

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Zalgaller, Extremal problems on the convex hull of a space curve, *Algebra i Analiz*, 1996, Volume 8, Issue 3, 1–13

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 107.220.95.104

January 22, 2025, 05:24:44



ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

© В. А. Залгаллер

Обзор состояния следующих восьми не решенных до конца проблем. Какая форма кривой длины l в \mathbb{R}^3 (отдельно для замкнутых и для разомкнутых кривых) придает максимальное значение одному из следующих показателей выпуклой оболочки кривой: объем, площадь поверхности, ширина, радиус вписанной сферы? Во всех случаях предполагаемый ответ известен, но доказательства существуют только при дополнительных, вероятно лишних, предположениях.

Оглавление

§1. Введение.....	2
§2. Простой пример инженерного подхода	2
§3. Задачи о выпуклой оболочке кривой	4
§4. Группа G_0	4
§5. Задачи о максимальном объеме выпуклой оболочки кривой	5
§6. Обобщения по размерности пространства	5
§7. Задача о максимальной площади поверхности выпуклой оболочки	6
§8. Задача о максимальной ширине выпуклой оболочки	6
§9. Кривые осмотра овалоидов	8
§10. Наиболее короткие кривые, выпуклая оболочка которых содержит единичный шар	8
§11. Другие вопросы о кривых осмотра	10
§12. Максимум интегральной средней кривизны выпуклой оболочки	11
§13. Проблема А. Д. Александрова	12
Список литературы	12

Ключевые слова: пространственная кривая, экстремальные проблемы, выпуклость.
Работа частично поддержана грантом РФФИ 94-01-01044-а.

§1. Введение

Геометрическая интуиция способна подсказывать решение многих экстремальных задач. Так, в том, что тело максимального объема при фиксированной площади поверхности есть шар, люди были уверены задолго до того, как это было доказано. Характерно, что доказательство прошло два этапа. Сначала решение было получено только в классе выпуклых тел (этого, например, требовал метод смешанных объемов Минковского). И только потом (после создания метода симметризации Шварца) решение было получено в классе всех тел с квадратируемой поверхностью (см., например, [2, гл. 2 и 3]).

Вообще многие экстремальные задачи и сейчас решаются не в естественном для их постановки полном классе объектов, а в суженных классах, т.е. при наложении дополнительных ограничений, вводимых для применимости используемых методов. Часто это бывают предположения гладкости, или выпуклости, или наличия определенной симметрии. Это может быть даже сужение, при котором задача решается в выделенном подклассе объектов, зависящих уже лишь от конечного числа параметров. Мы называем такое априорное сужение „инженерным подходом“. Он позволяет использовать для нахождения экстремума в оставшемся классе стандартные средства анализа или прямой компьютерный поиск.

Но во всех случаях сужение класса объектов стремятся осуществить так, чтобы геометрическая интуиция подсказывала, что найденная экстремальная ситуация в действительности будет экстремальной и в общем классе. Последнее, однако, не доказывается, а откладывается до открытия более сильных методов. Так, например, в вариационном исчислении долго ограничивались классом достаточно гладких функций, и лишь много лет спустя новые методы позволили доказать, что в задачах эллиптического типа экстремальные объекты действительно обладают достаточной гладкостью (см. [9, гл. 5]).

В теории выпуклых множеств прямые геометрические методы часто позволяют решать экстремальные задачи сразу в общей постановке. Но и здесь накопились задачи, решенные пока только в сильно суженных классах. Цель настоящего обзора — описать один цикл из восьми таких задач, ждущих обновления методов. Предварительно мы на примере поясним то, что назвали инженерным подходом, поскольку именно на подобных путях для некоторых из упомянутых восьми задач найдены решения, вероятно являющиеся общими.

§2. Простой пример инженерного подхода

Беллман [13] поставил два вопроса. Вы находитесь на плоскости в бесконечной прямой полосе ширины 1.

1) Движение по какой наиболее короткой кривой заведомо выведет Вас на край полосы, где бы Вы ни были и в каком бы направлении ни начали движение?

2) Движение по какой кривой обеспечит минимум математическому ожиданию длины пути, который Вы пройдете до выхода на край полосы?

(Во втором вопросе имеется в виду равномерное распределение Вашего возможного положения на поперечнике полосы и равномерное по углу распределение направления, в котором Вы начинаете свой путь).

