20 40 77 150 285 540 1013 1888

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (1/) \end{matrix}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

$\begin{matrix} |3|\downarrow p^*(n) \\ (1,2,5,7/) \end{matrix}$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (1,2/) \end{matrix}$ 0 1 2 5 10 20 38 71 130 235 420 744 1308 2285 3970

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (1,2,3/) \end{matrix}$ 0 1 2 5 12 26 56 118 244 499 1010 2027 4040 8004 15776

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (G=\{g|\sqrt{g}\in\mathbb{N}\}/) \end{matrix}$ 1 2 3 4 7 12 19 28 42 66 103 156 232 348

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (G=\{g|g\equiv 1\pmod{2}\}/) \end{matrix}$ 1 2 3 6 11 20 36 64 113 198 345 598 1032 1774

$\begin{matrix} |1|\downarrow p^*(n) \\ (1,10,11/) \end{matrix}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 13 20 31 46

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ 2 \downarrow p^*(n)$ (/1)	0	0	0	2	3	10	23	56	129	294	658	1456	3189	6928	14947
$ 3 \downarrow p^*(n)$ (/1)	0	0	0	0	2	3	10	23	56	129	294	658	1456	3189	6928
$ 1 \downarrow p^*(n)$ (/2)	0	0	0	2	6	15	38	94	224	520	1186	2667	5926	13036	28436
$ 1 \downarrow p^*(n)$ (/3)	0	0	0	0	2	6	18	47	120	294	704	1649	3800	8635	19398
$ 1 \downarrow p^*(n)$ (/4)	0	0	0	0	0	2	6	18	50	129	324	790	1884	4417	10204
$ 1 \downarrow p^*(n)$ (/5)	0	0	0	0	0	0	2	6	18	50	132	333	820	1974	4668
$ 1 \downarrow p^*(n)$ (/1)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ 2 \downarrow p^*(n)$ (/1)	0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7
$ 3 \downarrow p^*(n)$ (/1)	0	0	0	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0
$ 4 \downarrow p^*(n)$ (/1)	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	3	0	0

2. $\begin{matrix} (Y/Z) \\ p(n) \\ (G/e_1, e_2, e_3 \dots) \end{matrix}$

n	p(n)	n	p(n)
0	1	30	5604
1	1	31	6842
2	2	32	8349
3	3	33	10143
4	5	34	12310
5	7	35	14883
6	11	36	17977
7	15	37	21637
8	22	38	26015
9	30	39	31185
10	42	40	37338
11	56	41	44583
12	77	42	53174
13	101	43	63261
14	135	44	75175
15	176	45	89134
16	231	46	105558
17	297	47	124754
18	385	48	147273
19	490	49	173525
20	627	50	204226
21	792	51	239943
22	1002	52	281589
23	1255	53	329931
24	1575	54	386155
25	1958	55	451276
26	2436	56	526823
27	3010	57	614154
28	3718	58	715220
29	4565	59	831820

n	-126-														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p(n)$ (1/)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p(n)$ (2/)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$p(n)$ (1,2/)	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
$p(n)$ (1,3/)	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
$p(n)$ (1,4/)	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
$p(n)$ (2,3/)	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3
$p(n)$ (2,4/)	1	0	1	0	2	0	2	0	3	0	3	0	4	0	4
$p(n)$ (2,5/)	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
$p(n)$ (3,4/)	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1
$p(n)$ (1,2,3/)	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$p(n)$ (1,2,4/)	1	1	2	2	4	4	6	6	9	9	12	12	16	16	20
$p(n)$ (1,2,5/)	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10	11	13	14	16
$p(n)$ (1,3,5/)	1	1	1	2	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(n)$ (2,3,5/)	1	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6
$p(n)$ (1,2,5,7/)	1	1	2	2	3	4	5	7	8	10	12	14	17	19	23

n	-127-														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p(n)$ (1/)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p(n)$ (1,2/)	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
$p(n)$ (1,2,3/)	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$p(n)$ (1,2,3,4/)	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47
$p(n)$ (1,2,3,4,5/)	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70
$p(n)$ (1,2,3,4,5,6/)	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90
$p(n)$ (1,2,4,8/)	1	1	2	2	4	4	6	6	10	10	14	14	20	20	26
$p(n)$ ($G=\{g g\equiv 0\pmod{2}\}/$)	1	0	1	0	2	0	3	0	5	0	7	0	11	0	15
$p(n)$ ($G=\{g g\equiv 1\pmod{2}\}/$)	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22
$p(n)$ ($G=\{g g\equiv 0\pmod{3}\}/$)	1	0	0	1	0	0	2	0	0	3	0	0	5	0	0
$p(n)$ ($G=\{g g\equiv 1\pmod{3}\}/$)	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	7	8	10
$p(n)$ ($G=\{g g\equiv 2\pmod{3}\}/$)	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	3	2	3	3	4
$p(n)$ ($G=\{g g^{(1/2)}\in N\}/$)	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	6	6
$p(n)$ ($G=\{g g^{(1/3)}\in N\}/$)	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
$p(n)$ (P/)	1	0	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	9	10

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p(n)$ ($G=\{g g \neq 1\}/$)	1	0	1	1	2	2	4	4	7	8	12	14	21	24	34
$p(n)$ ($G=\{g g \neq 2\}/$)	1	1	1	2	3	4	6	8	11	15	20	26	35	45	58
$p(n)$ ($G=\{g g \neq 1 \wedge g \neq 2\}/$)	1	0	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	9	10	13

n	-129-														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(1/) p(n)	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(2/) p(n)	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
(3/) p(n)	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16
(4/) p(n)	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
(5/) p(n)	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23
(6/) p(n)	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	14	20
(7/) p(n)	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	13
(/1) p(n)		1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4
(/2) p(n)		0	0	1	2	5	6	11	13	17	22	27	29	37	44
(/3) p(n)		0	0	0	0	0	1	2	5	10	15				
(/4) p(n)		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ 1 \downarrow p(n)$	0	1	2	4	7	12	19	30	45	67	97	139	195	272	373
$ 2 \downarrow p(n)$	0	0	1	1	3	4	8	11	19	26	41	56	83	112	160
$ 3 \downarrow p(n)$	0	0	0	1	1	2	4	6	9	15	21	31	45	63	87
$ 4 \downarrow p(n)$	0	0	0	0	1	1	2	3	6	8	13	18	28	38	55
$ 5 \downarrow p(n)$	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	8	12	17	25	35
$ 6 \downarrow p(n)$	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	12	16	24
$ 7 \downarrow p(n)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	16
$ 8 \downarrow p(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11
$ 1 \downarrow p(n)$ (1,2,5/)	0	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49	60	73	87
$ 2 \downarrow p(n)$ (1,2,5/)	0	0	1	1	3	3	6	7	11	13	18	21	28	32	41
$ 3 \downarrow p(n)$ (1,2,5/)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$ 5 \downarrow p(n)$ (1,2,5/)	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	5	6	8	9	11
$ 1 \downarrow p(n)$ (1,2,3/)	0	1	2	4	7	11	16	23	31	41	53	67	83	102	123
$ 2 \downarrow p(n)$ (1,2,3/)	0	0	1	1	3	4	7	9	14	17	24	29	38	45	57
$ 3 \downarrow p(n)$ (1,2,3/)	0	0	0	1	1	2	4	5	7	11	13	17	23	27	33

