Liebe Leser, indem ich das letzte mal auch Fragen stellte, deren Antwort ich nicht kannte, hoffte ich, Euern Pioniergeist zu entfesseln, und vielleicht so die Knobelfreunde aus ihrem Dornröschenschlaf zu erwecken. Und siehe da - ich traute meinen Sinnen nicht - die Sensation ist perfekt: es ist tatsächlich die erste schriftliche Lösung eingetroffen, und zwar von Oliver Knill..Der ... hat seine Wirkung also doch nicht verfehlt!

ur Sprunghöhe: die Kraft eines Tieres verhält sich wie die Muskelquerschnitt-läche, also $\sim$(Grösse)^2. Bei gleicher Dichte ist das Gewicht $\sim$(Gr)^3. Vorerst ntsteht der überraschende Eundruck, kleine Tiere sprängen höher, doch man uss weiterdenken:
as Tier (ausgenommen Vögel, Flugsaurier ...) geht in die Knie und stösst sich b; Anlaufweg s$\sim$(Gr). Die Sprunghöhe H schliesslich hängt (quadratisch) von er Absprunggeschw'keit v ab: $s=\frac{1}{2}at^2$ $v=at=a\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{2sa}$, womit H von der Grösse nabh. wäre. Zu diesem Resultat kommt auch Arnold (mit einer Energiebetrachtung) nd nennt als Bsp. eine Wüstenspringmaus und ein Känguruh, die etwa gleich hoch pringen.
ennoch scheint mir das Resultat nicht ganz richtig: es ist nämlich die Be-chleinigung nach oben a=(Muskelkraft-Gewicht)/Masse=(Kraft/Masse)-g (g=Fall-eschleunigung). Somit: $v=\sqrt{2s(a_1-g)}$
it s$\sim$(Gr), $a_1\sim$(Gr)$^{-1}$, was eine kompliziertere Abh. darstellt.(und zeigt, dass ine Minimalkraft nötig ist, um überhaupt abzuheben). Dies gilt (bei angepasstem) für auf allen Planeten.
enschlich Hochspringer winden sich so über die Latte, dass ihr Schwerpunkt ntendurch geht; was sie dabei gewinnen, ebenso wie der Gewinn durch die Schwer-unkthöhe von Anfang an, ist $\sim$(Gr); darum sind Riesen im Vorteil.
rnold schreibt weiter, die Laufgeschw'keit sei von der Gr unabh, da sowohl uftwiderstand (über krit. Reynoldszahl) als auch Kraft $\sim$(Gr)^2 sind. Die Distanz, ie Tiere zwischen Oasen zurücklegen können, wird mit der Aufg. vom letzten al $\sim$(Gr).Tatsächlich rennen ein Pferd und ein Hase etwa gleich schnell.
en Berg hinauf macht sich aber das Gewicht $\sim$(Gr)^3 bemerkbar; kleine Tiere, zB. in Hund, rennen dort locker, während ein Pferd arg ins schwitzen kommt.
as erste Resultat (Laufgeschw'keit in der Ebene unabh von Gr) ist zwar nicht bsurd.- auch menschliche Läufer können bel. gross sein - die Begründung finde ch aber nicht plausibel: das Rennen ist ein komplizierter Vorgang und braucht iel mehr Kraft als nur die Ueberwindung des Luftwiderstands. Hat jemand zB. enau so schnellen Rückenwind wie er rennt, so sinkt seine Anstrengung keines-egs auf null.

Das n-te 15-er-Sandwich hat die Form $\frac{1}{3}(10^{2n}-10^n)+\frac{5}{3}(10^n-1)+1 = (\frac{1}{3}[10^n+2])^2$
Der Ausdruck (..) ist rational, also ganzzahlig, denn: jede Wurzel einer nat. Zahl ist nat. oder irrational.
Bew: Sei $\sqrt{s}=p/q$ (s,p,q $\in$ N, p/q nicht kürzbar). $s=\frac{p^2}{q^2}$.Noch immer ist beim Bruch kein gemeinsamer Primfaktor vorhanden $\rightarrow$ auch nicht kürzbar $\rightarrow$ q=1, p/q $\in$ N. qed.
Wollte man nur so zum Spass doch noch zeigen, dass [..] durch 3 teilbar ist, so betrachte man einfach die Quersumme.
(Der Bew. oben gilt überigens auch für n-te Wurzeln, n $\in$ N).