Вот типично инженерное решение первого вопроса. От нас требуется найти кратчайшую плоскую кривую ширины 1. Она выпукла. Пусть x — расстояние между ее началом A и ее концом G (рис. 1). Правдоподобно предполагать, что кривая симметрична (относительно срединного перпендикуляра к отрезку AG) и максимально удаляется от прямой AG на расстояние 1 в точке D , лежащей над серединой отрезка AG . Кривая должна обогнуть окружность S_1 радиуса 1 с центром A и окружность S_2 радиуса 1 с центром G . При этом она будет короче всего, если это — кривая $ABCDEF$ (см. рис. 1). Будем только в классе таких кривых (они зависят от одного параметра x) искать наиболее короткую. Здесь поиск минимума — элементарная задача анализа. Минимум достигается, когда $x \approx 1,0436$ есть корень уравнения $3x^6 + 36x^4 - 16x^3 - 64 = 0$. Здесь априорным было предположение симметрии, но ответ получен общий. (Точное доказательство независимо публиковалось дважды [4, 12] разными авторами с интервалом в 30 лет).

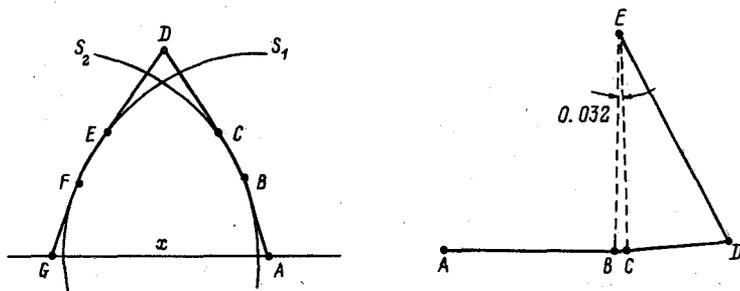


Рис. 1 и 2.

Вопрос 2) решен пока только на инженерном уровне [5]. Выделено три класса кривых, зависящих от пары параметров, и кривая, минимизирующая математическое ожидание, ищется только в этих классах. Ответом служит кривая $ABCDE$ (см. рис. 2). Здесь отрезок $AB \approx 0,814$, точка E лежит над B на высоте

1, BC — дуга окружности с центром E и длиной всего $\approx 0,032$, CD — отрезок, C^1 -гладко продолжающий дугу BC , точка D лежит на расстоянии 1 от прямой AE . При движении по такой кривой математическое ожидание длины пути до выхода на край полосы есть $M \approx 0,9523$. Имеются основания предполагать, что это — вообще экстремальная кривая.

Другой пример „инженерного“ решения приведен в п. 10.

§3. Задачи о выпуклой оболочке кривой

Мы хотим привлечь внимание к неполноте решений следующего набора из восьми весьма наглядных и естественных экстремальных задач о выпуклой оболочке пространственных кривых.

При каких формах кривой фиксированной длины l в \mathbb{R}^3 у ее выпуклой оболочки Φ будет:

- 1) максимальный объем?
- 2) максимальная площадь поверхности?
- 3) максимальная ширина?
- 4) максимальный радиус вписанного шара?

Еще четыре задачи возникают, если ставить те же вопросы при дополнительном требовании замкнутости кривой.

Конечно, каждую из этих восьми задач можно перефразировать. Например, вместо требования максимальной ширины тела Φ при фиксированной длине l кривой можно требовать минимальности l при фиксированной ширине тела Φ . Или вместо максимальной радиуса r вписанной сферы — требовать минимальности l при заданном r .

Поразительно, что для всех восьми задач фактически известен вид экстремальной кривой, но ни для одной решение пока не является полным. Во всех случаях задачи решались при дополнительных (вероятно, лишних) предположениях, т.е. в том или ином сильно суженном классе кривых.

§4. Группа G_0

Рассмотрим в \mathbb{R}^3 каркас из ребер правильного тетраэдра. Удалим из него два противоположных скрещивающихся ребра. Останется пространственная четырехзвенная ломаная L . Группу движений, совмещающих L с собой (группу симметрии ломаной L), обозначим G_0 . Если разбить каждое из ребер ломаной L пополам, то группа G_0 будет действовать транзитивно на множестве из восьми полуребер ломаной L .