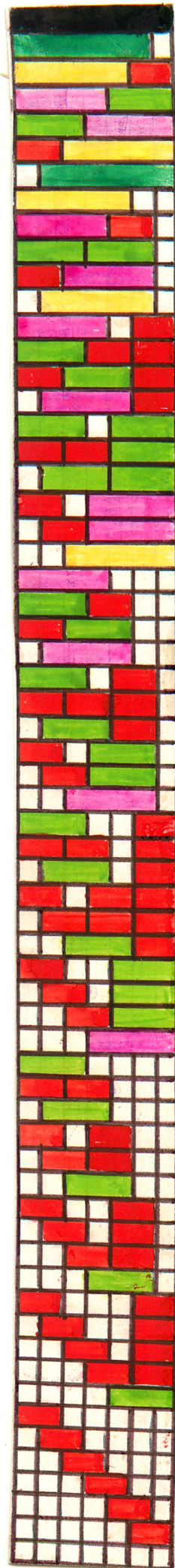
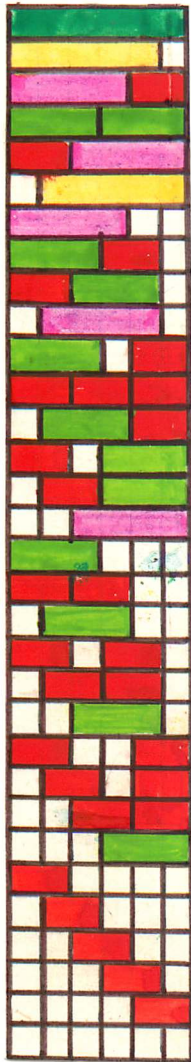
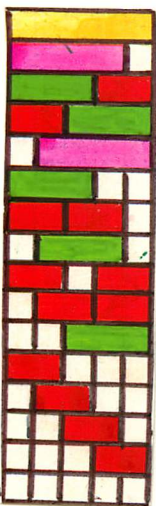
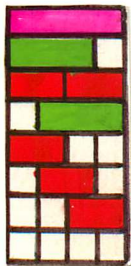
3. $\begin{matrix} (Y/Z) \\ \bar{p}(n) \\ (G/E) \end{matrix}$

n	$\bar{p}(n)$	n	$\bar{p}(n)$
0	1	30	296
1	1	31	340
2	1	32	390
3	2	33	448
4	2	34	512
5	3	35	585
6	4	36	668
7	5	37	760
8	6	38	864
9	8	39	982
10	10	40	1113
11	12	41	1260
12	15	42	1426
13	18	43	1610
14	22	44	1816
15	27	45	2048
16	32	46	2304
17	38	47	2590
18	46	48	2910
19	54	49	3264
20	64	50	3658
21	76	51	4097
22	89	52	4582
23	104	53	5120
24	122	54	5718
25	142	55	6378
26	165	56	7108
27	192	57	7917
28	222	58	8808
29	256	59	9792

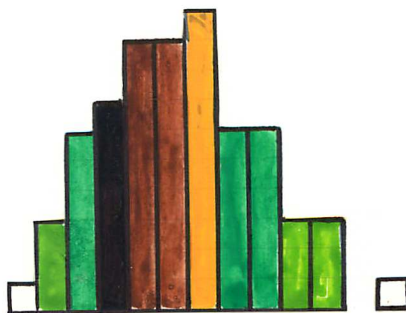
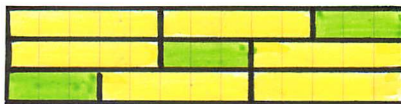
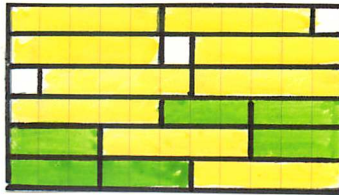
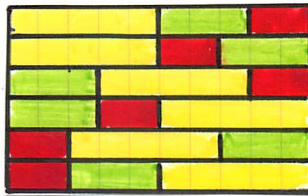
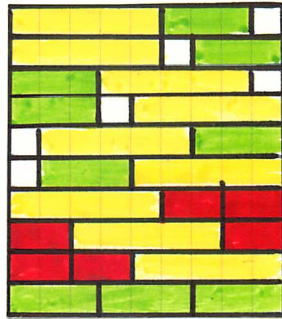
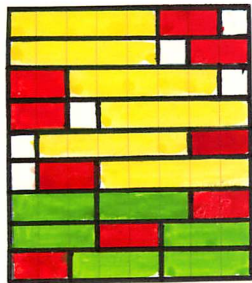
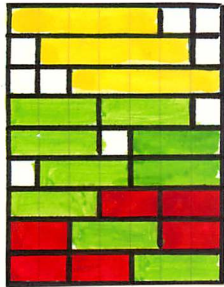
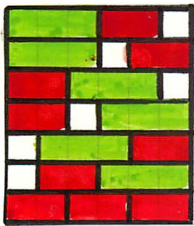
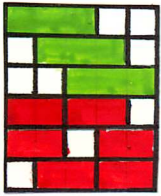
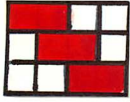
n	-132-														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{(1/)}{\bar{p}(n)}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{(2/)}{\bar{p}(n)}$	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
$\frac{(3/)}{\bar{p}(n)}$	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10
$\frac{(4/)}{\bar{p}(n)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
$\frac{\bar{p}(n)}{(/1)}$	0	1	0	1	1	1	2	2	3	3	5	5	7	8	10
$\frac{\bar{p}(n)}{(/2)}$	0	0	1	1	0	1	2	2	2	3	4	5	6	7	9
$\frac{\bar{p}(n)}{(/3)}$	0	0	0	1	1	1	1	1	2	3	4	4	5	6	8
$\frac{\bar{p}(n)}{(/4)}$	0	0	0	0	1	1	1	2	1	2	3	3	5	6	7
$\frac{\bar{p}(n)}{(/5)}$	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	4	4	6
$\frac{\bar{p}(n)}{(/6)}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	4	5
$\frac{\bar{p}(n)}{(/1,2)}$	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4
$\frac{\bar{p}(n)}{(/1,3)}$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	2	2	2	3	3
$\frac{\bar{p}(n)}{(/2,3)}$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	2	2	2	2	3
$\frac{\bar{p}(n)}{(/1,2,3)}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1

§ 2 Zerlegungskomplexe

1. "p*(n)"