Nun also zu Olivers Meisterwerk: er hat das Problem mit Summe und Produkt bei erweiterter Fragestellung vollständig analysiert. Wenn ich ihn richtig verstanden habe, so ergibt sich die Eindeutigkeit der Lösung erst durch geschicktes Ineinanderschachteln der Geschichten.

" Summli und Produktli "

Es war einmal ein alter Koenig, der hatte zwei Soehne, die von ganz unterschiedlicher Art waren: Der Aeltere, Summli, war ein etwas langweiliger Kerl, der aber immer geradlinig seine Ziele verfolgte. Der Juengere, Produktli mit Namen, liebte eher das Chaotische, aber beide hatten die Faehigkeit, unglaublich schnell zu rechnen und logisch exakt zu denken von ihrem Vater geerbt. Der Koenig war krank und spuerte, dass es mit ihm zu Ende gehen wuerde. Er rief desshalb seine beiden Soehne einzeln zu sich, um ihnen eine letzte Aufgabe zu stellen, denn er hatte es immer geliebt, Denkaufgaben auszuhecken:

" Es war einmal ein alter Koenig, der hatte zwei Soehne, die von ganz unterschiedlicher Art waren: Der Aeltere, Summli, war ein etwas langweiliger Kerl, der aber immer geradlinig seine Ziele verfolgte. Der Juengere, Produktli mit Namen, liebte eher das Chaotische, aber beide hatten die Faehigkeit, unglaublich schnell zu rechnen und logisch exakt zu denken von ihrem Vater geerbt. Der Koenig war krank und spuerte, dass es mit ihm zu Ende gehen wuerde. Er rief desshalb seine beiden Soehne einzeln zu sich, um ihnen eine letzte Aufgabe zu stellen, denn er hatte es immer geliebt, Denkaufgaben auszuhecken. Nachdem er sich von Summli verabschiedet hatte, rief er Produktli zu sich und sagte zu ihm:

" Mein lieber Produktli, ich habe mir zwei Zahlen, die groesser als Eins sind ausgedacht. Deinem Bruder habe ich die Summe dieser Zahlen angegeben. Und dir sage ich das Produkt der Zahlen. Komm her! "

Da die Stimme des Koenigs schwaecher wurde, musste sich Produktli ueber den Koenig beugen, um ihn zu hoeren. Der Koenig fuhr fort:

" So mein Sohn, jetzt weisst du die Zahl. Du musst jetzt mit deinem Bruder die Zahlen zurueckkonstruieren, die ich mir gedacht habe. Das muesst ihr so tun, indem ihr miteinander sprecht, ōhne Zahlen oder mathematische Ausdruecke zu verwenden. "

Noch ueber dem offenen Sarg des Vaters fand folgendes Gespraech der Brueder statt:

Produktli : "Ich kenne die Zahlen des Vaters nicht!".
Summli : "Ich kenne die Zahlen des Vaters nicht!".
Produktli : "Ich kenne die Zahlen des Vaters nicht!".
Summli : "Ich kenne die Zahlen des Vaters nicht!".
Produktli : "Ich kenne die Zahlen des Vaters jetzt!".
Summli : "Ich kenne die Zahlen des Vaters jetzt!".

Zum Erstaunen und Erschrecken aller anwesenden Trauergaeste oeffnete der tote Vater nochmals seine Augen und sprach:

" Ja ,meine Soehne, ihr kennt jetzt die Zahlen!"

Danach schwieg der Koenig fuer immer."

Noch ueber dem offenen Sarg des Vaters fand folgendes Gespraech der Brueder statt:

Produktli : "Ich kenne die Zahlen des Koenigs in der Geschichte!".
Summli : "Ich kenne die Zahlen des Koenigs in der Geschichte!".