В задачах 1), 3), 4) для замкнутой кривой представляется правдоподобным, что экстремальная кривая обязательно обладает группой симметрии G_0 .

§5. Задачи о максимальном объеме выпуклой оболочки кривой

Эта задача впервые была поставлена в известной книге Боннезена и Фенхеля [14] (см. там сноску на с. 111), где отмечалось, что трудность вопроса состоит прежде всего в нахождении объема выпуклой оболочки кривой в \mathbb{R}^3 .

Для незамкнутой дуги длины l задачу остроумно решил Эгервари [16]. Однако он ограничился так называемым классом „выпуклых“ пространственных кривых. И это ограничение (вероятно, лишнее) до сих пор не снято. (Кривую в \mathbb{R}^n называют *выпуклой*, если ни одна гиперплоскость не пересекает ее более чем в n точках, но есть гиперплоскость, пересекающая ее ровно в n точках.¹ Эгервари в случае \mathbb{R}^3 налагал эквивалентное требование, чтобы никакие две хорды кривой не имели общих внутренних точек). Экстремальная кривая Эгервари имеет вид одного витка винтовой линии с некоторым определенным соотношением радиуса цилиндра намотки и шага винта.

Для замкнутой кривой задачу решил Мелзак [19–21]. Он сделал несколько (вероятно, лишних) априорных предположений: что кривая — C^2 -гладкая, лежит на поверхности своей выпуклой оболочки, имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии и проектируется на них в выпуклые кривые. В этих условиях он составил дифференциальное уравнение искомой кривой [19], затем доказал существование у этого уравнения периодического решения [20] и, наконец, нашел это решение методами численного интегрирования [21]. Кривая Мелзака обладает группой симметрии G_0 и по форме напоминает контур кавалерийского седла.

§6. Обобщения по размерности пространства

Задача о кривой длины l , имеющей наибольший объем выпуклой оболочки, рассматривалась и в пространствах большей размерности. При этом оказалось существенным, четна размерность или нечетна, поскольку в пространствах нечетной размерности не бывает замкнутых выпуклых кривых (не лежащих в гиперплоскости).

Для замкнутых выпуклых кривых в \mathbb{R}^{2n} задача была решена Шёнбергом в глубокой работе [22], а для незамкнутых кривых в \mathbb{R}^{2n+1} — Крейном и Нудельманом (см. [8, гл. 3, §8]). Позже Нудельман [10] решил ту же задачу для незамкнутой выпуклой кривой в \mathbb{R}^{2n} . В [10] эта экстремальная задача предварительно отдельно решена в классе замкнутых соответственно определенных выпуклых ломаных с числом звеньев $\leq N$ в \mathbb{R}^{2n} и таких же незамкнутых ломаных в \mathbb{R}^{2n+1} и \mathbb{R}^{2n} .

¹Это определение ввел Шёнберг [22], но сам класс появлялся еще в работе Комба [15].

§7. Задача о максимальной площади поверхности выпуклой оболочки

Напомним, что в случае, когда выпуклый компакт $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ вырождается по размерности и оказывается плоской выпуклой фигурой с внутренними (по отношению к плоскости) точками, то поверхностью $\partial\Phi$ этого компакта считаются две стороны этой плоской фигуры, так что площадь поверхности $\partial\Phi$ этого компакта равна удвоенной площади самой плоской фигуры.

Решение задачи о максимуме площади поверхности $\partial\Phi$ выпуклой оболочки Φ замкнутой кривой длины l в \mathbb{R}^3 почти очевидно: кривой надо придать форму плоской окружности.

Правильность этого утверждения легко подтвердить в классе кривых, лежащих на границе $\partial\Phi$ своей выпуклой оболочки Φ . Предположим для простоты, что кривая, кроме того, не имеет кратных точек. (Их допущение лишь незначительно усложнит рассуждение). Тогда $\partial\Phi$ делится кривой на две области. Каждая из этих областей должна иметь нулевую интегральную кривизну и потому изометрична плоской области (см. [1, с. 179]). Но на плоскости, согласно классической изопериметрии круга, площадь каждой из областей лишь увеличится, если заменить ее кругом с тем же периметром l . Затем, склеив два круга по их границе (см. [1, гл. 9, §3]), мы получим внутреннюю геометрию, реализующуюся дважды покрытым кругом в \mathbb{R}^3 . И это — единственная выпуклая поверхность с такой внутренней геометрией (см. [11, гл. 3]).