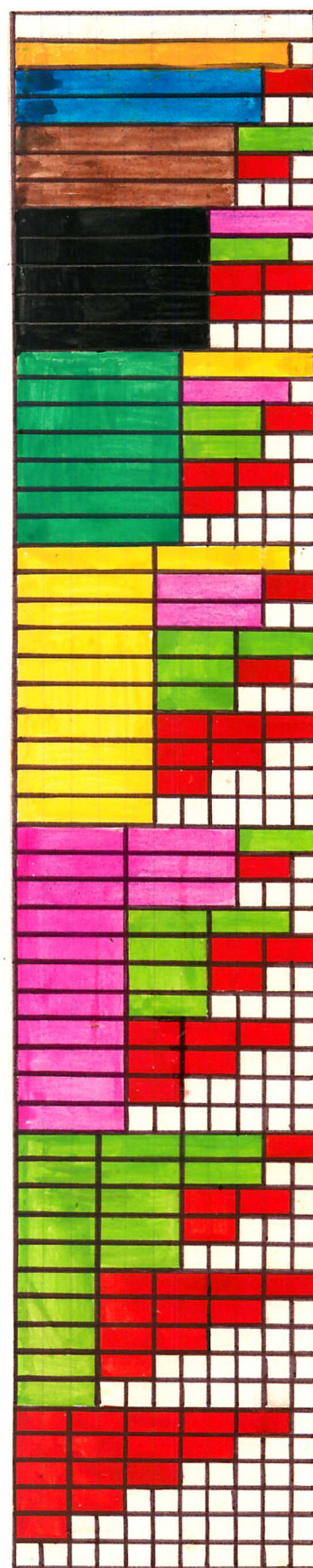
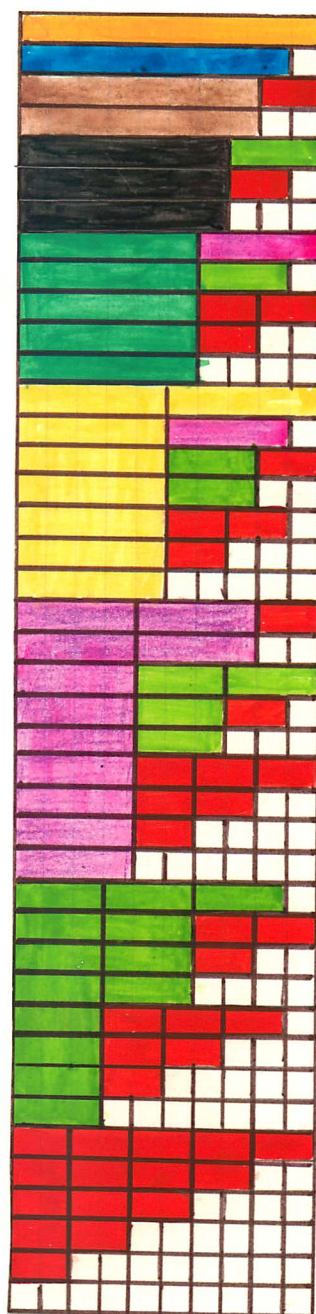
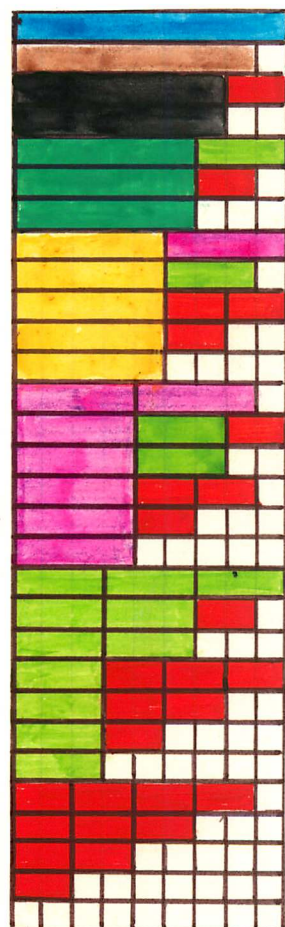
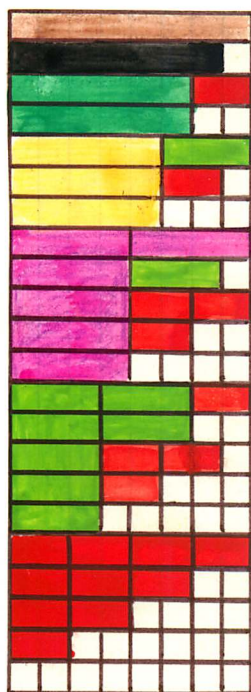
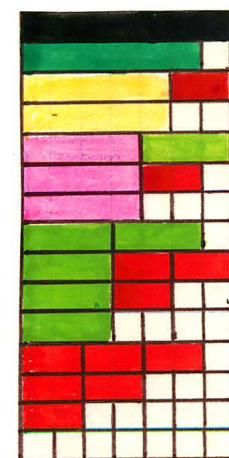
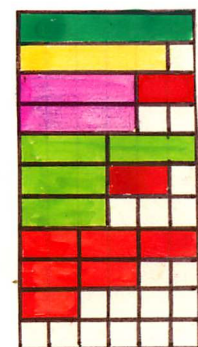
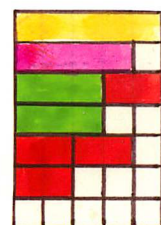
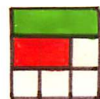


(3/)
 "p*(n)"
 (1,2,3,5/)



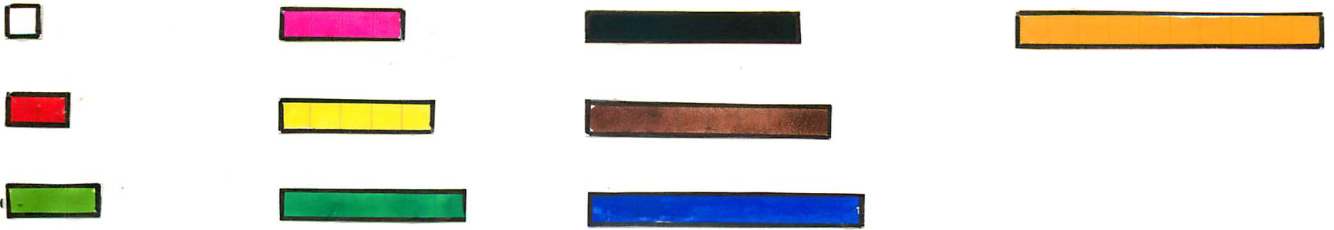
2.