Zum Erstaunen und Erschrecken aller anwesenden Trauergaeste oeffnete der tote Vater nochmals seine Augen und sprach:

" Ja, meine Soehne, ihr kennt jetzt die Zahlen!".

Danach schwieg der Koenig fuer immer.

Im Nachlass des Koenigs befanden sich viele Blaetter vollgekritzelt mit Formeln und Zahlen. Eines davon interessierte die Soehne besonders, denn es trug den Titel "Summli und Produktli":

" Summli und Produktli "

Es war einmal ein alter Koenig, der hatte zwei Soehne, die von...

Satz : Gegeben sind zwei natuerlich Zahlen x,y groesser als 1.
Summli kennt s=x+y,
Produktli kennt p=x*y.
Produktli (P) und Summli (S) werden abwechslungsweise angefangen bei P gefragt ,ob sie x und y kennen.
Antwort 1 bedeutet, dass der Gefragte die Zahlen x und y kennt.
Sonst lautet die Antwort 0.
Es kommen nur folgende Antwortmuster in Frage:

```
1)  (0,1,1,1,1,1,...)     p=12   , s=7
2)  (0,0,1,1,1,1,...)     p=12   , s=8
3)  (0,0,0,1,1,1,...)     p=16   , s=8
4)  (0,0,0,0,1,1,...)     p=16   , s=10
5)  (0,0,0,0,0,0,...)     T(p)>4 , p ungleich 12,16
6)  (1,1,1,1,1,1,...)     T(p)<5 , s ist S-Zahl
7)  (1,0,1,0,1,0,...)     T(p)<5 , s ist keine S-Zahl
```

Dabei bedeutet T(n) die Anzahl Teiler von n. (z.B. T(12)=6) und s ist ein S-Zahl, wenn sie auf genau eine Art als Summe s=a+b geschrieben werden kann, wobei a prim ist und b prim oder b=a*a ist.

Beweis : Es ist klar, dass jedes Zahlenpaar x,y in eine der Klassen 1) bis 7) gehoert. Dazu sei noch bemerkt, dass p und s x und y bestimmen.

Produkli wird zuerst gefragt. Er weiss die Zahlen x,y genau dann ,wenn seine Zahl p hoechstens 4 Teiler hat, denn dann gibt es eine eindeutige Zerlegung in Faktoren groesser als 1.

1. Fall : P sagt 0 am Anfang:

Summli wird gefragt: Er weiss die Zahlen genaudann, wenn

- seine Zahl hoechstens auf eine Art in Smmanden zerlegt werden kann, das heisst s<8.

oder

- Im Falle von mehr Zerlegungen, die Antwort von Produktli entschieden hat, welche Zerlegung richtig ist.

```
s=4 = 2+2          Nur eine Zerlegung.
s=5 = 2+3          Nur eine Zerlegung.
s=6 = 2+4          P haette 1 gesagt da T(8)=4
    = 3+3          P haette 1 gesagt da T(9)=3
s=7 = 3+4          P hat 0 gesagt da T(12)=6
    = 2+5          P haette 1 gesagt da T(10)=4
s>8 = 6+(s-2)      P hat 0 gesagt
    = 4+(s-4)      P hat 0 gesagt
```

d.h Summli weiss die Zahlen genau in den Faellen s=4,5,7
Damit haben wir die Klasse 1) charaktrisiert.

Produktli darf nun zum 2.Mal antworten.

```
p<12      Da hier T(p)<5, hat P schon das erste Mal
          die Antwort gewusst.
p=12 = 3*4         S hat 1 gesagt, da s in (4,5,7)
     = 6*2         S hat 0 gesagt, da s nicht in (4,5,7)
p>12      P kann hier nicht mehr folgern als das erste Mal,
          denn von 13 bis 16 wusste P die Zahlen schon, und
          fuer p>15 ist die Summe zweier Teiler groesser
          als 8 und dort hat S immer 0 gesagt.
```

Damit sind schon die Klassen 1),2) isoliert.

Jetzt ist wieder Summli dran:

$s<8$ Veraendert hat sich nichts, denn ueber den einzigen Wert $s=6$,wo S nichts gewusst hat, hat P nichts ausgesagt.