Но как быть, если мы хотим доказать наше „почти очевидное“ утверждение, допуская к рассмотрению и кривые, частично проходящие внутри своей выпуклой оболочки? Возможно, на этот вопрос есть несложный ответ, однако автору он неизвестен.

Для незамкнутых кривых решением по-видимому служит полуокружность длины l в \mathbb{R}^3 . Но и в этой задаче доказательство пока проходит только в предположении, что кривая лежит на границе своей выпуклой оболочки.

§8. Задача о максимальной ширине выпуклой оболочки

Мы перефразируем ее как задачу поиска наиболее короткой кривой в \mathbb{R}^3 , у которой выпуклая оболочка Φ имеет ширину 1. Под *шириной* компакта $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ понимают наименьшее расстояние между парой параллельных опорных к Φ плоскостей.

Для незамкнутых кривых в работе [7] после ряда нестрогих наводящих соображений выделен зависящий от конечного числа параметров класс кривых, в котором численными методами найдена кратчайшая кривая ширины 1. Вероятно, это и есть общее решение. Найденная кривая (см. рис. 3) отдаленно напоминает виток винтовой линии, но состоит из восьми отрезков $AM = D\widetilde{M}$,

§9. Кривые осмотра овалоидов

Овалоидом мы называем C^1 -гладкую строго выпуклую замкнутую поверхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Она служит границей выпуклого тела $\Phi = \text{conv } \Gamma$: $\Gamma = \partial\Phi$. Строгая выпуклость означает, что на Γ не лежит ни один отрезок. Каждая опорная к Φ плоскость — касательная для Γ , причем она касается Γ в одной точке.

Про точку $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Phi$ говорим, что из нее *видно пятно* $d(x)$ на овалоиде Γ , если для каждой точки $y \in d(x)$ отрезок xy не содержит точек овалоида Γ , отличных от y : $xy \cap \Gamma = \{y\}$. Если $x \in \Gamma$, полагаем $d(x) = \{x\}$. Если $x \in \text{int } \Phi$, полагаем $d(x) = \emptyset$.

Назовем $L: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ *кривой осмотра* овалоида Γ , если $\bigcup_{t \in [0, 1]} d(L(t)) = \Gamma$.

Будем говорить, что две фигуры *пересекаются*, если у них есть хоть одна общая точка. Иногда, для краткости, пишем L вместо $L([0, 1])$.

Лемма. *Следующие четыре свойства кривой L равносильны.*

- (1) *Кривая L пересекает все плоскости, пересекающие тело Φ .*
- (2) *L пересекает все плоскости, касательные к Γ .*
- (3) *L является для Γ кривой осмотра.*
- (4) *Выпуклая оболочка $Q = \text{conv } L$ содержит Φ .*

Доказательство. Очевидно, (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3). Убедимся, что (3) \Rightarrow (4). Достаточно, предположив (3), доказать, что $\Gamma \subset Q$. Допустим, что $x \in \Gamma \setminus Q$. Тогда точка x строго отделяется от Q , а потому и от L , некоторой плоскостью P . У овалоида Γ найдется касательная плоскость $P_1 \parallel P$, которую кривая L не пересекает. Точка y касания плоскости P_1 с Γ не будет видна ни из одной точки кривой $L(t)$, что противоречит (3).

Наконец, покажем, что (4) \Rightarrow (1). Пусть (4) имеет место. Допустим, что нашлась плоскость P , пересекающая Φ , но такая, что L ее не пересекает. Тогда кривая L лежит по одну сторону от плоскости P и на L найдется ближайшая к P точка, удаленная от P на расстояние $2\epsilon > 0$. Тогда найдется параллельная плоскости P плоскость, идущая от P на расстоянии ϵ и строго отделяющая L от P . Кривая L , а вместе с ней и $\text{conv}(L)$, лежит строго по одну сторону от этой плоскости. Это противоречит тому предположению, что P пересекается с $\Phi \subset \text{conv}(L)$. •

§10. Наиболее короткие кривые, выпуклая оболочка которых содержит единичный шар

Для незамкнутой кривой удобно, пользуясь вышедшей леммой, искать наиболее короткую кривую L , при движении по которой круглое пятно види-

мости $d(L(t))$ в процессе своего движения зачертит всю поверхность сферы. В работе [6] выделен следующий класс таких кривых.