"p(n)"



$\begin{pmatrix} 1/ \end{pmatrix}$
"p(n)"

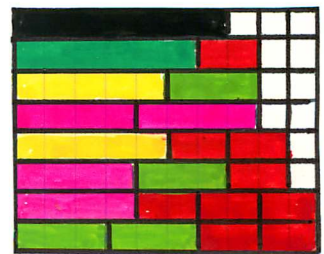
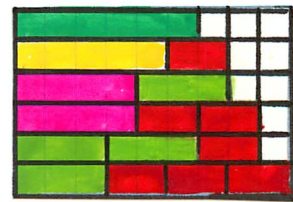
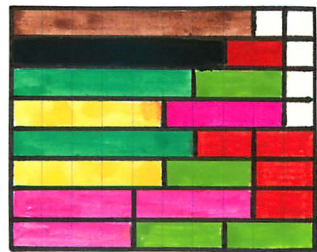
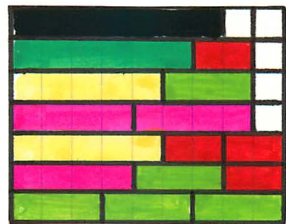
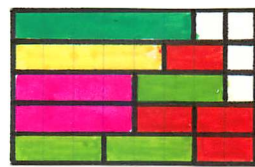
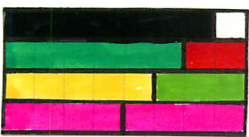
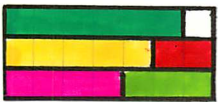
-136-

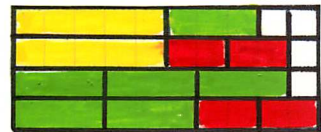
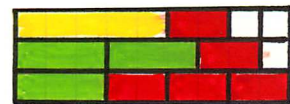


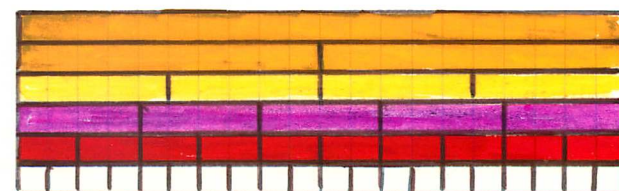
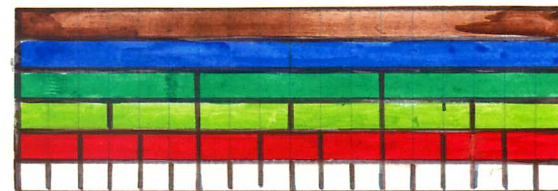
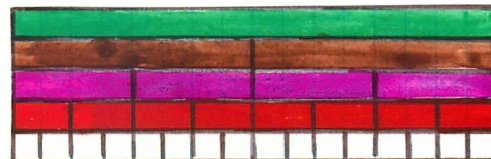
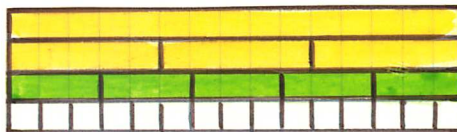
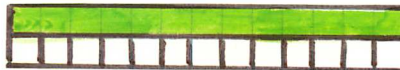
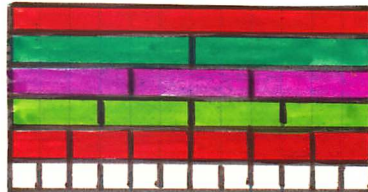
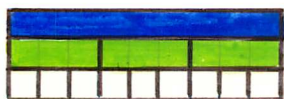
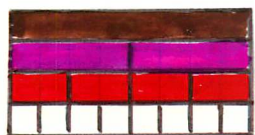
$\begin{pmatrix} 2/ \end{pmatrix}$
"p(n)"

$\begin{pmatrix} 3/ \end{pmatrix}$
"p(n)"

$\begin{pmatrix} 4/ \end{pmatrix}$
"p(n)"

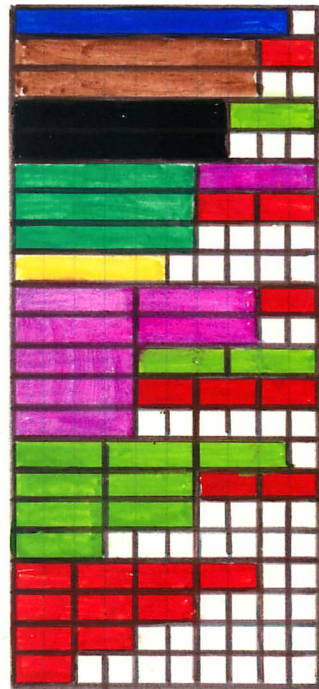
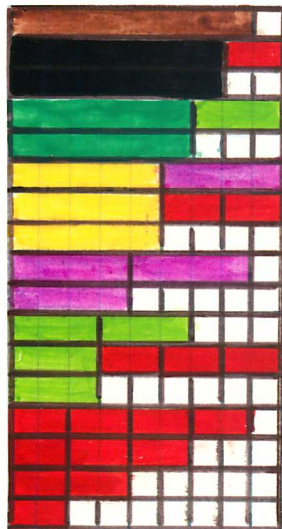
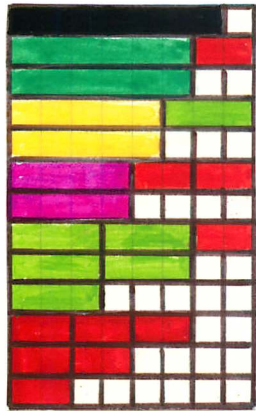
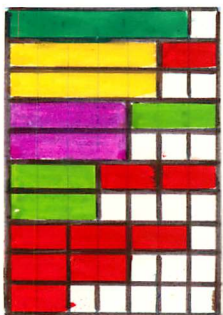
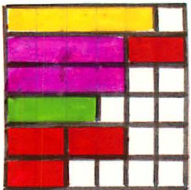
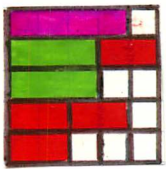
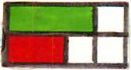


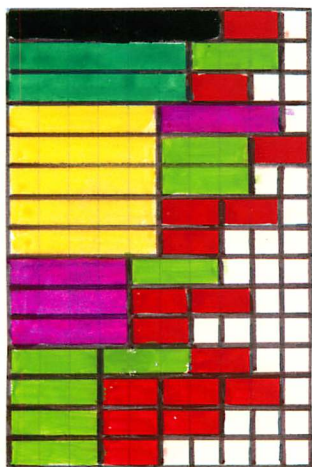
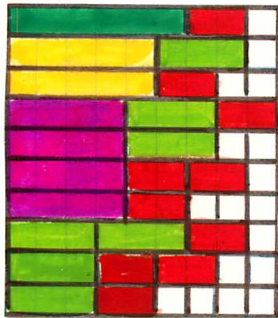
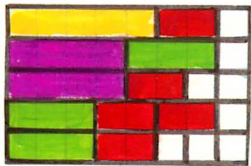