$s=8 = 6+2$ P hat das 2.Mal 1 gesagt, da $6*2=12$
$= 3+5$ P haette das 1.Mal 1 gesagt
$= 4+4$ P hat zwei mal 0 gesagt.

$s>8 = 4+(s-4)$
$= 6+(s-6)$ Und in beiden Faellen hat P 0 gesagt, denn $4*(s-4)>4*4=16$ und $6*(s-6)>6*2=12$

Damit sind die Klassen 1),2),3) geklaert.

Zum dritten mal jetzt Produktli :

$p<16$ Hier hat P die Antwort schon herausgefunden.

$p=16 = 2*8$ S hat 0 gesagt
$= 4*4$ S hat 1 gesagt

$p>16$ Die Summe zweier Teiler ist groesser als 8 und in solchen Faellen hat S nichts neues herausgefunden.

Damit sind alle Klassen 1)...4) isoliert.

Summli :

$s<10$ S weiss in diesen Faellen schon alles.

$s=10 = 7+3$
$= 5+5$ Und in beiden Faellen weiss P schon alles

$s>10 = 4+(s-4)$
$= 6+(s-6)$ und in beiden Faellen hat P 0 gesagt, denn $4*(s-4)>24$ und $6*(s-6)>16$, wo P nichts herausgefunden hat.

Jede weitere Frage bringt jetzt nichts mehr neues, denn P hat nun nicht mehr Information zur Verfuegung, da S bei dritten Frage immer gleich antwortet, wie bei der 2. Frage.

2.Fall: P sagt am Anfang 1:

Summli weiss jetzt die Zahlen, genaudann wenn

- er seine Zahl s auf nur eine Weise zerlegen kann ($s=4,5$)

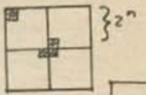
oder

- falls er seine Zahl nur auf eine Weise als Summe zweier Primzahlen oder als Summe einer Primzahl und ihrem Quadrat schreiben kann.

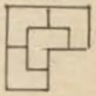
Mit anderen Worten: S weiss die Zahlen genau dann, wenn s eine S-Zahl ist. Die Bestimmung der S-Zahlen ist aber nicht trivial.
Natuerlich sind alle Zahlen der Form $2+p$ (p prim) S-Zahlen. Sie bilden alle ungeraden S-Zahlen. Gerade S-Zahlen scheinen sehr selten zu sein. Unter 1000 sind nur gerade 4 und 8 S-Zahlen.

Selbstverstaendlich sagt P jedes weitere mal wieder 1, und Summli hat keine weiteren Schlussmoeglichkeiten, so dass die Klassen 5),6) als einzige Moeglichkeiten im 2.Fall feststehen, und diese Klassen sind durch die Alternative s ist S-Zahl oder nicht getrennt.

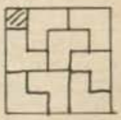
Ich möchte das Problem noch in meiner Version auf etwas bescheidenerem Niveau diskutieren: (Unbekannte: x,y ; Summe: s ; Produkt: p ; $x,y < 20$).
A kennt x,y nicht, dh.p hat ≥ 3 Primfaktoren.
Diese Info ist auch in der 2.Aussage enthalten. Wir wissen: $4 \leq s \leq 38$, und s darf nicht Summe zweier Primzahlen sein (sonst wüsste B nicht, dass A nichts weiss).
Alle geraden Zahlen scheiden aus: zB. 18=7+11 ; 26=3+23 ; 34=5+29 ..., ebenso alle ungeraden, die eine Primzahl +2 sind. $\rightarrow s \in \{11,17,23,27,29,35,37\}$
Dies weiss auch A, und er findet damit x,y. Wäre zB. p=18, so käme nur s=11 in Frage (mit Lös 2;9). Daraus könnte aber B nichts schliessen, denn bei s=11 führte auch zB. p=24 A zur Lösung $\rightarrow$ s=11 scheidet wegen der 4.Bed. aus.
Betrachte s=17: wäre die Lös 2;15 so wüsste A nichts, denn p=30 könnte auch heissen 5;6 mit s=11.Ebenso scheitern alle andern Kombinationen, ausser 4;13. Da nur diese Kombination A zur Lös führt, weiss es nun auch B.
Alle weiteren Möglichkeiten für s scheitern aus dem gleichen Grund wie 11.
Zur Eindeutigkeit: Benni hat mir versichert, er habe sehr weit gesucht, aber keine weitere Lös. gefunden. qed