Пусть задано начало P_1 и конец P_5 кривой L осмотра единичной сферы с центром O (см. рис. 5). Предполагается, что $OP_1 = OP_5 = r > 1$. На рис. 5 изображены круглые пятна d_1 и d_5 видимости из точек P_1 и P_5 , а также более короткая дуга T_1T_2 большой окружности (на сфере), касающейся пятен d_1 и d_5 и разделяющей их. Зная r и угол $\phi = \angle P_1OP_5$, можно легко найти наиболее короткую кривую L , при движении по которой круглое пятно видимости из точки $L(t)$ движется следующим образом. Сначала оно скользит по T_1T_2 (изменяя свой размер), а затем — скользит по границе пятна d_5 и переходит в некоторое положение d_2 , при котором оно касается пятен d_1 и d_5 . (Если с самого начала пятна d_1 и d_5 касались друг друга, то дуга T_1T_2 вырождается в точку и этап скольжения вдоль нее исчезает). Затем из положения d_2 пятно видимости огибает сферу, все время касаясь пятен d_1 и d_5 , и приходит в положение d_4 , симметричное положению d_2 относительно плоскости P_1P_5O . По дороге оно проходит положение d_3 , при котором имеет наибольший (на участке от d_2 до d_4) размер. Наконец, из положения d_4 оно переходит в положение d_5 симметрично тому, как оно шло к d_2 от d_1 .

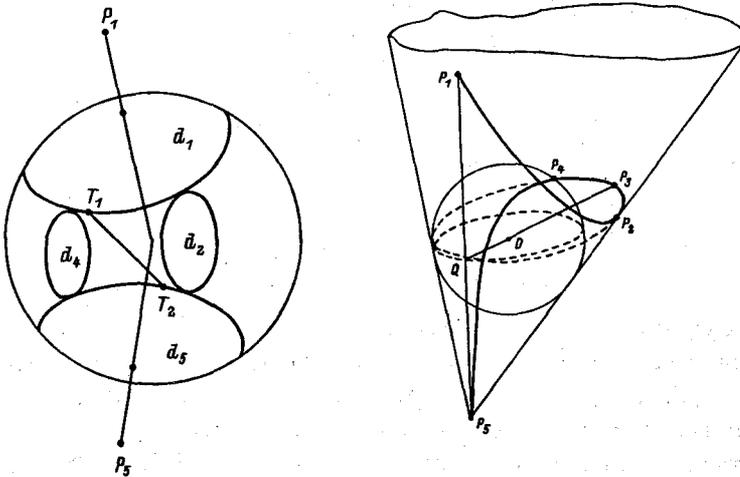


Рис. 5 и 6.

В этом классе кривых, зависящем от двух параметров r и ϕ , в работе [6]

численными методами найдена наиболее короткая кривая. Она попала в тот класс кривых, в котором пятна d_1 и d_2 касаются, так что $r \cos(\phi/2) = 1$. В экстремальной ситуации (см. рис. 6) длина отрезка $P_1P_5 \approx 4,376$. Кривая симметрична относительно прямой QOP_3 . Если рассмотреть конусы с вершинами P_1 и P_5 , касательные к сфере, то видно, что кривая на участке $P_2P_3P_4$ идет по эллиптическому пересечению этих конусов. Участок P_1P_2 — это геодезическая на конусе с вершиной P_5 , а участок P_4P_5 — геодезическая на конусе с вершиной P_1 . В точках P_2 и P_4 кривая — C^1 -гладкая, а вторые производные претерпевают разрыв.

Вероятно, эта кривая, предложенная Залгаллером, является общим решением задачи. Длина этой кривой $\approx 9,577$.

Для замкнутой кривой удобнее исходить не из условия осмотра сферы, а непосредственно из требования охватить единичную сферу выпуклой оболочкой кривой. Вид такой кратчайшей замкнутой кривой подсказывает интуиция. Это, по-видимому, кривая, состоящая из четырех полуокружностей единичного радиуса, которые поставлены на сторонах квадрата с ребром 2 ортогонально его плоскости поочередно с одной и с другой стороны от нее (см. рис. 7). Эта кривая имеет группу симметрии G_0 и длину 4π . Но и в этом случае доказательство экстремальности отсутствует.