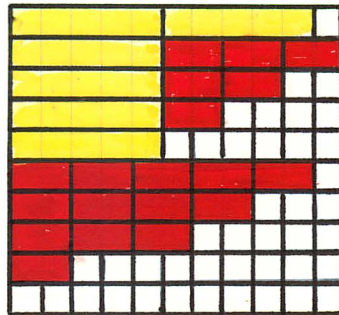
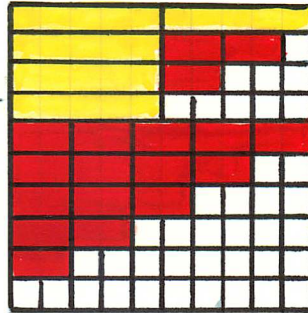
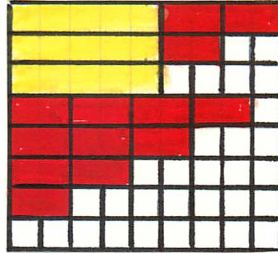
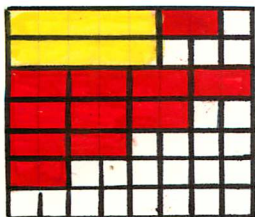
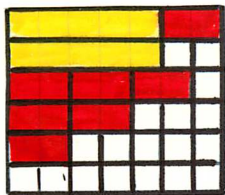
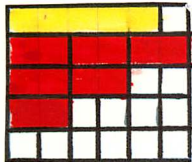
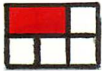
$\binom{2}{p(n)}$

-139-





"p(n)"
(1,2,5/)



(1/)
 "p(n)"
 (1,2,3,5/)



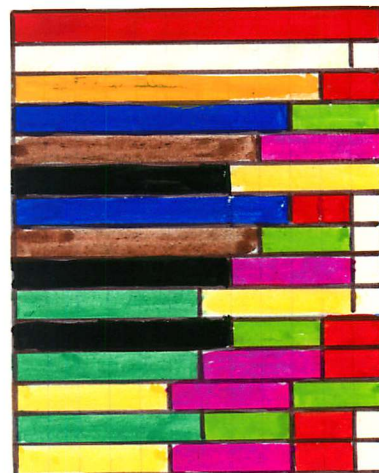
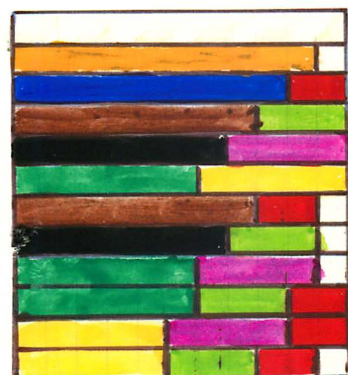
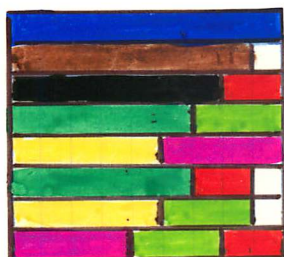
(2/)
 "p(n)"
 (1,2,3,5/)



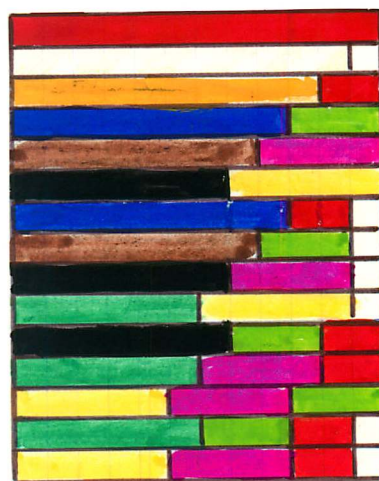
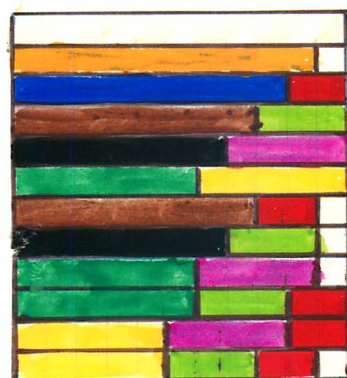
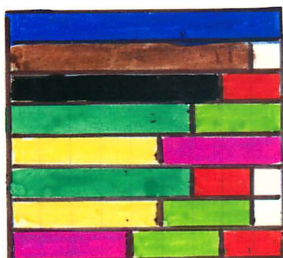
(3/)
 "p(n)"
 (1,2,3,5/)



3. "p̄(n)"



3. "p̄(n)"





§ 3 Diskussion der Ergebnisse

Ich bin mir im Klaren darüber, dass diese Arbeit keine neuen Ergebnisse hervorgebracht hat. Im Gegenteil: Man könnte mir vorwerfen, ich hätte einen weiteren Beitrag zum heutigen Begriffswirrwarr in der Mathematik geleistet. Zugegeben: Ich habe mich zu wenig angestrengt, mich in der Fachliteratur zu diesem Thema umzusehen. Das tat ich aber bewusst. Hätte ich Fachliteratur bearbeiten müssen, wäre sehr viel Zeit für die Lektüre geopfert worden. Zum Forschen wäre es wahrscheinlich gar nicht gekommen, da ich vieles nicht verstanden hätte und keine Freude hätte aufkommen können. Ich forsche um des Forschens willen, gleichgültig, was man schon kennt und was noch nicht. Dabei kann ich mich mit einem Stoff messen, der mir noch unbekannt ist. Ich glaube, in einer Zeit der Spezialisierung auf allen Gebieten der Wissenschaft ist ein solches Vogel-Strauss-Forschen eine der wenigen Möglichkeiten für einen jungen Wissenschaftler.

Nun zur Arbeit selbst:

In Kapitel I, §6 habe ich meine Arbeitsziele aufgeführt. Gehen wir sie schrittweise durch .

- Die Fragestellungen könnten speziell im Hinblick auf Kapitel III noch verfeinert werden. Für Kapitel II sind sie allgemein genug gewesen.
- Die Bezeichnungen haben sich bewährt.
- Dass die Darstellung verständlich ist, ist mir das grösste Anliegen. Ob dieses Ziel erreicht worden ist, kann ich nicht beurteilen.
- Viele Fragen sind beantwortet worden. Dabei müssen diese Antworten als Anfang für neue Forschungen gesehen werden, denn hauptsächlich die rekursiven Algorithmen befriedigen mich nicht ganz.
- Der Zusammenhang der Problemstellung mit Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik, Geometrie und Unterhaltungsmathematik wird sichtbar.
- An neuen Fragestellungen mangelt es nie.