Kariertes Brett: a)Bew. mit vollständiger Induktion. Verankerung klar.
Zu zeigen bleibt der Induktionsschritt von $s=2^n$ zu $s=2^{n+1}$.
Meine Lös ist in der oberen Skizze dargestellt.
Noch eleganter ist die Lös von Jörg, der einfach den Masstab halbiert:

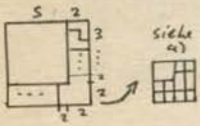


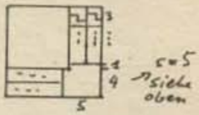
Nebenbei ist damit gezeigt: $(2^{2n}-1) \bmod 3 = 0$ ($\forall n \in N$)
Hierzu wäre der rechnerische Induktionsschritt: $2^{2(n+1)}-1=3\cdot 2^{2n}+(2^{2n}-1)$,
beides durch 3 teilbar. Wer an einer Kanti die Induktion behandeln muss, dem sei dies als Musterbsp. empfohlen.



b)s=3n ($n \in N$) scheidet aus, alle andern s wären wegen $(s^2-1) \bmod 3=0$ möglich.
Beh: Für alle andern s gibt es eine solche Ueberdeckung.
Bew: Zuerst skizziere ich die Lösungen für s=2 und s=5:

Lemma 1: Falls $\exists$ Ueberdeckung für s=3n+2,so auch für $s'=s+2$
Bew:





Lemma 2: Falls $\exists$ Ueberdeckung für s=3n+1, so auch für $s'=s+4$. Bew:
Die 2 Verankerungen oben ergeben nun 2 Induktionsketten, die offensitilich alle nicht durch 3 tilbaren nat. Zahlen erfassen.

2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, ...

Zur letzten Aufgabe zitiere ich nochmals den Star des Monats, Oliver R.Knill:
"Die n-Minos heissen eigentlich Polyominos. Das gestellte Problem ist sehr alt und war 1980 noch ungelöst (Ogilog 'Math. Leckerbissen'; enthält noch 150 weitere ungelöste Probleme). Ich habe mich auch schon daran gewagt, wobei hauptsächlich Computerzeit draufging.
Ueberigens: $\exists$ nach den 35 Hexominos 108 Septominos.Eine allg. Formel für die n-te Polyominoanzahl wäre so viel ich weiss eine Ueberraschung in der Kombinatorikszene."

So weit lag meine Nomenklatur also nicht daneben,obwohl das Do bei Domino nichts mit 2 zu tun hat, wie Urs recherierte; das Wort komme von Dominus, wenn auch der Zusammenhang etwas undurchsichtig ist.
Meine bescheidene Ueberlegung ist folgende: ein Wurm krieche über ein kariertes Brett von Feld zu Feld (nicht 2 mal über das gleiche) und erzeuge so das Polyomino.
Das erste mal hat er 4, nachher stets ≤ 3 Fortsetzungen zur Auswahl, dh. für die Anzahl n-Minos ist $4\cdot 3^{n-2}$ sicher eine obere Schranke.
Korrekturen: Die 1.Richtung ist egal $\rightarrow$ für $n \geq 2$ gilt auch die Schranke 3^{n-2}.
Bei der 2.Verzeigung sind nur 2 Wege zu unterscheiden $\rightarrow$ für $n \geq 3$ genügt auch $\underline{2\cdot 3^{n-2}}$ als obere Schranke.
Höhere Korrekturen werden nun auch immer aufwendiger; zu beachten sind symmetrische Verzweigungen und der Fall, dass weniger als 3 Wege zur Auswahl stehen,
Bsp:

Immerhin: führt man alle Korrekturen ein, so hat man relativ rasch die Polyominos abgezählt.