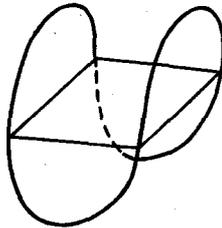


Рис. 7.

§11. Другие вопросы о кривых осмотра

Нахождение кратчайших кривых осмотра нетривиально даже в двумерном случае, для овалов. В работе [17] три автора дали строгое доказательство того наглядно очевидного факта, что наиболее короткая кривая осмотра окружности имеет вид прямой подковы, плотно охватывающей эту окружность. Беллман [13] поставил еще один вопрос, на который ответил Исбелл [18]. Там требовалось найти на плоскости наиболее короткую кривую осмотра окружности при дополнительном условии, чтобы кривая начиналась в центре окружности.

В [6] с использованием инженерного подхода найден вид наиболее короткой кривой осмотра сферы при требовании, чтобы кривая начиналась в центре

сферы. Эта кривая имеет довольно сложное строение: она состоит из семи качественно разных участков.

Готовится к сдаче в печать работа Егорова и Залгаллера „Кривые осмотра овалов“, в которой доказывается, что кратчайшая кривая осмотра на плоскости для C^1 -гладких строго выпуклых овалов не всегда имеет вид прямой обжимающей подковы, а для окружности решаются задачи о кратчайшей кривой осмотра с произвольно фиксированной начальной точкой, а также в классе кривых с „посещением“ наперед заданной точки, лежащей внутри окружности.

§12. Максимум интегральной средней кривизны выпуклой оболочки

Упомянем родственный перечисленным вопрос, на который можно дать исчерпывающий ответ. Какую форму должна иметь кривая L длины l в \mathbb{R}^3 , чтобы ее выпуклая оболочка $Q = \text{conv } L$ имела максимальную интегральную среднюю кривизну M ? Другое название для M — *вторая интегральная поперечная мера*. Она определяется как смешанный объем $V(Q, \sigma, \sigma)$, где σ — единичный шар. (Напомним, что $V(Q, Q, Q)$ — объем, а $V(Q, Q, \sigma)$ — площадь поверхности компакта Q).

Тот факт, что в направлении каждого единичного вектора $u \in S^2$ ширины $\Delta_Q(u)$ и $\Delta_L(u)$ у Q и L одинаковы, а

$$M = \frac{1}{2} \int_{S^2} \Delta_Q(u) du \tag{1}$$

(именно это оправдывает название интегральной поперечной меры), позволяет легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема. Для замкнутой кривой L длины l в \mathbb{R}^3 значение величины M достигает максимума, равно πl , в том и только том случае, когда L — любая плоская замкнутая кривая длины l . Для разомкнутой кривой L максимум, равный $2\pi l$, достигается в том и только том случае, когда L — прямолинейный отрезок.

Доказательство. Рассмотрим разомкнутую кривую $L = x(s)$ с натуральным параметром s , $0 \leq s \leq l$. Пусть в направлении u она отрывается от опорной плоскости с внешней нормалью $-u$ при значении параметра $s_1(u)$ и достигает опорной плоскости с внешней нормалью u при значении параметра $s_2(u)$. Тогда

$$\Delta_L(u) = \int_{s_1}^{s_2} \langle u, dx \rangle \leq \int_{s_1}^{s_2} |\langle u, dx \rangle| \leq \int_0^l |\langle u, dx \rangle| =: \text{Var}(u), \tag{2}$$

где $\text{Var } u$ — вариация кривой L в направлении u , см. [3]. Поэтому

$$M = \frac{1}{2} \int_{S^2} \Delta_L(u) du \leq \frac{1}{2} \int_{S^2} \text{Var}(u) du = 2\pi l, \quad (3)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $|s_2(u) - s_1(u)| \equiv l$ и $\langle u, dx \rangle$ при каждом u не меняет знака вдоль всей кривой. А это возможно только, когда L — отрезок.