§ 4 Formelsammlung

(* bedeutet: der Satz ist noch nicht bewiesen.)

$$(1) \quad p^*(n) = 2^{(n-1)}$$

$$(2) \quad p^*_{(z_1, z_2, z_3 \dots z_m /)} = \sum_{i=1}^m \binom{n-1}{z_i-1}$$

$$(3) \quad p^*_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)} = \sum_{i=1}^m p^*_{(g_1, g_2, g_3 \dots g_m /)}(n-g_i)$$

$$(4) \quad f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$(5) \quad p^*_{(g /)}(n) = \text{Int}\left(\frac{n}{g}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{g}\right)$$

$$(6) \quad p^*_{(1, g /)}(n) = \sum_{i=0}^{\text{Int}\left(\frac{n}{g}\right)} \binom{n-(g-1)i}{i}$$

$$(7) \quad p^*_{(G=\{g \mid g \equiv a \pmod{b} \} /)}(n) = p^*_{(a, b /)}(n-a)$$

$$(8) \quad p^*_{(/e)}(n) + p^*_{(G=\{g \mid g \neq e \} /)}(n) = p^*(n)$$

$$(9) \quad p^*_{(/e)}(n) = \sum_{i=0}^{n-e} \left[2^{(n-e-i-1)} \left(2^{(i-1)} - p^*_{(/e)}(i) \right) \right], \quad n > e$$

$$(10) \quad p^*_{(/ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m /)}(n) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n-\epsilon_j} \left[p^*_{(G=\{g \mid g \neq \epsilon_1 \wedge g \neq \epsilon_2 \dots g \neq \epsilon_m \} /)}(i) \cdot p^*_{(/ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, (\epsilon_j-1)\epsilon_j, \dots, \epsilon_m /)}(n-\epsilon_j-i) \right]$$

$$(11) \quad p^*_{(/ \epsilon_1, \epsilon_2 /)}(n) = p^*(n) - p^*_{(G=\{g \mid g \neq \epsilon_1 \} /)}(n) - p^*_{(G=\{g \mid g \neq \epsilon_2 \} /)}(n) + p^*_{(G=\{g \mid g \neq \epsilon_1 \wedge g \neq \epsilon_2 \} /)}(n)$$

$$(12) \quad p^*_{(/1 /)}(n) = d(n) = \prod_{i=1}^m (\alpha_i + 1) = \sum_{i=1}^n \left[\text{Int}\left(\frac{n}{i}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{i}\right) \right]$$

$$(13) \quad p^*_{(/y /)}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[p^*_{(/i /)}(n-i) + p^*_{(/y-1 /)}(n-i) + p^*_{(/y-1 /)}(n-i) \right]$$

$$(14) \quad p^*_{(/y_1, y_2, y_3 \dots y_m /)}(n) = \sum_{i=1}^m p^*_{(/y_i /)}(n)$$

$$(15) \quad |f| \downarrow p^*(n) = |f+i| \downarrow p^*(n+i)$$

$$(16) \quad |f| \downarrow p^*(n) = (n-f+3) \cdot 2^{(n-f-2)}, \quad n > f$$

$$(17) \quad |f| \downarrow p^*(n) = z \cdot \binom{z/}{z-2}^{n-f-1}$$

$$(18) \quad |f| \downarrow p^*(n) = \sum_{i=1}^m \left(i \cdot \binom{z_i/}{z_i-2}^{n-f-1} \right)$$

$$(19) \quad |f| \downarrow p^*(n) = \sum_{i=0}^{n-f} \left(p^*(i) \cdot p^*(n-f-i) \right), \quad f \in G$$

$$(20) \quad |f| \downarrow p^*(n) = |f+i| \downarrow p^*(n+i)$$

$$(21) \quad |f| \downarrow p^*(n) = |f| \downarrow p^*(n)$$

$$(22) \quad |f| \downarrow p^*(n) = \sum_{i=0}^{n-f} \left(p^*(i) \cdot p^*(n-f-i) + p^*(i) \cdot p^*(n-f-i) - p^*(i) \cdot p^*(n-f-i) \right), \quad f \neq e$$

$$(23) \quad |f| \downarrow p^*(n) = |f+i| \downarrow p^*(n+i), \quad f \neq e$$

$$(24) \quad |f| \downarrow p^*(n) = \left(\text{Int}\left(\frac{n}{f}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-1}{f}\right) \right) \cdot n/f$$

$$(25) \quad p(n) = p(n-e_1-e_2-e_3-\dots-e_m)$$

$$(26) \quad p(n) = \sum_{i=1}^m p(n-g_i)$$

$$(27) \quad p(n) = p(n-e_1-e_2-e_3-\dots-e_m)$$

$$(27a) \quad p(n) = p(n-e)$$

$$(28) \quad p(n) = \sum_{i=1}^e p(n-e)$$

$$(29) \quad p(n) = p(n-z)$$

$$(30) \quad p(n) = p(n)$$

$$(30a) \quad \begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix} = \begin{matrix} p(n-z) \\ (1,2,3,\dots z/) \end{matrix} \quad \begin{matrix} p(n) \\ (1,2,3,\dots z/) \end{matrix} = \begin{matrix} (z/) \\ p(n+z) \end{matrix}$$

$$(30b) \quad \begin{matrix} (1,2,3,\dots z/) \\ p(n) \end{matrix} = \begin{matrix} p(n) \\ (1,2,3,\dots z/) \end{matrix}$$

$$(31) \quad p(n) = \begin{matrix} ((x-1) \cdot n/) \\ p(x \cdot n) \end{matrix}$$

$$(32) \quad \begin{matrix} (1/) \\ p(n) \end{matrix} = 1, \quad \begin{matrix} (2/) \\ p(n) \end{matrix} = \text{Int}\left(\frac{n}{2}\right), \quad \begin{matrix} (3/) \\ p(n) \end{matrix} = \sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n-1}{3})} \text{Int}\left(\frac{n-1-3i}{2}\right)$$

$$(33) \quad \begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix} = \sum_{i_1=0} \sum_{i_2=0} \sum_{i_3=0} \dots \sum_{i_{z-2}=0} \text{Int}\left\{ \frac{n-z+2-\sum_{j=4}^{z-2} ((z-j+1) \cdot i_j)}{2} \right\}$$

$$(34) \quad \begin{matrix} (z_1, z_2, z_3, \dots z_m/) \\ p(n) \end{matrix} = \sum_{i=1}^m \begin{matrix} (z_i/) \\ p(n) \end{matrix}$$

$$(35) \quad \begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix} \begin{matrix} (z-m/) \\ (/e_1, e_2, e_3, \dots e_m) \end{matrix} = \begin{matrix} p(n-e_1-e_2-e_3-\dots-e_m) \end{matrix}$$

$$(36) \quad \begin{matrix} (z/) \\ p(n) \end{matrix} \begin{matrix} (z-1/) \\ (/e) \end{matrix} = \begin{matrix} p(n-e) \end{matrix}$$

$$(37) \quad \begin{matrix} (/2) \\ p(n) \end{matrix} = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{\text{Int}(\frac{n-1}{i})} \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \text{Int}\left(\frac{n-j \cdot i}{k}\right) - \text{Int}\left(\frac{n-j \cdot i-1}{k}\right) \right\}$$

$$(38) \quad \begin{matrix} (/y) \\ p(n) \end{matrix} = \sum_{i=y}^{n-y \cdot (y-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{\text{Int}(\frac{n-1}{i})} \begin{matrix} (/y-1) \\ p(n-j \cdot i) \end{matrix} \begin{matrix} (1,2,\dots i-1/) \end{matrix} \right]$$

$$* (39) \quad \begin{matrix} (x/y) \\ p(n) \end{matrix} = \begin{matrix} (/y) \\ p(n) \end{matrix} \begin{matrix} (/x) \end{matrix}$$

$$(40) \quad |f| \downarrow p(n) = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{f})} p(n-i \cdot f)$$

$$(41) \quad |f| \downarrow p(n) \begin{matrix} (G/) \end{matrix} = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{f})} \begin{matrix} p(n-i \cdot f) \\ (G/) \end{matrix}, \quad f \in G$$

$$(42) \quad |f| \downarrow p(n) \begin{matrix} (z/) \end{matrix} = \sum_{i=1}^z \begin{matrix} (z-i/) \\ p(n-i \cdot f) \end{matrix}$$

$$(43) \quad |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-f) + p(n-f) \quad \begin{matrix} (z/) \\ (z-1/) \end{matrix}$$

$$(44) \quad |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-f) + p(n-f)$$

$$(45) \quad |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-f) + p(n-f) \quad \begin{matrix} (G/) \\ (G/) \end{matrix}$$

$$(46) \quad |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-f) + p(n-f) \quad \begin{matrix} (/f) \end{matrix}$$

$$(47) \quad |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-e) \quad , \quad f \neq e \quad \begin{matrix} (/e) \end{matrix}$$

$$(48) \quad |f| \downarrow p(n) = |f| \downarrow p(n-e) + \text{Int} \left\{ \frac{1}{1+(e-f)^2} \right\} \cdot p(n-e) \quad \begin{matrix} (/e) \end{matrix}$$

$$(49) \quad |f| \downarrow p(n) = \sum_{i=1}^m |f| \downarrow p(n-e) + \text{Int} \left\{ \frac{1}{1+(f-e)^2} \right\} \cdot p(n-e) \quad \begin{matrix} (z, z, z, \dots, z_m /) \\ (G/e) \end{matrix}$$

$$(50) \quad p(n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\sigma(k) \cdot p(n-k))$$

$$(51) \quad p(n) = \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+24n+1}}{6})} [(-1)^{(k-1)} \cdot p(n-\frac{3k^2-k}{2})] + \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+24n-1}}{6})} [(-1)^{(k-1)} \cdot p(n-\frac{3k^2+k}{2})]$$

$$(52) \quad p(n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\sigma(G, k) \cdot p(n-k)) \quad \begin{matrix} (G/) \end{matrix}$$

$$(53) \quad \bar{p}(n) = p(n) - \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+12n+1}}{6})} [(-1)^{(k-1)} \cdot p(n-3k^2+k)] - \sum_{k=1}^{\text{Int}(\frac{\sqrt{1+12n-1}}{6})} [(-1)^{(k-1)} \cdot p(n-3k^2-k)]$$

$$(54) \quad \frac{(z/)}{\bar{p}(n)} = \frac{(z/)}{p(n-z(z-1)/2)}$$

$$(55) \quad \bar{p}(n) = \sum_{i=1}^{\text{Int}(\frac{n}{e_1})} (-1)^{(i+1)} \cdot \bar{p}(n-i \cdot e_1) \quad \begin{matrix} (/e_1, e_2, e_3, \dots, e_m) \end{matrix}$$

$$(56) \quad \frac{(/Y)}{\bar{p}(n)} = \frac{(/Y/)}{p(n)}$$

$$(57) \quad |f| \downarrow p(n) = \frac{(Z/)}{\bar{p}(n)} \quad \begin{matrix} (Z/) \\ (G/f) \end{matrix}$$

$$(58) \quad \bar{p}(n) = \bar{p}(n-e) \quad \begin{matrix} (/e) \end{matrix} \quad (1, 2, \dots, e-1/)$$

- $$(59) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{z/}{i}}{\binom{G/}{i}} = |G|^z$$
- $$(60) \quad \frac{\binom{z/}{n}}{\binom{G/}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{|G|}{|G|} \frac{\binom{z-1/}{n-g_i}}{\binom{G/}{n-g_i}}$$
- $$(60a) \quad \frac{\binom{z/}{n}}{\binom{G/}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{z-1/}{n-i}}{\binom{G/}{n-i}}$$
- $$(61) \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow \frac{\binom{z/}{i}}{\binom{G/}{i}} = z \cdot |G|^{(z-1)} \quad , \quad f \in G$$
- $$(62) \quad |f| \downarrow \frac{\binom{z/}{n}}{\binom{G/}{n}} = z \cdot \frac{\binom{z-1/}{n-f}}{\binom{G/}{n-f}} \quad , \quad f \in G$$
- $$(63) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{z/}{i}}{\binom{G/e}{i}} = |G|^z - |G-1|^z$$
- $$(64) \quad \frac{\binom{z/z}{n}}{p(n)} = \frac{\binom{z/}{n}}{\bar{p}(n)}$$
- $$(65) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{z/}{i}}{\binom{G/}{i}} = \left\{ \begin{matrix} |G|+z-1 \\ z \end{matrix} \right\}$$
- $$(66) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{z/}{i}}{\binom{G/e}{i}} = \left\{ \begin{matrix} |G|+z-2 \\ z-1 \end{matrix} \right\} \quad , \quad e \in G$$
- $$(67) \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f| \downarrow \frac{\binom{z/}{i}}{\binom{G/}{i}} = \left\{ \begin{matrix} |G|+z-1 \\ z-1 \end{matrix} \right\}$$
- $$(68) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{p}(i)}{\binom{G/}{i}} = 2^{|G|}$$
- $$(69) \quad \frac{\bar{p}(n)}{\binom{G/}{n}} = \frac{\bar{p}(S_G - n)}{\binom{G/}{n}}$$
- $$(70) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{p}(n)}{\binom{G/e}{n}} = 2^{(|G|-1)} \quad , \quad e \in G$$
- $$(71) \quad \frac{\bar{p}(n)}{\binom{G/e}{n}} = \frac{\bar{p}(n-e)}{\binom{G=\{g|g \neq e\}}{n-e}} \quad , \quad e \in G$$

$$(72) \quad |f| \downarrow \bar{p}(n)_{(G/)} = \bar{p}(n)_{(G/f)}$$

$$(73) \quad \bar{p}(n)_{(G/)} = \left[\sum_{i=g_1}^g |G| \left\{ \bar{p}(n-g_i)_{(G'=\{g|g \neq g_i\}/)} \cdot g_i \right\} \right] / n$$

$$(73a) \quad \bar{p}(n) = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \bar{p}(n-i)_{(G=\{g|g \neq i\}/)} \cdot g_i \right\}$$

$$(74) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{\bar{p}(n)_{(G/)}} = \left[\begin{matrix} |G| \\ z \end{matrix} \right]$$

$$(75) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{\bar{p}(n)_{(G/e)}} = \left[\begin{matrix} |G|-1 \\ z-1 \end{matrix} \right] \quad , \quad e \in G$$