Для замкнутой кривой все аналогично, только путь от одной опорной плоскости до другой кривая L проходит дважды. Применение оценки (2) к каждой из этих двух ветвей кривой L и последующее их сложение дает $2\Delta_L(u) \leq \text{Var}(u)$. Отсюда $M \leq \pi l$, причем равенство имеет место только в том случае, если при любом u на каждой из двух ветвей порознь скалярное произведение $\langle u, dx \rangle$ ни разу не меняет знак на противоположный. Но это так только для любых плоских, притом выпуклых, кривых. •

§13. Проблема А. Д. Александрова

В заключение напомним еще один нерешенный вопрос:

Требуется найти поверхность наибольшей площади в классе замкнутых выпуклых поверхностей в \mathbb{R}^3 , имеющих *внутренний диаметр* d , т.е. таких, что на них любые две точки можно соединить кривой длины $\leq d$, идущей по поверхности.

Вопрос был поставлен А. Д. Александровым на геометрическом семинаре почти полвека назад. Ответ наглядно очевиден: это — дважды покрытый круг диаметра d . Но пока никем не найдено никакого подхода к доказательству. Проблема эта упоминалась С. Т. Яо [23] под номером 61 в списке 120 нерешенных вопросов дифференциальной геометрии.

Список литературы

- [1] Александров А. Д., *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, ГИТЛ, М.-Л., 1948, 387 с.
- [2] Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А., *Геометрические неравенства*, Наука, Л., 1980, 288 с.
- [3] Залгаллер В. А., *Вариации кривых вдоль фиксированных направлений*, Изв. АН СССР. Сер. мат. 15 (1951), № 5, 463–476.
- [4] Залгаллер В. А., *Как выйти из леса? (Об одной задаче Беллмана)*, Мат. просвещение 6 (1961), 191–195.
- [5] Залгаллер В. А., *Обсуждение одного вопроса Беллмана*, СПб, 1992. (Рукопись деп. в ВИНТИ 12.03.92, № 849-В)
- [6] Залгаллер В. А., *Кратчайшие линии осмотра сферы*, СПб, 1992. (Рукопись деп. в ВИНТИ 24.09.92, № 2844-В92)
- [7] Залгаллер В. А., *Вопрос о наиболее короткой пространственной кривой единичной ширины*, Мат. физ., анализ, геом. 1 (1994), № 3/4, 454–461.

- [8] Крейн М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и Маркова и их дальнейшее развитие*, Наука, М., 1973, 551 с.
- [9] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [10] Нудельман А. А., *Изопериметрические задачи для выпуклых оболочек ломаных и кривых в многомерных пространствах*, Мат. сб. **96** (1975), № 2, 294–313.
- [11] Погорелов А. В., *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*, Наука, М., 1969, 759 с.
- [12] Adhikari A., Pitman J., *The shortest planar arc of width 1*, Amer. Math. Monthly **96** (1989), no. 4, 309–327.
- [13] Bellman R., *Minimization problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), no. 3, 270.
- [14] Bonnesen T., Fenchel W., *Theorie der konvexen Körper*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **3.1**, Springer, Berlin, 1934; Chelsea, New York, 1948.
- [15] Combes B., *Sur les plus petit corps convexe contenant un arc de courbe dans l'espace à n dimensions*, C. R. Acad. Sci. Paris. **215** (1942), 291–293.
- [16] Egerváry E., *On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve*, Publ. Math. Debrecen **1** (1949), 65–70.
- [17] Faber V., Mycielski J., Pedersen P., *On the shortest curve which meets all the lines which meet a circle*, Ann. Polon. Math. **44** (1984), no. 3, 249–266.
- [18] Isbell J. R., *An optimal search pattern*, Naval Res. Logist. Quart. **4** (1957), no. 4, 357–359.
- [19] Melzak Z., *The isoperimetric problem of the convex hull of a closed space curve*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), no. 2, 265–274.
- [20] Melzak Z., *Existence of periodic solutions*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 771–774.
- [21] Melzak Z., *Numerical evaluation of an isoperimetric constant*, Math. Comp. **22** (1968), no. 101, 188–190.
- [22] Schoenberg I. J., *An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensional Euclidean spaces*, Acta Math. **91** (1954), no. 3/4, 143–164.
- [23] Yau S. T., *Problem section*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982, pp. 669–706.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, Фонтанка, 27

Поступило 9 октября 1995 г.