$$(76) \quad |f| \downarrow \frac{(z/)}{\bar{p}(n)_{(G/)}} = \frac{(z/)}{\bar{p}(n)_{(G/f)}} \quad , \quad f \in G$$

$$(77) \quad \frac{(z/)}{\bar{p}^*(n)_{(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)}} = z! \cdot \frac{(z/)}{\bar{p}(n)_{(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)}}$$

$$(78) \quad \bar{p}^*(n)_{(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)} = \sum_{i=1}^n \frac{(i/)}{\bar{p}(n)_{(G/e_1, e_2, e_3 \dots e_m)}}$$

$$(79) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z/)}{\bar{p}^*(i)_{(G/)}} = \left[\begin{matrix} |G| \\ z \end{matrix} \right] \cdot z!$$

$$(80) \quad \hat{p}(n) = d(n') \quad , \quad n = 2^y \cdot n' \quad , \quad n' \equiv 1 \pmod{2}$$

$$(81) \quad \frac{\hat{p}(n)}{(G\{g | \log_b g \in N\}/)} < 2$$

$$(82) \quad p(1/n) = \frac{\prod_{i=1}^m (2^{\alpha_i} + 1) + 1}{2}$$

Resultate der Anwendungen :

Es gibt $\binom{n-1}{z-1}$ Lösungen für die Gleichung $\sum_{i=1}^z e_i = n$, wenn $e_1, e_2, e_3, \dots, e_z$ natürliche Zahlen sein sollen.

Es gibt $p^*(20n)$
 $(1, 2, 4, 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1000, 2000, 4000, 10000, 20000/)$
 Möglichkeiten, mit Schweizer Geldeinheiten n Franken zu bezahlen, wenn auf die Reihenfolge Wert gelegt wird.

Die Wahrscheinlichkeit, die Summe n zu erhalten, wenn wir beim Münzenwerfen immer bei Kopf 1 und bei Zahl 2 addieren, beträgt $\sum_{i=1}^n \binom{z}{n-z} / 2^i$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit nacheinander zufällig ausgewählten Elementen aus einer beliebigen Menge F natürlicher Zahlen genau die Summe n zu erhalten, wenn immer dann noch eine neue Zahl ausgewählt wird, wenn n noch nicht erreicht oder noch nicht überschritten worden ist, beträgt

$$\sum_{i=1}^n \frac{p^*(i)}{(|G|)^i}$$

Es gibt $p(20n)$
 $(1, 2, 4, 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1000, 2000, 4000, 10000, 20000/)$
 Möglichkeiten, einen Betrag von n Franken mit den in der Schweiz gebräulichen Geldeinheiten zu wechseln.

Die Anzahl ganzzahliger positiver Lösungen der Gleichung $\sum_{i=1}^m (\epsilon_i \cdot e_i)$ bezeichnen wir mit $h(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_m/n)$.

Diesen Wert berechnen wir so: Wir nehmen zuerst gleiche Koeffizienten ϵ_i zusammen: $h(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_m/n) = h(a_{11}', a_{22}', \dots, a_{ww}'/n)$. Mit folgendem Verfahren reduzieren wir das Problem $h(a_{11}', a_{22}', \dots, a_{ww}'/n)$ sukzessive auf das Problem $h(\epsilon_1', \epsilon_2', \dots, \epsilon_w'/n)$:

$$h(a_{11}', a_{22}', \dots, a_{ww}'/n) = h(a_{11}', a_{22}', \dots, a_{ww}'/n - \epsilon_w') + h(a_{11}', a_{22}', \dots, (a_w - 1)\epsilon_w'/n - \epsilon_w')$$

$h(\epsilon_1', \epsilon_2', \dots, \epsilon_w'/n)$ berechnen wir schliesslich so:

$$h(\epsilon_1', \epsilon_2', \dots, \epsilon_w'/n) = \frac{p(n)}{(\epsilon_1', \epsilon_2', \dots, \epsilon_w' / \epsilon_1', \epsilon_2', \dots, \epsilon_w')}$$

Es gibt $\sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n-1}{3})} \text{Int}(\frac{n-1-3i}{2}) - \sum_{i=0}^{\text{Int}(\frac{n}{2})} \text{Int}(\frac{i}{2})$ verschiedene Dreiecke mit ganzzahligen Seiten und Umfang n .

Es gibt $\sum_{v=\text{Int}(\sqrt{m/2})+1}^{\text{Int}(\sqrt{m}-1/(2m))} \left[\text{Int}(\frac{m}{v}) - \text{Int}(\frac{m-1}{v}) \right]$ verschiedene rechtwinklige Dreiecke mit Umfang $n=2m$ und ganzzahligen Seiten.

Die Wahrscheinlichkeit, beim "Black-Jack" 21 zu erhalten, wenn man vor die Alternative gestellt ist, entweder 21 oder darüber zu haben, beträgt

$$W = \sum_{i=1}^{21} \frac{p^*(21)}{(1,2,3,4,6,7,8,9,10,11/)} / 10^i = \underline{\underline{0,17}}$$

§ 5 Zusammenstellung der Bezeichnungen

($\boxed{1}$ / $\boxed{2}$)

$\boxed{8}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
 $p_{\boxed{7}}(n)$

($\boxed{3}$ / $\boxed{4}$)

Die Funktion $p(n)$, welche angibt, auf wieviele Arten sich eine natürliche Zahl n in natürliche Summanden zerlegen lässt, wenn der Reihenfolge der Summanden keine Beachtung geschenkt wird, wird erweitert:

Bereich 1: Anzahl Elemente pro Zerlegung . Z

Bereich 2: Anzahl verschiedener Elemente pro Zerlegung . Y

Bereich 3: Mögliche Elemente. G

Bereich 4: Obligatorische Elemente. e

Bereich 5: Verschiedenartigkeit der Elemente.

- Alle Elemente sind verschieden.

^ Alle Elemente sind verschieden. Zwischen dem kleinsten und dem grössten Element müssen alle möglichen Elemente vorkommen.

Bereich 6: Anordnung der Elemente.

* Auf die Reihenfolge der Elemente wird geachtet.

Bereich 7: Dimension.

2 Die Elemente sind Quadrate.

3 Die Elemente sind Würfel.

Bereich 8: Andere Fragestellung.

$|f| \downarrow$ Anzahl Elemente f im ganzen Komplex.

$d(n)$ Anzahl Teiler der Zahl n .

$\sigma(n)$ Summe der Teiler von n .

$\sigma(G, k)$ Summe der Teiler von k . Jeder Teiler ist Element von G .

$|G|$ Anzahl Elemente von G .

~~$g(F, i)$ Anzahl Elemente von F , welche grösser sind als i .~~

S_G Summe aller Elemente von G .

$h(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_m / n)$ Anzahl positiver ganzzahliger Lösungen der Gleichung $\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2 + \epsilon_3 e_3 + \dots + \epsilon_m e_m = n$